将随机材料属性识别视为随机反演问题

Eliška Kočkov´a*，Anna Kučerov´a

捷克共和国布拉格捷克技术大学土木工程学院，Th´akurova 7，邮编 166 29

*通讯作者：eliska.kockova@fsv.cvut.cz

本文是已被 *Acta Polytechnica* 接收发表的论文预印本。

摘要： 许多建筑材料的非均质性使结构行为的数值建模更加复杂。材料的随机性可表现为每个材料试件的材料参数各不相同。为描述非均质材料的固有变异性，将描述材料属性的模型参数视为随机变量，而识别这些参数需要求解一个随机反演问题。随机反演旨在寻找模型参数的概率描述，使模型响应的分布与观测数据的分布相对应。本文提出了两种不同的随机反演问题表述方式。第一种表述源于对指定参数分布中不确定统计矩的贝叶斯推断；第二种表述的核心思想则是根据观测数据的分布，对随机模型参数进行非线性变换。

arXiv:2602.14684v1 [cs.CE] 16 Feb 2026

关键词： 非均质材料；不确定性；随机反演；分层贝叶斯模型；变量变换；主成分分析；马尔可夫链蒙特卡罗；多项式混沌。

1 引言

材料属性在不同尺度上的随机性，源于其天然非均质性或制造过程中产生的缺陷，可能会显著影响结构行为。开发并校准涉及非均质材料的系统数值模型，不仅需要准确的模型预测，还需要全面了解相关不确定性。根据所建模实际系统的不同，材料的非均质性可以用不同方式描述。为进一步明确，我们将系统划分为两大类；这两类系统在是否涉及非均质材料特征的随机性，以及由此确定潜在模型参数的方式上存在根本差异：

确定性系统： 一个对象——某个特定的实验室试件，或更常见的某个特定的实际结构——在此称为确定性系统。该对象在其空间域的每个点都具有一些已知但未知的材料属性。确定性模型输入 $\boldsymbol{x}$ 与输出 $\boldsymbol{y}$ 之间的关系由数值模型给出

$$\boldsymbol{y} = g(\boldsymbol{x}). \tag{1}$$

随机系统： 一组对象——材料样本或系统实现——它们共享定义该系统的某些共同特征，而其他属性则在不同实例之间随机变化。例如，一组实验室试件，如尺寸相同、由相同混凝土配合比制成的非均质混凝土圆柱体，其中各个样本的形态各不相同。数值模型将随机模型输入 $\boldsymbol{X}$ 与随机输出 $\boldsymbol{Y}$ 之间的关系定义为

$$\boldsymbol{Y} = g(\boldsymbol{X}). \tag{2}$$

本文提出的分类并非完全源于特定系统的固有属性；确定性系统与随机系统之间的区别，更多是建模者出于实用考虑所作的选择。

本文聚焦于非均质材料的随机建模，其中通过在模型输入参数中引入随机性来表征其固有变异性，从而涵盖所有相关的不确定性，尤其是微观结构不规则的空间排列。校准此类材料模型需要识别其参数的概率密度函数（PDF），这被称为一种随机

反演问题。随机反演能够根据间接的实验测量推断模型参数未知的概率密度函数。

实验测量通常会重复进行数次。对于特定的实验实现 i，这些参数具有特定且固定但未知的数值 $\boldsymbol{x}_i$。对于来自同一非均质材料的一组 n 试样，$i = 1, \ldots\ldots n$ 的数值存在有待识别的未知变异性。

参数识别的概率表述的基本思想是，将可观测数据 $\boldsymbol{Z}$、模型响应 $\boldsymbol{Y}$ 和模型参数 $\boldsymbol{X}$ 视为具有其概率密度函数的连续随机变量

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Z} &\sim f_{\boldsymbol{Z}}(\cdot)\ , \\ \boldsymbol{Y} &\sim f_{\boldsymbol{Y}}(\cdot)\ , \\ \boldsymbol{X} &\sim f_{\boldsymbol{X}}(\cdot)\ . \end{aligned} \tag{3}$$

数值模型（2）的随机反演解是模型输入参数的概率密度函数 $f_{\boldsymbol{X}}(\cdot)$，该函数给出了与观测数据 $f_{\boldsymbol{Z}}(\cdot)$ 的分布相对应的模型响应 $f_{\boldsymbol{Y}}(g(\boldsymbol{X}))$的分布。

材料样本的材料属性（例如确定性情形下的一个混凝土圆柱体）通常由一组材料参数 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots\ldots x_{n_x})$表征，例如杨氏模量、泊松比等。在概率表述中，材料的材料属性（例如 B30混凝土）由随机向量 $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots\ldots X_{n_X})$表示。实验通常会产生离散为 n_t 个时间步的时变数据。在确定性情形下，观测及相应的数值模型如下

$$\boldsymbol{y} = (y_1, ..., y_{n_t}), \quad y_t = g_t(\boldsymbol{x}) \text{ for } t = 1, ..., n_t\ , \tag{4}$$

以及在随机情况下

$$\boldsymbol{Y} = (Y_1, ..., Y_{n_t}), \quad Y_t = g_t(\boldsymbol{X}) \text{ for } t = 1, ..., n_t\ . \tag{5}$$

为了使反演分析取得成功，必须恰当区分所存在的不确定性。一般分类将不确定性分为两种基本类型 [1, 2]:

认知 不确定性表示知识的缺乏，例如由测量误差或测量次数较少造成。这种不确定性可以通过获取任何有关感兴趣量的新信息来降低。本文考虑相互独立且服从正态分布的实验误差 $\boldsymbol{E} \sim N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\sigma}_E^2\mathbf{I})$，

确定性系统的观测变为随机的

$$Z_t = g_t(\boldsymbol{x}) + E_t \text{ for } t = 1, ..., n_t. \tag{6}$$

偶然不确定性是不可约的随机性，或者说是感兴趣量的变异性。它代表一种固有随机性，其来源是将一组测量值（例如来自不同位置或时间的测量值）建模为一个随机变量。由于系统具有随机输入，观测值也具有随机性 $\boldsymbol{X}$

$$Z_t = g_t(\boldsymbol{X}) \text{ for } t = 1, ..., n_t. \tag{7}$$

我们将同时涉及认知不确定性和偶然不确定性的随机反演问题表述如下

$$\begin{gathered} Z_t = g_t(\boldsymbol{X}) + E_t \text{ for } t = 1, ..., n_t\ , \\ \boldsymbol{X} \sim f_{\boldsymbol{X}}(\cdot)\ , \\ Z_t \sim f_{Z_t}(\cdot) \text{ for } t = 1, ..., n_t\ , \\ Y_t = g_t(\boldsymbol{X}) \sim f_{Y_t}(\cdot) \text{ for } t = 1, ..., n_t\ , \\ E_t \sim N(0, \sigma_E^2) \text{ for } t = 1, ..., n_t\ . \end{gathered} \tag{8}$$

随机观测值 Z_t 可以由随机模型响应 Y_t 预测，同时还存在测量误差 E_t。在本文中，未知模型输入 $\boldsymbol{X}$ 是材料参数；由于我们关注非均质材料，这些参数具有偶然不确定性。随机问题与确定性问题的比较及其相关不确定性如图1所示。

本文补充讨论了作者在其特许任职资格论文 [3] 中探讨的偶然不确定性识别问题，全文安排如下。第2节聚焦于从同一材料的一组试样上测得的间接、有噪声实验数据中识别非均质材料属性的确定性和概率方法。第3节和第4节介绍了针对偶然不确定性的随机反演问题的两种不同表述。第一种表述涉及为未知模型参数选定特定形式的 $f_{\boldsymbol{X}}(\cdot)$，并将其统计矩视为不确定的随机变量。随后，概率识别聚焦于参数分布的这些所谓超参数，并通过贝叶斯方法 [4]推断这些超参数。第二种表述尤其关注实验数据的联合概率分布 $f_{\boldsymbol{Z}}(\cdot)$。随后，未知参数的分布 $f_{\boldsymbol{X}}(\cdot)$由 $f_{\boldsymbol{Z}}(\cdot)$的非线性变换确定。

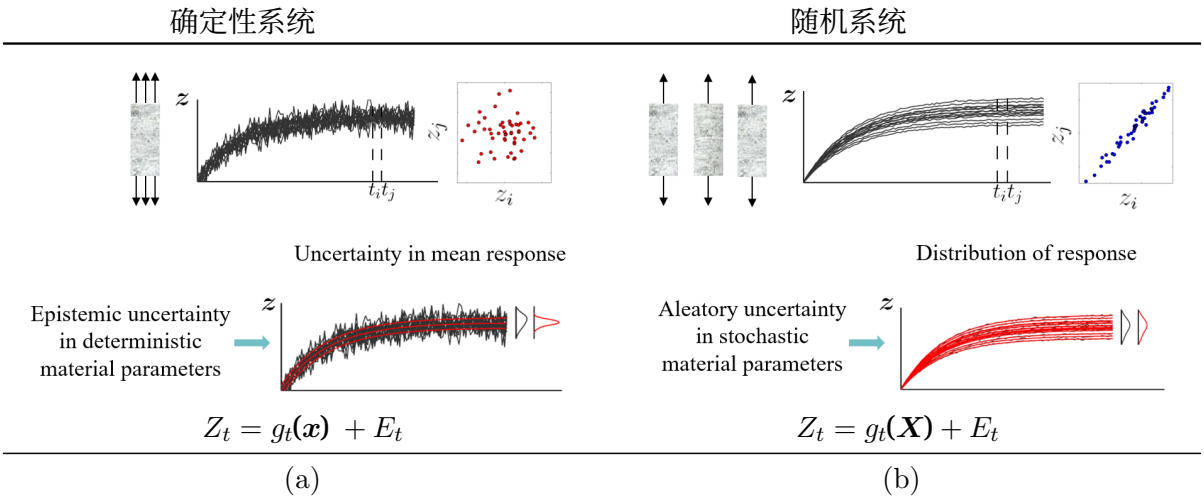

图1：将实验输出视为随机变量 Z_t 的原因包括：(a) 实验误差 E_t（一个具有确定性材料参数向量 $\boldsymbol{x}$的试样）；以及 (b) 实验误差 E_t 和由随机变量 $\boldsymbol{X}$ 表征的随机材料参数（试样集合）。

本文将所提出的随机反演表述应用于两个数值示例。在第5节中，首先针对合成数据，对黏塑性材料的运动硬化和各向同性硬化材料模型进行概率参数识别，以验证该方法；随后，再利用真实实验数据对模型进行标定。该案例研究考虑了包含许多高度相关分量的实验数据。因此，首先将这些分量变换为不相关的主成分 [5]，其联合分布 $f_{\boldsymbol{Z}}(\cdot)$随后进一步变换为 $f_{\boldsymbol{X}}(\cdot)$。第6节详细介绍的第二个示例展示了处理来自两种不同类型破坏性实验的观测数据时，随机反演问题的一种求解方案。不同材料样本获得的实验数据无法直接构建其联合分布 $f_{\boldsymbol{Z}}(\cdot)$，这使得基于变换的参数识别更为复杂。因此，本节提出一种补救方法：结合观测数据与建模得到的合成数据来构建 $f_{\boldsymbol{Z}}(\cdot)$。结论总结于第7节。

