arXiv:2602.14657v1 [math.AG] 16 Feb 2026

通过直接像计算 A-结式

FRIEDEMANN GROH 和 MATTHIAS ZACH

摘要。我们改进了一种由 Weyman 提出的、用于计算适当单项式支撑集的 A-结式的已知理论方法，使其具备计算可行性和有效性。为此，我们引入了一种新算法，用于计算托里克簇上凝聚层复形的直接像。该过程在任何阶段都不依赖 Gröbner基计算。

目录

1. 结果 1
致谢 2
1.1. Green Book 中的方法 1.2. 扩大适用范围 1.3. 2
Weyman 函子 1.4. 相关工作的概述 2. Weyman 复形的算 4
法构造 2.1. 托里克簇与切赫上同调 2.2. 复形的高斯消元 5
2.3. 全复形的简化 2.4. Weyman 函子的详细构造 2.5. 作用 6
于复形态射的 Weyman 函子 3. 示例 3.1. Sturmfels 的例 7
子 3.2. 有理曲线的参数像 3.3. 三个变量中具有高重数的结 7
式 3.4. 支撑集的一个随机族 参考文献 8
10
13
15
18
18
19
20
21
21
4. 附录 23

1. 结果

对于有限集合 $A \subset \mathbb{Z}^m$，我们用 $\mathbb{C}^A$ 表示支撑集包含于 A 的劳朗多项式 $f = \sum_{\nu \in A} a_\nu z^\nu$ 的集合。设 n 个这样的集合为 $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{Z}^m$，并考虑如下系统

$$F = \begin{cases} f_1 &= \sum_{\nu \in A_1} a_{1,\nu} \cdot z_0^{\nu_0} \cdot z_1^{\nu_1} \cdots z_m^{\nu_m} = 0 \\ &\vdots \\ f_n &= \sum_{\nu \in A_n} a_{n,\nu} \cdot z_0^{\nu_0} \cdot z_1^{\nu_1} \cdots z_m^{\nu_m} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

我们记

$$\nabla_{A_1,\dots,A_n} = \overline{\{(f_1,\dots,f_n) \in \mathbb{C}^{A_1} \times \cdots \times \mathbb{C}^{A_n} : f_1(z) = \cdots = f_n(z) = 0 \text{ for some } z \in (\mathbb{C}^*)^m\}} \tag{2}$$

为具有非空解集的参数集合 $(a_{j,\ \nu})_{j,\ \nu}$的扎里斯基闭包。在 $n = m+1$的情况下，并在附加假设

- 每个 A_j 都生成 $\mathbb{R}^m$ 且
- 所有 A_j 共同生成 $\mathbb{Z}^m$

众所周知，判别式是一个不可约的约超曲面；参见 [GKZ94，第 8.1 章，命题 1。1]。其定义多项式

$$\Delta_{A_1,\dots,A_{m+1}} \in \mathbb{Z}[a_{i,\nu} : i = 1,\dots,m+1,\ \nu \in A_i]$$

是在整数环上定义的，且除符号外唯一。它称为 A-结式，对应支撑集A_1，……，A_{m+1}。我们将在第1.2节讨论该框架后续的推广。

本文的成果是通过引入[Wey94]，并加以实际实现，将 Weyman 提出的、用于计算 A-结式的理论方法转化为算法*Weyman* 函子。

计算 A-结式（或更一般地，计算消元式，参见下文第1.2节）的直接方法，是在多项式环的单项式上采用消去序

$$\mathbb{Q}[x_1,\dots,x_m,a_{i,\nu} : i = 1,\dots,m+1,\ \nu \in A_i]$$

，并计算一个 Gröbner 基，以从由系统（ x_1，……， x_m）生成的理想中消去变量1。然而在实践中，即使对于规模尚合理的例子，这种方法也会因 Buchberger算法的复杂性而失效；该算法关于变量数呈双指数级增长。第3.1 节和3.2节讨论的例子便展示了这一方法在实践中的表现。

为更详细地说明我们的切入角度：Gelfand、Kapranov 和 Zelevinsky 讨论了一种计算 A-结式的方法，即将其表示为适当稳定扭曲下整体截面复形的行列式GKZ94 [GKZ94，第 2 章。2]，，即将其表示为谱序列的行列式 [GKZ94，第 2 章。5]，，或者由*Weyman* 复形[GKZ94]，[Wey94]出发，借鉴 Weyman 的思想，我们发展了一种通用方法，通过 *Weyman* 函子计算托里克簇上凝聚层复形的直接像。这带来了一种具体算法，并配有高效的实现，可通过下文的公式（8）计算 A-结式。与消元法相比，该方法能够处理高出许多层次的计算；而且我们的算法在任何阶段都不依赖格罗布纳基计算。

作为一个自然的副产品，我们得到了簇 $\nabla_{A_1,\dots,A_{m+1}}$ 的描述：它是一个复形的退化轨迹，该复形由自由模构成，且通常至少在局部可约化为某个单个方阵行列式的消失。与将结式计算为稳定扭转的整体截面复形的行列式的方法相比（参见 [GKZ94，第 3 章，定理 4。2]），这种方法的优点是所得复形往往更小。此外，在许多实际应用中，无法通过稳定扭曲得到单个矩阵；而结合我们的工具，其他扭曲则能导出更理想的复形；参见第3.1节中 Sturmfels 的例子。

致谢

我们谨感谢 Martin Bies 和 Mik elis E. Mikelsons，就环面线丛的上同调进行了诸多讨论，并为我们提供了 $e_{\min}$ 的初步实现（见公式（18））。此外，我们还要感谢 Michael Joswig 让作者相识，并感谢 Gregory Smith 和 David Eisenbud 指出相关参考文献并提供反馈。本研究的部分工作是在第二作者访问墨西哥国立自治大学数学研究所库埃纳瓦卡分部期间完成的。本研究由德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）资助，项目编号 286237555，TRR 195。最后，我们谨向位于斯图加特的 ISG Industrielle Steuerungstechnik GmbH 致谢。作者未使用任何人工智能产品或服务来撰写本文或协助撰写本文，也未使用此类产品或服务来制作或协助制作相关实现。

1.1. **Green Book 中的方法。** 计算 A-结式的方法在[GKZ94] 中有所讨论，其核心是构造环面簇上相干层的某个 Koszul复形。

对于给定的支撑集族 $A_j \subset \mathbb{Z}^m$, $j = 1$、……、 n，令 $P_j \subset \mathbb{R}^m$ 为 A_j 的凸包， Q为 P_1、……、 P_n的闵可夫斯基和。每个 P_j 都是 Q 的一个面，并在与 Q相关联的环面簇 X 上产生一个除子 D_j。这一构造伴随着一个单射映射

$$\operatorname{res}_j \colon \mathbb{C}^{A_j} \hookrightarrow V_j := H^0(X, \mathcal{O}(D_j))$$

我们令 $V = V_1 \times \cdots \times V_n$，并用 $\mathcal{L}_i = \mathcal{O}(D_i)$ 表示各个线丛。

关于 V 的线性系统的公共解的关联簇 为

$$W = \overline{\{(x, f_1, \dots, f_n) \in (\mathbb{C}^*)^m \times \mathbb{P}(V) : f_1(x) = \cdots = f_n(x) = 0\}} \subset X \times \mathbb{P}(V)$$

其中 $(\mathbb{C}^*)^m \subset X$ 是复环面到 X中的自然嵌入。由于对于每个点 $x \in (\mathbb{C}^*)^m$，由在 x 处求值所给出的 f_i 的系数条件$\{a_{i,\ \nu}\}$ 都是线性的，且彼此独立，因此关联簇具有复环面上的相对维数为 $\dim V - n - 1$的射影丛结构。特别地， W是不可约的，且其在 $X \times \mathbb{P}(V)$ 中的余维为 $n+1$。

由于 X是完备的，从 W到 $\mathbb{P}(V_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(V_n)$ 的投影是闭映射，因此其像及其上的仿射锥

$$\nabla_{\mathcal{L}_1,\ldots,\mathcal{L}_n} = \{(f_1,\ldots,f_n) \in V_1 \times \cdots \times V_n : \{f_1 = \cdots = f_n = 0\} \neq \emptyset\} \tag{3}$$

都是代数集。由定义（2）以及复环面在任意环面簇中稠密这一事实可知，（3）与 A-判别式一致。

命题 1.1。([GKZ94，命题 3.1，第 3 章.3]) 当 $n = m+1$ 和所有线丛 $\mathcal{L}_i$ 都非常丰时，簇 $\nabla_{\mathcal{L}_1,\ldots,\mathcal{L}_{m+1}}$ 是一个多齐次不可约超曲面。
定义方程 $\Delta_{\mathcal{L}_1,\ldots,\mathcal{L}_{m+1}}$ 称为 $(\mathcal{L}_1,\ldots,\mathcal{L}_{m+1})$-结式。要求 $\mathcal{L}_i$非常丰的假设，在命题 1.1 的证明中用于验证从 W到其像的投影是双有理的，即在一般情形下是 1-对-1。

为推导一个结　式的公式，考虑乘积 $X \times \mathbb{P}(V$ 上的如下 Koszul复形)

$$\mathcal{K}(\mathcal{L}_1,\ldots,\mathcal{L}_n):\ 0 \longrightarrow \bigwedge^n E^\vee \otimes \mathcal{O}(-n) \xrightarrow{s} \bigwedge^{n-1} E^\vee \otimes \mathcal{O}(-n+1) \xrightarrow{s} \cdots \tag{4}$$

$$\cdots \xrightarrow{s} \bigwedge^2 E^\vee \otimes \mathcal{O}(-2) \xrightarrow{s} \bigwedge^1 E^\vee \otimes \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{s} \mathcal{O} \longrightarrow 0$$

其中 $E = \mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_n$，该复形中第 i 个外幂位于上同调次数 $-i$。收缩态射 s 定义如下。考虑自然映射

$$V \otimes V^\vee \to H^0(X,E) \otimes H^0(\mathbb{P}(V),\mathcal{O}(1)) \to H^0(X \times \mathbb{P}(V), E \otimes \mathcal{O}(1)).$$

那么恒等元在 $\mathrm{End}(V) \cong V \otimes V^\vee$ 中的像给出了节 s，它属于 $E \otimes \mathcal{O}(1)$，即 $E^\vee \otimes \mathcal{O}(-1)$的对偶。在命题 1.1所作假设下，该复形是结构层 $\mathcal{O}_W$的自由分解，视为一个 $\mathcal{O}_{X\times\mathbb{P}(V)}$-模（参见 [GKZ94，第 1 章，命题 1.4；第 2 章，推论 2.8]）。

在 [GKZ94 第 3 章定理 4.2]) 中讨论了，对于 $n = m+1$ 以及稳定扭曲版本$\mathcal{K}(\mathcal{L}_1,\ldots,\mathcal{L}_n) \otimes \mathcal{M}$，结式

$$\Delta_{\mathcal{L}_1,\ldots,\mathcal{L}_n} = \det\left(H^0(X \times \mathbb{P}(V), \mathcal{K}(\mathcal{L}_1,\ldots,\mathcal{L}_n) \otimes \mathcal{M})\right) \tag{5}$$

等于整体截面复形的行列式。若想避免通过$\mathcal{M}$ 进行稳定扭曲（这通常会导致所涉及的向量空间维数显著增加），[GKZ94第 2.5 章和第 3.4 章 C] 建议转而考虑谱序列的行列式

$$E_1^{p,q} = R^q\pi_*\left(\bigwedge^{-p} E^\vee \otimes \mathcal{O}(-p) \otimes \mathcal{M}\right) \Longrightarrow R^{p+q}\pi_*\left(\mathcal{K}(\mathcal{L}_1,\ldots\mathcal{L}_n) \otimes \mathcal{M}\right) \tag{6}$$

其中 π: $X \times \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ 是到第二个因子的投影。
由于谱序列出了名的难以计算，作者随后在 [GKZ94第 2.5 章 E 和第 3.4 章 E] 建议使用*Weyman* 复形及其项

$$W^i = \bigoplus_{p+q=i} R^q\pi_*\left(\mathcal{K}^p(\mathcal{L}_1,\ldots,\mathcal{L}_n) \otimes \mathcal{M}\right). \tag{7}$$

Weyman 复形的微分，如 [GKZ94] 和 [Wey94]，中所述，依赖于从一类态射的同伦类中非构造性地选取某个映射 α （参见 [GKZ94，第 2.5 章，引理 5.7]）。在一些特定情形下，Weyman 复形的映射已被明确给出，例如 $X = \mathbb{P}^n$ D'Andrea 和 Dickenstein 在 [DD01，第 5] 节中所做的工作；更多此类示例见第 1.4 节。我们在此提出的方法可自然地以算法方式构造这个 α，从而使我们的 Weyman 复形成为 $R\pi_*$ (K(L1, .. . , Ln) ⊗ M) 在 $\mathbb{P}(V)$ 上的一个相当典范的代表，直到拟同构；参见 [GKZ94，第 2.5 章，引理 5.6]。

对于满足引言中两个假设的 $n = m+1$ 和单项式支撑集 $A_0, \dots, A_m$，判别式便可计算为该复形的行列式，

$$\Delta_{A_0,\dots,A_m} = \Delta_{\mathcal{L}_0,\dots,\mathcal{L}_m} = \det R\pi_* \left(\mathcal{K}(\mathcal{L}_0, \dots, \mathcal{L}_m) \otimes \mathcal{M}\right) \tag{8}$$

