arXiv:2602.14715v1 [math-ph] 16 Feb 2026

李 2-代数的作用与余动量映射

PHILIPPE BONNEAU、VÉRONIQUECHLOUP、ANGELA GAMMELLA-MATHIEU 和 TILMANN WURZBACHER

摘要。本文引入了李 2-代数在任意流形 M 上的 2-作用这一概念。此外，在 [Rog12]，中，给定一个 n-辛流形 (M,ω)，作者考察了一个 L_∞-代数 $\mathrm{L}^\infty(\mathrm{M}\ \omega)$，它是与辛流形相关的可观测量的泊松代数的高阶类比。当 (M,ω) 为 2-辛时，这个 L_∞-代数退化为李 2-代数 $\mathrm{L}^2(\mathrm{M}\ \omega)$。沿袭 N.L. Delgado [Del18]，的思路，我们引入李 2-代数 $\mathrm{D}^2(\mathrm{M}\ \omega)$，它推广了李 2-代数 $\mathrm{L}^2(M,\omega)$ 及其包含哈密顿对的扩张 $\mathrm{D}^2(\mathrm{M}\ \omega)$。给定一个 2-辛流形 (M,ω)，以及一个作用于 M 的李 2-代数 $\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0$，我们将余动量映射定义为该$\frown$作用的提升，即从 $\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0$ 到李 2-代数 $\mathrm{D}^2(\mathrm{M}\ \omega)$ 的李2-代数态射。在附录中，我们非常详尽地讨论了大量示例，并根据其代数性质进行分类。

目录

1. 引言 2
2. 李2-代数的基本结果 3
2.1. L_∞-代数 3
2.2. 李 2-代数及其态射 4
2.3. 骨架李2-代数 5
2.4. 严格李 2-代数 5
3. 李 2-代数与 3-余循环 6
4. 多重 Cartan 演算 9
4.1. 多重缩并算子与多重 Lie 导数 9
4.2. 多重 Cartan 交换规则 10
5. 李 2-代数的作用（2-作用） 12
6. 可观测量的李2-代数 12
6.1. 哈密顿向量场与形式 12
6.2. Rogers 的可观测量李2-代数 13
6.3. Delgado 的可观测量李 2-代数 18
7. 余动量映射 18
7.1. 2-余动量映射的概念 20
7.2. 2-余动量映射与同伦动量映射 23
附录 A. 与骨架李2-代数拟同构 23
A.1. 证明 24
A.2. 例子 25
附录B. 可观测量空间的 2-作用与自同态 25
B.1. 2-分次向量空间自同态上的李 2-代数结构 25
B.2. 作为自同态的 2-作用 26
附录 C. 2-作用与余动量映射的例子

日期：2026年2月17日。2020 数学主题分类。主分类号 53D05、53D20、17B66；次分类号 58D19、37J06。关键词和短语。李 2-代数、高阶作用、多辛流形、余动量映射。

例 1 例 2 例 3 例 28
4 例 5 致谢。参考 30
文献 33
34
35
35
36

1. 引言

带有动量映射的李群作用在辛几何中发挥着至关重要的作用。它们是哈密顿动力学中的基本工具：诺特意义上的对称性会产生守恒量，或者用更现代的说法，促成辛流形的约化；它们还定义了集体哈密顿量，使哈密顿动力系统能够分解。此外，它们在几何量子化或变形量子化中也很重要，有助于实现从具有对称性的经典系统到具有对称性的量子系统的过渡；可参见著名的“量子化与约化可交换”范式。

这些对称性的本质信息编码在余动量映射中。余动量映射是一个李代数同态，从通常为有限维的李代数 $\mathfrak{g}_0$ 映到经典可观测量的泊松李代数，即辛流形上的光滑函数。从粒子系统过渡到场论，通常可以通过以多辛流形替代辛流形来实现。后一类流形带有非退化的闭 $k+1$-形式，因而允许定义“哈密顿方程”，其解是从带有 $k>1$ 的 k维源空间到该流形的映射，即经典场。在这一背景下，人们提出了上述可观测量代数的若干类比；但所有严格的数学构造都有一个共同点：在 k-辛情形下，这些代数不是李代数，而是李 k-代数（参见 [Rog12、Zam12] ；综述见 [RW15]）。当然，作为微分形式对称群的李群十分自然，因此很早就已在这一背景下得到研究（参见 [CFRZ16], ，其中余动量映射的类比被称为同伦动量映射）。在一个非常特殊的情形下， [Mam20] 和 [MZ20] 首次给出了李 2-代数的定义，但它们随后在流形上的作用都可通过李代数作用分解。

由于李代数只是 Lie k-代数的一种特殊情形，因此显然，ak-辛流形 (M,ω) 的“对称性”应当用 Lie k-代数来表述。请注意，李代数在（辛）流形上的作用由向量场给出，即全局可观测量代数的导子。类比之下，自然会想到由向量场和双向量场作用于函数及1-形式。在 2-辛情形中，也就是超出辛流形的第一种情形下，这是可观测量代数最朴素的版本（关于这一思路的一些讨论，见下文附录B）。

在其内容丰富的理学硕士论文中（可在 arXiv 上以预印本形式获取，参见 [Del18]），N. Delgado 定义了 Lie k-代数在 k-辛流形上的作用。遗憾的是，Delgado 只给出了定义和结构性讨论，没有提供示例或明确的公式。

本文仅讨论 2-辛情形，但将详细介绍“2-作用”、李 2-代数作用的余动量映射，并给出大量示例。我们的主要

贡献在于研究这些作用及其余动量映射（其值取于 Delgado 的李 2-代数可观测量，而非迄今文献中 J. Baez 和 C.Rogers 的可观测量），以及它们在 2-辛流形上的作用（M、ω）。

让我们更详细地描述本文的内容。在第2节中，我们回顾李 2-代数的基础知识、它们的态射及其复合，以及骨架李2-代数和严格李 2-代数的概念。我们回顾如下事实：每个李 2-代数都与某个骨架李2-代数拟同构，并以直接的方式重新证明严格李 2-代数与李代数交叉模之间的一一对应。在第三节中，我们引入一个自然关联于某些李 2-代数（特别是骨架李2-代数）的 Chevalley-Eilenberg 复形。这使我们能够为每个李 2-代数关联一个显式的 3-余循环，并作为副产品恢复 [BC04] and [Wag06, Wag21] 的分类。第4节回顾将在本文后续各节中使用的多向量场的 Cartan 演算。

第 5–7 节包含本文的主要创新。遵循 N.L. Delgado 的做法，我们在第 5 节为流形 M 上的多向量场的截断 $\mathfrak{X}^{\bullet\leq 2}(M) = \mathfrak{X}^2(M) \oplus \mathfrak{X}^1(M)$ 配备李 2-代数结构，并引入李 2-代数的作用（即 2-作用）的概念，将其定义为一种李 2-态射，以推广李代数 $\mathfrak{g}_0$ 在 M 上的（无穷小）作用。我们特别在命题 5.9 中指出，拟同构与 2-作用并不相容！我们还引入并研究了严格的 2-作用。

在第 6 节中，我们再次遵循 N.L. Delgado 的做法，证明可观测量 $\frown$([Rog12]) 的李 2-代数 $\mathrm{L}^2(\mathrm{M}\ \omega)$ 可以扩充为李 2- 代数 $\mathrm{D}^2(\mathrm{M}\ \omega)$，前提是 M 是一个 2- 辛流形。我们在此强调不同的李 2- 代数态射，例如从 $\mathrm{L}^2(\mathrm{M}\ \omega)$ 到 $\mathrm{D}^2(\mathrm{M}\ \omega)$ 的嵌入 I、反向的满射 Φ，以及“辛 2-梯度” $\Psi : \mathrm{D}^2(\mathrm{M}\ \omega) \to \mathfrak{X}^{\bullet\leq 2}(M)$。后一态射在 [Del18] 中相当隐晦，但它是从 1-辛（又称辛）几何迈向 2-辛几何的关键步骤。还需注意，我们允许 Ψ_2 非零；但在 [Del18] 中，对应的态射 π_1 总是假定为严格的。

在最后一节，即第7节中，我们将李 2-代数在2-辛流形上的2-作用所对应的余动量映射 M 定义为该作用的一个提升，并使其满足一个自然的交换图。这一余动量映射概念（亦可参见 [Del18]中的定义 6.11）推广了 [CFRZ16] 中针对李代数所定义的余动量映射，以及 [Mam20, MZ20]中针对骨架李2-代数（在2-辛情形下）所定义的余动量映射。

附录 A 包含一个显式的构造性证明，用以说明给定李 2-代数与一个骨架李2-代数之间的拟同构，并由两个基本例子加以说明。附录B通过 $\mathfrak{X}^{\bullet\leq 2}(M)$在 $C^\infty(M) \oplus \Omega^1(M)$上的线性表示，为我们的构造提供了动机，这类似于向量场作用于函数的情形。附录 C 包含大量例子，这些例子按照李 2-代数的括号、作用以及余动量映射的代数性质进行分类。

2. 李2-代数的基本结果

本节回顾李 2-代数理论的基本概念，并重新证明严格李 2-代数与李代数交叉模之间的对应关系。

2.1. L_∞-代数。

定义 2.1。 L是一个 L_∞-代数（或李 ∞-代数），它是一个非正分次向量空间，并配备了一组 $\{l_k : L^{\otimes k} \mapsto L\}_{k\geq 1}$ 多重线性、分次反对称映射，使得 l_k 的次数为3