2 偶然不确定性的量化

如果没有关于材料组分形态或晶粒尺寸的信息，但目标是将材料建模为一个随机集合（例如，代表一组混凝土试样），那么材料参数就不再被视为确定性的。

材料参数的识别会对材料参数中的偶然不确定性进行量化。偶然不确定性由随机变量（或可能的随机场）表示，其概率分布刻画了该集合中材料属性取值的分布。

对非线性物理模型参数中的偶然不确定性进行量化，远不如对上述确定性参数中的认知不确定性进行量化那样成熟。文献中记载的非线性模型参数偶然不确定性量化策略，可分为以下两类。尽管可以用随机场来表征材料参数中的偶然不确定性，但大多数研究都用随机变量描述每种材料属性。每个材料样本都用一个材料属性样本来建模，并假设该属性在试样域内空间恒定。因此，一组材料样本中的材料属性分布，可以视为这组样本中某种有效（或均质化）属性的分布。

第一类方法基于对偶然不确定性进行确定性拟合，其中为每个材料参数指定的概率分布由参数化概率密度函数 $f_{\boldsymbol{X}}(\cdot)$ 建模。于是，反演分析的目标转变为寻找指定概率密度函数的参数（即所谓的超参数），这一过程可以确定性地进行。 [6]比较了均值——

中心一阶摄动法与蒙特卡洛最大似然估计（MLE）在确定指定概率密度函数的统计矩方面的表现。所提出的方法存在若干重要局限。首先，假设统计模型类型已知，这一假设限制很大，并且无法识别更高阶统计矩。摄动法（即使加入其他非线性项进行扩展）也很难应用于非线性模型，而基于蒙特卡洛的最大似然估计则计算开销很高。最近， [7, 8] 独立采用基于多项式混沌（PC）的替代模型，以加速将偶然不确定性识别表述为确定性优化问题的过程。具体而言，通过优化统计矩或多项式混沌系数（它们定义了物理参数的统计模型），使模型响应的相应统计矩与实验所得统计矩相匹配。 [7]强调，模型响应的多项式混沌替代模型为计算灵敏度提供了一种高效方法； [8]则着眼于多项式混沌有效表示高阶统计矩以及识别非高斯参数的能力。然而，许多相关问题仍未解决。例如，完全没有考虑相关认知不确定性的量化。这意味着该方法无法体现额外测量的数量及其数值。此外，将所提出的方法应用于相关观测集合可能会有困难；这类观测通常通过测量荷载-位移曲线（见图1）或收集布置在每个试样上的一组探针所获得的观测数据得到。在这种情况下，观测维数增加会导致其联合分布日益复杂，进而增加底层优化问题的维数或数量。

另一方面，对偶然不确定性进行概率估计，可以在描述材料参数中的偶然不确定性的同时，描述与之相关的、关于所估计分布正确性的认知不确定性。近期有多项研究探讨了这种方法 [9, 10, 11, 12]。作者再次采用材料参数分布的多项式混沌近似，并通过为测量数据构造似然函数来求得多项式混沌系数。与[6], 不同的是，这里将多项式混沌系数视为不确定量，并通过马尔可夫链蒙特卡罗采样以贝叶斯方式识别。因此，引入新的随机变量来描述多项式混沌系数，使我们能够

量化材料偶然属性估计分布中的认知不确定性。然而，该方法仅针对所识别的材料参数与观测量相一致的情况推导得出。对于测量非线性物理模型响应的情况，首先要解一组确定性反问题，然后再单独估计离散参数值集合中的偶然不确定性。但这种分离并非总是可行，因为所采用的确定性反问题通常是不适定的。早在此之前，已有类似概念用于对指定给随机变量的概率密度函数的统计矩进行概率估计 [4, 13]。不过，直到近期才有人详细阐述了将其推广为直接根据非线性响应分量的观测进行估计的方法 [14, 15], ，并在[16]中介绍了该方法在粘塑性材料参数估计中的应用。该公式在实际应用中的主要局限，是随着用于获取观测的材料样本数量增加，问题维数和计算量也会显著上升。

3 基于层次建模的贝叶斯推断

贝叶斯识别的核心原则遵循一种常见的推理模式：通过结合所有可用信息，形成对随机事件的信念 [17]。这一框架自然地将不确定性纳入我们对已识别参数的主观认知中。贝叶斯推断已成为越来越受欢迎且广泛采用的参数识别方法，它通过使逆问题适定，提供了一种优雅的解决方案。

贝叶斯推断可扩展至多层次框架，从而也能考虑偶然不确定性 [15, 14]。层次建模使模型参数 $\boldsymbol{x}$ 能够作为随机变量处理；对于 $i = 1$, ..., n个实验试样，这些变量具有固定但未知的特定实现值 $\boldsymbol{x}_i$。关于材料参数的结构先验知识表示为

$$(\boldsymbol{X}_i|\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{\theta}) \sim p_{\boldsymbol{X}|\boldsymbol{\Theta}}(\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{\theta}) \text{ for } i = 1, ..., n, \quad (9)$$

其中，模型参数 $\boldsymbol{x}$ 的概率性描述由新的随机变量决定，这些随机变量称为超参数 $\boldsymbol{\theta}$ [4]，例如均值和标准差。 $\boldsymbol{\theta}$ 也同样是固定的，但

其值未知，并被建模为具有自身先验分布（称为超先验）的随机变量

$$\boldsymbol{\Theta} \sim p_{\boldsymbol{\Theta}}(\boldsymbol{\theta}). \tag{10}$$

根据观测可交换性假设 [18], ，联合先验分布表示为

$$(\boldsymbol{X}_1, ..., \boldsymbol{X}_n, \boldsymbol{\Theta}) \sim \left(\prod_{i=1}^{n} p_{\boldsymbol{X}|\boldsymbol{\Theta}}(\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{\theta}) \right) p_{\boldsymbol{\Theta}}(\boldsymbol{\theta}). \tag{11}$$

后验分布$p(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{z}_1, \dots, \boldsymbol{z}_n)$ 定义为

$$\left(\prod_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{z}_i|\boldsymbol{x}_i) \right) \left(\prod_{i=1}^{n} p_{\boldsymbol{X}|\boldsymbol{\Theta}}(\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{\theta}) \right) p_{\boldsymbol{\Theta}}(\boldsymbol{\theta}), \tag{12}$$

其中，似然函数 $f(\boldsymbol{z}_i|\boldsymbol{x}_i)$ 表示测量值 $\boldsymbol{z}_i$ 与模型输出 $\boldsymbol{y}_i$ 之间的差异，这种差异由相互独立的测量误差造成；此处假设测量误差服从均值为零、协方差矩阵为 $\boldsymbol{\sigma}_E\mathbf{I}$ 的正态分布，该协方差矩阵因实验而异。

$$(\boldsymbol{Z}_i|\boldsymbol{X}_i = \boldsymbol{x}_i) \sim f(\boldsymbol{z}_i - g(\boldsymbol{x}_i), \boldsymbol{\sigma}_E\mathbf{I}) \text{ for } i = 1, ..., n. \tag{13}$$

每次获得新的测量值后，我们都会据此更新超参数，从而增进对它们的了解；而模型参数先验分布的结构保持不变。

4 随机变量的非线性变换

上述用于量化偶然不确定性的公式有一个关键缺点：需要为每个材料参数指定一个特定的分布族，并且只能确定其统计矩。若用多项式函数描述每个随机材料参数，并对其系数进行搜索，则可在一定程度上放宽这一限制，从而找到更一般的概率分布。事实上，在给定多项式系数数量的情况下，预先选择特定的多项式次数，与在给定统计矩数量的情况下选择分布族非常相似，同样存在局限性。基于这一动机，下面将介绍另一种计算效率更高的策略。其基本思路是对随机变量进行非线性变换，也称为变量变换；更详细的理论概述见 [19] 。

本文考虑数值模型 (2)，其中参数空间到响应空间之间存在非线性映射

$$\mathbf{g} : (\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbf{n_x}}) \mapsto (\mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbf{n_z}}), \tag{14}$$

其中，模型响应 $\boldsymbol{y}$ 表示一个 n_z 维向量，用于预测可观测数据，并假设该向量是服从联合概率分布 $\boldsymbol{Z} \sim f_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{z})$ 的随机向量。 n_x 维模型参数向量被视为一个随机向量，其联合概率分布 $\boldsymbol{X} \sim f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})$ 待确定。随机反演的解可通过将概率分布 $f_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{z})$ 非线性变换为分布 $f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})$ 得到，关系如下

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = f_{\boldsymbol{Z}}(\mathbf{g}(\boldsymbol{x})) \cdot |J_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x})|, \tag{15}$$

其中， $J_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x})$ 表示雅可比矩阵 $^{\partial}\mathbf{g}(\boldsymbol{x})\,\partial\boldsymbol{x}$。明确进行变量变换会对模型 $\mathbf{g}(\boldsymbol{x})$ 施加某些约束。首先，分布 $f(\boldsymbol{x})$ 的逆像支撑集 $\mathcal{X}$ 必须包含在 $\boldsymbol{y}$ 的值域内，即 $\mathcal{Y} = \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{x})$。其次，$\mathbf{g}(\boldsymbol{x})$ 必须是从 $\mathcal{X}$ 到 $\mathcal{Y}$ 的可微变换，且其逆变换也必须可微。原始材料模型未必完全满足这些约束，但用于加速变换过程的多项式近似 [20] 则很容易满足这些约束。在这种情况下，雅可比矩阵可以通过解析方法轻松求得。此外，当通过适当的抽样方法（如马尔可夫链蒙特卡罗）进行变换时，第二个约束并不会造成太大负担，参见 [21]。

这一表述的关键条件是映射 (14) 必须为双射。实际中，实验室实验通常会得到离散化为一组点的荷载-挠度曲线，这些点对应观测向量 $\boldsymbol{z}$。因此，维数 n_z 通常远高于维数 n_x ，且 $\boldsymbol{z}$ 的特定分量之间具有很强的相关性，见图1b。将实验重复 n 次所得的数据收集到矩阵$\mathbf{Z} = (\boldsymbol{z}_1, \dots, \boldsymbol{z}_n) \in \mathbb{R}^{n_z \times n}$后，可以直接根据数据计算特定响应分量之间的相关性。通过主成分分析（PCA），可以轻松将这些分量转换为一组互不相关的量，并按照各自的方差[5]排序。前几个分量涵盖了原始数据中的大部分统计变异性。因此，PCA 可以将观测数据 $\mathbf{Z}$ 的维数降至由前$\mathbf{Q} = (\boldsymbol{q}_1, \dots, \boldsymbol{q}_n) \in \mathbb{R}^{n_x \times n}$

个最重要分量构成的集合，且不会造成显著的信息损失。

保留的主成分数量选择为与参数向量的维数相匹配，以便在降维后的数据表示与参数空间之间保持良态且局部双射的映射。与较小特征值相关的成分对应于响应空间中低方差的方向，通常主要受噪声或弱可辨识特征的影响。因此，舍弃这些成分相当于执行正则化步骤，并不会移除在给定参数数量下模型能够可靠利用的信息。

在当前表述中，测量误差未被显式建模，而是被纳入数据的变异性中。将数据约简为前 n_x 个主成分，意味着有意舍弃其余变异性，其中包括高阶响应模态以及部分噪声。因此，所得的参数不确定性应被解释为有效不确定性。一个案例的解 $n_x < n_z$ 如下