[GKZ94，第 2 章，定理 5。5], 但不再要求结果仅在相差一个未知非零常数的意义下确定。

1.2. 扩大适用范围。引言中对支撑集所作的假设被证明过于严格，过去几年间这些假设已得到放宽。我们总结其中一些结果，以扩大我们的方法的适用范围。我们沿用上一节的记号。

我们将只关注 $\nabla_{A_0,\dots,A_n}$ 是一个超曲面的情形，因此 $\dim W = \dim \nabla_{A_0,\dots,A_n}$。为了将这种情形与余维更高的情形区分开来，我们可以使用 Sturmfels 的以下组合结果。

定理 1.2。([Stu93，定理 1.1]) 设 $A_0, \dots, A_n \subset \mathbb{Z}^n$ 为有限支撑集。那么 $\mathbb{P}\nabla_{A_0,\dots,A_n} \subset \prod_{j=0}^n \mathbb{P}(\mathbb{C}^{A_j})$ 的余维等于

$$\max_{J \subset \{0,\dots,n\}} \left\{ |J| - \operatorname{rank} \left\{ \sum_{j \in J} \lambda_j \cdot v_j : v_j \in A_j,\, \lambda_j \in \mathbb{Z},\, \sum_{j \in J} \lambda_j = 1 \right\} \right\}.$$

此后我们假设 $\nabla_{A_0,\dots,A_n}$ 的余维为一。

关于此情形下 A-结式的定义，我们遵循 [DS15]。由于 $\nabla = \nabla_{A_0,\dots,A_n} \subset V$ 是一个不可约超曲面，因此存在一个约化定义方程 $h \in \mathbb{Q}[a_{i,\nu} \colon\ i = 0, \dots, n,\, \nu \in A_i]$，它在乘以一个单位的意义下唯一。这个多项式将被称为该系统的消元式。对于 A-结式，我们随后考虑由下式给出的代数循环

$$\pi_*([W]) = [K(W) : K(\nabla)] \cdot [\nabla] \tag{9}$$

它位于 V 的 Chow 群中；另见例如 [Ful98]。根据定义，该循环沿 ∇ 的重数 $m = [K(W) \colon K(\nabla)]$ 是相应函数域的超越次数； m 的一个直接基于支撑集的组合公式见 [DS15，命题 3.13]。于是， A-结式被定义为定义该循环的任意多项式 $\Delta_{A_0,\dots,A_n} \in \mathbb{Q}[a_{i,\nu} \colon\ i = 0, \dots, n,\, \nu \in A_i]$，例如 $\Delta_{A_0,\dots,A_n} = h^m$。

现在我们将简要讨论以下事实，因为我们不知道文献中有对此进行简洁阐述的资料。

命题 1.3。 在复数域上，方程（8）适用于具有 $n+1$ 单项式支撑集 A_0，……， A_n 的 n 个变量，且 $\nabla_{A_0,\dots,A_n}$ 的余维为一的情形。

证明。 无论我们是否满足特定假设，都可以根据支撑集 A_j 关联一个环面簇 X 和一组无基点Cartier除子 D_j ；参见 [CLS11，命题 6.1.1 (b)]。同样，Koszul复形（4）给出了关联簇结构层 $\mathcal{O}_W$ 的自由分解。我们有以下交换图

$$\begin{array}{ccc} W & \xhookrightarrow{\iota} & X \times V \\ \downarrow{\scriptstyle \overline{\pi}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \nabla & \xhookrightarrow{\kappa} & V \end{array}$$

其中 $\overline{\pi}$ 表示 π 在关联簇 W 及其像上的限制。

由于 $\overline{\pi}$ 是适当且一般有限的，因此存在一个 Zariski 开子集 $U \subset \nabla$，在其上 π 是有限的。令 $D \subset X$ 为复环面 $(\mathbb{C}^*)^n \subset X$ 的补集。随后，我们缩小 U，使其不包含落在 $(D \times V) \cap W$ 的像中或落在 W 的奇异轨迹像中的点。同样，这个集合非空且是 Zariski 开子集。考虑带有约化结构的 ∇，其正则点集合也非空且为 Zariski 开子集，因此我们可以用 U 与 ∇ 的光滑轨迹的交集替换它。令 $q \in U$ 为 π 在 $W \cap (\mathbb{C}^*)^n \times V$ 的光滑轨迹上的限制的正则值。于是，在 q 附近，映射 π 是光滑复流形之间的有限覆盖态射。

—

我们有多种方式来描述复解析范畴中，直接像 $\mathcal{O}_W$ 在 q 处的茎:

$$\begin{aligned}\bigoplus_{i=1}^{m'}\mathcal{O}_{V,q}/\langle h\rangle &\cong \kappa_*\left(\bigoplus_{i=1}^{m'}\mathcal{O}_{\nabla,q}\right)\cong\kappa_*\left(\bigoplus_{p\in\overline{\pi}^{-1}(\{q\})}\mathcal{O}_{W,p}\right)\cong\left(R\kappa_*\left(R\overline{\pi}_*\mathcal{O}_W\right)\right)_q\\ &\cong \left(R(\kappa\circ\overline{\pi})_*\mathcal{O}_W\right)_q\cong\left(R(\pi\circ\iota)_*\mathcal{O}_W\right)_q\\ &\cong \left(R\pi_*\left(\iota_*\mathcal{O}_W\right)\right)_q\cong\left(R\pi_*\mathcal{K}(\mathcal{L}_0,\dots,\mathcal{L}_n)\right)_q.\end{aligned}$$

在所有这些等式中，$\cong$ 表示相干层的茎复形之间的拟同构。在此，我们利用了 ι、κ和 π 是有限的，因此对于这些映射有 $R\kappa_*=\kappa_*^{-}$。此外，我们还需要 [Dim04，命题 2.3。3] 对于 $R(f\circ g)_*=Rf_*\circ Rg_*$，并且我们将 $\iota_*\mathcal{O}_W$ 表示为 $\mathcal{K}(\mathcal{L}_0,\dots,\mathcal{L}_n)$，将 $\kappa_*\mathcal{O}_\nabla$ 表示为$\mathcal{O}_V/\langle h\rangle$，对于定义方程 h 的 ∇，直至拟同构。

由此我们可以推导出若干事实。首先，$(\pi_*\mathcal{O}_W)_q$ 是一个自由的有限 $\mathcal{O}_{\nabla,q}$-模，其秩 m'等于 q的原像中的点数 p。这在代数范畴中同样成立，因此先在 q 处局部化，随后在 ∇的一般点处局部化，我们看到 $m'=[K(W):K(\nabla)]$ 等于超越次数，从而也等于 ∇处 A-结式的重数。

其次，我们可以在环$\mathcal{O}_{V,q}$上计算右端的行列式。根据 [GKZ94，附录 A，定理 30]，行列式在 ∇ 处的重数等于

$$\operatorname{ord}_h\left(\det(R\pi_*\mathcal{K}(\mathcal{L}_0,\dots,\mathcal{L}_n)_q)\right)=\sum_i(-1)^i\operatorname{mult}_{\langle h\rangle}\left(R^i\pi_*\mathcal{K}(\mathcal{L}_0,\dots,\mathcal{L}_n)_q\right)$$

其中 $\operatorname{mult}_P M$ 定义为模 M 在素理想 P 处的局部化 M_P 的长度，而 $\operatorname{ord}_h f$ 定义为 h 在 f 的素因子分解中的指数。转而考察上述拟同构链的左端，我们看到 $\operatorname{mult}_h\left(\bigoplus_{i=1}^{m'}\mathcal{O}_{V,q}/\langle h\rangle\right)=m'$，因此

$$\operatorname{ord}_h\left(\det\left(R^i\pi_*\mathcal{K}(\mathcal{L}_0,\dots,\mathcal{L}_n)_q\right)\right)=m'. \tag{10}$$

为了在多项式环中对 V 建立同样的结论，我们只需观察到 $(R\pi_*\mathcal{K}(\mathcal{L}_0,\dots,\mathcal{L}_n))_{q'}$ 对点 $q'\in V$（位于 W 之外）拟同构于零。于是行列式 δ，即多项式直接像 $R\pi_*\mathcal{K}(\mathcal{L}_0,\dots,\mathcal{L}_n)$ 的行列式，不能在这些点中的任何一点处为零，而零点定理表明，既约方程 h（关于 ∇）包含在 $\langle\delta\rangle$ 的根基中。现在集合 $U\subset\nabla$ 是稠密的，因而最小指数 k（使得 $h^k\in\langle\delta\rangle$）必须与 m' 一致。

我们将这些论证推广到扭曲项 $\mathcal{M}$ 非零的一般情形的工作留给读者。□

1.3. **Weyman 函子。** 设 X 是一个不含环面因子的正规环面簇，且 $\operatorname{Spec}R$ 是一个定义在 $\mathbf{k}$上的有限型仿射代数概形。我们假设后者是一个域或整数环 $\mathbb{Z}$。记 X的 Cox 环为 S，并设 $S_R:=S\otimes_{\mathbf{k}}R$是其在 $\operatorname{Spec}R$ 上的相对版本。考虑一个有限生成 S_R-模的右有界（余）复形[1]

$$\cdots\longrightarrow M^{p_0-2}\longrightarrow M^{p_0-1}\longrightarrow M^{p_0}\longrightarrow 0. \tag{11}$$

这样的复形以自然方式层化为一个定义在 $X\times\operatorname{Spec}R$ 上的相干层复形。令$\sim\pi\colon X\times\operatorname{Spec}R\to\operatorname{Spec}R$为到第二个因子的投影。那么 $R\pi_*M^\bullet$是一个定义在 $\operatorname{Spec}R$ 上的相干层右有界复形，也就是说，它是一个有限生成 R-模的复形。

Weyman 函子 是一个函子

$$\mathbb{W}\colon C^b(\text{free } S_R-\text{mod})\to C^b(\text{free } R-\text{mod})$$

从右有界的自由分次 S_R-模复形范畴到右有界的自由 R-模复形范畴，使得我们有如下函子的交换图

$$\begin{array}{ccc}C^b(\text{free } S_R-\text{mod}) & \xrightarrow{\mathbb{W}} & C^b(\text{free } R-\text{mod})\\ \downarrow\wr & & \downarrow\\ D^b(\operatorname{Coh}(X\times\operatorname{Spec}R)) & \xrightarrow{R\pi_*} & D^b(R-\text{mod})).\end{array} \tag{12}$$

[1]本文仅讨论余复形，但为简洁起见，仍称其为复形。

请注意，要求模是自由的实际上并不构成限制，因为在同伦意义下，我们可以用任意有限生成 S_R-模的右有界复形的分次自由分解来替代该复形。给定一个由自由分次 S_R-模组成、项为 $M^p = \bigoplus_{j=1}^{r_p} S_R[-\alpha_{p,j}]$ 的复形 $M^\bullet$，Weyman 函子因此为相关的相干$\widetilde{\ }$层复形 $M^\bullet$ 在 上沿 π 的直接像提供了一个自然代表，且在拟同构意义下成立。

Weyman 复形 $\mathbb{W}(M^\bullet)$ 的各项为

$$\mathbb{W}^i(M^\bullet) = \bigoplus_{p+q=i} R^q\pi_*\widetilde{M}^p = \bigoplus_{p+q=i}\bigoplus_{j=1}^{r_p} R^q\pi_*\mathcal{O}(-\alpha_{p,j}), \tag{13}$$

即谱序列第一页上的对角线

$$E_1^{p,q} = R^q\pi_*\widetilde{M}^p \Longrightarrow R^{p+q}\pi_*\widetilde{M}^\bullet.$$

注意，右侧的各个直和项必定是自由 R-模，因为根据 $X \times_{\mathbf{k}} \operatorname{Spec} R$ 的乘积结构，我们有

$$R^q\pi_*\mathcal{O}(-\alpha) \cong H^q(X, \mathcal{O}(-\alpha)) \otimes_{\mathbf{k}} R$$

对于域 $\mathbf{k}$ 上的有限维向量空间 $H^q(X, \mathcal{O}(-\alpha))$。

Weyman 复形的态射 $\phi^i\colon \mathbb{W}^i(M^\bullet) \to \mathbb{W}^{i+1}(M^\bullet)$ 的构造更为复杂。将各项分解为直和后，ϕ^i 具有分块结构，其中

$$\phi^r_{p,q}\colon R^q\pi_*\widetilde{M}^p \to R^{q-r+1}\pi_*\widetilde{M}^{p+r}, \quad p+q=i$$

以及$\phi^r_{p,\ q} = 0$ 对于 $r < 1$ 以及 $r >$ 维数 X。对于 $r = 1$ 这些映射与谱序列第一页上的映射一致。对于 $r > 1$ 映射$\phi^r_{p,\ q}$ 其定义域和陪域所在位置与谱序列计算中对应的映射相同，但性质不同。无论如何，ϕ^i 的表示矩阵将具有分块下三角形式。这些映射的构造细节将在第2.4.1节中讨论。

我们已在计算机代数系统 `OSCAR` [Dec+25]中实现了 Weyman 函子，直到其对复形态射的作用；这项工作建立在第二作者先前的研究 [Zac25] 之上。该实现很快就会在该系统的开发分支上提供。本文中的所有测试均在 64 位架构上完成，使用第 12 代 Intel(R) Core(TM) i5-1245U 处理器和 32 GB 内存。我们使用的是当前的 `OSCAR` 开发分支，提交版本为 `e48c5c5df6af70fea315afe6a2fe24a69961c95a`，并在 Ubuntu 桌面系统上使用 Julia 1.11.1。