$2-k$ 并且对所有 $m \geq 1$,

$$\sum_{i+j=m+1}(-1)^{i(j+1)}\sum_{\sigma\in Sh(i,m-i)}(-1)^{\sigma}\epsilon(\sigma;x_1,...,x_m)l_j(l_i(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(i)}),x_{\sigma(i+1)},\ldots,x_{\sigma(m)})=0$$

其中， $\epsilon(\sigma;x_1,...,x_m)$ 表示 σ 作用于元素 $x_1,...,x_m$ 的 *Koszul* 符号，而 $Sh(i,m-i)\subset S_m$ 是$(i,m-i)$-非交错置换。

注记 2.2. 关于 L_∞-代数，参见 [Rog12] 及其中的参考文献。

定义 2.3. 李 n-代数是一个 L_∞-代数，其集中在次数 $1-n,\ldots,-1,0$。

2.2. **李 2-代数及其态射**。本小节将讨论范围从李 ∞-代数具体化为李 2-代数，并对后者及其态射作出明确描述。

下文将使用李 2-代数的如下显式刻画。

命题 *2.4.* 李 *2*-代数是一个分次向量空间 $L=L_{-1}\oplus L_0$，带有由三个多线性映射 (l_1,l_2,l_3) 构成的一组映射，其中 l_1：$L_{-1}\mapsto L_0$, l_2 可分解为其“纯”部分 l_2^p：$L_0\times L_0\mapsto L_0$（反对称）和其“混合”部分 l_2^m：$L_{-1}\times L_0\mapsto L_{-1}$（同样按如下意义反对称）：对于所有 x 属于 L_0 且 a 属于 L_{-1}，有$l_2^m(x,a)=-l_2^m(a,x)$；最后，l_3：$L_0\times L_0\times L_0\mapsto L_{-1}$也是反对称的。（为方便起见，且在不会引起歧义时，我们将对 l_2^p 和 l_2^m均使用 l_2。）这些映射满足以下关系：对于所有 a,b 属于 L_{-1}，以及所有 x,y,z,t 属于 L_0

(R_1) $l_1(x)=0$ (R_2) $l_1(l_2(x,a))=l_2(x,l_1(a))$ (R_3) $l_2(l_1(a)\ b)=l_2(a,l_1(b))$ (R_4) $l_1(l_3(x,y,z))=-l_2(l_2(x,y)\ z)-l_2(l_2(y,z)\ x)-l_2(l_2(z,x)\ y)$ (R_5) $l_3(l_1(a)\ x,y)=-l_2(l_2(x,y)\ a)-l_2(l_2(y,a)\ x)-l_2(l_2(a,x)\ y)$ (R_6) $l_3(l_2(x,y)\ z,t)-l_3(l_2(x,z)\ y,t)+l_3(l_2(x,t)\ y,z)+l_3(l_2(y,z)\ x,t)-l_3(l_2(y,t)\ x,z)+l_3(l_2(z,t)\ x,y)=l_2(l_3(x,y,z)\ t)-l_2(l_3(x,y,t)\ z)+l_2(l_3(x,z,t)\ y)-l_2(l_3(y,z,t)\ x)$。

注 2.5. 每个李代数 $(\mathfrak{g},[\,,\,])$ 都可以通过令$L_{-1}=\{0\}$、$L_0=\mathfrak{g}$ 和 $l_1=l_2^m=l_3=0$，并定义 l_2^p：$L_0\times L_0\mapsto L_0$，而视为一个李 *2*-代数 $(L_{-1}\oplus L_0,l_1,l_2,l_3)$。

$$l_2^p(x,y)=[x,y]\,.$$

注 2.6. 如果方便且不致混淆，我们也会使用诸如 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0$ 这样的记号来表示李 *2*-代数。

定义 *2.7.* 设 $L=(L_{-1}\oplus L_0,l_1,l_2,l_3)$和 $L'=(L'_{-1}\oplus L'_0,l'_1,l'_2,l'_3)$是两个李 *2*-代数。李 *2*-代数态射（或简称李 *2*-态射）F 从 L 到 L' 是一个二元组 $F=(F_1,F_2)$，其中每个映射 F_k 都是线性的，次数为 $1-k$。该二元组可分解为$F_{1,0}$：$L_0\mapsto L'_0$,$F_{1,-1}$：$L_{-1}\mapsto L'_{-1}$ 以及 F_2（反对称），并满足以下关系：对所有x、y、$z\in L_0$ 以及所有 $a\in L_{-1}$

(A_1) $l'_1\circ F_{1,-1}=F_{1,0}\circ l_1$ (A_2) $l'_1(F_2(x,y))=F_{1,0}(l_2(x,y))-l'_2(F_{1,0}(x)\,F_{1,0}(y))$ (A_3) $F_{1,-1}(l_2(a,x))=F_2(l_1(a)\ x)+l'_2(F_{1,-1}(a)\,F_{1,0}(x))$ (A_4) $F_{1,-1}(l_3(x,y,z))+\big(F_2(l_2(x,y)\ z)\big)+c.p.=l'_3(F_{1,0}(x)F_{1,0}(y)F_{1,0}(z))+\big(l'_2(F_{1,0}(x)\ F_2(y,z))+c.p.\big)$其中 $c.p.$ 表示循环置换。

定义 2.8. 如果两个李 *2*-代数之间的李 *2*-态射 $F=(F_1,F_2)$ 满足以下条件，则称其为严格的：$F_2=0$.

李 2-代数态射可以按以下方式复合。

引理 *2.9.* 设 $L=(L_{-1}\oplus L_0, l_1, l_2, l_3)$、 $L'=(L'_{-1}\oplus L'_0, l'_1, l'_2, l'_3)$ 和 $(L''_{-1}\oplus L''_0, l''_1, l''_2, l''_3)$ 为李 *2*-代数。考虑李*2*-代数态射 $F=(F_1, F_2)$，它从 $L_{-1}\oplus L_0$ 到 $L'_{-1}\oplus L'_0$；以及李*2*-代数态射 $F'=(F'_1, F'_2)$，它从 $L'_{-1}\oplus L'_0$ 到 $L''_{-1}\oplus L''_0$。那么复合

$$F''=F'\circ F$$

明确描述为一对 $F''=(F''_1,\ F''_2)$，其中 $F''_{1,\ 0}$：$L_0\mapsto F''_0$，$F''_{1,\ -1}$：$L_{-1}\mapsto L''_{-1}$，F''_2：$L_0\times L_0\mapsto L''_{-1}$，且满足关系

(C_1) $F''_{1,\ 0}=F'_{1,\ 0}\circ F_{1,\ 0}$ (C_2) $F''_{1,\ -1}=F'_{1,\ -1}\circ F_{1,\ -1}$ (C_3) $F''_2=F'_2\circ(F_{1,\ 0}\times F_{1,\ 0})+F'_{1,\ -1}\circ F_2$.

证明。显然。 □

以下结果也可由定义轻易推出。

命题 2.10. 设（$L_{-1}\oplus L_0$，l_1，l_2，l_3）是一个李 *2*-代数。当且仅当 $l_1\circ l_3=0$ 时，L_0 是一个李代数，其括号由 l_2 诱导。

2.3. **骨架李2-代数**。本小节和下一小节将讨论李 2-代数的两个重要特殊类（分别为 $l_1=0$ 和 $l_3=0$），并回顾这些类的基本结果：任意给定的李 2-代数都与某个骨架李2-代数拟同构；严格李 2-代数与李代数交叉模之间存在对应关系。

定义 2.11. 若李 *2*-代数 $(L_{-1}\oplus L_0, l_1, l_2, l_3)$ 满足 $l_1=$，则称其为骨架的（或极小的） 0.

命题 2.12. 每个李 *2*-代数 $(L_{-1}\oplus L_0, l_1, l_2, l_3)$ 都与一个骨架李*2*-代数拟同构 ne.

证明。这一结果的证明见 [BC04]。在附录 A 中，我们将给出一个新的构造性证明，并在基本示例中明确应用这一构造。初读时可以略过证明，但该构造将在下一节中再次使用。□

2.4. **严格李 2-代数**。

定义 2.13. 若李 *2*-代数 $(L_{-1}\oplus L_0, l_1, l_2, l_3)$ 满足 $l_3=0$，则称其为严格的 .

注 2.14. 严格李 *2*-代数是一个集中在 *0* 次和 *-1* 次的微分分次李代数。

严格李 2-代数的一种实用等价描述可以用李代数交叉模来给出。

定义 2.15. 李代数交叉模 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \tau, r)$ 由以下内容给出

- 两个李 *2*-代数 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$，其括号分别记为 $[,]_{\mathfrak{g}}$ 和 $[,]_{\mathfrak{h}}$
- 两个李代数同态 τ：$\mathfrak{h}\mapsto\mathfrak{g}$ 和 r：$\mathfrak{g}\mapsto Der(\mathfrak{h})$ 其中 $Der(\mathfrak{h})$ 是 $\mathfrak{h}$ 的导子的李代数，其括号为

$$[A,B]=A\circ B-B\circ A$$

对于 A和 B 属于 $Der(\mathfrak{h})$。

此外，对于所有 a，b 属于 $\mathfrak{h}$，以及所有 x 属于 $\mathfrak{g}$，映射 τ 和 r 必须满足

- $\tau(r(x)(a))=[x,\tau(a)]_{\mathfrak{g}}$
- $r(\tau(a))(b)=[a,b]_{\mathfrak{h}}$.