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = f_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{q}(\mathbf{g}(\boldsymbol{x}), \mathbf{Z})) \cdot |\frac{\partial \boldsymbol{q}(\mathbf{g}(\boldsymbol{x}), \mathbf{Z})}{\partial \boldsymbol{x}}| \quad (16)$$

然而，主成分的不相关性并不意味着它们具有统计独立性。因此，构造其联合概率密度函数 $f_{\boldsymbol{Q}}$（$\mathbf{q}$）同样并不简单，而且必须注意，将其分解为独立边缘分布$f_{\boldsymbol{Q}}$（$\mathbf{q}$）$= \prod f_{\boldsymbol{Q}_i}$（$q_i$）的乘积可能会引入一定误差。

5 根据循环加载试验估计参数分布

所提出的随机反演问题表述用于校准一种铜合金的运动学硬化与各向同性硬化数值模型，该模型由图 2 所示的本构方程定义。

图 3 展示了可用的实验数据，这些数据对应于高温下进行的 16 次应变控制循环加载试验。

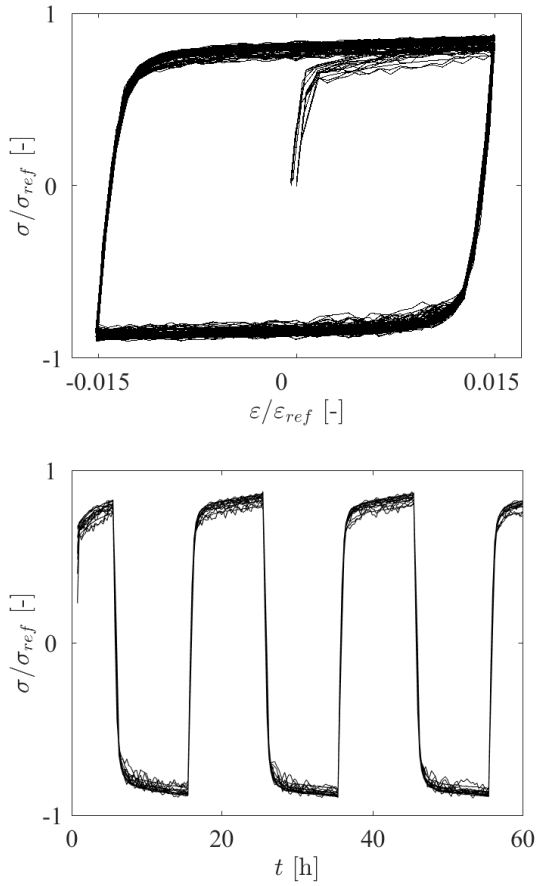

图 3：实验数据：应力-应变曲线。

材料数据以相对单位表示：应力表示为相对于 σ_{ref} 的比值，应变表示为相对于 ε_{ref} 的比值。本文始终采用这些参考值，以确保所有图中的数据保持一致。此处展示的示例是一个项目的一部分

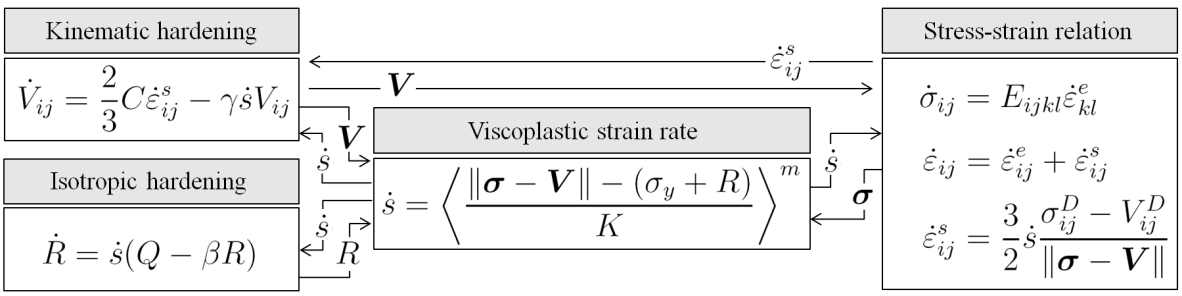

图 2：具有非线性各向同性与运动硬化的黏塑性模型本构方程。

该项目由欧洲航天局开展，相关结果属于机密，因此所有数据均已缩放。应力-应变曲线离散为 568 个点，并假设每个测量点的实验误差均为零均值、独立同分布的高斯随机变量。在较高温度下，循环材料行为主要由运动硬化机制主导，经过短短几个循环后便达到应力饱和 [22]。这种铜合金没有明显的屈服极限，其随动硬化响应呈非线性。

相应的模型包含六个材料参数，在识别程序中，模型本身被视为黑箱。图 2 方程中给出的硬化模量 Q 和 C 被饱和值 $R_\infty = Q/\beta$ 和 $V_\infty = C/\gamma$ 取代。模型参数

$$\boldsymbol{X} = (..., X_j, ...) = (\sigma_y, V_\infty, \gamma, R_\infty, \beta, \nu) \qquad (17)$$

待识别的模型参数汇总于表 1，其可行域（模型在该范围内稳定且能产生有效预测）被缩放至 $[0; 1]$。为了模拟非均质材料的行为，这些参数被视为随机变量，校准程序旨在识别其概率分布，以表征相应的偶然不确定性。

参数名称	
σ_y	屈服应力
V_∞	随动硬化饱和度
γ	随动动态回复常数
R_∞	各向同性硬化饱和度
β	各向同性动态回复常数
ν	泊松比

表1：待识别的模型参数 ed.

5.1 识别程序的验证

模拟了由16条曲线组成的集合，以表示对非均质黏塑性材料进行循环加载试验所得的合成数据；见图 4。这些数据用作测试集，用于验证这两种识别形式。

对于相互独立的 $n = 16$ 组输入样本 $\boldsymbol{x}_i$、 $i = 1, ...,$ n，采用具有指定均值和标准差的对数正态分布生成合成数据集合。在所设计的实验中，有一个参数并不重要

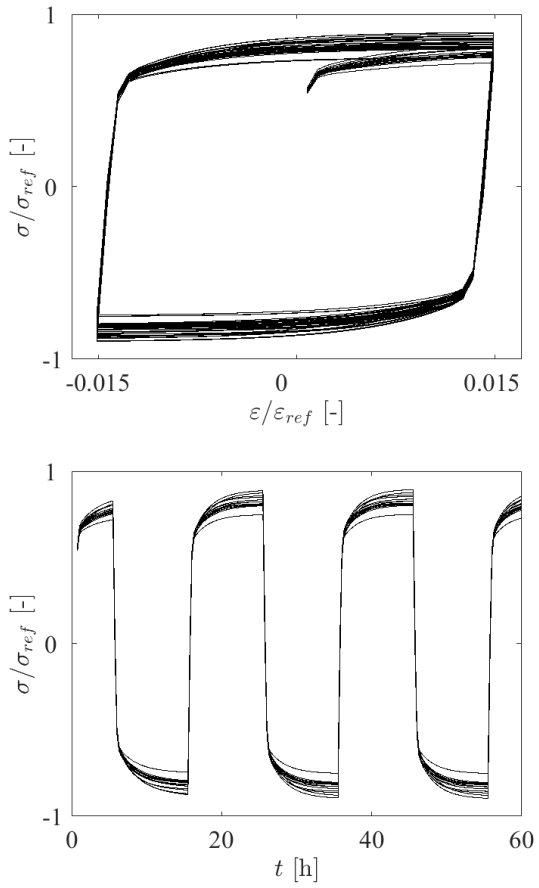

图4：通过循环加载试验的数值模型获得的16条合成曲线。

，且完全不会影响模型响应；特意固定该参数的取值，是为了展示识别程序如何应对这种情况。目标是识别给定加载试验中的相关参数，并确定与合成数据对应的概率分布。

5.1.1 贝叶斯层次模型

贝叶斯识别需要对参数分布作出假设。在本例中，假设未知模型参数为服从对数正态分布的随机变量

$$(X_j|\boldsymbol{\Theta}_j = (\mu_{X_j}, \sigma_{X_j})) \sim LN(X_j; \mu_{X_j}, \sigma^2_{X_j}) \quad \text{for } j = 1, ..., 6, \qquad (18)$$

相应的均值 μ_{X_j} 和标准差 $\boldsymbol{\sigma}_{X_j}$ 是未知超参数$\boldsymbol{\Theta}_j = (.., \Theta_{jh}, ...)$，其先验 $U(\Theta_{jh}, a_{jh}, b_{jh})$为无信息均匀先验。这里假设模型参数彼此不相关，否则还需引入其他超参数；例如参见 [23]。

联合先验分布为

$$\left(\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n_X} LN(x_{ij};\boldsymbol{\theta}_j)\right)\prod_{j=1}^{n_X}\prod_{h=1}^{n_H} U(\theta_{jh};a_{jh},b_{jh}). \tag{19}$$

似然函数 (13) 涉及所有合成数据 ($n = 16$, $n_t = 568$)，以及对应的独立同分布的高斯实验误差；这些误差的均值为零，且在曲线的每个点上标准差 $\sigma_E = 0.01$ 均相同

$$\prod_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{z}_i|\boldsymbol{x}_i) = \prod_{i=1}^{n} N(\boldsymbol{z}_i - g(\boldsymbol{x}_i);\mathbf{0},\boldsymbol{\sigma}_E\mathbf{I}). \tag{20}$$

σ_E 的值假定为已知且固定，因为该值由实验数据提供方指定；伪实验数据也采用相同的噪声水平。

根据贝叶斯定理，将式 (19) 和 (20) 合并，得到 108 个随机变量的联合后验分布 (12)，具体包括 96 个参数（对应于 16 次测量的 $n_X = 6$ 个模型参数）和 12 个超参数（n_H =每个参数边缘概率密度函数的 2 个统计矩）。

采用马尔可夫链蒙特卡罗（MCMC）方法进行贝叶斯推断，通过对称的提议分布，利用 Metropolis算法获得后验样本—验样本 [24, 21]。后验样本来自一条马尔可夫链，舍弃初始预热期后获得。通过反复进行初步运行调整 Metropolis算法中的提议方差，使接受率约为 20% 至 50%，从而确保链具有令人满意的混合效果[25]。通过以基于多项式混沌的近似模型替代完整数值模型，降低了计算量；具体而言，该近似采用标准正态随机变量的埃尔米特多项式 [26, 27]。借助回归方法 [28]，根据基于拉丁超立方抽样 [29] 、从参数先验分布中抽取的样本所进行的 10000 次模型仿真，计算多项式系数。根据交叉验证结果，采用八阶埃尔米特多项式。

图5展示了各参数识别得到的边缘概率密度函数，并与由指定的对数正态分布生成的合成数据输入的直方图进行了比较。所示边缘密度并非先验或后验预测分布，而是代表超参数取某一代表性值时对应的偶然不确定性；而认知