1.4. **概要及相关工作**。 我们认为，构造 Weyman 函子以计算直接像和层上同调，本身就值得关注；它甚至可能成为 Brown 和 Erman 近期工作的有力竞争方案 [BE24]。

至于 A-结式，我们对 Weyman 函子的应用延续了 [GKZ94], 的研究路径，同时也属于一项可追溯至 Canny 和 Emiris 的研究范畴 [CE93], [CE95], [CE00], Sturmfels [Stu93],以及 Busé、Checa 和 Emiris 的近期研究成果 [CE24], [BC24]。这些作者采用一种“实践性”的构造方法，不涉及复形的行列式，并且允许使用更一般的支撑集 A_i，包括不满足 [GKZ94]要求的支撑集。不过，他们的工作在一定程度上可以纳入本文所采用的几何框架来理解。例如，Emiris 和 Canny 引入的、通过有理数分量向量平移牛顿多面体的方法，可以理解为用秩为一的自反丛扭曲由多面体确定的线丛。从我们的几何视角来看，他们考察的是上同调次数为 -1的整体截面复形的微分；由于 Canny-Emiris平移，高阶层上同调均消失。相应地，结式可由该微分的极大子式的最大公因子恢复；参见 [GKZ94，附录 A，定理34]。

我们以算法实现的这一方法具有这样的优点：可以直接将结式计算为单个复形，甚至单个矩阵的行列式。此外，有些情况下，行列式的计算是瓶颈（例如参见第 3.2 节），而直接像本身的计算并非如此。在这种情况下，显然最好无需先计算多个子式和最大公因子，便能得到结式。

Cattani、Dickenstein 和 Sturmfels [CDS98] 研究的是牛顿多面体经缩放后彼此重合的多项式组。他们假设系数充分一般但固定，从而使该多项式组在由牛顿多面体的法扇所确定的环面簇的 Cox 环中构成正则序列。对所得 Koszul 复形进行扭曲，使得在谱序列（6）第一页左上角的最后一项中，只有一个高阶层上同调，且其秩为一。在这一特殊情形下，作者可以构造 Weyman 复形；将这一上同调映射到右下角项整体截面的微分块，由 托里克 *Jacobian* [Cox94] 给出。Weyman 复形的行列式给出结式，其中也可能出现结式的更高重数。我们的研究将这一结果加以推广，提出了一种算法，用于确定具有混合支撑集的多项式组的 Weyman 复形，以及具有各种高阶层上同调的任意扭曲复形。

D'Andrea 和 Dickenstein [DD01] 考虑齐次多项式系统。他们对射影空间上的相关 Koszul复形施加任意次数的扭曲，因此，从我们的几何观点来看，这也纳入了高阶层上同调群，以及 Weyman 复形微分中的非平凡高阶块。不过，这些块由 Bézout 矩阵的齐次分量构造而成，而该矩阵的定义与经典 Bézout 公式中两个多项式的结式定义相同。这样一来，无需直接涉及高阶层上同调，就能描述 Weyman 复形。

人们可以尝试推广这些构造。例如，采用特定的"临界次数"进行扭曲时， [CDS98] 中的结果适用，因此 D'Andrea 和 Dickenstein 能够在齐次多项式的情形下，联系托里克 Jacobian 与 Bézout 矩阵。Cox 和 Dickenstein [CD05] 考虑具有混合支撑的多项式系统，并针对特定扭曲应用各种消灭定理，从而得到谱序列（6）中特别简单的第一页，其中只包含一个非平凡的高阶上同调群。若要直接推广托里克 Jacobian，该高阶上同调群的秩必须为一，但情况并非总是如此。因此，我们认为，在构造 Weyman 复形时使用 Bézout 矩阵，无法以显而易见的方式推广。

2. Weyman 复形的算法构造

中描述的方法 [GKZ94] 用于计算 A-结式，依赖于托里克簇上的模相干层。当托里克簇不含环面因子时，可以用 Cox 环上的有限生成分次模来对这些层建模，参见 [CLS11，命题 5.3.9 和 6.A。4]。我们将首先回顾此框架下计算层上同调的常用方法，然后介绍 Weyman 函子的构造及其实现。

2.1. 托里克簇与切赫上同调。

设 X 为一个托里克簇，其 Cox 环为 S。对于有限生成的 S模 M，记作

$$0 \longrightarrow \check{C}^0(M) \longrightarrow \check{C}^1(M) \longrightarrow \check{C}^2(M) \longrightarrow \dots$$

表示与 M及其扭曲相关联的切赫复形，以及 $f_1, \dots\dots, f_r \in S$（它们是 X的无关理想的 [CLS11第 9 节中给出的标准单项式生成元；参见 5]。此复形中的每一项都是一个分次 S模

$$\check{C}^p(M) = \bigoplus_{0<i_0<\dots<i_p\le r} M \otimes_S S[f_{i_0}^{-1}, \dots, f_{i_p}^{-1}],$$

但由于局部化，不能假定这些模是有限生成的。然而，该复形可以写成有限 S 模的复形的直接极限，如

$$\check{C}^\bullet(M) = \lim_{e\in\mathbb{N}^r} \check{C}^\bullet_{\le e}(M), \qquad \check{C}^p_{\le e}(M) = \bigoplus_{0<i_0<\dots<i_p\le r} M \otimes_S \frac{1}{f_{i_0}^{e_{i_1}} \cdots f_{i_p}^{e_{i_p}}}.$$

几何 切赫复形（关于 X 上与 M 相关联的层 $\widetilde{M}$）则由次数-0-pa给出 rt

$$\check{C}^\bullet(\widetilde{M}) = \check{C}^\bullet(M)_0 = \lim_{e\in\mathbb{N}^r} \check{C}^\bullet_{\le e}(M)_0,$$

参见 [CLS11，定理 9.5。2] 以及 [CLS11，定理 9.5。7]。实际上，与其通过 Čech 复形计算层上同调，不如按照Ext-模的分次条带进行计算，正如 [CLS11，定理 9.5.4— 5]所述。对于后者，我们可以通过自然包含所诱导的直接极限得到类似的结构， $I^{[e]} \subset I^{[d]}$ 用于 $e \ge d$，其指标集相同 $\mathbb{N}^r$；例如参见 [Har67]。特别是，存在一个

态射 Kosz($f_1^{e_1}$, ……, $f_r^{e_r}$) $\to P^\bullet_{[e]}$ 会导出一组态射 Hom($P^\bullet_{[e]}$, $M^\bullet$) $\to \check{C}^\bullet_{\leq e}(M^\bullet)$，对于 $P^\bullet_{[e]}$ 的任意自由分解以及 Frobenius幂 $I^{[e]}$ 均成立，并由此诱导出一个拟同构

$$\lim_{e\in\mathbb{N}^r} \operatorname{Hom}(P^\bullet_{[e]}, M)_0 \cong_{\text{qis}} \check{C}^\bullet(M)_0$$

与 Čech 复形。参见 [CLS11，引理 9.5。8] 关于这些极限的截断的存在性，这些截断能够捕捉上同调。此后我们常常使用 Čech 复形，主要是为了记号方便且便于几何处理。不过，读者应记住，在大多数论证中，我们通常可以用$C^q_{\leq e}(M^p)_0$替换为 $\operatorname{Hom}(P^q_{[e]}, M^p)_0$，而在大多数具体计算中，我们采用后者。

对于乘积 $X\times_{\mathbf{k}}\operatorname{Spec} R$上述论述几乎可以原样推广到环 上的分次 自由模，以及投影 $S_R = S\otimes_{\mathbf{k}} R$，并可通过基变换得到 π: $X\times_{\mathbf{k}}\operatorname{Spec} R\to\operatorname{Spec} R$；参见 [Dim04，定理 2.3。36]一般情形可通过选取 Cartan-Eilenberg分解，归约为自由模复形。

下面的定理总结了我们所需的关于直接像的结果。

定理 2.1. 设 X 是定义在域 $\mathbf{k}$ 上且不含环面因子的环面簇，其 Cox 环为 S。设 R 是交换诺特环，并考虑直积

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{X} = X\times_{\mathbf{k}}\operatorname{Spec} R & \\ {\scriptstyle\lambda}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle\pi} \\ X & & \operatorname{Spec} R \end{array}$$

˜令 $S_R := S\otimes_{\mathbf{k}} R$，并令 $I = I\cdot S_R$ 表示 X 的无关理想 $I = \langle f_1,\dots,f_r\rangle \subset S$。那么对于任意右有界复形

$$M^\bullet:\ \cdots\longrightarrow M^{p_0-2}\longrightarrow M^{p_0-1}\longrightarrow M^{p_0}\longrightarrow 0$$

由自由分次 S_R-模构成的复形，以及任意同调次数 q，都存在 $e\in\mathbb{N}^r$，使得复形

$$\left(\operatorname{Tot}\left(\operatorname{Hom}(P^\bullet_{[e]}, M^\bullet)\right)\right)_0 \tag{14}$$

与从 q 次数起的 $M^\bullet$ 所关联的 $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$-模层复形的直接像 $R\pi_*\left(\tilde{M}^\bullet\right)$ 准同构，其中 $P^\bullet_{[e]}$ 是理想 $\tilde{I}^{[e]} = \langle f_1^{e_1},\dots, f_r^{e_r}\rangle$ 的分次自由分解。

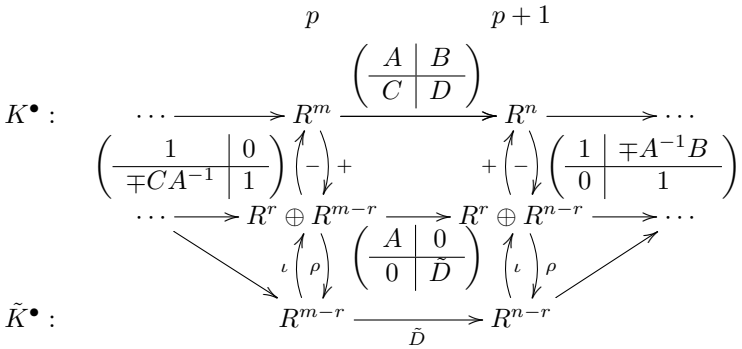
所谓“从次数 q 起拟同构”，是指存在一个复形态射屋，其在上同调中的诱导映射在所有上同调次数 $\geq q$ 上都是同构。注意，若复形 $M^\bullet$ 有界，则我们不必指定同调次数 q，而可选取一个整体的 $e\in\mathbb{N}^r$。

证明。 我们可以假设 $M^i = \bigoplus_{k=0}^{r_i} S_R[-\alpha_{i,k}]$ 对某些次数 $\alpha_{i,k}\in\operatorname{Cl}(X)$。对 e 在单个自由模 $S[-\alpha_{i,k}]$ 情形下的显式选取见 [EMS00]；另见 [CLS11，定理 9.5。10]。注意，取直接像与平坦基变换可交换，因此这些结果可立即推广到 $S_R[-\alpha_{i,k}]$。在此基础上，我们可以选取 e 为所有那些涉及自由S_R-模、且与直接像直至次数 q的上同调相关的界的逐分量上确界。□

虽然复形 (14) 很容易写出，但其规模通常过大，在实际计算中几乎毫无用处。毕竟，每个次数为 0 的链都有一个单项式基，其长度会随着 M^i 中 S_R 个变量和次数 $-\alpha_i$ 的增加而迅速膨胀$_{.k}$。特别是，按照定理 2.1 的建议选择全局 e 时，$i\ll p_0$ 的高次数 $\alpha_{i,k}$ 会使来自 M^{p_0} 的项的单项式基规模迅速增大。

2.2. **复形的高斯消元**。 考虑交换环R 上的自由 R-模复形 $K^\bullet$，并假设某个同调次数 p 下的边界映射 φ 的矩阵包含一个秩为 $r\leq m$的可逆子矩阵 $A\in R^{r\times r}$，n。那么，我们可以对行和列进行高斯消元

从而在定义域和陪域中进行基变换，使 φ 相对于这些基呈分块对角形式。由此得到下图第二行中的复形。



如果我们只关心复形在同伦（或拟同构）意义下的结果，就可以拆出同调平凡子复形 $R^r \xrightarrow{A} R^r$，从而得到复形 $\tilde{K}^\bullet$，它由底行中矩阵 $\tilde{D} = D - CA^{-1}B$ 所表示的偏差给出。分别将到 $\tilde{K}^\bullet$ 的投影和包含映射记为

$$K^\bullet \underset{\iota}{\overset{\rho}{\rightleftarrows}} \tilde{K}^\bullet,$$

那么，分块对角矩阵

$$\left(\begin{array}{c|c} A^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) : R^n \to R^m$$