如 [BC04]，所示，李代数交叉模可以“范畴化”为严格李 2-代数。我们来概述这一结果的证明，该证明不借助范畴论工具。

命题 2.16. 严格李 *2*-代数与李代数交叉模之间存在一一对应关系。

证明。
设 $(\mathfrak{g},\mathfrak{h},\tau,r)$ 是一个李代数交叉模。令 $\mathfrak{g}_{-1}=\mathfrak{h}$ and $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}$。我们定义映射$l_1$ and l_2为 $l_1=\tau$, $l_2^p(x,y)=[x,y]_{\mathfrak{g}}$ and $l_2^m(a,x)=-l_2^m(x,a)=-r(x)(a)$，其中 x and y属于$\mathfrak{g}$, a 属于 $\mathfrak{h}$，并令 $l_3=0$。不难证明，所有关系 $(R_i)_{1\leq i\leq 6}$ 均成立。因此，借助这些映射， $\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0$ 是一个李 2-代数，且该李 2-代数是严格的，因为 $l_3=0$。

反过来，设 $\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0$ 是一个严格李 2-代数，具有映射 l_1, l_2，并分解为 l_2^p 和l_2^m，且满足 $l_3=0$。令 $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0, \tau=l_1$，并令 $r(x)(a)=l_2^m(x,a)$，其中 x 属于 $\mathfrak{g}_0$，且 a 属于$\mathfrak{g}_{-1}$。此外，我们定义括号 $[,]_{\mathfrak{g}}$ 和 $[,]_{\mathfrak{h}}$ 如下:

$$[x,y]_{\mathfrak{g}}=l_2^p(x,y)$$

and

$$[a,b]_{\mathfrak{h}}=l_2^m(a,l_1(b))\,,$$

其中 x 和 y 属于 $\mathfrak{g}_0$， a 和 b 属于 $\mathfrak{g}_{-1}$。容易验证，$(\mathfrak{g},[,]_{\mathfrak{g}})$ 和 $(\mathfrak{h},[,]_{\mathfrak{h}})$ 都是李代数。通过简单计算，利用前述记号以及李 2-代数的关系，我们还可得到：对于所有 x 属于 $\mathfrak{g}$ 且 a,b 属于 $\mathfrak{h}$,

$$r(x)([a,b]_{\mathfrak{h}})-[r(x)(a),b]_{\mathfrak{h}}-[a,r(x)(b)]_{\mathfrak{h}}=l_3(l_1(a),l_1(b),x)=0$$

因为 $l_3=0$。因此，对于所有 x 属于 $\mathfrak{h}$， $r(x)$ 属于 $Der(\mathfrak{h})$。同理可得，对于所有 x, y属于 $\mathfrak{g}$ 且 a 属于 $\mathfrak{h}$

$$r([x,y]_{\mathfrak{g}})(a)-[r(x),r(y)]_{Der(\mathfrak{h})}(a)=-l_3(l_1(a),x,y)=0$$

因为 $l_3=0$。因此， $r:\mathfrak{g}\mapsto Der(\mathfrak{h})$ 是一个李代数同态。现在可以验证其余关系，从而得出 $(\mathfrak{g},\mathfrak{h},\tau,r)$ 确实是一个李代数交叉模。□

注 2.17。 设 $\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0$ 是一个满足 $l_1\circ l_3=0$ （因此 $\mathfrak{g}_0$ 是一个李代数）且$l_3(l_1(a)\ x,\ y)=0$ 的李 *2*-代数，其中对所有 a 属于 $\mathfrak{g}_{-1}$ 且 x, y 属于 $\mathfrak{g}_0$，上述条件均成立。（这些条件弱于 $l_3=0$。）那么，与前一个证明的第二部分一样，可以将一个李代数交叉模与这样的李 *2*-代数相关联。

定义 2.18。 两个李代数交叉模 $(\mathfrak{g},\mathfrak{h},\tau,r)$ 与$(\mathfrak{g}',\mathfrak{h}',\tau',r')$ 之间的交叉模态射是由两个李代数同态组成的一对(Φ,ψ)，其中 $\Phi:\mathfrak{h}\mapsto\mathfrak{h}'$和 $\psi:\mathfrak{g}\mapsto\mathfrak{g}'$满足以下关系:

- $\tau'\circ\Phi=\psi\circ\tau$
- $\Phi(r(x)(a))=r'(\psi(x))(\Phi(a))$

对所有 x 属于 $\mathfrak{g}$ 且 a 属于 $\mathfrak{h}$的情形。

现在很容易证明以下结果。

命题 2.19。 两个李代数交叉模之间的交叉模态射，对应于这两个李代数交叉模所关联的严格李 *2*-代数之间的严格李 *2*-态射。

3. Lie 2-algebras and 3-cocycles

本节中，我们使用取值于一个模的李代数的 Chevalley-Eilenberg 复形，研究满足 $l_1\circ l_3=0$ 的李 2-代数。它使我们能够对严格李 2-代数（又称李代数交叉模）进行分类。这一结果重现了经典结论，例如参见 [Wa2] 和 [BaCra]。

设 $(L_{-1}\oplus L_0,l_1,l_2,l_3)$ 是一个李 2-代数，满足 $l_1\circ l_3=0$ 且

$$l_3(l_1(a),x,y)=0$$

对所有 $a \in L_{-1}$，以及所有 $x, y \in L_0$ 均成立。如上所述， L_0 因而是一个李代数。此外，映射 p : $L_0 \mapsto End(L_{-1})$ 定义如下：对 $x \in L_0$ 和 $a \in L_{-1}$，有

$$p(x)(a) = l_2^m(a, x)$$

是李代数 L_0（赋予由 l_2^p 诱导的括号）与自同态李代数 $End(L_{-1})$（以交换子作为其括号）之间的李代数同态，即 p 定义了 L_0 在 L_{-1} 上的作用。对于这样的线性作用，可以关联 L_0 取值于 L_{-1} 的切瓦利-埃伦伯格上同调，其中上链由下式给出

$$C^k(L_0, L_{-1}) = Hom(\wedge^k L_0, L_{-1}).$$

对于 $C^k(L_0, L$ 中的 c $_{-1})$，并且对于 L_0 中的 $x_1, ..., x_{k+1}$，我们有如下定义的 Chevalley–Eilenberg 微分

$$(d_{L_0})c(x_1, ..., x_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}p(x_i)(c(x_1, ..., \widehat{x_i}, ..., x_{k+1}))+$$

$$\sum_{i<j}(-1)^{i+j}c(l_2^p(x_i, x_j), x_1, ..., \widehat{x_i}, .., \widehat{x_j}, ..., x_{k+1}).$$

我们分别用 $Z^k(L_0, L_{-1})$ 和 $B^k(L_0, L_{-1})$ 表示 k-上循环与 k-上边界的向量空间，并将第 k 个李代数上同调空间定义为

$$H^k(L_0, L_{-1}) = \frac{Z^k(L_0, L_{-1})}{B^k(L_0, L_{-1})}.$$

注3.1. 假设 $l_1 \circ l_3 = 0$ 与

$$l_3(l_1(a), x, y) = 0$$

对于所有 $a \in L_{-1}$，以及所有 $x, y \in L_0$，当 $l_1 = 0$ 时（即对于骨架李*2*-代数），这些条件显然成立。

命题3.2。 在前述评注的假设下， l_3 是 L_0 的 ***Chevalley-Eilenberg*** 上同调中以 L_{-1} 为系数的 *3*-余循环，即 $d_{L_0} l_3 = 0$。

证明。 由关系（R_6）可直接得出。 □

命题3.3。 设 $L = (L_{-1} \oplus L_0, l_1, l_2, l_3)$ 是任意李 *2*-代数， $\overline{L} = (\overline{L_{-1}} \oplus \overline{L_0}, \overline{l_1} = 0, \overline{l_2}, \overline{l_3})$ 是其对应的骨架李 *2*-代数。那么可以构造一个 *3*-余循环 $\overline{l_3}$，它属于 $\overline{L_0}$ 的 ***Chevalley-Eilenberg*** 上同调，且以 $\overline{L_{-1}}$ 为系数，即 $d_{\overline{L_0}}\overline{l_3} = 0$。

证明。 在附录 A 中，我们证明了 $(L_{-1} \oplus L_0, l_1, l_2, l_3)$ 与一个骨架李2-代数 $(\overline{L_{-1}} \oplus \overline{L_0}, \overline{l_1} = 0, \overline{l_2}, \overline{l_3})$ 拟同构。现在，利用前述命题可知，对于 $\overline{L}, \overline{l_1} = 0$， $\overline{l_3}$是 $\overline{L_0}$ 取值于 $\overline{L_{-1}}$的切瓦利-埃伦伯格上同调中的一个 3-余循环。□

这一结果使我们能够以更明确的方式恢复李 2-代数到骨架李2-代数的“等价” [BC04] 和 [Cra04] ，从而也能通过我们的 3-余循环具体说明李 2-代数的分类，因为骨架李2-代数由四元组 $(\mathfrak{g}, V, r, [c])$ 分类，其中 $\mathfrak{g}$ 是一个李代数， V是一个向量空间， r 是 $\mathfrak{g}$ 在 V上的一个作用，而 $[c]$ 是 3-余循环 c 在 $C^k(\mathfrak{g}, V)$中的类，属于 $H^3(\mathfrak{g}, V)$。

另一方面，F. Wagemann 在 [Wag06] 和 [Wag21] 中对李代数交叉模进行了明确分类，并证明该分类与 [BC04]和 [Cra04]中的分类相容。