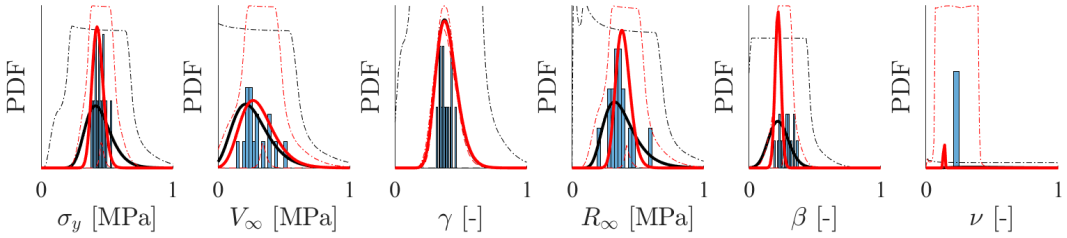

图5：层次贝叶斯——验证：合成实验输入的直方图；先验（黑色）和后验（红色）参数的概率密度函数分别对应先验超参数均值和后验众数（实线），并附有对应于 90% 超参数取值范围的边界（虚线）。

		σ_y [兆帕]		V_∞ [兆帕]		γ [-]		R_∞ [兆帕]		β [-]		ν [-]	
		μ	σ	μ	σ	μ	σ	μ	σ	μ	σ	μ	σ
MEAN	指定值 0.444			0.263		0.386		0.381		0.283		0.240	
	DATA	0.444		0.292		0.378		0.361		0.282		0.240	
	先验	0.444	0.128	0.263	0.182	0.397	0.146	0.381	0.165	0.228	0.132	0.520	0.300
	后验	0.457	0.025	0.321	0.039	0.394	0.002	0.404	0.032	0.268	0.016	0.172	0.049
STD	指定值 0.052			0.105		0.048		0.095		0.044		0	
	DATA	0.040		0.098		0.041		0.090		0.049		0	
	先验	0.102	0.037	0.145	0.053	0.082	0.046	0.131	0.048	0.076	0.031	0.300	0.173
	后验	0.043	0.006	0.069	0.021	0.083	0.003	0.068	0.019	0.028	0.007	0.110	0.120

表2：超参数的先验均值和标准差与用于生成合成数据的规定值及数据真实统计矩的比较。

不确定性则通过超参数分布的离散程度体现。对于黑色所示的先验分布，假设其超参数在可行域内服从均匀分布，并以均值作为中心参考值进行说明。红色实线表示采用识别得到的超参数最大后验概率（MAP）估计值时参数的边缘概率密度函数，代表参数取值中偶然不确定性的最可能识别分布。虚线构成参数概率密度函数的包络，对应于90%的超参数取值，表示认知不确定性。虚线之间明显的间距表明识别得到的概率密度函数存在显著的认知不确定性，例如参数 V_∞、 R_∞ 和 ν；而 γ 的概率密度函数则识别得非常确定，虚线与实线十分接近。

表2汇总了超参数（均值、标准差）的数值结果。除用于生成合成数据的指定值外，还补充列出了根据所得数据集计算出的真实值，因为数据样本量相对较小，指定值可能会产生误导。为评估偶然不确定性的识别效果，将数据的均值和标准差与后验均值 μ进行比较。对于σ_y，两个统计矩均取得了最佳吻合。此外，参数 γ 和β 的均值识别误差非常小，低于所考虑区间的2%。通过比较先验和后验标准差 σ，可以明显看出识别过程降低了认知不确定性。如上所述，运动硬化参数 γ的认知不确定性最低，这符合实验设置的预期：高温下的循环材料行为主要由运动硬化机制主导。后验概率密度函数最不确定的参数是 ν，其统计矩也对应着最大的识别误差。与ν 相关的认知不确定性较高，表明该参数对模型响应的重要性有限；不过，可以通过全局敏感性分析 [30],（见图6）更可靠地确认其不重要性。采用斯皮尔曼秩相关系数（SRCC）表示的灵敏度，使用构建代理模型时所用的同一先验数据集计算，因此无需额外的计算成本，但该分析提供的见解颇为重要。一个零SRCC值表明，参数 ν 与模型响应的各个分量之间不存在相关性，这证实 ν 是一个不重要的参数。由于参数 ν 不会影响模型响应，因此在所考虑的实验中，该参数在结构上不可识别，其后验分布理论上应与先验分布一致。推断出的后验分布中若观察到轻微的集中趋势，可归因于代理近似和有限马尔可夫链蒙特卡罗抽样带来的数值效应，而非数据中包含的真实信息。

图7给出了利用最大后验估计得到的参数二维边缘概率密度函数。在指定假设下，各参数相互独立，这与生成合成数据时所指定的情形一致。对于 V_∞、 R_∞ 和 β，已识别的偶然不确定性似乎被低估。尽管参数 ν 无法清晰识别，但其估计的概率密度函数仍然有效，与该参数相关的任何其他概率密度函数一样。

与超参数最大后验估计值相对应的已识别参数概率密度函数用于量化模型响应中的偶然不确定性，如图8所示。模型响应中偶然不确定性的估计在特定响应分量的均值和标准差方面与合成实验数据吻合良好，见图8。然而，各响应分量呈现出复杂的联合概率分布。为清晰起见，图9给出了两个选定响应分量的二维边缘分布，并与合成观测进行比较，二者在相关性上达成一致。由此来看，所提出的识别程序的结果是令人满意的。

5.1.2 变量变换 s

现在采用基于变量变换的第二种表述，对同一数据集进行材料非均质性的识别。在这种情况下，关于已识别参数的初始信息反映了其可行域，该可行域由缩放到 $[0;1]$ 的可行区间定义。与贝叶斯表述不同，这里不对未知参数的概率密度函数作任何额外假设，而是通过为数据指定概率密度函数来进行识别。

通过对曲线进行离散化得到的数据，首先被转换为六个最重要的主成分，因为有六个模型参数需要识别。

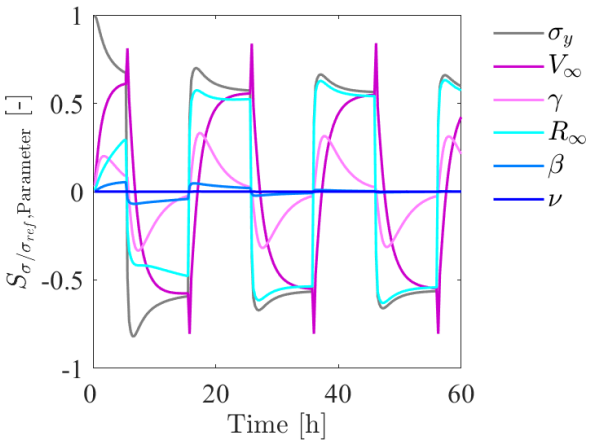

图6：基于斯皮尔曼秩相关系数的全局敏感性分析。

每个主成分的边缘分布被设定为正态分布，其均值和标准差由样本估算；其联合分布则由各边缘分布相乘得到。

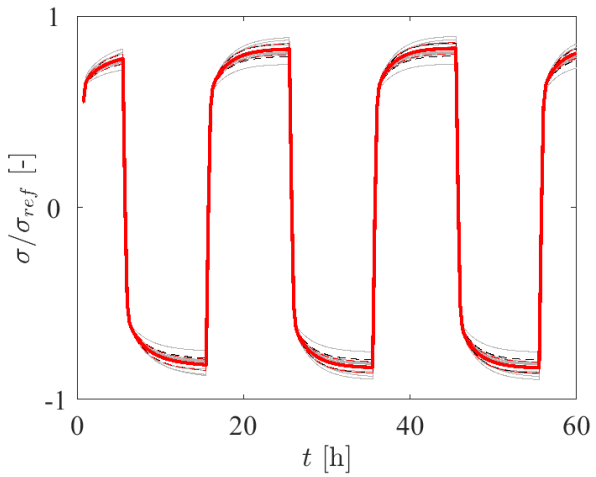

图8：层次贝叶斯——验证：合成观测（黑色）与模型响应（红色）的比较，模型响应对应于已识别最大后验参数的分布，以均值 ±标准差的形式给出。

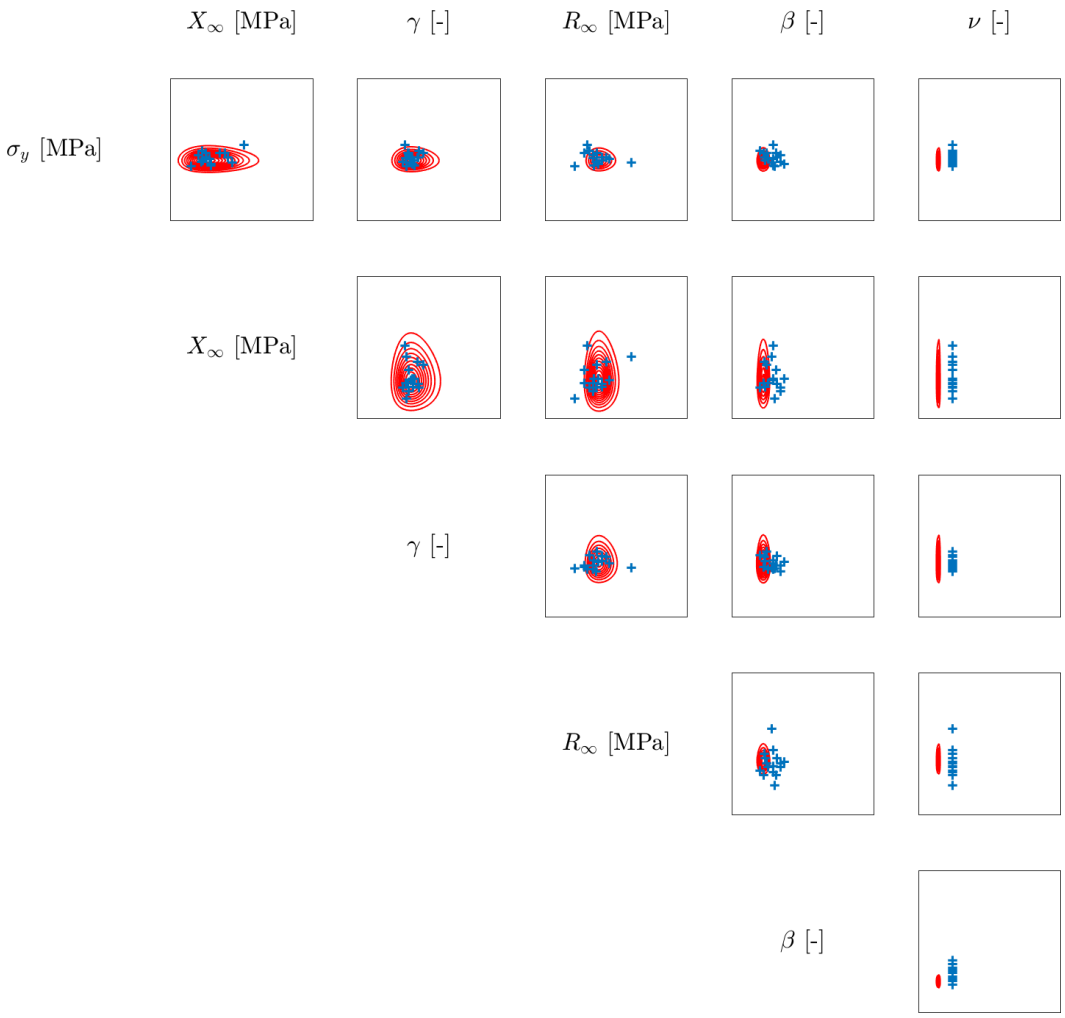

图7：层次贝叶斯——验证：对应于超参数最大后验估计和合成实验输入的已识别参数二维边缘概率密度函数。

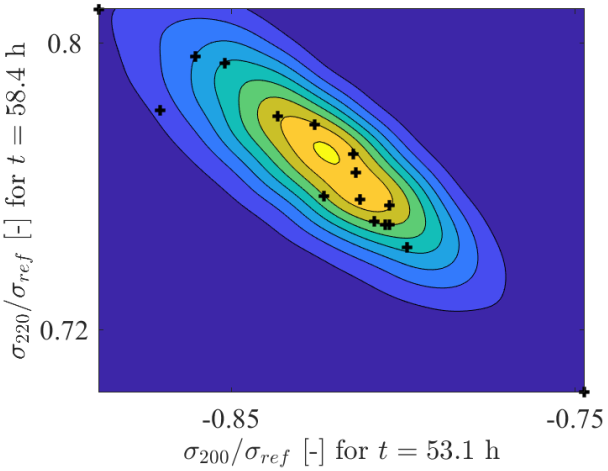

图9：层次贝叶斯——验证：将合成观测（黑色）与对应于最大后验参数分布的模型响应 $t = 53.1$ h 和$t = 58.4$ h 的联合概率密度函数等值线进行比较。