给出了一个同伦 $h\colon\ K^\bullet \to K^\bullet[-1]$，使得

$$h \circ \varphi + \varphi \circ h = \mathrm{id} - \iota \circ \rho.$$

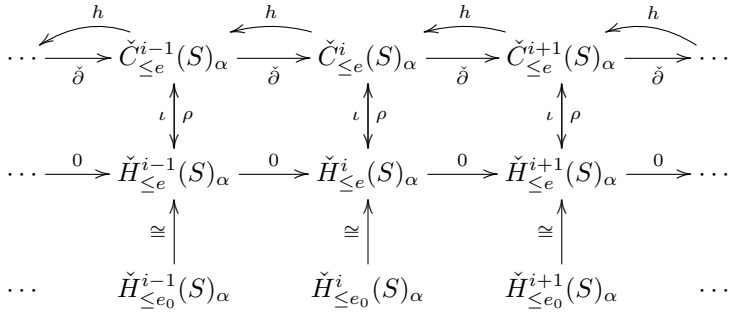
这里，我们在上述约化未涉及的所有同调次数上，将 h 扩展为零映射。解释了复形中单个微分的约化后，我们可以用复形~$K^\bullet$ 替代 $K^\bullet$，并重复这一过程，直到所有微分的表示矩阵都不含单位元。请注意，除非 R 是局部的，或是在某个域上适当地分次，否则不能假定此过程是确定性的；它涉及若干任意选择，包括待考察映射的顺序。

例 2.2. 本文中复形高斯消元的主要应用将针对托里克簇上的 Čech 复形。设 S 为 $\mathbf{k} = \mathbb{Q}$ 上无环面因子的环面簇 X 的 Cox 环。考虑某个 $\alpha \in \mathrm{Cl}(X)$ 的模 $M = S[-\alpha]$，并令 $\check{C}^\bullet_{\leq e}(S[-\alpha])_0$ 为其截断切赫复形。当 $e_0 \in \mathbb{N}^r$ 充分大时，我们有

$$H^q(X, \mathcal{O}(-\alpha)) \cong H^q\left(\check{C}^\bullet_{\leq e}(S[-\alpha])\right)_0 =: \check{H}^q_{\leq e}(S[-\alpha])_0 \cong \check{H}^q_{\leq e}(S)_\alpha$$

对每个 $e \geq e_0$。由于我们在域 $\mathbb{Q}$ 上工作，复形的高斯消元在一个交换图中为我们给出拟同构 ι 与 ρ

(15)



连同相应的同伦 h。注意，尽管这些映射所取的形式取决于高斯消元中主元的选择，但它们与上同调群的任意一组选定参考向量空间~$\check{H}^q_{\leq e_0}(S)_\alpha$ 之间的同构是自然的。然而，对于不同的指数向量 $e \leq e' \in \mathbb{N}^r$，我们可以

不能假定相应的同伦 h 与自然映射 $\check{C}^q_{\leq e}(S)_\alpha \to \check{C}^q_{\leq e'}(S)_\alpha$ 之间存在任何相容性，即它们会构成交换图。

同样的考虑也适用于复形 $\mathrm{Hom}(P^\bullet_{[e]}, S)_\alpha$，以及通过 Ext-模的分次条带计算层上同调。

2.3. 全复形的简化。 考虑截断的 Čech 双复形 $\check{C}^\bullet_{\leq e}(M^\bullet)_0$ 的全复形，其中对应的是由有限个自由分次 S_R-模组成的复形 $(M^\bullet, \varphi^\bullet)$，其项为有限生成的自由分次 S_R-模 $M^p = \bigoplus_{j=1}^{r_p} S_R[-\alpha_{p,j}]$

(16)
$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \check{\partial}} & & \uparrow{\scriptstyle \check{\partial}} & & \uparrow{\scriptstyle \check{\partial}} & & \uparrow{\scriptstyle \check{\partial}} \\
\cdots & \xrightarrow{\varphi} & \check{C}^2_{\leq e}(M^{p-2})_0 & \xrightarrow{\varphi} & \check{C}^2_{\leq e}(M^{p-1})_0 & \xrightarrow{\varphi} & \check{C}^2_{\leq e}(M^{p})_0 & \xrightarrow{\varphi} & \check{C}^2_{\leq e}(M^{p+1})_0 & \xrightarrow{\varphi} & \cdots \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \check{\partial}} & & \uparrow{\scriptstyle \check{\partial}} & & \uparrow{\scriptstyle \check{\partial}} & & \uparrow{\scriptstyle \check{\partial}} \\
\cdots & \xrightarrow{\varphi} & \check{C}^1_{\leq e}(M^{p-2})_0 & \xrightarrow{\varphi} & \check{C}^1_{\leq e}(M^{p-1})_0 & \xrightarrow{\varphi} & \check{C}^1_{\leq e}(M^{p})_0 & \xrightarrow{\varphi} & \check{C}^1_{\leq e}(M^{p+1})_0 & \xrightarrow{\varphi} & \cdots \\
 & & \uparrow{\scriptstyle \check{\partial}} & & \uparrow{\scriptstyle \check{\partial}} & & \uparrow{\scriptstyle \check{\partial}} & & \uparrow{\scriptstyle \check{\partial}} \\
\cdots & \xrightarrow{\varphi} & \check{C}^0_{\leq e}(M^{p-2})_0 & \xrightarrow{\varphi} & \check{C}^0_{\leq e}(M^{p-1})_0 & \xrightarrow{\varphi} & \check{C}^0_{\leq e}(M^{p})_0 & \xrightarrow{\varphi} & \check{C}^0_{\leq e}(M^{p+1})_0 & \xrightarrow{\varphi} & \cdots
\end{array}$$

全复形的微分 在同调次数 p 上，对于其定义域和陪域的分解具有分块结构 n

$$\check{C}^0_{\leq e}(M^p)_0 \oplus \check{C}^1_{\leq e}(M^{p+1})_0 \oplus \check{C}^2_{\leq e}(M^{p+2})_0 \oplus \cdots \longrightarrow \check{C}^0_{\leq e}(M^{p-1})_0 \oplus \check{C}^1_{\leq e}(M^{p})_0 \oplus \check{C}^2_{\leq e}(M^{p+1})_0 \oplus \cdots$$

，并且相对于各块任意选定的基，该微分的表示矩阵将具有如下形式

$$\Phi^p = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} (-1)^{p-1}\varphi^{p,0} & \check{\partial}^{p,0} & & & \\ \hline & (-1)^{p-1}\varphi^{p-1,1} & \check{\partial}^{p-1,1} & \check{} & \\ \hline & & (-1)^{p-1}\varphi^{p-2,2} & \check{\partial}^{p-2,2} & \\ \hline & & & \ddots & \ddots \end{array}\right).$$

我们将其称为全复形微分的宏块结构 x.

这些宏块中的每一个又具有块结构。具体而言，由假设 $M^i = \bigoplus_{k=0}^{r_i} S_R[-\alpha_{i,k}]$ 对于某些次数 $\alpha_{i,k} \in \mathrm{Cl}(X)$，我们有 $\check{C}^j_{\leq e}(M^i)_0 \cong \bigoplus_{k=1}^{r_i} \check{C}^j_{\leq e}(S_R)_{\alpha_{i,k}}$。于是，$\check{}\partial^{i,j}$ 的表示矩阵将具有分块对角形式

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} \check{\partial}^j_{\leq e}(\alpha_{i,1}) & & & \\ \hline & \check{\partial}^j_{\leq e}(\alpha_{i,2}) & & \\ \hline & & \check{\partial}^j_{\leq e}(\alpha_{i,3}) & \\ \hline & & & \ddots \end{array}\right)$$

其中，$\check{}\partial^j_{\leq e}(\alpha)$ 是截断 Čech 复形 $\check{} C^\bullet_{\leq e}(S_R)_\alpha$ 的 j 阶微分。这将称为全复形微分的微块结构 。

我们希望按照第 $\check{} C^\bullet_{\leq e}(M^\bullet)_0$ 节中回顾的内容，在同伦意义下简化全复形 2.2。在此过程中，我们可以自行选择用于高斯消元的可逆子矩阵。如借助图示（15）所述，$\check{}\partial^{i,j}$ 对应的任意微块 $\check{}\partial^j(\alpha_{i,k})$ 在单项式基下的表示矩阵具有如下形式

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

对于某个可逆矩阵 A，并且这可以通过行列变换化为右侧的形式。这一第三层块嵌套将被称为纳米块结构。如果我们

将右侧视为全复形微分的矩阵中的一个微块，则用于化简该微块的行列变换可延拓到环境矩阵

$$
\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
\ddots & \ddots & & & & \\
\hline
 & (-1)^{p-1}\varphi^{p-i+1,\ i-1} & \check{\partial}^{p-i+1,\ i-1} & & & \\
\hline
 & & (-1)^{p-1}\varphi^{p-i,\ i} & \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} & & \\
 & & & & \check{\partial}^{i}_{\leq e}(\alpha_p{}^{-i,2}) & \\
 & & & & & \ddots \\
\hline
 & & & (-1)^{p-1}\varphi^{p-i-1,\ i+1} & \check{\partial}^{p-i-1,\ i+1} & \\
\hline
 & & & & \ddots & \ddots
\end{array}\right)
$$

$$
\sim
\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
\ddots & \ddots & & & & \\
\hline
 & (-1)^{p-1}\varphi^{p-i+1,\ i-1} & \check{\partial}^{p-i+1,\ i-1} & & & \\
\hline
 & & \phi & \begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} & & \\
 & & & & \check{\partial}^{i}_{\leq e}(\alpha_p{}^{-i,2}) & \\
 & & & & & \ddots \\
\hline
 & & \kappa & \psi & \check{\partial}^{p-i-1,\ i+1} & \\
\hline
 & & & & \ddots & \ddots
\end{array}\right)
$$

此时， ϕ 的矩阵在 A 的纳米块对应的行中均为零元，而 ψ 在 A的纳米块对应的列中均为零元。此外，我们看到这些操作产生了一个新的块 κ 。

我们可以对微分 Φ_p的矩阵中出现的所有 $\check{\partial}^{i-1}_{\leq e}(\alpha_{p-i+1,\ k})$、 $i=1$，2，.....微块进行高斯消元。由此，我们得到定义域和陪域的基变换矩阵，从而得到消元后的新矩阵 Φ'_p：

$$
\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
S^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\hline
-S^{-1}\cdot\varphi\cdot h & S^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\hline
S^{-1}\cdot\varphi\cdot h\cdot\varphi\cdot h & S^{-1}\cdot\varphi\cdot h & S^{-1} & \ddots & \vdots & \vdots \\
\hline
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\
\hline
\pm S^{-1}\cdot\varphi\cdot h\cdots\varphi\cdot h & \cdots & S^{-1}\cdot\varphi\cdot h\cdot\varphi\cdot h & -S^{-1}\cdot\varphi\cdot h & S^{-1} & 0 \\
\hline
\mp\varphi\cdot h\cdots\varphi\cdot h & \ldots & \varphi\cdot h\cdot\varphi\cdot h\cdot\varphi\cdot h & \varphi\cdot h\cdot\varphi\cdot h & -\varphi\cdot h & \mathbf{1}
\end{array}\right)
\cdot
\left(\begin{array}{c|c|c|c|c}
\varphi & \check{\partial} & & & \\
\hline
 & \varphi & \ddots & & \\
\hline
 & & \ddots & \check{\partial} & \\
\hline
 & & & \varphi & \check{\partial} \\
\hline
 & & & & \varphi
\end{array}\right)
$$

$$
=
\left(\begin{array}{c|c|c|c}
\psi & \Delta & & \\
\hline
\psi & \psi & \ddots & \\
\hline
\vdots & \ddots & \ddots & \Delta \\
\hline
\psi & \cdots & \psi & \psi
\end{array}\right)
\cdot
\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
\mathbf{1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\hline
-h\cdot\varphi & T & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\hline
h\cdot\varphi\cdot\ h\cdot\ \varphi & -h\cdot\varphi\cdot T & T & \ddots & \vdots & \vdots \\
\hline
-h\cdot\ \varphi\cdot\ h\cdot\ \varphi\cdot\ h\cdot\ \varphi & h\cdot\ \varphi\cdot h\cdot\varphi\cdot\ T & -h\cdot\varphi\cdot T & \ddots & 0 & 0 \\
\hline
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & T & 0 \\
\hline
\pm h\cdot\varphi\cdots h\cdot\varphi & \mp h\cdot\ \varphi\cdots h\,\varphi\cdot T & \cdots & h\cdot\varphi\cdot\ h\cdot\varphi\cdot T & -h\cdot\varphi\cdot T & T
\end{array}\right)^{-1}
$$

这里我们省略了出现在各块中的矩阵的许多下标。根据其位置上下文，应该很容易判断实际指的是哪个矩阵。我们有

- φ Čech 双复形中诱导的水平映射对应的宏块。
- $\check{\partial}$来自 Čech 复形、由微块 $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$ 组成的分块对角矩阵
- S^{-1} 其微块为$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -CA^{-1} & 1 \end{smallmatrix}\right)$ 的分块对角矩阵，用于对 ∂的相应微块进行高斯消元。
- h 其微块为 $\left(\begin{smallmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 用于与节2.2中所述相同的消元。
- T 微块分别对应列消元结果的分块对角矩阵 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -A^{-1}B \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$。

- Δ Čech 复形经约化后得到的分块对角矩阵，其微块为 $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ 。
- ψ 高斯消元后得到的宏块。根据构造， Δ 中出现的纳米块的行和列 A 在 ψ中均为零。

请注意，由于格式限制，我们在等式右侧将列消元所用的矩阵写成了带逆的形式。

上述相应基变换矩阵的逆为

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} S & & & & \\ \hline \varphi\cdot h & S & & & \\ \hline 0 & \varphi\cdot h & \ddots & & \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & S & \\ \hline 0 & \cdots & 0 & \varphi\cdot h & \mathbf{1} \end{array}\right) \quad \text{and} \quad \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \mathbf{1} & & & & \\ \hline h\cdot\varphi & T^{-1} & & & \\ \hline 0 & h\cdot\varphi & T^{-1} & & \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \hline 0 & \cdots & 0 & h\cdot\varphi & T^{-1} \end{array}\right).$$