更准确地说，从一个李代数交叉模出发，将其视为严格李 2-代数（$L_{-1}\oplus L_0, l_1, l_2, l_3 = 0$），F. Wagemann 通过以下交换图得到一个骨架李2-代数（$\overline{L_{-1}}\oplus\overline{L_0}, \overline{l_1} = 0, \overline{l_2}, \overline{l_3}^W$）；其中，$\overline{l_2}$ 以唯一的方式确定，而 $\overline{l_3}^W$ 尚待定义：

$$\begin{array}{ccc} L_{-1} & \xrightarrow{l_1} & L_0 \\ \uparrow{\scriptstyle \Phi_{1,-1}} & & \uparrow{\scriptstyle \Phi_{1,0}} \end{array}$$

$$\overline{L_{-1}} = \ker(l_1) \xrightarrow{\overline{l_1}=0} \overline{L_0} = L_0/\mathrm{im}(l_1)$$

注意，$\Phi_{1,\,-1} = \iota$ 是自然嵌入，而映射 $\Phi_{1,\,0} = \sigma$ 是商映射的一个线性截面，它将 L_0 中的元素 x 映射到其类 $\overline{L_0}$中$\overline{x}$。关系（A_2）现在明确给出 Φ_2：

$$l_1(\Phi_2(\overline{x},\overline{y})) = \sigma(\overline{l_2^p}(\overline{x},\overline{y})) - l_2^p(\sigma(\overline{x}),\sigma(\overline{y}))$$

若 γ 表示通过此构造得到的 3-余循环 $\overline{l_3}^W$，则关系（A_4）给出

$$\gamma = -(d_{\overline{L_0}})\Phi_2$$

这里，$d_{\overline{L_0}}$ 是形式上的 Chevalley–Eilenberg 微分，作用于上链 Φ_2；该上链的取值在 L_{-1} 中，而非 $\overline{L_{-1}}$。（注意，L_{-1} 一般不是一个 $\overline{L_0}$-模。）

通过这一构造，F. Wagemann 为每个李代数交叉模关联一个 3-余循环 γ，这是其分类的关键要素。

下面的命题将我们的构造与 F. Wagemann 的分类明确联系起来。

命题 3.4。设一个李代数交叉模由严格李 *2*-代数 $L = (L_{-1}\oplus L_0,\ l_1,\ l_2,\ l_3 = 0)$给出。记 $\Phi = (\Phi_0, \Phi_1)$ 为上文所述的 ***F. Wagemann*** 的李 *2*-态射 *[Wa2]*，记 $F = (F_1,\ F_2)$ 为附录 ***A*** 中所述的李 *2*-态射，并分别以 γ 和 $\overline{l_3}$ 表示 ***F. Wagemann*** 的 *3*-余循环和与 $\overline{L}$关联的 *3*-余循环。则 γ 和 $\overline{l_3}$ 的类在第3李代数上同调空间 $H^3(\overline{L_0},\ \overline{L_{-1}})$ 中相同；该空间对应于以 $\overline{L_{-1}}$为取值的 $\overline{L_0}$的 ***Chevalley–Eilenberg*** 微分。

证明。首先，我们注意到，在这种情况下，由于 $\overline{L}$ 是一个严格李 2-代数，$\overline{l_3}$ 可表示为

$$\overline{l_3} = d_{L_0}F_2\,,$$

其中，d_{L_0} 再次表示一个形式上的 Chevalley–Eilenberg 微分（此处对应于上链 F_2取值于 $\overline{L_{-1}}$（而非 L_{-1}）时的李代数L_0）。考虑 $F = (F_1, F_2)$ 与 $\Phi = (\Phi_0, \Phi_1)$ 的复合 $F' = (F_1', F_2')$，即

$$F' = F\circ\Phi\,,$$

其中 $F_{1,\,-1}' : \overline{L_{-1}} \mapsto \overline{L_{-1}}$,$F_{1,\,0}' : \overline{L_0} \mapsto \overline{L_0}$且 $F_2' : \overline{L_0}\times\overline{L_0} \mapsto \overline{L_{-1}}$。李 2-代数态射复合的关系（$C_1$）和（$C_2$）表明，$F_{1,\,-1}'$和 $F_{1,\,0}'$分别是 $\overline{L_{-1}}$和 $\overline{L_0}$的恒等态射，而关系（C_3）说明

$$d_{\overline{L_0}}F_2' = \overline{l_3} - \gamma\,,$$

也就是说，$\overline{l_3}$ 和 γ 在 $B^3(\overline{L_0}, \overline{L_{-1}})$中相差一个余边界。 □

由此可得，我们所关联的 3-余循环（参见附录 A）给出的分类，与 J. Baez 和 A. Crans，以及 F. Wagemann 所得到的分类相同。

4. 多重 Cartan 演算

本节回顾将向量场和微分形式微积分中的一些标准公式推广至多向量场的情形。

设 M 始终为光滑流形。我们将用 $\mathfrak{X}^\bullet(M)$ 表示按次数由 $\mathfrak{X}^n(M) = \Gamma(\wedge^n TM)$ 给出的分次向量空间，并用 $\Omega^\bullet(M)$ 表示按次数由 $\Omega^n(M) = \Gamma(\wedge^n T^*M)$ 给出的分次向量空间。

4.1. 多重缩并算子与多重 Lie 导数。

若 X 属于 $\mathfrak{X}^1(M)$，则通常的内缩 ι_X 定义为

$$\iota_X(\alpha) = \alpha(X, ..)$$

对于 $\Omega^\bullet(M)$ 中的 α，并约定当 α 是 $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$ 中的函数时，$\iota_X(\alpha) = 0$。这种内缩或内积可以按如下方式推广为多向量场的多重缩并算子。

定义 4.1. 设 v 是 $\mathfrak{X}^n(M)$ 中的可分解多向量场，即 $v = X_1 \wedge \ldots \wedge X_n$，其中 $X_1, \ldots, X_n$ 属于 $\mathfrak{X}^1(M)$。对于 $\Omega^\bullet(M)$ 中的 α，我们定义

$$\iota_v(\alpha) = \iota_{X_n} \ldots \iota_{X_1}(\alpha) = \alpha(X_1, \ldots, X_n, ...)$$

约定 $\iota_v(\alpha) = 0$，若 α 属于 $\Omega^p(M)$ 且 $p < n$。

相应的内积算子 ι^n： $\mathfrak{X}^n(M) \times \Omega^p(M) \mapsto \Omega^{p-n}(M)$（对于 $p \geq n$）随后通过 $C^\infty(M)$-线性延拓为对任意多向量场 v 的良定义算子 ι_v，即使 v 不是可分解多向量场。

众所周知，对任意属于 $\mathfrak{X}^1(M)$ 的 X，通常的李导数 $\mathcal{L}_X$ 满足 Cartan 魔术公式

$$\mathfrak{L}_X = d \circ \iota_X + \iota_X \circ d.$$

李导数的概念可以仅通过要求 Cartan 魔术法则的类似形式而推广到多向量场。

定义 4.2. 设 α 属于 $\Omega^\bullet(M)$。对任意属于 $\mathfrak{X}^\bullet(M)$ 的多向量场 v，我们如下定义多重 *Lie* 导数 $\mathcal{L}_v$

$$\mathcal{L}_v(\alpha) = d\iota_v(\alpha) - (-1)^{|v|}\iota_v d(\alpha)$$

其中，若 v 属于 $\mathfrak{X}^n(M)$，则 $|v| = n$。

4.2. 多重 Cartan 交换规则。

多重 Cartan 交换规则可以针对多向量场以完全一般的形式写出。在我们的情形中，只需用到以下命题。

命题 4.3。 设 X 和 Y 属于 $\mathfrak{X}^1(M)$，且 v 属于 $\mathfrak{X}^2(M)$，并以 $[\,,\,]_S$ 表示通常的 *Schouten* 括号。则有

- $\iota_X \circ \iota_Y + \iota_Y \circ \iota_X = 0$
- $\iota_X \circ \iota_v - \iota_v \circ \iota_X = 0$
- $\mathfrak{L}_X \circ \iota_Y - \iota_Y \circ \mathfrak{L}_X = \iota_{[X,Y]_S}$
- $\mathfrak{L}_X \circ \iota_v - \iota_v \circ \mathfrak{L}_X = \iota_{[X,v]_S}$
- $\mathfrak{L}_X \circ \mathfrak{L}_Y - \mathfrak{L}_Y \circ \mathfrak{L}_X = \mathfrak{L}_{[X,Y]_S}$
- $\mathfrak{L}_v \circ \mathfrak{L}_X - \mathfrak{L}_X \circ \mathfrak{L}_v = \mathfrak{L}_{[v,X]_S}$
- $\begin{aligned}\mathfrak{L}_{X\wedge Y} &= \mathfrak{L}_Y \circ \iota_X - \iota_Y \circ \mathfrak{L}_X \\ &= \iota_X \circ \mathfrak{L}_Y - \iota_Y \circ \mathfrak{L}_X - \iota_{[X,Y]_S} \\ &= \mathfrak{L}_Y \circ \iota_X - \mathfrak{L}_X \circ \iota_Y + \iota_{[X,Y]_S}.\end{aligned}$

注记 4.4. 在多重收缩 ι 的定义中，关于各分量插入形式的顺序显然存在一种选择。本文采用与 [Rog12] 和 [Mit21]相同的约定。需要注意的是，***N.L. Delgado*** [Del18] 使用了不同的约定。