在假设它们相互独立这一简化前提下。随后通过对式（15）进行 MCMC 采样，得到材料参数的联合分布。

所得材料参数的概率密度函数如图10所示。结果证实，所提出的识别流程能够以足够高的精度确定五个相关材料参数的真实分布，包括参数 V_∞和 R_∞之间的相关性，见图11，其中展示了识别得到的二维参数概率密度函数。尽管合成输入是根据指定的独立分布生成的，但较小的数据集会导致样本呈现相关性；V_∞ 和 R_∞ 之间得到的相关性为 0.4，而识别结果为 0.6。只有第六个参数得到的分布不同；该参数在模拟实验中并不重要，数据也不包含关于它的信息，因此 ν 的任意分布都能产生正确的模型响应分布。

图12和图13将已识别的随机材料输入分布的模型预测与指定的合成数据进行了比较，二者达到了高度一致。

5.1.3 比较

为总结通过这两种识别方法获得的结果，表3和表4列出了具有代表性的数值。表3给出了所选响应分量的统计矩，包括均值（MEAN）、标准差（STD）和相关性（CORR）：

这些响应分量为 σ_{200} 和 σ_{220}，其数值是基于输入 $\boldsymbol{X}$ 的识别得到的概率密度函数进行 10000 次完整数值模型模拟计算得出的。

	MEAN		STD		CORR
	σ_{200}	σ_{220}	σ_{200}	σ_{220}	$\sigma_{200}, \sigma_{220}$
Data	−0.823	0.765	0.034	0.026	−0.954
贝叶斯	−0.828	0.772	0.029	0.023	−0.825
转换	−0.813	0.757	0.033	0.024	−0.952

表3：两种识别公式的观测数据与预测模型响应的统计矩比较。

验证结果表明，两种方法的数据与模型响应之间均高度一致。具体而言，贝叶斯识别给出的预测均值更为准确，而基于变换的识别在标准差和相关性方面匹配更好。这一趋势也由表4中各响应分量预测均值（MEAN）的平均绝对误差y_t 及其在观测数据中的值 z_t得到证实

—　　—

$$\mathrm{MAE} = 1/568 \sum_{t=1}^{568} |\overline{z_t} - \overline{y_t}| \tag{21}$$

以及平均绝对百分比误差

$$\mathrm{MAPE} = \frac{100\%}{568} \sum_{i=1}^{568} \left| \frac{\overline{z_t} - \overline{y_t}}{\overline{z_t}} \right| \tag{22}$$

针对所有响应分量进行评估。这些误差同样针对响应分量的标准差（STD）进行了类似评估。总之，采用基于变换的表述得到的输出更准确地刻画了观测数据中的变异性。

	平均绝对误差 [-]		平均绝对百分比误差 [%]	
	MEAN	标准差	均值	标准差
贝叶斯	0.0045	0.0039	0.84	15.80
变换。	0.0080	0.0008	1.67	3.44

表4：所有响应分量的预测均值和标准差的平均绝对误差。

5.2 验证

随后基于真实实验数据进行模型校准。模型校准的结果

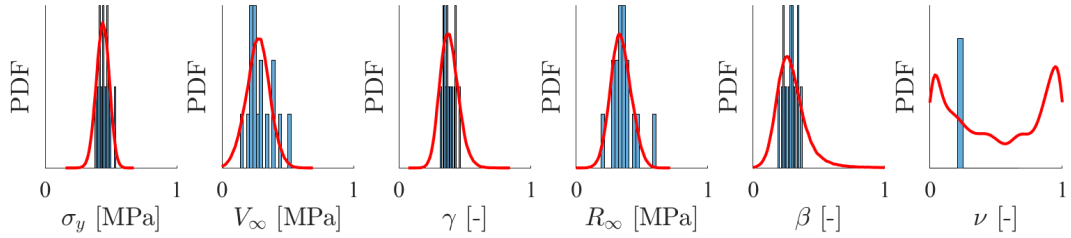

图10：变换—验证：合成实验输入的直方图，以及已识别参数（红色）的边缘单变量概率密度函数。

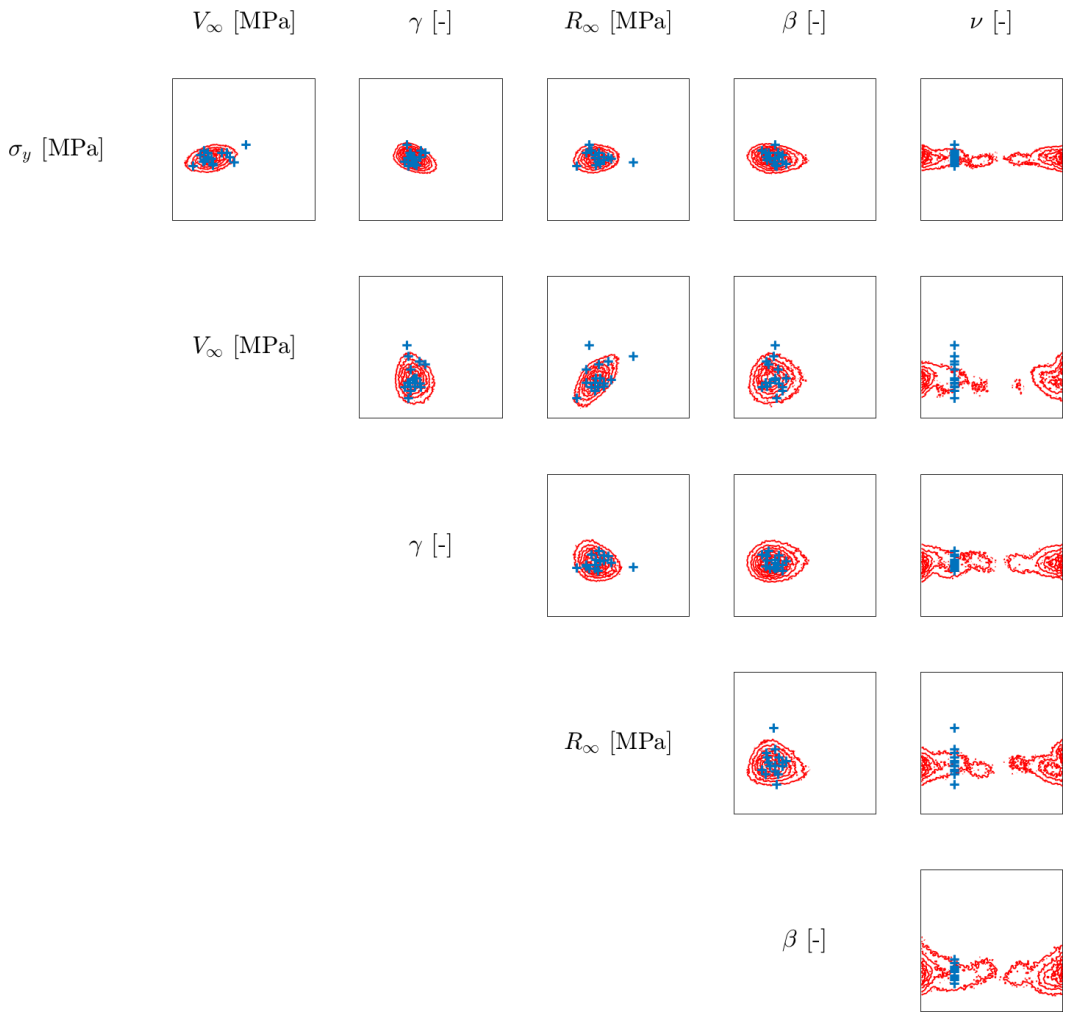

图11：变换—验证：与超参数最大后验估计和合成实验输入相对应的已识别参数二维边缘概率密度函数。

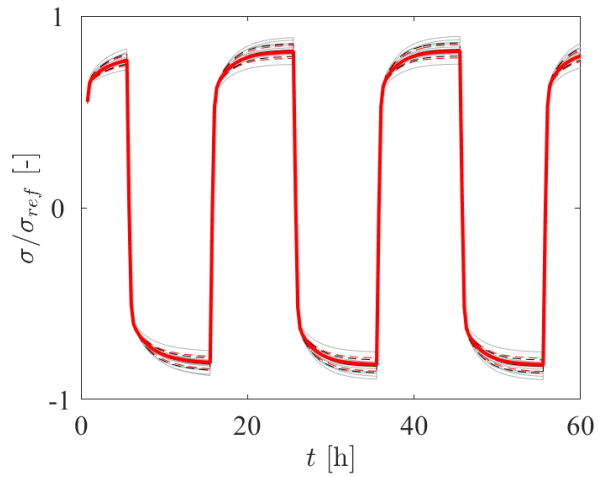

图12：变换—验证：比较合成观测（黑色）与对应于已识别参数分布的模型响应（红色），以均值 ± 标准差的形式表示。

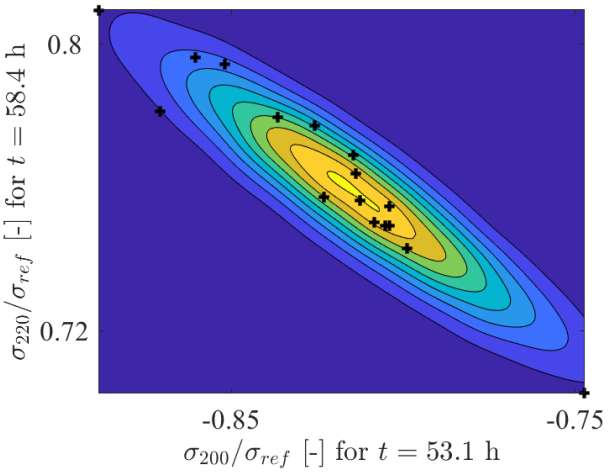

图13：变换—验证：比较合成观测（黑色）与模型响应的拟合联合概率密度函数等值线，针对 $t = 53.1$ h 和 $t = 58.4$ h。

其呈现方式与验证结果相同。图14展示了贝叶斯识别得到的均值参数概率密度函数及其认知不确定性，以及变换识别得到的一维参数概率密度函数与先验可行范围的对比。现在无法从模型参数值的层面比较这些结果。在贝叶斯表述中，由于实验设置的影响，参数 γ的认知不确定性缩减幅度最大。不过，重要的是要强调，两种问题表述得到的分布存在显著差异。