我们可以对全复形中的相邻矩阵执行相同的消元，从而得到一个组合基变换

$$U^{-1} = T_{\text{in}}^{-1}\cdot S_{\text{out}}^{-1} \qquad \text{and} \qquad U = S_{\text{out}}\cdot T_{\text{in}}$$

其中，我们用 T_{out} 表示入射映射陪域中的基变换，用 S_{out} 表示出射映射定义域中的基变换。遗憾的是，这些矩阵无法写出合理的闭式表达式。

记由（16）的全复形所诱导的高斯消元的同伦为 h ，并记从简化复形到该复形的包含映射及从该复形到简化复形的投影分别为 ι 和 ρ。读者可以沿用上述思路验证以下引理。

引理 2.3。对 Čech 复形的分支 $\check{}\, C^\bullet_{\le e}(S_R)_{-\alpha_{i,\,k}}$ 在双复形的各列中进行高斯消元，由此对（16）的全复形所诱导的高斯消元得到一个复形 $W^\bullet$ ，其各项为

$$W^i = \bigoplus_{p+q=i}\bigoplus_{k=1}^{r_p} \check{H}^q_{\le e}(S_R[-\alpha_{p,k}])_0 = \bigoplus_{p+q=i}\bigoplus_{k=1}^{r_p} \check{H}^q_{\le e}(S)_{\alpha_{p,k}} \otimes_{\mathbf{k}} R$$

以及态射 $\phi^i\colon\ W^i \to W^{i+1}$，其关于直和分解的各块为

$$\phi^{i,r}_{p,q}\colon \check{H}^q_{\le e}(S_R[-\alpha_{p,k}]) \to \check{H}^{q-r+1}_{\le e}(S_R[-\alpha_{p+r,k}]), \qquad \phi^{i,r}_{p,q} = (-1)^{(i-1)(r-1)}\rho\circ\underbrace{\varphi\circ h\circ\cdots\circ\varphi\circ h}_{r-1\text{ times}}\circ\varphi\circ\iota.$$

为帮助读者理解，我们说明一下：单独的块 $\phi^{i,p}{}^{r}{}_{,q}$ 是通过沿着下图及其在环 S_R 上的类似图“沿阶梯向下走”时，追踪元素 $v\in\check{}H^q_{\le e}(S_R[-\alpha_{p,k}])$ 得到的，其中 r =1, 2, . . . 。

(17)

$$\begin{array}{ccccc} & & \bigoplus_{k=1}^{r_{p+1}} \check{H}^q_{\le e}(S[-\alpha_{p+1,k}])_0 & & \\ & & \uparrow{\scriptstyle\rho} & & \\ \bigoplus_{k=1}^{r_p} \check{C}^q_{\le e}(S[-\alpha_{p,k}])_0 & \xrightarrow{\pm\varphi} & \bigoplus_{k=1}^{r_{p+1}} \check{C}^q_{\le e}(S[-\alpha_{p+1,k}])_0 & & \bigoplus_{k=1}^{r_{p+2}} \check{H}^{q-1}_{\le e}(S[-\alpha_{p+2,k}])_0 \\ \uparrow{\scriptstyle\iota} & & {\scriptstyle h}\big(\downarrow \quad \uparrow{\scriptstyle\check{\partial}} & & \uparrow{\scriptstyle\rho} \\ \bigoplus_{k=1}^{r_p} \check{H}^q_{\le e}(S[-\alpha_{p,k}])_0 & & \bigoplus_{k=1}^{r_{p+1}} \check{C}^{q-1}_{\le e}(S[-\alpha_{p+1,k}])_0 & \xrightarrow{\pm\varphi} & \bigoplus_{k=1}^{r_{p+2}} \check{C}^{q-1}_{\le e}(S[-\alpha_{p+2,k}])_0 \\ & & & & {\scriptstyle h}\big(\downarrow \quad \uparrow{\scriptstyle\check{\partial}} \\ & & & & \bigoplus_{k=1}^{r_{p+2}} \check{C}^{q-2}_{\le e}(S[-\alpha_{p+2,k}])_0 \xrightarrow{\pm\varphi} \cdots \end{array}$$

2.4. **Weyman 函子的详细构造**。 引理 $W^\bullet$ 中的复形 2.3 已经与将 Weyman 函子作用于 $M^\bullet$ 后所得的结果相当接近。为得到 $\mathbb{W}^\bullet(M^\bullet)$， 我们选取一个函数

$$e_{\min}\colon \mathrm{Cl}(X) \to \mathbb{N}^r \tag{18}$$

wh其中 r 是无关理想 $I \subset S$ 的单项式生成元的数量，适用于 X ，使得 t hat

$$H^q(X, \mathcal{O}(-\alpha)) \cong \check{H}^q_{\le e_{\min}(\alpha)}(S)_\alpha.$$

特别是，这将选定我们关于扭曲层的层上同调的参考模型 ，也就是说，我们将设定

$$R^q\pi_*\mathcal{O}(-\alpha) := \check{H}^q_{\le e_{\min}(\alpha)}(S)_\alpha \otimes_{\mathbf{k}} R \tag{19}$$

其中右侧的上同调通过对 Čech 复形 $\check{C}^\bullet_{\le e_{\min}(\alpha)}(S)_\alpha$ 的 α-分支进行高斯消元计算。

在我们的实现中，实际上使用分次条带计算 Ext-模的直接像，并选择 $e_{\min}$ ，如 [EMS00，命题 31] 所述；支撑集则通过 Ext 计算，如[EMS00，推论 1.2 (b)]所述。似乎可以对这一策略作出合理的改进：除了考虑无关理想的单项式生成元的幂，还考虑其他余有限理想极限。不过，除了射影空间的乘积之外，我们尚未对此进行探索。

注记 2.4。请注意，19）在严格的数学意义上并没有太大意义，因为其左端通常被理解为表示直接像的所有复形的上同调，但这些复形仅在自然诱导的识别意义下相同。不过，要实际计算并实现这些结构，系统地为此类等价类选取唯一代表，并明确实现不同代表之间的过渡映射，至关重要。

2.4.1。*Weyman* 复形中的微分。上一节对式（16）的全复形进行高斯消元后，我们得到的结论是，可以按 $W^\bullet$ 引理2.3 中的块计算其项和映射，甚至无需将全复形的微分矩阵复合起来。为计算微分

$$\phi^i\colon \mathbb{W}^i(M^\bullet) \to \mathbb{W}^{i+1}(M^\bullet)$$

我们沿着式（17）中的阶梯按如下方式进行。设 $u \in R^q\pi_*\mathcal{O}(-\alpha_{p,k_0}) \to \bigoplus_{k=1}^{r_p} \check{C}^q_{\le e_0}(S[-\alpha_{p,k}])_0$ 是 $e_0 = e_{\min}(\alpha_{p,k_0})$ 中 $\mathbb{W}^i(M^\bullet)$ 的一个生成元，其中 k_0 是 u中相应直和项的指标。于是，令 $v_1 = \varphi(u) \in \bigoplus_{k=1}^{r_{p+1}} \check{C}^q_{\le e_0}(S[-\alpha_{p+1,k}])_0$ ，且 $w_1 = \rho(v_1) \in \bigoplus_{k=1}^{r_{p+1}} \check{H}^q_{\le e_0}(S[-\alpha_{p+1,k}])_0$。然后我们递归地定义

$$v_{r+1} = \varphi(h(v_r)), \quad w_{r+1} = \rho(v_{r+1}).$$

最后，我们可以将这些识别

$$W^{i+1} \supset \bigoplus_{k=1}^{r_{p+1}} \check{H}^{q-r+1}_{\le e_0}(S_R[-\alpha_{p+r,k}])_0 \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{k=1}^{r_{p+1}} \check{H}^{q-r+1}_{\le e_{\min}(-\alpha_{p+r,k})}(S_R[-\alpha_{p+r,k}])_0 \subset \mathbb{W}^{i+1}(M^\bullet)$$

明确到 ϕ^i 的定义域和陪域中出现的所有直和项。于是， $\phi^{i,\ p^r,\ q}(u)$ 是沿着这些识别得到的 w_r 的像。

注记 2.5。 使这些计算高效的关键观察是，对于 Weyman 复形中的微块，所有计算都可以用稀疏块形式完成。因此，模元素 $u \in \bigoplus_{k=1}^{r_p} \check{C}^\bullet_{\le e}(S)_\alpha$ 将存储为

$$u = \sum_{k:u_k \neq 0} u_k, \qquad u_k \in \check{C}^\bullet_{\le e}(S_R)_\alpha$$

在内存中。这些求和中可能出现的所有项都属于同一个分次 α -模复形直接极限中的不同 S_R分支 $\lim_{e\in\mathbb{N}^r} C^\bullet_{\le e}(S)$。因此，只需创建一次该极限的对象和映射并将其缓存，就能在整个计算过程中大量重用它们。这一策略也是 [Zac25] 的核心，并在其中有更详细的说明。为了实现 Weyman 函子，我们扩展了这一已有功能。具体而言，Čech 复形中的态射（包括由高斯消元产生的态射）可以在$\mathbf{k}$ 上而非 R 上创建，然后通过基变换转移过去。

因此，Weyman 复形所需的大部分计算只取决于环面簇X，而与具体的分次 S_R-模复形无关。在我们的实现中，这些计算会被缓存；甚至可以将它们存储在数据库中，并在需要时加载。此外，对于某些特定的环面簇，例如射影空间的乘积，应当可以直接以硬编码的方式生成分支在同伦意义下的简化结果，而不必应用通用的高斯消元算法。这样，计算时间应当能缩短到接近缓存已填充时的水平。

至于计算中实际依赖复形、而不仅仅依赖环面簇的部分 X：原始复形中的微分 $f^j\colon\ M^j \to M^{j+1}$可以假定为 S_R上的稀疏多项式映射，并且 f^j的表示矩阵的每个元素都是一个齐次多项式$f^j_{k,\ l} \in (S_R)_{\alpha_{j,\ k}-\alpha_{j+1,\ l}}$。Čech 双复形（$\varphi$ 16）中诱导出的水平映射的各个宏块和微块$f^j_{p,\ q}$都可以快速计算。稀疏性进而显著减少了计算中实际需要的映射数量。

例2.6。为说明注2.5中所述的优点，我们考虑以下示例。固定超曲面族的次数 $d \in \mathbb{N}$，该超曲面族位于 $\mathbb{P}^n_R$上，且基于Spec R，其中 $R = \mathbb{Q}[a_1, \dots, a_r]$ 是参数环。随后，我们在这个族上构造相对余切层若干扭曲的分次模，直至拟同构，并计算其在Spec R上的直接像。

设 $S = R[x_0, \dots, x_n]$ 是齐次坐标环，$F \in S_d$ 是一个次数为 d 的齐次方程，它定义了 R 上的超曲面族 $X \subset \mathbb{P}^n_R$。我们可以限制欧拉序列

$$0 \longrightarrow \Omega^1 \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^{n+1} \xrightarrow{x} \mathcal{O} \longrightarrow 0$$

到 X，从而将 $\Omega^1|_X$ 表示为以下全复形的拟同构：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(-d-1)^{n+1} & \xrightarrow{x} & \mathcal{O}(-d) \\ \downarrow{\scriptstyle F\cdot\mathbf{1}} & & \downarrow{\scriptstyle \cdot F} \\ \mathcal{O}(-1)^{n+1}. & \xrightarrow{x} & \mathcal{O} \end{array}$$

将其与短正合序列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-d) \xrightarrow{\mathrm{d}F} \Omega^1|_X \longrightarrow \Omega^1_X \longrightarrow 0$$

结合起来，最终得到由以下各项构成的分次 S-模复形：

$$S[-2d] \xrightarrow{\begin{pmatrix} F & -\mathrm{d}F \end{pmatrix}} S[-d] \oplus S[-d-1]^{n+1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} -d & \mathrm{d}F \\ -x & F\cdot\mathbf{1} \end{pmatrix}} S[-d] \oplus S[-1]^{n+1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} F \\ x \end{pmatrix}} S$$

其右起第二项处的同调模为 M，对应的层化结果为 Ω^1_X。其他同调群要么为零，要么以无关理想 $\mathfrak{m} = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$ 为根。

我们将关注由以下方程给出的超曲面族的直接像 $R\pi_*\Omega^1_X(\lfloor 2\frac{d}{3} \rfloor)$：

$$F = \sum_{i=1}^{10} a_i \cdot x^{\nu_i}, \qquad |\nu_i| = d, \quad i = 1, \dots 10$$

对于十个随机选取的次数为 d 的单项式 x^{ν_i}。选择这种扭曲并非出于这一特定层族具有任何几何意义，而是因为它能产生有趣的示例，说明此处所讨论的问题。

图 1 展示了计算直接像$R\pi_*\Omega^1_X(\lfloor 2\frac{d}{3} \rfloor)$ 在次数 0 上的态射所需的运行时间，适用于 $n = 2$和 $1 \le d \le 40$。我们采用了不同的方法：Weyman 函子的实现；应用 Weyman 函子，但预先填充其缓存（即缓存所有仅取决于环面簇 X、而不取决于具体复形的计算）；以及——作为比较——对 Ext-类比复形（即 (16) 中全复形）的最小截断的全复形直接进行高斯消元。实际数值和内存消耗见附录中的表4。