5. Action of a Lie 2-algebra (2-action)

按照 N. Delgado 的做法，在流形 M 上的 2-向量场与向量场空间的直和上定义李 2-代数结构，并提出该代数在 M 上的 2-作用 ρ。我们注意到，这并非一种"同伦不变"的概念，即李 2-代数的拟同构并不保持 2-作用。

回顾一下，在通常的情形中，李代数 $\mathfrak{g}$ 在流形 M 上的（无穷小）作用由一个李代数同态 $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}^1(M)$ 给出。现在我们希望将此定义推广到 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0$ 为李 2-代数的情形。

我们考虑以下定义在向量场上的李 2-代数结构，其中包括 2-向量场（比较 [Del18]）：

命题 5.1. （ $\mathfrak{X}^2(M) \oplus \mathfrak{X}^1(M)$上的李 *2*-代数结构）
设 M为一个流形，$(\mathfrak{X}^2(M) \oplus \mathfrak{X}^1(M)\ \nu_1, \nu_2, \nu_3)$ 是一个李 *2*-代数，其括号如下：
(1) ν_1 *:* $\mathfrak{X}^2(M) \to \mathfrak{X}^1(M)$ 是零映射 *(2)* ν_2 是 *Schouten* 括号，更确切地说 *(a)* ν_2^p*:* $\mathfrak{X}^1(M) \times \mathfrak{X}^1(M) \to \mathfrak{X}^1(M)$ 是反对称的，且 $\nu_2^p(X,Y) = [X,Y]_S$是向量场上的通常括号（即 $\mathfrak{X}^1(M)$ 上的 *Schouten* 括号）*(b)* ν_2^m*:* $\mathfrak{X}^2(M) \times \mathfrak{X}^1(M) \to \mathfrak{X}^2(M)$ 由 $\nu_2^m(Z, X \wedge Y) = [Z, X \wedge Y]_S = [Z,X]_S \wedge Y + X \wedge [Z,Y]_S$ 给出，其中 $\nu_2^m(Z, X \wedge Y) = -\nu_2^m(X \wedge Y, Z)$。简化记号后，我们通常用 $\nu_2 = [\ ,\ ]_S$ 代替 ν_2^p 和 ν_2^m。*(3)* ν_3 *:* $\bigwedge^3(\mathfrak{X}^1(M)) \to \mathfrak{X}^2(M)$ 是零映射。

证明。 很容易推出，上述括号确实定义了一个李 2-代数。由于 $\nu_1 = 0$，关系 (R_1)、(R_2) 和 (R_3) 得以满足；而由于 $\nu_3 = 0$，(R_6) 显然成立。关系 (R_4) 和 (R_5) 分别是 $\mathfrak{X}^1(M)$ 上以及 $\mathfrak{X}^2(M) \oplus \mathfrak{X}^1(M)$ 上的雅可比恒等式。□

注5.2。 这一构造可以推广为 $\mathfrak{X}^n(M) \oplus \ldots \oplus \mathfrak{X}^2(M) \oplus \mathfrak{X}^1(M)$ 上的李 n-代数结构（除 ν_2 为 *Schouten* 括号外，所有括号均为零）。

现在，令 [Del18], , 我们给出关键的

定义 5.3. *(2-*作用*)*
李 *2*-代数 $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0, l_1, l_2, l_3)$ 在流形 M 上的（无穷小）作用（或简言之， $\mathfrak{g}$ 在 M 上的 *2*-作用）是一个李 *2*-态射

$$\rho : \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \longrightarrow \mathfrak{X}^2(M) \oplus \mathfrak{X}^1(M).$$

即利用 ρ的如下分解，
(i) $\rho_{1,0}$： $\mathfrak{g}_0 \longrightarrow \mathfrak{X}^1(M)$
(ii) $\rho_{1,-1}$： $\mathfrak{g}_{-1} \longrightarrow \mathfrak{X}^2(M)$
(iii) ρ_2： $\bigwedge^2 \mathfrak{g}_0 \longrightarrow \mathfrak{X}^2(M)$
则对 $\forall a \in \mathfrak{g}_{-1}$, $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}_0$，有如下恒等式
$(A_1)\ \rho_{1,0}(l_1(a)) = 0, (A_2)\ \rho_{1,0}(l_2^p(x,y)) = [\rho_{1,0}(x)\ \rho_{1,0}(y)]_S (A_3)$
$\rho_{1,-1}(l_2^m(a,x)) = [\rho_{1,-1}(a) \rho_{1,0}(x)]_S + \rho_2(l_1(a)\ x)$ 10

(A_4) $\left(\rho_2(l_2^p(x,y)\ z)+c.p.\right)+\rho_{1,-1}(l_3(x,y,z))\ =[\rho_{1,0}(x)\ \rho_2(y,z)]_S+c.p.$

注5.4。

(1) 显然，给出的恒等式由$\mathfrak{X}^2(M)\oplus\mathfrak{X}^1(M)$ 上的李 *2*-代数结构定义以及李*2*-代数态射的定义推出。*(2)* 关系(A_2) 表明，即使 $\mathfrak{g}_0$ 不是李代数，$\rho_{1,0}$ 也保留括号。*(3)* 选取满足(A_1) 和(A_2) 的$\rho_{1,-1}=0$, $\rho_2=0$ 和$\rho_{1,0}$ ，对应于李代数 $\mathfrak{g}/\mathrm{im}\ l_1$ 在 M上的李代数作用。*(4)* 根据注*5.2*，这一定义可推广为 *n*-作用的定义，即作为李$_0$ $_1n$-代数态射：$\bigoplus_{k=1-n}\mathfrak{g}_k\longrightarrow\bigoplus_{k=n}\mathfrak{X}^k(M)$。

定义5.5。 如果 $\rho_2=0$，我们就称该*2*-作用是严格的。这对应于上文的条件(A_1)和(A_2) ，并将另外两个条件简化为

$(A_3)\ \rho_{1,\ -1}\ (l_2^m\ (a,\ x)\ )\ =[\rho_{1,-1}\ (a)\ \ \rho_{1,\ 0}\ (x)\ ]_S$分别为 $(A_4)\ \rho_{1,\ -1}\ (l_3\ (x,\ y,\ z)\ )\ =0.$

注记 5.6. 如果 *2*-作用是严格的且 $\mathfrak{g}_{-1}$ “较小”，则有$\rho_{1,\ -1}=0$，例如在$\mathfrak{g}_{-1}=l_3\ (\bigwedge^3\mathfrak{g}_0)$ 的情形下。

无穷小2-作用的概念推广了李代数作用的概念：

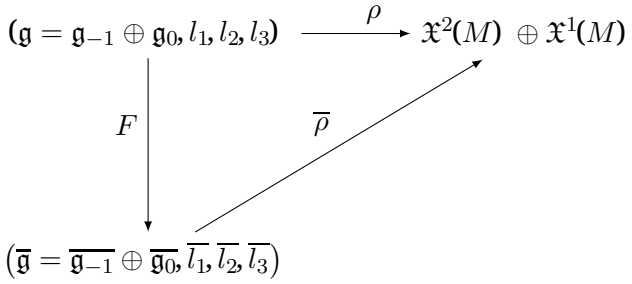
命题5.7. 李代数 $\mathfrak{g}_0$ 在流形 M 上的李代数作用，对应于李 *2*-代数 $\{0\}\bigoplus\mathfrak{g}_0$ 在 M上的严格作用。

证明. 该结论可直接由定义得出。 □

定义*5.8.* 设（$\mathfrak{g}$，$\mathfrak{h}$，τ，r）是一个李代数交叉模（可视为严格李 *2*-代数）。我们称 ρ是李代数交叉模（$\mathfrak{g}$，$\mathfrak{h}$，τ，r）在流形 M 上的交叉模作用，当且仅当 ρ 是严格的李 *2*-作用。换言之，李代数交叉模（$\mathfrak{g}$，$\mathfrak{h}$，τ，r）在流形 M上的交叉模作用，是（$\mathfrak{g}$，$\mathfrak{h}$，τ，r）与 $\mathfrak{X}^2(M)\oplus\mathfrak{X}^1(M)$ 之间的交叉模态射（视为李代数交叉模）。

Prop命题 5.9。 命题 *2.12* 中的拟同构不保留 *2*-作用。

证明。 设 $(\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0,l_1,l_2,l_3)$ 是一个李 2-代数，并将通过附录 A 中的拟同构得到的相应骨架李 2-代数记为 $\left(\overline{\mathfrak{g}}=\overline{\mathfrak{g}_{-1}}\oplus\overline{\mathfrak{g}_0},\overline{l_1},\overline{l_2},\overline{l_3}\right)$。我们用 $F=(F_1,F_2)$ 表示这个拟同构。假设存在一个 2-作用 $\overline{\rho}$ ，使得下图交换：



则必须满足以下关系：

$(C_1)\ \rho_{1,0}=\rho_{\overline{1,0}}\circ F_{1,0}(C_2)\ \rho_{1,-1}=\rho_{1,-1}\circ F_{1,}$

$_{-1}(C_3)\ \rho_2=\overline{\rho_2}\circ(F_{1,0}\times F_{1,0})+\rho_{1,-1}\circ F_2.$

若$\overline{\rho_{1,-1}}|_{\overline{\mathfrak{g}_{-1}}}=0$ 与 $\rho_{1,-1}|_{\ker l_1}=0$，但 $\rho_{1,-1}|_{\mathfrak{g}_{-1}}\neq 0$，则关系 (C_2) 不成立。（见附录 C，例 5b，备注 C.12。）□