图15展示了通过基于变换的表述得到的已识别二维参数概率密度函数，以便更详细地说明结果。与假设结构先验相互独立且服从对数正态分布的贝叶斯表述不同，基于变换的程序能够识别任意参数联合分布。识别出的边缘概率密度函数显然更复杂，且具有很强的依赖性。基于变换的表述所具有的这种灵活性在此发挥了关键作用，使其能够取得显著优于贝叶斯表述的结果，如下文所示。

得到的联合参数分布样本用于校准模型，以预测系统行为，如图16所示。这里将相应的模型响应与实验数据进行比较：曲线见图16(a)，两个选定点见图16(b)。第一行展示了贝叶斯识别得到的结果。各响应分量的标准差似乎被高估了。结果表明，已识别的均值参数集无法准确再现选定响应分量的观测均值。第二行展示的是基于变换的识别结果，其预测似乎更加吻合。

基于两种识别程序的已识别参数分布所产生的输入$\boldsymbol{X}$ 进行 10000 次完整数值模型模拟，计算得到的数值结果汇总于表5和表6。表5给出了所选响应分量 σ_{200} 和 σ_{220}的统计矩；结果证实，采用基于变换的表述进行校准的模型响应与实验数据更加吻合。

	MEAN		STD		CORR
	σ_{200}	σ_{220}	σ_{200}	σ_{220}	$\sigma_{200}, \sigma_{220}$
Data	−0.864	0.782	0.019	0.022	−0.775
贝叶斯	−0.820	0.739	0.049	0.049	−0.957
变换。	−0.865	0.783	0.015	0.012	−0.872

表5：两种识别公式下观测数据与预测模型响应的统计矩比较。

表6给出了所有响应分量的平均绝对误差和平均绝对百分比误差。所得结果

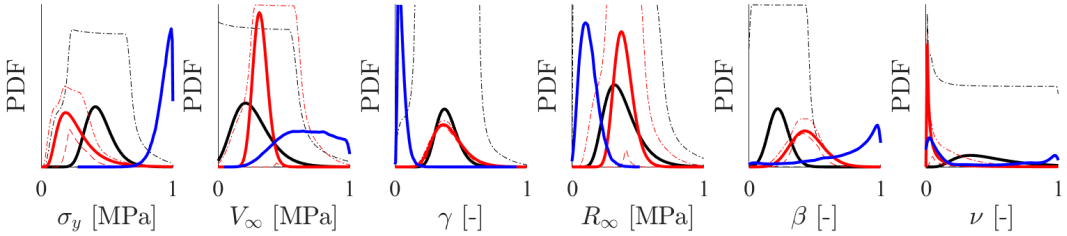

图14：层次贝叶斯：先验（黑色）和已识别（红色）参数的边缘概率密度函数，分别对应于先验超参数均值和后验众数（实线），并附有对应于90%超参数取值范围的界限（虚线）；变换：已识别（蓝色）参数的边缘概率密度函数。

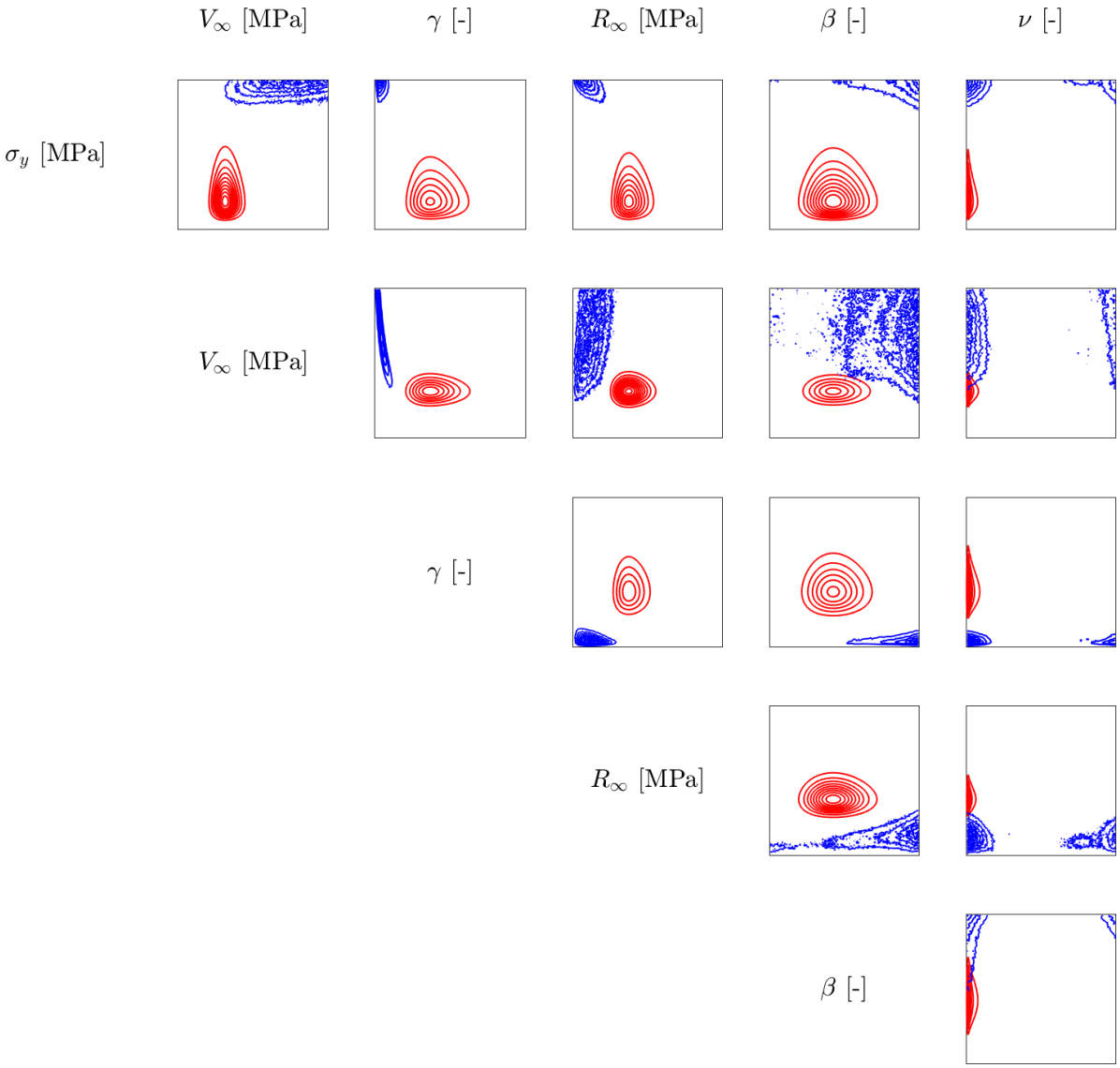

图15：贝叶斯（红色）和基于变换的（蓝色）公式中已识别参数的二维边缘概率密度函数。

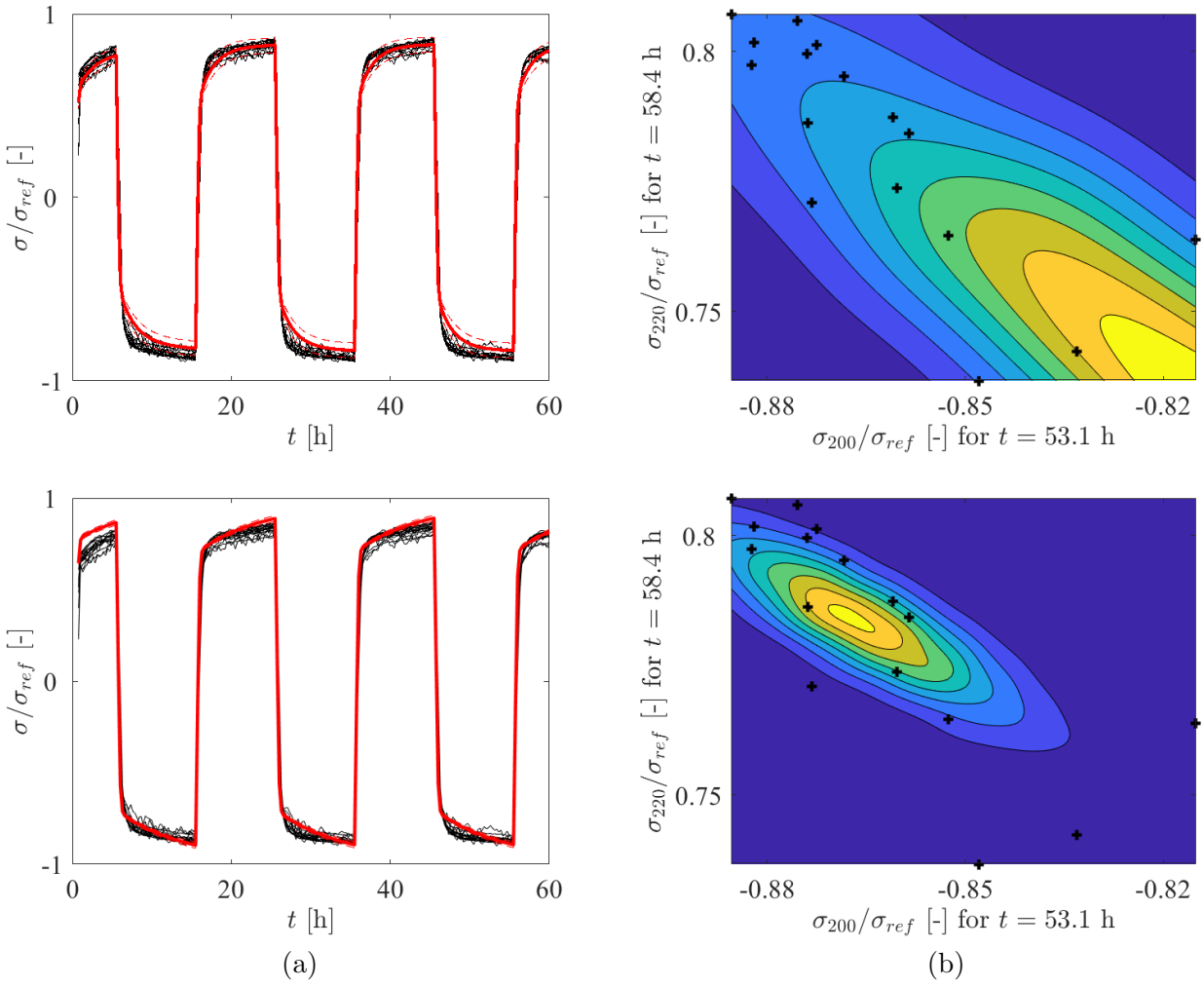

图16：将实验观测（黑色）与对应于已识别参数分布的模型响应（红色）进行比较，参数分布形式为：(a) 均值 $\pm$ 标准差；(b) $t = 53.1$ h 和 $t = 58.4$ h 时模型响应联合概率密度函数的等值线。