我们用形如 1 的图扩展了图 $t(d) = a^{d-d_0}$ 中的绘图，以拟合不同的运行时间。对于 Weyman 函子的应用，最佳拟合由 $a \approx 1.08832$ 和 $d_0 \approx 3.03249$ 给出；对于全复形的直接高斯消元，我们得到 $a \approx 1.13837$ 和 $d_0 \approx -3.62572$。这些结果表明

两种情况下，运行时间都大致随次数 d 呈指数增长。然而，指数函数的底数存在显著差异，因此实际运行时间相差若干个数量级。

使用已填充缓存计算 Weyman 复形时，运行时间图中的“断点”和波动可由 Julia 的垃圾回收器解释：最初几次计算规模很小，因此随机触发的垃圾回收平均而言不会发生在执行时间内。从约 $d = 27$ 开始，情况有所变化，运行时间通常也包含垃圾回收所耗的时间。

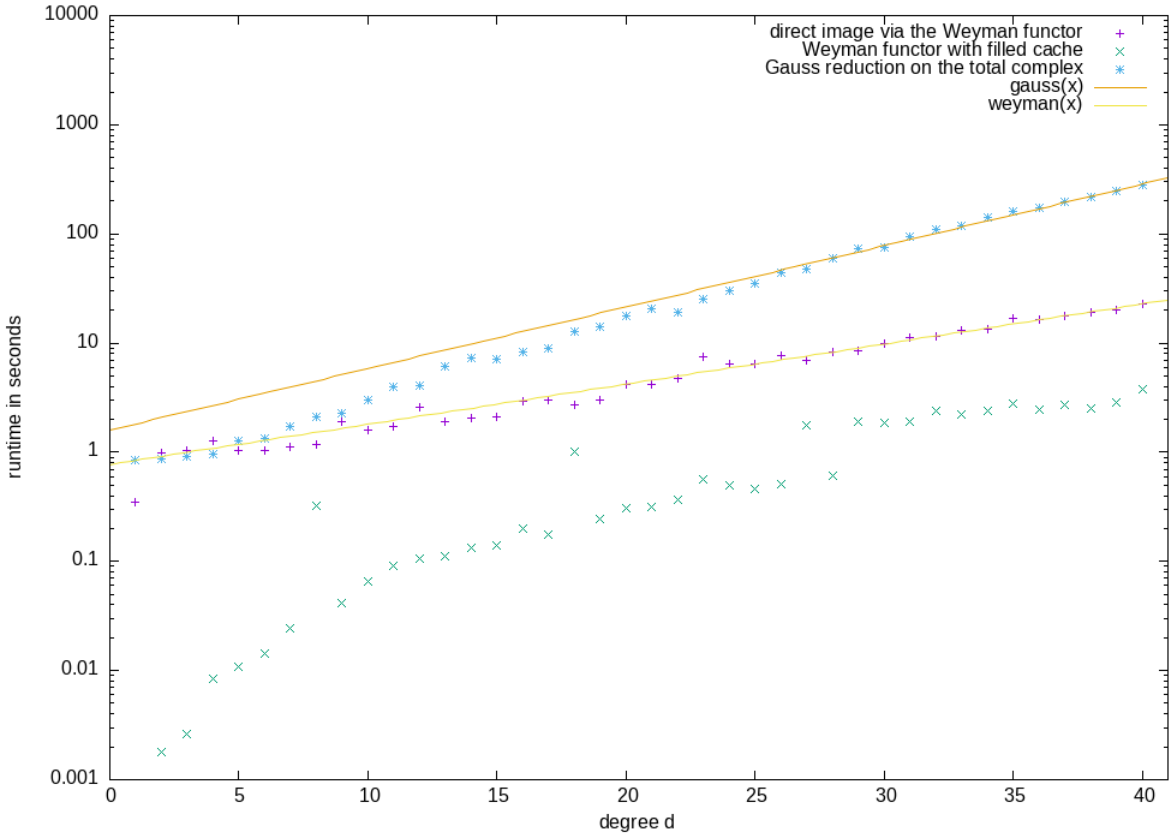


图 1。 示例中直接像态射的计算运行时间2.6和表 4

注 2.7。 Weyman 复形的微分的构造取决于许多选择，包括指数向量 e 以及对各个分支进行高斯消元时选取的主元。一般来说，两种不同的选择会导致表示该微分的矩阵不同。值得注意的是，将一个矩阵变换为另一个矩阵的基变换并非仅由直接极限诱导

$$\check{H}^k_{\leq e}(M^p)_0 \to \check{H}^k_{\leq e'}(M^p)_0$$

对于 $e \leq e'$ 以及最终的高斯消元，以便将这些上同调群写成自由的 R-模。事实上，基变换会跨越宏块，并取决于复形 $M^\bullet$中的微分，如上文 U^{-1} 的显式分块下三角形式所示。将这些基变换考虑在内后，我们可以看到，Weyman 复形的微分确实是自然的，并且不 依赖于构造过程中所作的选择。

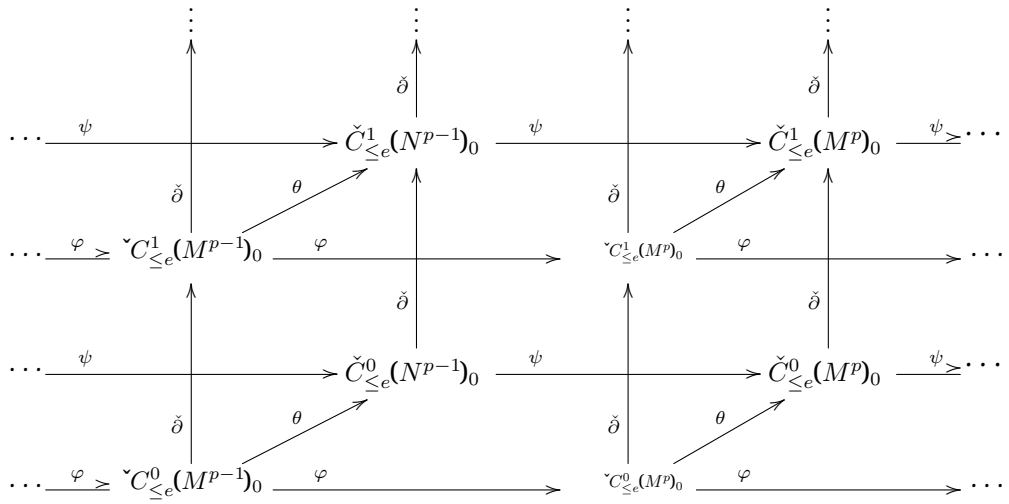
2.5. **Weyman 函子在复形态射上的作用**。 设 $\theta\colon M^\bullet \to N^\bullet$是分次 S_R-模之间的一个复形态射。我们希望描述 Weyman 函子在态射 θ 上的取值：

$$\mathbb{W}(\theta)\colon \mathbb{W}(M^\bullet) \to \mathbb{W}(N^\bullet).$$

鉴于 Weyman 函子是通过线性代数显式构造的，这个问题归根结底就是一次基变换。

For 每个指数向量 $e \in \mathbb{N}^r$ 态射 θ 都会诱导一个双复形的态射 es

(20)



而这又给出全复形的一个态射。它们构成一个以指数向量 $e \in \mathbb{N}^r$的选取为指标的自然直接极限。

我们可以按照引理2.3中的做法，对定义域和陪域中的两个全复形分别进行高斯消元。这会在每个同调次数上导出一个基变换 i ，使列的同调群成为直和项：

$$\bigoplus_{p+q=i} \check{H}^q_{\leq e}(M^p)_0 \overset{\iota}{\hookrightarrow} \bigoplus_{p+q=i} \check{C}^q_{\leq e}(M^p)_0 \overset{\theta}{\longrightarrow} \bigoplus_{p+q=i+1} \check{C}^q_{\leq e}(M^p)_0 \overset{\rho}{\longrightarrow} \bigoplus_{p+q=i+1} \check{H}^q_{\leq e}(M^p)_0.$$

态射 $\mathbb{W}(\theta)$ 随后由这些映射的复合给出，并结合它们在定义域和陪域的上同调中的自然同一识。

将其作用在元素 $u \in R^{q_0}\pi_*\mathcal{O}(-\alpha_{p_0,k}) \subset R^{q_0}\pi_*\widetilde{M^{p_0}}$ 上具体写出 这意味着我们首先将其映到元素 $u' \in \check{H}^{q_0}_{\leq e}(S_R[-\alpha_{p_0,k}])_0 \subset \check{C}^{q_0}_{\leq e}(S_R[-\alpha_{p_0,k}])_0$ ，然后将其展开为

$$\{v_{p,q}\}_{p+q=i} \in \bigoplus_{p+q=i} \check{C}^q_{\leq e}(M^p)_0, \quad v_{p,q} = \begin{cases} 0 & \text{if } q > q_0 \text{ or } q < 0, \\ u' & \text{if } q = q_0, \\ (-1)^{i-1} \cdot h(\varphi(v_{p-1,q-1})) & \text{if } 0 \leq q < q_0. \end{cases}$$

随后通过关于 θ 的分块对角矩阵将该元素映到

$$\{w_{p,q}\}_{p+q=i} \in \bigoplus_{p+q=i} \check{C}^q_{\leq e}(N^p)_0, \quad w_{p,q} = \theta(v_{p,q}).$$

在陪域一侧，我们对基变换求逆，得到

$$\{w'_{p,q}\}_{p+q=i} \in \bigoplus_{p+q=i} \check{C}^q_{\leq e}(N^p)_0, \quad w'_{p,q} = \begin{cases} 0 & \text{if } q > q_0 \text{ or } q < 0, \\ \theta(v_{p,q}) & \text{if } q = q_0, \\ \theta(v_{p,q}) + (-1)^{i-1} \cdot h(\psi(w'_{p-1,q-1})) & \text{if } 0 \leq q < q_0. \end{cases}$$

然后将该元素投影到陪域所选的上同调模型中。

例 2.8. 设 $I = \langle x_0, \ldots, x_n \rangle \subset S = \mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_n]$ 为射影空间 $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Q}}$ 的无关理想，并考虑复形

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow S \longrightarrow 0$$

这个分次模复形层化后，在拟同构意义下是零层，因此它在 $\operatorname{Spec}\mathbb{Q}$ 上的直接像应为零。

由于 I 不是自由模，我们的方法无法直接应用，因此需要用自由分解替换它。截断 Koszul 复形提供了这一自由分解，从而得到一个复形态射

$$\begin{array}{ccccccccccccc} C^\bullet: & & & & & & 0 & \longrightarrow & S & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & & & \uparrow{\scriptstyle \theta} & & \\ K^\bullet: & 0 & \longrightarrow & \bigwedge^{n+1} S[-1]^{n+1} & \longrightarrow & \bigwedge^{n} S[-1]^{n+1} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \bigwedge^{2} S[-1]^{n+1} & \longrightarrow & \bigwedge^{1} S[-1]^{n+1} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

通常， $K^\bullet$ 中的映射由与 $x=(x_0,\dots,x_n)$ 的缩并给出。陪域中单项复形 $C^\bullet$ 对应的 Weyman 复形很容易写出：

$$\mathbb{W}^i(C^\bullet)=\begin{cases} H^0(\mathbb{P}^n_{\mathbb{Q}},\mathcal{O})=\check{H}^0_{\leq(0,\dots,0)}(S)_0=\mathbb{Q}\cdot\bigoplus_{j=0}^n \frac{1}{x_j^0} & \text{if } i=0\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

当然，唯一的非平凡生成元对应于齐次坐标环的单位 $1\in S$，它在标准仿射图上的限制就是给定的表达式。我们选择了 $e_{\min}(0)=(0,\dots,0)$，因为这是能捕获模 S^1的所有上同调的最小指数向量。

对于截断 Koszul 复形 $K^\bullet$，自由模 $\bigwedge^p S[-1]$ 的上同调均为零，除了$p=n+1$，此处我们再次只得到一个上同调群。于是

$$\mathbb{W}^i(K^\bullet)=\begin{cases} H^n(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}(-n-1))=\check{H}^n_{\leq(1,\dots,1)}(S[-n-1])=\mathbb{Q}\cdot\frac{e_0\wedge\cdots\wedge e_n}{x_0\cdots x_n} & \text{if } i=0\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

这里我们用 e_j表示自由模 $S[-1]^{n+1}$ 的标准生成元。注意，此处我们需要选择$e_{\min}(-n-1)=(1,\dots\dots,1)$。

由于我们预 期直接像为零，相应 Weyman 复形中的诱导映射

$$\check{H}^n_{\leq(1,\dots,1)}(S[-n-1])=\mathbb{W}^0(K^\bullet)\xrightarrow{\mathbb{W}(\theta)}\mathbb{W}^0(C^\bullet)=\check{H}^0_{\leq(1,\dots,1)}(S)$$

必须是同构。为明确说明这一点，我们追踪单个生成元 $u=\frac{e_0\wedge\cdots}{x_0\cdots}\frac{\wedge e_n}{x_n}$,,的映射。收缩态射将其映射为——

$$\sum_{0\leq j\leq n}(-1)^j x_j\cdot\frac{e_0\wedge\cdots\wedge\widehat{e_j}\wedge\cdots\wedge e_n}{x_0\cdots x_n}\in\check{C}^n_{\leq(1,\dots,1)}\left(\bigwedge^n S[-1]^{n+1}\right)$$