注记 5.10。取一个拟逆 G，使得 $F\circ G\simeq \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$ 且 $G\circ F\simeq \mathrm{id}_{\overline{\mathfrak{g}}}$，这里的含义见 [LL20], 的附录 *A*。当然，由此可得 $\overline{\mathfrak{g}}$ 的 *2-* 作用 $\bar{\rho}=\rho\circ G$，以及 $\mathfrak{g}$ 的 *2-* 作用 $\tilde{\rho}=\bar{\rho}\circ F$。此外，作用 ρ 和 $\tilde{\rho}$ 作为李 *2-* 代数态射是同伦的。（G 的存在性例如在 [KS24],的引理 *6.12* 中得到了证明，只需注意到李 *2-*代数构成 L_∞-代数的一个全子范畴。）

注记 *5.11*。在经典情形下，当 $\mathfrak{g}_0$ 是一个李代数而 M 是一个光滑流形时，$\mathfrak{g}_0$ 在 M 上的一个（无穷小）作用是一个李代数同态 $\mathfrak{g}_0\longrightarrow \mathfrak{X}^1(M)$。由于 $\mathfrak{X}^1(M)\cong Der(C^\infty(M))\subset End(C^\infty(M))$，它是从 $\mathfrak{g}_0$ 到李代数 $End(C^\infty(M))$ 的李代数同态，其通常的李括号由其结合乘法导出。若 (M,ω) 是一个辛流形，则 $C^\infty(M)$ 可视为可观测量空间。

因此，对于一个 *2-*辛流形 (M,ω)，将一个（无穷小）*2-*作用 ρ 理解为从 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0$ 到其“可观测量”的自同态空间的李 *2-*代数态射，是很自然的。

*2-*辛流形 M 上的这一可观测量空间应当具有某个适当分次向量空间 $V=V_{-1}\oplus V_0$的形式，其自同态自然地带有李 *2-*代数结构（例如参见 [LL20]）。

若直接将可观测量选为 $C^\infty(M)\oplus\Omega^1(M)$的子空间，我们自然会考虑从 $\mathfrak{X}^2(M)\oplus\mathfrak{X}^1(M)$ 到 $\mathrm{End}(C^\infty(M)\oplus\Omega^1(M))$的李 *2-*代数态射。这类态射确实存在，附录*B*将对此进行讨论。

6. 可观测量的李 2-代数

我们按照 Baez 和 Rogers 的观点，以及 Delgado 的观点，在 2-辛流形（M,ω）上定义可观测量代数，并探讨它们彼此之间的关系，以及它们与 M 上多向量场之间的关系。

6.1. **哈密顿向量场与形式**。

定义 6.1. 给定一个 n-辛流形 (M,ω)，若多向量场 $v\,in\ \mathfrak{X}^\bullet(M)$ 满足 $\mathcal{L}_v(\omega)=0$，则称其为多辛多向量场。我们用 $\mathfrak{X}^\bullet_{Sympl}(M)$ 表示多辛多向量场的集合。

注 6.2. 设 (M,ω) 为一个 n-辛流形。当且仅当 $\iota_v(\omega)$ 是闭的时，多向量场 $v\,in\ \mathfrak{X}^\bullet(M)$ 才是多辛多向量场。

我们来细化 2-辛情形下 2-作用的概念。（当然，这也可以很容易地推广到 n-辛情形。）

定义 6.3。设 (M,ω) 是一个 *2-*辛流形。若 *2-*作用 $\rho\colon\ \mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0\longrightarrow\mathfrak{X}^2(M)\oplus\mathfrak{X}^1(M)$ 满足对于所有 x, $y\in\mathfrak{g}_0$ 以及所有 $a\in\mathfrak{g}_{-1}$ 均有，则称其为 *2-*辛的

$$\mathcal{L}_{\rho_{1,0}(x)}\omega=0,\ \mathcal{L}_{\rho_{1,-1}(a)}\omega=0,\ and\ \mathcal{L}_{\rho_2(x,y)}\omega=0\,.$$

如果只有前两个李导数为零，则称 ρ 为拟 *2-plectic*。

定义 6.4。给定一个 n-辛流形 (M,ω)，若一个 $(n-1)$-形式 α 满足存在一个向量场 $X_\alpha\in\mathfrak{X}^1(M)$ 使得 $d\alpha=-\iota_{X_\alpha}\omega.$，则称其为哈密顿的。与 α对应的向量场 X_α 称为哈密顿向量场。我们将 M上的哈密顿 $(n-1)$-形式集合记为 $\Omega^{n-1}_{Ham}(M)$。

6.2。 **Rogers 的可观测量李 2-代数**。

我们回顾 J. Baez 和 C. Rogers 为 n-plectic 流形关联的李 n-代数 $\mathsf{L}^n(M,\omega)$，并对 $n=2$ 情形下的括号进行专门讨论。

定理 6.5 ([Rog12])。给定一个 n-辛流形，它对应一个李 n-代数，记作$\mathsf{L}^n(M,\omega)$，称为可观测量的李 n-代数。

下面我们以 (M,ω) 是一个 2-辛流形为例，具体说明上一条定理的内容。

Pro位置 6.6 ([Rog12])。 设(M,ω) 为一个 *2*-辛流形。分次向量空间 e

$$\mathsf{L}^2(\mathsf{M},\omega) = C^\infty(M) \oplus \Omega^1_{Ham}(M),$$

其中， $C^\infty(M)$ 中的元素次数为 *-1*，而$\Omega^1_{Ham}(M)$ 中的元素次数为 *0*，并配备以下括号:

- $l_1^{\tilde{R}} : C^\infty(M) \mapsto \Omega^1_{Ham}(M),\ l_1^{\tilde{R}}(f) = df$
- $l_2^{\tilde{R}} : \bigwedge^2(\Omega^1_{Ham}(M)) \longrightarrow \Omega^1_{Ham}(M),\ l_2^{\tilde{R}}(\alpha,\beta)(\omega) = \iota_{X_\alpha \wedge X_\beta}(\omega) = \iota_{X_\beta}\iota_{X_\alpha}(\omega)\ where$
$$d\iota_{X_\alpha \wedge X_\beta}(\omega) = -\iota_{[X_\alpha, X_\beta]_S}(\omega)$$
- $l_3^{\tilde{R}} : \bigwedge^3(\Omega^1_{Ham}(M)) \longrightarrow C^\infty(M),\ l_3^{\tilde{R}}(\alpha,\beta,\gamma) = -\iota_{X_\alpha \wedge X_\beta \wedge X_\gamma}(\omega).$

~ ~ ~定义了一个李 *2*-代数($\mathsf{L}^2(\mathsf{M}\ \omega)\ l_1^R, l_2^R, l_3^R$)，有时称为 ***Baez-Rogers*** 可观测量代数。

6.3. **Delgado 的可观测量李 2-代数**。

~我们定义 Delgado 的可观测量李 2-代数 $\mathsf{D}^2(\mathsf{M}\ \omega)$ 和 $\mathsf{D}^2(\mathsf{M}\ \omega)$，并引入重要的 2-态射 Φ: $\mathsf{D}^2(\mathsf{M}\ \omega) \to \mathsf{L}^2(\mathsf{M}\ \omega)$ 和 $\Psi : \mathsf{D}^2(\mathsf{M}\ \omega) \to \mathfrak{X}^2(M) \oplus \mathfrak{X}^1(M)$。

以下定义将在后文中派上用场。

定义 6.7。 设 (M,ω) 是一个 *2*-辛流形。若函数 f属于 $C^\infty(M)$，则称其为哈密顿函数（或属于 $C^\infty_{Ham}(M)$），如果存在 ^{v_f}属于 $\mathfrak{X}^2(M)$使得 $df = -\iota_{v_f}\omega$。

注 6.8。 可能存在两个（或更多）不同的 ^{v_f}和 ^{w_f}属于 $\mathfrak{X}^2(M)$，使得 $df = -\iota_{v_f}\omega = -\iota_{w_f}\omega$，因为 ω 的二核

$$\ker\omega^{(2)} = \{u \in \mathfrak{X}^2(M) \,|\, \iota_u\omega = 0\},$$

通常并非平凡的。

例 6.9。 设 $M = \mathbb{R}^5 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4$，其坐标为 (t, q^1, q^2, p_1, p_2)，且 $\omega = dt \wedge dq^1 \wedge dp_1 + dt \wedge dq^2 \wedge dp_2$。则从 $\Lambda^2 TM$到 T^*M 的 ω 内缩是满射，并且 核 $\omega^{(2)}$ 在 $m \in M$ 中具有如下基:

$$\{\partial_{q^1} \wedge \partial_{q^2}, \partial_{p_1} \wedge \partial_{p_2}, \partial_{q^1} \wedge \partial_{p_2}, \partial_{q^2} \wedge \partial_{p_1}, \partial_{q^1} \wedge \partial_{p_1} - \partial_{q^2} \wedge \partial_{p_2}\},$$

这里简要记作 ∂_{q^1} 对于 $\frac{\partial}{\partial q^1}\big|_m$ 等。

遵循 N.L Delgado [Del18] ，我们首先引入 $\mathsf{D}^2(\mathsf{M}\ \omega)$，它是可观测量李2-代数 $\mathsf{L}^2(\mathsf{M}\ \omega)$ 的扩张。（为方便读者，我们将在下文验证其关键性质。）此外，~由于前述备注，我们还将在后文引入包含哈密顿对的可观测量李2-代数 $\mathsf{D}^2(\mathsf{M}\ \omega)$。