由于实验误差、模型不足以及对真实系统设定缺乏了解，实验数据通常更差。验证结果表明，基于变量变换构建的随机反演问题公式能够提供更准确的拟合。

	平均绝对误差 [-]		平均绝对百分比误差 [%]	
	均值	标准差	均值	STD
贝叶斯转换。	0.053 0.045	0.027 0.012	10.27 10.01	120.97 37.85

表6：所有响应分量的预测均值和方差的平均绝对误差。

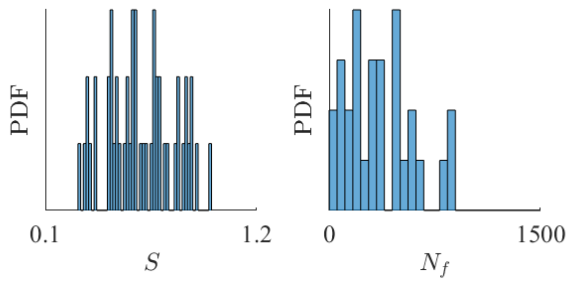

图17：合成观测的直方图。

6 根据独立试验估计参数分布

第二个研究案例侧重于通过两种不同类型的破坏性实验，识别两个损伤参数的分布。损伤模型由 Landgraf-Morrow 方程描述，见 [31]，，该方程表示试样的应变范围 $\Delta\varepsilon$ 与失效循环次数 N_f 之间的关系：

$$N_f = \left(\frac{\Delta\varepsilon}{S}\right)^{-s}. \tag{23}$$

待识别的材料参数为疲劳延性系数 S [-] 和疲劳延性指数 s [-]。根据专家知识，这些参数被限制在可行区间 $S \in [0.1;\ 1.2]$ 和 $s \in [1.0;\ 2.8]$内。

为识别损伤参数，本研究考虑了两类破坏性实验，且仅使用合成数据。第一类实验包括 50 次拉伸试验，测量量为断裂时的应变，该应变直接对应参数 S。第二类实验包括 30 次循环加载试验，在固定应变范围 $\Delta\varepsilon = 0.03$下测量失效循环数 N_f。模型输入从具有相同超参数 $\alpha = 2$ 和 $\beta = 2$ 的独立边缘贝塔分布中抽样，并缩放至损伤参数各自的可行区间，以此生成合成数据。所得合成数据的直方图如图17所示。

6.1 贝叶斯层次模型

在贝叶斯表述中，缩放至可行区间的贝塔分布也被视为损伤参数的先验分布。此处，其超参数 α 和 β 未知，且采用均匀先验

$$\alpha, \beta \sim U(0.1, 15). \tag{24}$$

为描述参数之间的偶然依赖关系，引入相关系数 ρ，并为其指定均匀超先验

$$\rho \sim U(-1, 1). \tag{25}$$

根据 Sklar 定理 [33]，借助高斯 copula [32]，参数的联合二元概率分布可表示为

$$f_{S,s}(S, s) = c_\rho \cdot f_S(S) \cdot f_s(s)\,, \tag{26}$$

其中，$f_S(S)$ 和 $f_s(s)$ 分别是具有超参数 $(\alpha_S,\ \beta_S)$ 和 $(\alpha_s,\ \beta_s)$ 的贝塔分布的概率密度函数。高斯 copula 的密度

$$c_\rho = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[z_1^2 + z_2^2 - 2\rho z_1 z_2\right]\right) \tag{27}$$

通过标准正态分位数变换引入相依性

$$\begin{aligned} z_1 &= \Phi^{-1}(F_S(S))\,, \\ z_2 &= \Phi^{-1}(F_s(s))\,, \end{aligned} \tag{28}$$

其中 Φ^{-1} 表示标准正态分布的逆累积分布函数，$F_S(S)$和 $F_s(s)$表示边缘Beta分布的累积分布函数。

似然函数 (13) 涉及来自拉伸试验 ($n_1 = 50$) 的数据，以及每个试样对应的独立同分布实验误差 $E_1 \sim N(0,\ 0.1^2)$，还涉及来自循环试验 ($n_2 = 30$) 的数据

以及每个试样对应的独立同分布实验误差 $E_2 \sim N($ 0，0。82)。

后验分布由160个材料参数（分别对应80个观测的参数对）和5个用于定义所研究材料偶然不确定性的超参数组成。后验MCMC样本通过Metropolis算法获得，其中高斯随机步长的标准差根据最优接受率（$20-50\,\%$）进行设置。

图18比较了所识别的边际分布

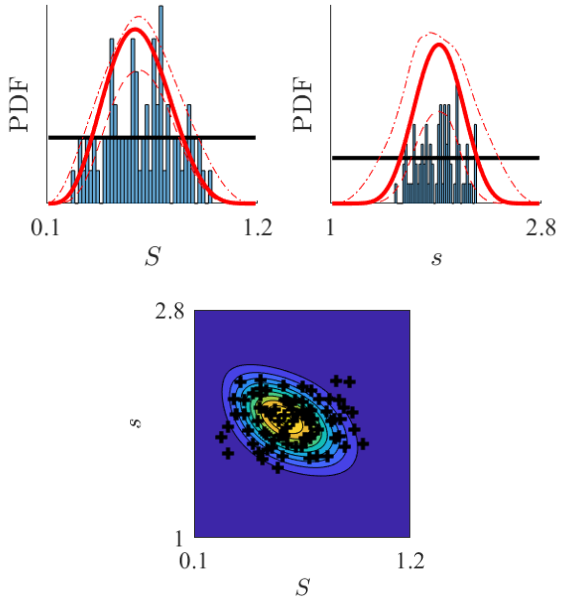

图18：贝叶斯：合成实验输入的直方图、与最大后验超参数对应的先验（黑色）和后验（红色）参数概率密度函数，以及对应于90%预测概率密度函数值的边界。所识别联合参数概率密度函数的等值线，并与全部80个合成实验输入进行比较。

材料参数的分布与合成数据输入的直方图相对应。红色实线表示超参数 α 和 β的已识别 MAP 估计值所对应的损伤参数贝塔概率密度函数边缘分布，即损伤参数分布的最佳估计（代表偶然不确定性）。红色虚线构成损伤参数概率密度函数的包络线，对应其数值的 5% 和 95% 分位数（每个超参数马尔可夫链蒙特卡罗样本均根据 1.000 个样本估计），代表损伤参数估计概率密度函数形状的认知不确定性。两个概率密度函数都与数据吻合良好；疲劳延性指数 s 的认知不确定性较高

。联合分布以高斯 copula 的等值线表示，其中采用 MAP 贝塔边缘分布以及已识别的相关系数均值，显示参数之间存在负依赖关系。已识别的超参数边缘分布见图19。超参数 α_S和 α_s对应的认知不确定性最低。一些超参数的后验分布呈现多峰性，反映出多个超参数组合可产生相似的似然值。剔除预烧入样本后，通过运行均值和有效样本量估计评估收敛情况；结果表明后验汇总稳定，且每个超参数均有数百个有效独立样本。

后验概率密度函数的预测能力似乎令人满意；参见图20，该图比较了合成数据的直方图与对应于所识别最大后验参数概率密度函数的模型响应分布。

6.2 变量变换

对不同试样开展两种不同类型实验所得的数据观测，导致数据中的内在相关性信息缺失。因此，基于针对从规定可行区间内生成的材料参数样本所开展的模型仿真，对该相关性进行近似估计。将估计得到的相关性与基于正态核函数得到的数据边际分布相结合，生成具有期望相关性的新合成数据。利用这些数据构建其联合概率密度函数的近似，并根据式（16）将其用于变量变换，从而获得图21所示的材料参数分布。

疲劳延性系数 S 的识别基本上是完美的，而疲劳延性指数 s 的方差被高估。 s 的方差差异可能是由于对两个数据分量 S 和 N_f的联合分布估计不准确所致，而该联合分布在此原则上是未知的。因此，该联合分布在两个层次上被近似。首先，将两个分量建模为仅具有估计相关性的简单线性相关关系。其次，它们的相关性仅根据参数分布于可行区间时所获得的其他模拟数据集进行粗略估计。然而，根据图22，已知的边缘分布

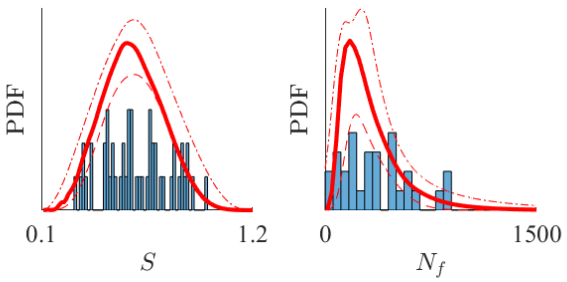

图20：贝叶斯：合成数据与模型预测的直方图，用于展示所识别的最大后验损伤参数概率密度函数，并附带与预测概率密度函数值的90%相对应的界限。预测概率密度函数的等值线与循环加载试验中的30个合成实验输出进行比较。

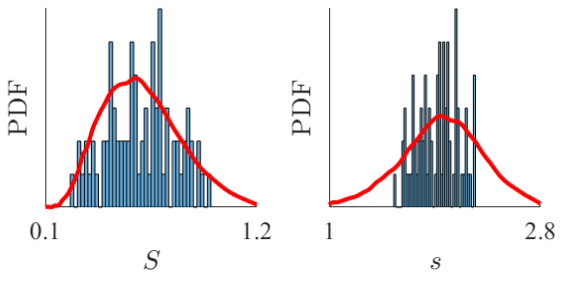

图21：变换：合成实验输入与所识别损伤参数边缘概率密度函数的直方图。所识别联合参数概率密度函数的等值线与全部80个合成实验输入进行比较。

两个数据分量均以很高的精度拟合。作为本研究一种可能的简单扩展，所应用的识别步骤可以依次重复进行。可以基于来自已识

识别出的材料参数分布取代原始可行区间，并进一步用于获得参数分布的新更新估计。

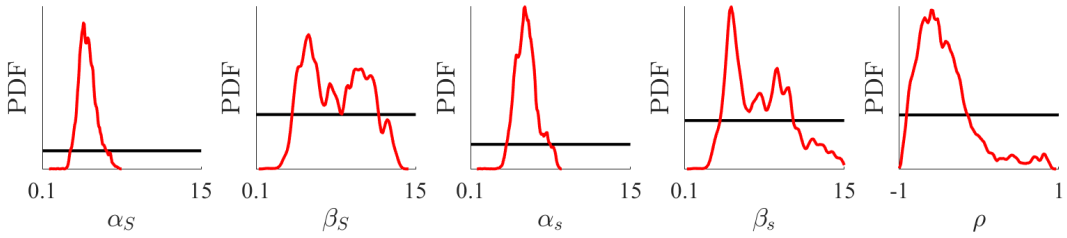

图19：贝叶斯：所识别的超参数边缘分布（红色）与其超先验（黑色）的比较。

	MEAN						STD						CORR			
参数	S		s		N_f		S		s		N_f		S, s		S, N_f	
	μ	σ	μ	σ	μ	σ	μ	σ	μ	σ	μ	σ	μ	σ	μ	σ
Data	0.595		1.924		406		0.175		0.174		337		−0.011		0.836	
贝叶斯	0.595	0.03	1.927	0.07	366	78	0.170	0.02	0.240	0.04	289	142	−0.431	0.36	0.315	0.20
变换	0.602		1.962		451		0.199		0.340		432		−0.400		0.334	