它属于 Čech 态射的像，其原像为

$$\bigoplus_{0\leq j\leq n}\frac{e_0\wedge\cdots\wedge\widehat{e_j}\wedge\cdots\wedge e_n}{x_0\cdots\widehat{x_j}\cdots x_n}\in\check{C}^{n-1}_{\leq(1,\dots,1)}\left(\bigwedge^n S[-1]^{n+1}\right).$$

鉴于我们的上同调群只有一维，我们可以假设已选取同伦 h，使得这实际上是元素在 h 下的像。如此继续下去，最终便得到这组元素

$$\{v_{-k,k}\}_{k=0}^n,\quad v_{-k,k}=\bigoplus_{0\leq i_0<\cdots<i_k\leq n}\frac{e_{i_0}\wedge\cdots\wedge e_{i_k}}{x_{i_1}\cdots x_{i_k}}\in\check{C}^k_{\leq(1,\dots,1)}\left(\bigwedge^{k+1}S[-1]^{n+1}\right)_0$$

根据 Weyman 复形的基变换。注意，对于 $k=n$，我们得到 $v_{-n,\,n}=u$。除 $k=1$ 外，这些元素都映射到陪域中的零模。在最后这种情况下，有

$$v_{-1,1}=\bigoplus_{0\leq i\leq n}\frac{e_i}{x_i}\overset{\theta}{\mapsto}\bigoplus_{i=0}^n x_i\cdot\frac{1}{x_i}\in\check{C}^0_{\leq(1,\dots,1)}(S)_0.$$

约去分数后，很容易看出，此元素的上同调类与在自然映射 $\check{}\,C^0_{\leq(0,\dots,0)}(S)_0\to\check{}\,C^0_{\leq(1,\dots,1)}(S)_0$ 下由 $\bigoplus_{j=0}^n\frac{1}{x_j^0}$ 给出的上同调类相同。上同调中的诱导映射的逆映射，恰好是投影到 Weyman 复形中选定的标准上同调模型。

3. 示例

3.1. **Sturmfels 的例子。** 在 [Stu93，例 2 中1] Sturmfels 着手计算以下支撑集的 A-结式

$$A_1 = \{(0,0),(2,2),(1,3)\}, \qquad A_2 = \{(0,0),(2,0),(1,2)\}, \qquad A_3 = \{(3,0),(1,1)\} \tag{21}$$

请注意，这些支撑集不符合引言中提出的条件，因为A_3 的凸包并非满维。不过，命题1.3适用，因此我们可以将本方法用于这个例子。通过消元直接计算需要 34.29979 秒，并需要 11.589 吉字节内存。消元式为

$$\begin{aligned}
& a_1^5b_3^7c_1^6c_2 + 3a_1^4a_2b_2^2b_3^5c_1^4c_2^3 + 3a_1^3a_2^2b_2^4b_3^3c_1^2c_2^5 - 13a_1^3a_2a_3b_1^2b_2b_3^4c_1^5c_2^2 - 7a_1^3a_3^2b_1b_2^3b_3^3c_1^4c_2^3 \\
+ \;& 6a_1^2a_2^3b_1^3b_2b_3^3c_1^4c_2^3 + a_1^2a_2^3b_2^6b_3c_2^7 - a_1^2a_2^2a_3b_1^2b_2^3b_3^2c_1^3c_2^4 + 5a_1^2a_2a_3^2b_1^4b_3^3c_1^6c_2 - a_1^2a_2a_3^2b_1b_2^5b_3c_1^2c_2^5 \\
+ \;& 14a_1^2a_3^3b_1^3b_2^2b_3^2c_1^5c_2^2 + a_1^2a_3^3b_2^7c_1c_2^6 - 2a_1a_2^4b_1^3b_2^3b_3c_1^2c_2^5 - 5a_1a_2^3a_3b_1^5b_3^2c_1^5c_2^2 + 2a_1a_2^2a_3^2b_1^4b_2^2b_3c_1^4c_2^3 \\
- \;& 2a_1a_2a_3^3b_1^3b_2^4c_1^3c_2^4 - 7a_1a_3^4b_1^5b_2b_3c_1^6c_2 + a_2^5b_1^6b_3c_1^4c_2^3 + a_2^2a_3^3b_1^6b_2c_1^5c_2^2 + a_3^5b_1^7c_1^7
\end{aligned}$$

这里我们用 a_1、a_2、a_3 表示与 A_1, b_1、b_2、b_3 的顶点相关联的系数，用c_1、c_2 表示 A_3的系数。在这个例子中， A-结式的重数为一，因此消元式与 $\Delta_{A_1,\,A_2,\,A_3}$一致。和往常一样，我们将这些变量上的有理数域多项式环记为 R。

托里 簇 X 的射线（它对应于这些支撑集的凸包的闵可夫斯基和）为

$$\binom{-1}{-2}, \binom{-2}{-1}, \binom{-1}{-1}, \binom{2}{-1}, \binom{3}{-1}, \binom{0}{1}, \binom{-1}{1}, \binom{1}{2}.$$

Cox 环中对应的变量按以下方式分次

$$\begin{aligned}
& x_1 \mapsto [1,0,0,0,0,0], \quad x_2 \mapsto [0,1,0,0,0,0], \quad x_3 \mapsto [0,0,1,0,0,0], \quad x_4 \mapsto [0,0,0,1,0,0], \\
& x_5 \mapsto [0,0,0,0,1,0], \quad x_6 \mapsto [0,0,1,2,2,3], \quad x_7 \mapsto [-1,1,0,-1,-1,-2], \quad x_8 \mapsto [1,-1,2,2,0,1]
\end{aligned}$$

其中，分次取值于 $\mathbb{Z}^6$ 上环面除子类构成的群 X。对于$(1,\ldots,1)$ 的扭曲，Weyman 复形只有两项，且两项的秩均为 15。它们根据谱序列的第一页（6）分布如下

2	R^{15}	R^{12}	0	0
1	0	0	R^2	0
0	0	0	0	R^1
q/p	-3	-2	-1	0.

它们之间态射的表示矩阵具有以下形式：

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_1 & 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\
0 & 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a_1b_3 & 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -a_2b_1 & a_1b_3 & 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_1 & 0 & 0 \\
-a_1b_3c_1 & 0 & -a_2b_1 & 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -a_3b_1 & 0 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -a_2b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_2 & 0 & 0 \\
-a_2b_1c_2 & 0 & -a_3b_1 & 0 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & -b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -a_2b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a_3b_1c_1 & -a_3b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & -b_3 & 0 & 0 & a_2 & 0 \\
-a_2b_2c_2 & 0 & -a_3b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & -b_3 & 0 & a_3 & 0 \\
-a_3b_2c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_3 & 0 & a_3
\end{pmatrix}.$$

这个矩阵的行列式确实与结式相差一个符号。可以看到，列中各项的次数与实现相应块映射所需经过的阶梯步数（17）相同；参见 [GKZ94，第 5 章，定理 5.5 (a)]。生成该矩阵耗时 20.683419 秒

Deg.	稳定扭曲				优化扭曲			
d	直接像		行列式		直接像		行列式	
1	0.257670 秒	4.785 兆字节	0.001632 秒	48.234 KiB	0.241543 秒	3.335 兆字节	0.000125 秒	8.328 KiB
2	0.219085 秒	3.831 兆字节	0.002397 秒	117.418 KiB	0.331929 秒	3.007 兆字节	0.001529 秒	19.672 KiB
3	0.217710 秒	4.473 兆字节	0.002790 秒	391.711 KiB	0.323865 秒	3.665 兆字节	0.001819 秒	51.633 KiB
4	0.215691 秒	5.185 兆字节	0.006528 秒	1.040 兆字节	0.318101 秒	4.668 兆字节	0.002821 秒	276.250 KiB
5	0.218553 秒	5.951 兆字节	0.022298 秒	3.142 兆字节	0.327058 秒	5.571 兆字节	0.007956 秒	673.281 KiB
6	0.217042 秒	6.774 兆字节	0.152825 秒	7.375 兆字节	0.323507 秒	6.570 兆字节	0.026254 秒	1.434 兆字节
7	0.222800 秒	7.672 兆字节	0.542230 秒	15.826 兆字节	0.321827 秒	8.220 兆字节	0.169449 秒	4.852 兆字节
8	0.223987 秒	8.792 兆字节	1.536745 秒	30.783 兆字节	0.325753 秒	9.468 兆字节	0.399394 秒	8.495 兆字节
9	0.223444 秒	9.880 兆字节	3.555785 秒	57.665 兆字节	0.335605 秒	10.943 兆字节	0.936593 秒	15.404 兆字节
10	0.227206 秒	11.002 兆字节	7.591414 秒	207.069 兆字节	0.333723 秒	12.779 兆字节	3.363516 秒	37.346 兆字节
11	0.236053 秒	12.193 兆字节	13.167125 秒	815.313 兆字节	0.334076 秒	14.486 兆字节	6.450076 秒	137.334 兆字节
12	0.233032 秒	13.355 兆字节	22.796134 秒	1.784 吉字节	0.340848 秒	16.242 兆字节	9.609917 秒	318.037 兆字节
13	0.228131 秒	14.709 兆字节	42.269698 秒	3.539 吉字节	0.357773 秒	18.747 兆字节	21.653534 秒	1.193 吉字节
14	0.237664 秒	16.059 兆字节	72.839881 秒	5.543 吉字节	0.345428 秒	20.900 兆字节	36.186837 秒	2.204 吉字节
15	0.235851 秒	17.465 兆字节	117.974539 秒	9.468 吉字节	0.351999 秒	23.178 兆字节	62.510157 秒	3.780 吉字节

表1。计算随机有理曲线族参数像的运行时间和内存消耗

，分配的内存仅为 354.649 兆字节。假设 Weyman 函子的缓存已填充，计算可在不到 50 毫秒内完成。

在 [Stu93]Sturmfels 使用稳定扭曲来计算整体截面复形的行列式。在我们的设置中，这相当于对环面除子类进行扭转[2]，其次数为 $[4,7,16,12,3,2]\in\mathbb{Z}^6$。我们得到如下形式的整体截面三项复形

$$0\longrightarrow R^{23}\longrightarrow R^{27}\longrightarrow R^{4}\longrightarrow 0$$

但要找到一种稳定扭曲，使其仅得到两项复形，似乎是不可能的。这些映射的矩阵过大，无法在此复现；其元素的多项式次数至多为 1。

计算整体截面复形需要 15.552580 秒，分配的内存为 167.628 兆字节。其中超过 95% 的时间用于在多面体上求解线性规划，以计算 $e_{\min}$，以及收集这些多面体中的格点，用于分次模各分支的单项式基。当 Weyman 函子的缓存填充后，上述复形可在 36 毫秒内生成。计算该复形的行列式还需 8 毫秒。

3.2. **有理曲线的参数像**。 假设给定一个态射的代数族

$$F\colon \mathbb{P}^1\times\mathbb{C}\to\mathbb{P}^2,\quad (x,t)\mapsto f_t(x)\in\mathbb{P}^2$$

即 $(f_t)_i(x)=\sum_{|\nu|=d}a_{i,\nu}(t)\cdot x^{\nu}$，$i=0,1,2$，其中次数 $d\in\mathbb{N}$ 和系数 $a_{i,\nu}\in\mathbb{C}[t]$固定。我们得到一个参数像族 $Y\subset\mathbb{P}^2\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$，满足 $Y_t=Y\cap\mathbb{P}^2\times\{t\}=f_t(\mathbb{P}^1)$。挑战在于描述 Y 的隐式方程。

对于这个基准示例，我们选择系数$a_{i,\nu}$ 关于 t 呈仿射线性依赖，且系数固定并随机选取。我们的机器也适用于一般系数，但我们将范围限制在单参数族，以便提供一种设置，使消元方法有机会在合理的时间内完成。

我们构造由以下内容生成的图的理想

$$(f_t)_0(x_0,x_1)\cdot u-(f_t)_1(x_0,x_1),\quad (f_t)_0(x_0,x_1)\cdot v-(f_t)_2(x_0,x_1),$$

其中 (x_0,x_1) 是 $\mathbb{P}^1$ 的齐次坐标，而 (u,v) 是陪域$\mathbb{P}^2$的仿射坐标。为通过消元计算像的方程，我们令 $x_0=1$，将方程齐次化，然后从理想中消去 x_1。作为比较，我们也在域 $\mathbb{F}_{101}$ 上以正特征进行计算。应用我们的 A-结式方法时，我们考虑上述系统在簇 $\mathbb{P}^1\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}^2$ 上，其中 $X=\mathbb{P}^1$ 是由“三角形”支撑集 $A_i=\{(0),\ldots,(d)\}$ 得到的环面簇。

[2]请注意，这不是一个Cartier除子。

Deg.	字符 0		字符 101	
1	0.005592 秒	18.758 KiB	0.005427 秒	19.484 KiB
2	0.001284 秒	101.648 KiB	0.005597 秒	22.164 KiB
3	0.013487 秒	17.864 兆字节	0.002422 秒	22.930 KiB
4	2.974198 秒	5.978 吉字节	0.021399 秒	27.523 KiB
5	–	–	0.272273 秒	31.352 KiB
6	–	–	6.796502 秒	33.266 KiB
7	–	–	–	–

表 2. 在特征 0 和 101 下，通过消元计算有理曲线随机族的参数像所需的运行时间和内存消耗

表 2 列出了通过消元计算该族隐式方程的运行时间。没有填写数值的字段表示计算在运行数分钟仍无结果后被中止。对于次数 ≤ 4，我们得到了相当快的结果；然而，尽管总共只有四个变量且仅消去其中一个，计算复杂度似乎仍会随着次数增加而急剧上升。