命题6.10. 设 (M,ω) 是一个*2*-辛流形。那么分次向量空间

$$\mathsf{D}^2(\mathsf{M},\omega) = (C^\infty(M) \times C^\infty_{Ham}(M)) \oplus \Omega^1_{Ham}(M),$$

其中，$C^\infty(M) \times C^\infty_{Ham}(M)$ 中的元素次数为 *-1*，而$\Omega^1_{Ham}(M)$ 中的元素次数为 *0*，并配有以下括号

- $\tilde{l_1} : C^\infty(M) \times C^\infty_{Ham}(M) \mapsto \Omega^1_{Ham}(M),\ \tilde{l_1}(\tilde{f}, f) = d \circ pr_1(\tilde{f}, f) = d\tilde{f},\ where\ pr_1(\tilde{f}, f) = \tilde{f}$

- $\tilde{l_2}$ 它分解为两个反对称映射 l_2^p 和 l_2^m，定义如下$\tilde{l_2^p}$: $\tilde{\bigwedge^2}(\Omega^1_{Ham}(M)) \longrightarrow \Omega^1_{Ham}(M)$ $\tilde{l_2^p}(\alpha,\beta) = \iota_{X_\alpha\wedge X_\beta}(\omega)$，其中 $d\iota_{X_\alpha\wedge X_\beta}(\omega) = -\iota_{[X_\alpha,X_\beta]_S}(\omega)$，且 $\tilde{l_2^m}$: $(C^\infty(M)\times C^\infty_{Ham}(M))\times\Omega^1_{Ham}(M) \longrightarrow C^\infty(M)\times C^\infty_{Ham}(M)$，$\tilde{l_2^m}((f,f)\alpha) = (0,\iota_{v\wedge X_\alpha}(\omega))$，其中 v满足 $df = -\iota_v\omega$

$\tilde{l_2^m}$的定义与 v 的选取无关，并且在令$\tilde{l_2^m}$ $(\alpha,(f,f)) = -(0,\iota_{v\wedge X_\alpha}(\omega)) = -(0,\iota_{X_\alpha\wedge v}(\omega))$.
- $\tilde{l_3}$: $\tilde{\bigwedge^3}(\Omega^1_{Ham}(M)) \longrightarrow C^\infty(M)\times C^\infty_{Ham}(M)$，$\tilde{l_3}(\alpha,\beta,\gamma) = (-\iota_{X_\alpha\wedge X_\beta\wedge X_\gamma}(\omega), 0)$

定义了一个李 2-代数 $(\mathsf{D}^2(\mathsf{M}\ \omega)\ \tilde{l_1},\ \tilde{l_2},\ \tilde{l_3})$。

证明。我们先证明

$$\tilde{l_2^m}((\tilde{f},f),\alpha) = (0,\iota_{v\wedge X_\alpha}(\omega))$$

不依赖于 v 的选择。令 v 和 w 满足

$$df = -\iota_v\omega = -\iota_w\omega.$$

我们注意到

$$\iota_{v\wedge X_\alpha}(\omega) = \iota_{X\alpha}\iota_v(\omega) = \iota_{X_\alpha}\iota_w(\omega) = \iota_{w\wedge X_\alpha}(\omega).$$

现在，为了验证括号 l_k 是良定义的，我们还必须检查 im($pr_2\circ l_2^m$) 属于$C^\infty_{Ham}(M)$。对于所有 v 中的元素 $\mathfrak{X}^2(M)$（与 $C^\infty_{Ham}(M)$ 中的 f 相关联），以及 $\Omega^1_{Ham}(M)$ 中的 α，我们看到

$$d(\iota_{v\wedge X_\alpha}(\omega)) = d(\iota_{X_\alpha}\iota_v(\omega)) = \mathfrak{L}_{X_\alpha}\iota_v(\omega)$$

由于 $\mathfrak{L}_{X_\alpha} = d\circ\iota_{X_\alpha} + \iota_{X_\alpha}\circ d$ 和 $d\iota_v(\omega) = 0$。因此

$$d(\iota_{v\wedge X_\alpha}(\omega)) = \iota_{[X_\alpha,v]_S}(\omega) = -\iota_{[v,X_\alpha]_S}(\omega)$$

由于

$$\mathfrak{L}_{X_\alpha}\circ\iota_v - \iota_v\circ\mathfrak{L}_{X_\alpha} = \iota_{[X_\alpha,v]_S}$$

以及 $\mathfrak{L}_{X_\alpha}(\omega) = 0$. 现在，我们必须证明关系 (R_i) 均成立。关系 (R_1) 显然成立，因此我们从关系 (R_2) 开始。对于所有 α属于 $\Omega^1_{Ham}(M)$，以及所有 $(\tilde{f},f)$ 属于$C^\infty(M)\times C^\infty_{Ham}(M)$，有

$$\tilde{l_1}\tilde{l_2^m}(\alpha,(\tilde{f},f)) = -\tilde{l_1}(0,\iota_{v\wedge X_\alpha}(\omega)) = 0\,,$$

其中 v 满足 $df = -\iota_v(\omega)$，并且

$$\tilde{l_2^p}(\alpha,l_1(\tilde{f},f)) = \tilde{l_2^p}(\alpha,d\tilde{f}) = 0.$$

现在来验证关系 (R_3)。对于所有 (f,f) 和 $(\tilde{g},g)$ 属于 $C^\infty(M)\times C^\infty_{Ham}(M)$，其中 v和v'属于 $\mathfrak{X}^2(M)$，且满足 $df = -\iota_v(\omega)$ 和 $dg = -\iota_{v'}(\omega)$，

$$\tilde{l_2^m}(l_1(\tilde{f},f),(\tilde{g},g)) = \tilde{l_2^m}(d\tilde{f},(\tilde{g},g)) = (0,0)\,.$$

根据反对称性，同样有

$$\tilde{l_2^m}((\tilde{f},f),l_1(\tilde{g},g)) = (0,0).$$

此外，由于 $\tilde{l_2^p}$ 与 $\tilde{l_2^R}$ 相同，且项 $\tilde{l_1}(\tilde{l_3}(\alpha,\beta,\gamma))$ 等于

$$\tilde{l_1^R}(\tilde{l_3^R}(\alpha,\beta,\gamma)),$$

我们注意到，$\mathsf{D}^2(\mathsf{M}\ \omega)$ 满足关系 (R_4)，正如 $\mathsf{L}^2(\mathsf{M}\ \omega)$ 满足关系 (R_4) 一样（参见 [Rog12]）。该关系表明

$$d(\iota_{X_\alpha\wedge X_\beta\wedge X_\gamma}(\omega)) = \iota_Y(\omega)$$

其中 $Y = [X_\alpha,X_\beta]_S\wedge X_\gamma + c.p.$，这是利用命题 4.3 的性质得到的。

下面证明关系 (R_5)。一方面，我们有

$$\tilde{l_3}(\tilde{l_1}(\tilde{f},f),\alpha,\beta)=\tilde{l_3}(d\tilde{f},\alpha,\beta)=(0,0).$$

另一方面，我们有

$$l_2^{\tilde{m}}(l_2^{\tilde{p}}(\alpha,\beta),(\tilde{f},f))+l_2^{\tilde{m}}(l_2^{\tilde{m}}(\beta,(\tilde{f},f)),\alpha)+l_2^{\tilde{m}}(l_2^{\tilde{m}}((\tilde{f},f),\alpha),\beta)$$

$$=(0,-\iota_v\iota_{[X_\alpha,X_\beta]_S}(\omega)-\iota_{[v,X_\beta]_S}\iota_{X_\alpha}(\omega)+\iota_{[v,X_\alpha]_S}\iota_{X_\beta}(\omega))$$

$$=(0,-\iota_{[X_\alpha,X_\beta]_S}\iota_v(\omega)+\iota_{X_\alpha}\iota_{[X_\beta,v]_S}(\omega)-\iota_{X_\beta}\iota_{[X_\alpha,v]_S}(\omega)$$

其中 v 满足 $df=-\iota_v(\omega)$。此外，我们可以注意到

$$\iota_{X_\alpha}\iota_{[X_\beta,v]_S}(\omega)=\iota_{X_\alpha}d(\iota_{X_\beta}\iota_v(\omega))$$

$$=\mathfrak{L}_{X_\alpha}(\iota_{X_\beta}\iota_v(\omega))=-\mathfrak{L}_{X_\alpha}\iota_{X_\beta}(df)=-\mathfrak{L}_{X_\alpha}\mathfrak{L}_{X_\beta}(f)$$

因为可以验证 $\iota_{X_\alpha}\iota_{X_\beta}\iota_v(\omega)=0$，且由于 $\iota_{X_\beta}(f)=0$.。同理，

$$\iota_{X_\beta}\iota_{[X_\alpha,v]_S}(\omega)=-\mathfrak{L}_{X_\beta}\mathfrak{L}_{X_\alpha}(f)$$

and

$$\iota_{[X_\alpha,X_\beta]}\iota_v(\omega)=-\mathfrak{L}_{[X_\alpha,X_\beta]_S}(f).$$

由此我们证明了

$$l_2^{\tilde{m}}(l_2^{\tilde{p}}(\alpha,\beta),(\tilde{f},f))+l_2^{\tilde{m}}(l_2^{\tilde{m}}(\beta,(\tilde{f},f)),\alpha)+l_2^{\tilde{m}}(l_2^{\tilde{m}}((\tilde{f},f),\alpha),\beta)=(0,0)$$