表7：两种识别形式下，合成输入与观测的统计矩同已识别参数的概率密度函数及预测模型响应的比较。

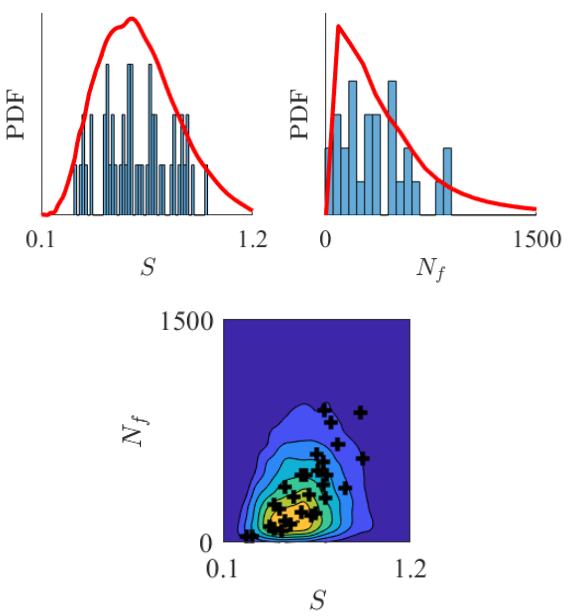

图 22：变换：用于识别得到的损伤参数概率密度函数的合成数据与模型预测的直方图。预测概率密度函数的等值线与循环加载试验的 30 个合成实验输出的比较。

6.3 比较

两种识别形式的损伤模型校准结果汇总于表7。具体而言，将识别出的参数偶然不确定性以及校准后模型预测的统计矩（均值（MEAN）、标准差（STD）和相关性（CORR））与合成数据进行比较（损伤参数 S 和 s 对应的数值根据80个样本计算，观测量 N_f对应的数值根据30个样本计算）。

两种识别形式在参数均值方面，识别结果与合成输入吻合良好（最大误差：可行区间的 2%）。然而，与基于变换的方法相比，贝叶斯表述对参数变异性的估计更准确；后者往往会高估参数的标准差。模型响应 N_f 的均值和标准差预测准确度较低，这一点可从贝叶斯识别中估计出的较大认知不确定性 σ 看出。总体而言，当实验设置导致缺乏数据相关性信息时，即使有模型仿真提供的额外信息，也不建议采用基于变换的表述。在数据有限的情况下，建议采用能够量化认知不确定性的贝叶斯表述。

7 结论

非均质材料性质的固有变异性可表述为一个随机反问题，其解是材料参数的概率分布。这些参数用于数值模型模拟时，应产生与观测实验数据的分布一致的输出分布。

本文研究了与材料非均质性导致的材料参数随机性相关的偶然不确定性识别问题。具体而言，针对铜合金的运动学硬化和各向同性硬化材料模型，利用由高温下应变控制循环加载试验的 16 次重复试验构成的实验数据集，成功完成了模型标定。本文提出并比较了两种本质上不同的识别问题表述，其中包括一种情形：数据来源于两个不同的样本组，每组分别接受不同的破坏性实验，而单个实验均无法提供足够的信息来完全识别所有模型参数。

随机反演问题的第一种表述基于贝叶斯推断的多层级框架，为随机反演问题提供了一种优雅的求解方案。这一高效工具能够区分认知不确定性与固有变异性，这对于依据间接含噪测量成功进行非均质材料模型的参数识别至关重要。该表述在信息有限的情形下尤为有益，例如从不同类型破坏性实验中获得的数据。其主要缺点是必须假定参数概率密度函数的某种特定类型，而这会实质性地影响结果，并且可能带来问题，例如在唯象参数的情形中。所表述的后验概率分布可通过马尔可夫链蒙特卡罗方法以独立样本的形式获得；然而，计算需求会随测量数量显著增加，因此该方法尤其适用于较小的实验数据集。

基于变换的公式具有以下潜在优势：减少对未知参数概率密度函数结构的假设，并提高实验数据处理效率。参数

仅受其可行域约束，数值模型在该可行域内定义。简化假设仅针对数据的概率密度函数提出；这或许不易造成误导，因为实际上观测到的正是来自该分布的样本。通过马尔可夫链蒙特卡罗，也可以得到参数的联合分布，并以独立样本的形式表示；但与第一种公式相比，随着观测数据增加，搜索空间的维数并不会改变。采用校准数值模型的多项式近似来降低计算需求，而且还能解析地计算变换常数。这种方法的缺点是量化所有现有不确定性时，无法区分偶然不确定性和认知不确定性。未来可自然地扩展该方法，明确纳入已知的测量误差模型，或与材料参数一起对其进行估计。

致谢

本工作得到欧盟通过扬·阿莫斯·Komensk´y运营计划对项目INODIN（CZ.02.01.01/00/23 020/0008487）的资助。

参考文献

[1]William L Oberkampf、Sharon M DeLand、Brian M Rutherford、Kathleen V Diegert和Kenneth F Alvin。建模与仿真中的误差和不确定性。《可靠性工程与系统安全》，75(3):333–357，2002。

[2] A. Der Kiureghian和O. Ditlevsen。偶然性还是认知性？这重要吗？《结构安全》，31(2):105 – 112，2009。

[3] A. Kuˇcerov´a。随机材料建模中的逆问题。教授资格论文，布拉格捷克技术大学，2020。

[4] Andrew Gelman、John B. Carlin、Hal S. Stern、David B. Dunson、Aki Vehtari 和 Donald B. Rubin。《贝叶斯数据分析》。Chapman and Hall/CRC，第三版，2013 年。

[5] I. Jolliffe。《主成分分析》。Wiley Online Library，2002年。

[6]J. R. Fonseca、Michael I. Friswell、John E. Mottershead 和 Arthur W. Lees。采用最大似然法进行不确定性识别。《声音与振动杂志》，288(3):587–599，2005年。

[7] Sheng-En Fang、Qiu-Hu Zhang 和 Wei-Xin Ren。使用随机响应面模型更新估计参数变异性。《机械系统与信号处理》，49(1–2):249–263，2014 年。

[8] K. Sepahvand 和 S. Marburg。基于实验模态数据识别复合材料不确定参数。《概率工程力学》，37:148–153，2014 年。

[9] M. Arnst、R. Ghanem 和 C. Soize。混沌展开系数贝叶斯后验分布的识别。《计算物理学杂志》，229(9):3134–3154，2010年。[10] Loujaine Mehrez、Alireza Doostan、David Moens 和 Dirk Vandepitte。基于有限实验数据库的复合材料属性随机识别，第二部分：不确定性建模。《机械系统与信号处理》，27:484–498，2012年。[11] Loujaine Mehrez、David Moens 和 Dirk Vandepitte。基于有限实验数据库的复合材料属性随机识别，第一部分：实验数据库构建。《机械系统与信号处理》，27:471–483，2012年。[12] Stijn Debruyne、Dirk Vandepitte 和 David Moens。通过研究有限可用的实验动态结构响应数据，识别蜂窝夹层梁设计参数的变异性。《计算机与结构》，146:197–213，2015年。[13] Michal ˇSejnoha、Tom´aˇs J anda、Lenka Melze-ˇ rov´a、V´aclav Neˇ zerka 和 Jiˇr´ı Sejnoha。采用贝叶斯推断更新参数，对线性范围内的胶合木进行建模。工程结构，138:293–307，2017年。[14] Iman Behmanesh、Babak Moaveni、Geert Lombaert 和 Costas Papadimitriou。用于结构识别的分层贝叶斯模型更新。《机械系统与信号处理，64–65:360–376，2015年。

[15] Joseph B. Nagel 和 Bruno Sudret。贝叶斯反问题中多层次不确定性量化的统一框架。《概率工程力学》，43:68–84，2016年。

[16] E. Janouchov´a 和 A. Kuˇcerov´a。《非均质黏塑性材料参数的贝叶斯推断》。*Acta Polytechnica CTU* 会议论文集，15：41–45，2018。

[17] T. Bayes 和 R. Price。《一篇旨在解决概率论问题的论文》。由已故的贝叶斯先生（英国皇家学会会士）撰写，Price 先生（英国皇家学会会士）致 John Canton 硕士、英国皇家学会会士的信中传达。《哲学汇刊》（*1683—1775*），53：370–418，1763。

[18] David Draper、James S Hodges、Colin L Mal- lows与Daryl Pregibon。可交换性与数据分析。《英国皇家统计学会会刊：*A*辑（社会统计）》,第9–37页，1993。[19]Peter W Marcy与Rebecca E Morrison。“随机反问题”与变量变换。*arXiv*预印本 *arXiv:2211.15730*，2022。[20] E. Janouchov´a、J. S´ykora与A. Kuˇcerov´a。多项式混沌在失效概率评估中的应用：一项比较研究。《数学应用》，63(6):713–737，2018。[21] Youssef M. Marzouk、Habib N. Najm与Larry A. Rahn。用于逆问题高效贝叶斯求解的随机谱方法。《计算物理学杂志》，224(2):560– 586，2007。[22] W Schwarz、S Schwub、K Quering、D Wied- mann、HW H¨oppel与M G¨oken。高热负荷部件的寿命预测：火箭燃烧室热壁损伤过程建模。《欧洲航空航天学会空间期刊》，1(1-4):83，2011。[23] Tom´aˇs Janda、Veronika Pavelcov´a、Alena Ze- ˇ manov´a与Michal Sejnoha。黏土亚塑性模型校准中由实验室试验数量有限引起的不确定性。《计算机与结构》，295:107297，2024。[24]J. C. Spall。基于马尔可夫链蒙特卡罗的估计。《*IEEE*控制系统杂志》，23(2):34–45，2003。

[25] Jeffrey S Rosenthal等。最优提议分布与自适应马尔可夫链蒙特卡罗。《马尔可夫链蒙特卡罗手册》，4(10.1201):93–111，2011。

[26] N. Wiener。《齐次混沌》。《美国数学杂志》，60(4)：897–936，1938。

[27] D. Xiu 和 G. E. Karniadakis。《随机微分方程的 Wiener–Askey 多项式混沌》。*SIAM* 科学计算杂志，24(2)：619–644，2002。

[28] G. Blatman和B. Sudret。一种用于构建随机有限元分析稀疏多项式混沌展开的自适应算法。《概率工程力学》，25(2):183–197，2010年。

[29] Ronald L Iman和WJ Conover。计算机模型的小样本敏感性分析技术及其在风险评估中的应用。《统计通讯：理论与方法》，9(17):1749–1842，1980年。[30] Andrea Saltelli、Karen Chan和E Marian Scott。敏感性分析：衡量科学模型的价值。John Wiley & Sons，2000年。[31] R. W. Landgraf。金属对循环变形的抗力。载于金属和合金高疲劳抗力的实现。ASTM International，1970年。[32] Roger B Nelsen。*Copula*导论。Springer，2006年。[33] M Sklar。n维分布函数及其边缘´ `。载于《*Annales de l’ISUP*》，第8卷，第229–231页，1959年。