我们从表1 中可以看出，随着次数增加，直接像复形的计算仍然相对廉价 d，而该复形的行列式计算的复杂度似乎呈指数增长。虽然稳定扭转复形的直接像计算成本更低，但与更优的扭转相比，用于计算行列式的矩阵规模更大。这一点会在后续的行列式计算中得到回报。事实上，对于 $d = 15$ 稳定扭转复形的直接像中非零模的秩分别为31、32和1，而将 Koszul复形扭转 $\lfloor \frac{2d}{3} \rfloor$ 则得到19和19。

—

3.3. **三个变量中具有高重数的结式**。本例所选取的支撑集为

$$A_0 = \{(0,0,0),(0,2,4),(-2,5,8)\}, \qquad A_1 = \{(-2,4,6),(1,0,1),(4,-4,-4)\},$$
$$A_2 = \{(3,-3,-3),(0,1,2)\}, \qquad A_3 = \{(0,0,0),(2,-4,-4)\}$$

在 $\mathbb{Z}^3$ 中，并且（见第1.2节） A-结式相对于消元式的重数为14。为应用公式（8）而计算直接像，需要 1824.227613 秒，并占用 1014.679 吉字节的内存。Weyman 函子的缓存已填充后，这一时间缩短为 0.169954 秒，分配的内存缩减为 32.308 兆字节。随后计算该复形的行列式仅需另外 0.050967 秒，并分配 7.287 兆字节，我们得到多项式 $\Delta \in R = \mathbb{Q}[a_{i,\nu} : \ i = 0, \ldots\ldots, 3, \ \nu \in A_i]$ 共含 120 项。多项式 14 次根 Δ 存在且等于

$$h = a_{1,(-2,4,6)} \cdot a_{2,(3,-3,-3)}^2 - a_{1,(1,0,1)} \cdot a_{2,(3,-3,-3)} \cdot a_{2,(0,1,2)} + a_{1,(4,-4,-4)} \cdot a_{2,(0,1,2)}^2.$$

有趣的是，这既不涉及 A_0 的系数，也不涉及 A_3 的系数。

与这个问题相关的环面簇有七条射线。在谱序列的第一页（6）上，可以找到以下自由模

3	R^{19}	R^{20}	R^1	0	0
2	0	R^{21}	R^{21}	R^1	0
1	0	0	R^2	R^2	0
0	0	0	0	0	R^1
q/p	-4	-3	-2	-1	0.

这种设置为谱序列和 Weyman 复形中的非平凡“马步”映射提供了充足的机会。事实上，我们发现块映射

$$\phi^2_{-2,1} \colon R^2 \to R^1, \text{ and } \phi^2_{-3,2} \colon R^{21} \to R^2$$

非零，而

$$\phi^2_{-3,3} \colon R^{20} \to R^1, \quad \phi^3_{-3,2} \colon R^{21} \to R^1, \text{ and } \phi^r_{-4,3} \text{ for } r > 0$$

均为零。

k	1	2	3	4	5	6	7	8
时间 (s)	31.966781	34.338416	77.535535	86.226101	99.094804	124.743093	189.448820	257.901875
内存	1.203 吉字节	2.941 吉字节	7.910 吉字节	9.796 吉字节	12.000 吉字节	31.474 吉字节	31.116 吉字节	57.223 吉字节

表3. 计算（22）中支撑集的直接像所需的运行时间和内存消耗

3.4. **一个支撑集的随机族**。为了再举一个环面簇 X 不是射影空间的例子，考虑以下适用于 $k>0$ 的支撑集族。

$$A_1=\{(0,0),(0,3\cdot k),(3,2\cdot k)\},\quad A_2=\{(1,1),(2,2),(k,2\cdot k)\},\quad A_3=\{(-1,5),(-2,2),(3,0)\} \tag{22}$$

对于每个 k，我们将环面簇 X 上的 Koszul复形扭曲 $-2\cdot K_X$，其中该扭曲是典范除子的倍数。采用此扭曲计算直接像的运行时间见表3。对于$k=8$，该环面簇有9 条射线，直接像中非零模的秩分别为8、364和356。同样，这些矩阵过大，无法计算此类复形的完整行列式；不过，无论如何，将判别式描述为此类复形的退化轨迹通常更可取，而不是给出单个方程。

参考文献

[BC24] L. Busé 和 C. Checa。“环面 Sylvester 形式”。载于：纯粹与应用代数杂志 228（11，2024）。[BE24] M.K. Brown 和 D. Erman。“托里克簇上的 Tate 解”。载于：欧洲数学会杂志 28（2024），第 269–304 页。[CD05] D. Cox 和 A. Dickenstein。“完备托里克簇的余维定理”。载于：美国数学会会刊 133.11（2005），第 3153–3162 页。[CDS98] E. Cattani、A. Dickenstein 和 B. Sturmfels。“留数与结式”。载于：东京大学数学科学杂志 5（1998），第 119–148 页。[CE00] J. Canny 和 I. Emiris。“一种基于细分的稀疏结式算法”。载于：ACM 3（2000），第 417–451 页。[CE24] C. Checa 和 I. Emiris。“适用于贪心 Canny-Emiris 公式的混合细分”。载于：数学与计算机科学 18.1（3，2024）。[CE93] J. Canny 和 I. Emiris。“稀疏混合结式的高效算法”。载于：国际应用代数、代数算法与纠错码研讨会论文集。G. Cohen、T. Mora 和 O. Moreno 编。计算机科学讲义。施普林格出版社，1993，第 89–104 页。[CE95] J. Canny 和 I. Emiris。“ 稀疏结式与混合体积的高效增量算法 ”。载于：符号计算杂志 20.2 （ 1995 ），第 117–149 页。[CLS11] D.A. Cox、J.B. Little 和 H.K. Schenck。托里克簇。第 124 卷。数学研究生教材。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2011。doi： 10.1090/gsm/124。[Cox94] David A. Cox。环面留数。1994。arXiv： alg-geom/9410017 [alg-geom]。网址： https://arxiv.org/abs/alg-geom/9410017。[DD01] C. D’Andrea 和 A. Dickenstein。“多元结式的显式公式”。载于：纯粹与应用代数杂志 164.1（2001），第 59–86 页。[Dec+25] W. Decker 等编。《计算机代数系统 OSCAR：算法与示例》。第 1 版。第 32 卷。数学中的算法与计算。 https://link.springer.com/book/9783031621260。施普林格，2025。[Dim04] A. Dimca。《拓扑学中的层》。Universitext。施普林格出版社，柏林，2004，第 xvi+236 页。ISBN：3-540-20665-5。doi： 10.1007/978-3-642-18868-8。网址： https://doi.org/10.1007/978-3-642-18868-8。[DS15] C. D’Andrea 和 M. Sombra。“稀疏结式的泊松公式”。载于：伦敦数学会会刊 110.3（2015），第 932–964 页。[EMS00] D. Eisenbud、M. Mustaţă 和 M. Stillman。“ 托里克簇上的上同调与具有单项式支撑的局部上同调 ”。载于：符号计算杂志 29.4–5 （ 2000），第 583–600 页。doi： 10.1006/jsco.1999.0326。

[Ful98] W. Fulton。交理论。第二版。第 2 卷。数学及其边缘领域成果。施普林格出版社，柏林，1998，第 xiv+470 页。ISBN：3-540-62046-X；0-387-98549-2。doi：10.1007/978-1-4612-1700-8。网址：https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1700-8。[GKZ94] I.M. Gelfand、M.M. Kapranov 和 A.V. Zelevinsky。《判别式、结式与多维行列式》。ISBN 0-8176-3660-9。波士顿：Birkhäuser，1994。网址：https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4771-1。[Har67] R. Hartshorne。局部上同调。施普林格数学讲义。施普林格出版社，第 67 卷。[Stu93] B. Sturmfels。“论结式的牛顿多面体”。载于：代数组合学杂志（1993）。[Wey94] J. Weyman。“利用高阶直接像计算判别式”。载于：美国数学会汇刊 343.1（1994），第 367–389 页。doi：10.1090/S0002-9947-1994-1184118-6。[Zac25] M. Zach。切赫上同调中谱序列的若干计算方面。2025。arXiv：2506.02636 [math.AG]。

4. 附录

Deg.	Weyman 复形		填充缓存的 W.C.		全局总复形		
d	时间（s）	内存	时间（s）	内存	$e_{\min}$	时间（s）	内存
1	0.349505	2.183 兆字节	0.000114	128.391 KiB	1	0.847143	27.873 兆字节
2	0.978917	9.686 兆字节	0.001795	1.278 兆字节	2	0.867675	35.968 兆字节
3	1.025479	16.348 兆字节	0.002640	1.956 兆字节	2	0.912313	50.881 兆字节
4	1.269116	31.889 兆字节	0.008439	4.876 兆字节	4	0.963399	97.582 兆字节
5	1.047233	52.978 兆字节	0.010910	9.446 兆字节	6	1.264132	179.033 兆字节
6	1.043226	70.532 兆字节	0.014172	12.193 兆字节	6	1.334998	245.344 兆字节
7	1.107916	110.535 兆字节	0.024167	20.515 兆字节	8	1.731219	388.416 兆字节
8	1.167850	170.018 兆字节	0.321515	35.414 兆字节	10	2.100965	642.834 兆字节
9	1.915721	185.126 兆字节	0.041010	33.428 兆字节	10	2.265868	680.995 兆字节
10	1.592025	244.932 兆字节	0.065679	46.465 兆字节	12	3.000391	893.446 兆字节
11	1.741202	331.905 兆字节	0.090125	62.450 兆字节	14	3.995461	1.127 吉字节
12	2.593362	380.803 兆字节	0.105257	70.451 兆字节	14	4.065723	1.397 吉字节
13	1.915596	483.991 兆字节	0.110633	92.036 兆字节	16	6.082456	1.808 吉字节
14	2.044550	585.171 兆字节	0.133449	110.303 兆字节	18	7.288717	2.145 吉字节
15	2.107704	634.886 兆字节	0.138961	114.216 兆字节	18	7.129719	2.278 吉字节
16	2.932485	813.741 兆字节	0.198831	141.760 兆字节	20	8.341343	2.677 吉字节
17	3.036552	896.070 兆字节	0.175430	148.308 兆字节	22	8.835953	2.686 吉字节
18	2.745122	1.031 吉字节	1.019911	179.156 兆字节	22	12.586285	3.475 吉字节
19	2.983508	1.213 吉字节	0.242226	206.849 兆字节	24	14.197863	3.978 吉字节
20	4.185056	1.485 吉字节	0.308577	253.038 兆字节	26	17.783226	4.698 吉字节
21	4.178524	1.583 吉字节	0.316916	256.112 兆字节	26	20.773759	4.997 吉字节
22	4.794206	1.845 吉字节	0.363771	289.298 兆字节	28	19.302929	5.195 吉字节
23	7.529512	2.122 吉字节	0.560900	318.048 兆字节	30	25.241289	5.822 吉字节
24	6.441480	2.317 吉字节	0.493041	350.728 兆字节	30	30.402498	6.466 吉字节
25	6.414402	2.586 吉字节	0.460874	374.417 兆字节	32	35.474589	6.936 吉字节
26	7.615630	3.038 吉字节	0.513239	429.768 兆字节	34	44.055398	7.746 吉字节
27	6.950785	3.233 吉字节	1.766022	438.364 兆字节	34	48.122962	7.607 吉字节
28	8.184260	3.664 吉字节	0.613829	499.062 兆字节	36	59.547643	8.632 吉字节
29	8.525542	4.204 吉字节	1.882132	572.907 兆字节	38	73.467864	10.052 吉字节
30	9.861769	4.516 吉字节	1.853813	586.525 兆字节	38	75.614470	10.041 吉字节
31	11.139724	5.175 吉字节	1.882798	650.793 兆字节	40	94.480961	11.037 吉字节
32	11.441082	5.709 吉字节	2.365171	713.414 兆字节	42	110.174999	11.716 吉字节
33	12.987692	6.281 吉字节	2.202816	771.769 兆字节	42	119.582474	13.299 吉字节
34	13.529525	7.008 吉字节	2.413210	821.759 兆字节	44	142.311629	13.677 吉字节
35	16.650439	7.839 吉字节	2.804185	913.502 兆字节	46	160.843573	15.075 吉字节
36	16.500480	8.230 吉字节	2.472642	902.511 兆字节	46	173.413111	14.439 吉字节
37	17.738655	9.073 吉字节	2.734722	1015.709 兆字节	48	195.035378	15.943 吉字节
38	19.001251	9.882 吉字节	2.515698	1011.516 兆字节	50	216.408133	15.113 吉字节
39	19.978116	10.766 吉字节	2.879243	1.111 吉字节	50	245.959172	17.800 吉字节
40	22.775290	12.001 吉字节	3.752681	1.250 吉字节	52	277.660898	18.741 吉字节

表4. 示例中直接像的零次态射计算的运行时间和内存消耗 2.6 适用于 $n = 2$

F. Groh：ISG Industrielle Steuerungstechnik GmbH，STEP，格罗皮乌斯广场10号，70563 斯图加特，德国 M. Zach：凯撒斯劳滕-兰道理工大学，戈特利布·戴姆勒街，48号楼，67663 凯撒斯劳滕，德国