因为

$$\mathfrak{L}_{X_\alpha}\circ\mathfrak{L}_{X_\beta}-\mathfrak{L}_{X_\beta}\circ\mathfrak{L}_{X_\alpha}=\mathfrak{L}_{[X_\alpha,X_\beta]_S}.$$

最后，我们需要证明 (R_6)。首先注意，对于 $\Omega^1_{Ham}(M)$ 中任意的 α、β、γ、δ，我们有

$$\tilde{l_3}(\tilde{l_2}(\alpha,\beta),\gamma,\delta)-\tilde{l_3}(\tilde{l_2}(\beta,\gamma),\alpha,\delta)+\tilde{l_3}(\tilde{l_2}(\alpha,\delta),\beta,z)+\tilde{l_3}(\tilde{l_2}(\beta,z),\alpha,\delta)-\tilde{l_3}(\tilde{l_2}(\beta,\delta),\alpha,\gamma)=$$

$$\left(l_3^{\tilde{R}}(l_2^{\tilde{R}}(\alpha,\beta),\gamma,t)-l_3^{\tilde{R}}(l_2^{\tilde{R}}(\alpha,\gamma),\beta,\delta)+l_3^{\tilde{R}}(l_2^{\tilde{R}}(\alpha,\delta),\beta,\gamma)+l_3^{\tilde{R}}(l_2^{\tilde{R}}(\beta,\gamma),\alpha,\delta)-l_3^{\tilde{R}}(l_2^{\tilde{R}}(\beta,\delta),\alpha,\gamma),0\right)$$

这与 $L^2(M,\omega)$ ([Rog12]) 的情形一样，等于 (0, 0)，并利用以下事实：

$$d\omega(X_\alpha,X_\beta,X_\gamma,X_\delta)=0.$$

˜ ˜根据 l_2^m和 l_3的定义，我们有

$$l_2^{\tilde{m}}(\tilde{l_3}(\alpha,\beta,\gamma),\delta)-l_2^{\tilde{m}}(\tilde{l_3}(\alpha,\beta,\delta),\gamma)+l_2^{\tilde{m}}(\tilde{l_3}(\alpha,\gamma,\delta),\beta)-l_2^{\tilde{m}}(\tilde{l_3}(\beta,\gamma,\delta),\alpha)=(0,0),$$

证明至此完成。 □

注 6.11。

(1) 比较 *Rogers* 的可观测量与 *Delgado* 的可观测量时，我们强调$D^2(M,\omega)$ 中存在混合括号，而 *Rogers* 的括号仅在 $1-$形式上非零。*(2)* 我们强调这一重要关系

$$d(\iota_{v\wedge X_\alpha}(\omega))=d(\iota_v\iota_{X_\alpha}\omega)=-\iota_{[v,X_\alpha]_S}\omega=\iota_{[X_\alpha,v]_S}\omega\,,$$

˜这在前述证明中很有用，可用于证明 l_2^m是良定义的。我们还有如下类似的关系 $d\,(\iota_{X_\alpha\wedge X_\beta\wedge X_\gamma}\omega)=\iota_Y\omega$，其中 $Y=[X_\alpha,X_\beta]_S\wedge X_\gamma+c.p.$；该关系（$R_4$）对于$L^2$（$M,\omega$）和$D^2$（$M,\omega$）均成立。

(3) 同样值得注意的是

$$\tilde{l_2^m}((0,-\iota_{X_\alpha\wedge X_\beta\wedge X_\gamma}\omega)\ \delta)-\tilde{l_2^m}((0,-\iota_{X_\alpha\wedge X_\beta\wedge X_\delta}\omega)\ \gamma)+\tilde{l_2^m}((0,-\iota_{X_\alpha\wedge X_\gamma\wedge X_\delta}\omega)\ \beta)-\tilde{l_2^m}((0,-\iota_{X_\beta\wedge X_\gamma\wedge X_\delta}\omega)\ \alpha)=(0,2d\omega(X_\alpha,X_\beta,X_\gamma,X_\delta))=(0,0)$$

。但尽管如此，$\iota_{X_\alpha\wedge X_\beta\wedge X_\gamma}(\omega)$属于 $C^\infty(M)$，而不属于$C^\infty_{Ham}(M)$，从 $\tilde{l_3}$ 的定义可见，因为 $pr_1\circ\tilde{l_3}(\alpha,\beta,\gamma)=-\iota_{X_\alpha\wedge X_\beta\wedge X_\gamma}(\omega)$。

为了处理与哈密顿函数相关的双向量的不确定性，我们细化了 $D^2(M,\omega)$的定义。

定义 6.12. 设 (M,ω) 是一个 2-辛流形。若一对 (f,v) 属于 $C^\infty(M)\times\mathfrak{X}^2(M)$ 且满足 $df=-\iota_v\omega$，则称其为哈密顿对。我们用 $Ham^0(M)$ 表示哈密顿对的集合。

在下面的命题中，我们通过纳入哈密顿对，给出一个新的可观测量李2-代数 $\mathsf{D}^2(\mathsf{M}\ \omega)$。为简单起见，对于 $\mathsf{D}^2(\mathsf{M}\ \omega)$和 $\mathsf{D}^2(\mathsf{M}\ \omega)$，我们使用相同的记号 $(\tilde{l_1},\tilde{l_2},\tilde{l_3})$。

命题 6.13. 设 (M,ω) 是一个 2-辛流形。则分次向量空间

$$\widetilde{\mathsf{D}^2(\mathsf{M},\omega)}=(C^\infty(M)\times Ham^0(M))\oplus\Omega^1_{Ham}(M),$$

其中，$C^\infty(M)\times Ham^0(M)$ 中的元素次数为 -1，而 $\Omega^1_{Ham}(M)$ 中的元素次数为 0，并配备如下括号：

- $\tilde{l_1}:C^\infty(M)\times Ham^0(M)\mapsto\Omega^1_{Ham}(M)$, $\tilde{l_1}(\tilde{f},(f,v))=d\circ pr_1(\tilde{f},(f,v))=d\tilde{f}$, $with\ pr_1(\tilde{f},(f,v))=\tilde{f}$
- $\tilde{l_2}$ *is given by two antisymmetric maps* $\tilde{l_2^p}$ *and* $\tilde{l_2^m}$
  $\tilde{l_2^p}:\bigwedge^2(\Omega^1_{Ham}(M))\longrightarrow\Omega^1_{Ham}(M)$, $\tilde{l_2^p}(\alpha,\beta)=\iota_{X_\alpha\wedge X_\beta}(\omega)$, *where* $d\iota_{X_\alpha\wedge X_\beta}(\omega)=-\iota_{[X_\alpha,X_\beta]_S}(\omega)$ *and* $\tilde{l_2^m}:(C^\infty(M)\times Ham^0(M))\times\Omega^1_{Ham}(M)\longrightarrow C^\infty(M)\times Ham^0(M)$,
  $$\tilde{l_2^m}((\tilde{f},(f,v)),\alpha)=(0,(\iota_{v\wedge X_\alpha}(\omega),[v,X_\alpha]_S)),$$
  ($\tilde{l_2^m}$ *is antisymmetric upon setting* $\tilde{l_2^m}(\alpha,(\tilde{f},(f,v)))=-(0,(\iota_{v\wedge X_\alpha}(\omega),[v,X_\alpha]_S))$)
- $\tilde{l_3}:\bigwedge^3(\Omega^1_{Ham}(M))\longrightarrow C^\infty(M)\times Ham^0(M)$, $\tilde{l_3}(\alpha,\beta,\gamma)=(-\iota_{X_\alpha\wedge X_\beta\wedge X_\gamma}(\omega),(0,0))$

$\widetilde{\mathsf{D}^2(\mathsf{M}\ \omega)}\ \tilde{l_1},\tilde{l_2},\tilde{l_3})$定义了一个李 2-代数 $(\mathsf{D}^2(\mathsf{M}\ \omega)\ l_1,l_2,l_3)$。

证明。 证明与前一个命题的证明类似。 □

注 6.14。从 $D^2(M,\omega)$ 到 $D^2(M\ \omega)$ 的过程类似于预 n-多辛情形下可观测量的构造，即用 $Ham^{n-1}(M)=\{(\alpha,X)\in\Omega^{n-1}_{Ham}(M)\times\mathfrak{X}^1(M)\ |\iota_X\omega=d\alpha\}$ 替换 $\Omega^{n-1}_{Ham}(M)$（如 [CFRZ16] 中所述）。事实上，上述李 2-代数 $D^2(M\ \omega)$ 可以替换为 $(C^\infty(M)\oplus Ham^0(M))\oplus Ham^1(M)$，以涵盖预 2-辛情形。

我们通过三个简单但重要的命题，将李 2-$\widetilde{\text{代数}}$ Delgado 的可观测量 $\mathsf{D}^2(\mathsf{M}\ \omega)$ 与 Rogers 的可观测量 $\mathsf{L}^2(\mathsf{M}\ \omega)$ 以及 M 上（截断的）多向量场李 2-代数联系起来。

$\tilde{\ }\quad\tilde{\ }\quad\tilde{\ }$命题 6.15. 对于所有 $f\in C^\infty(M)$，，且 $I_2=0$，偶对 $I=(I_1,I_2)$ 满足 $I_{1,0}=id$, $I_{1,-1}(f)=(f,(0,0))$，是从 $L^2(M\ \omega)$ 到 $D^2(M\ \omega)$ 的李 2-态射，并且在每个次数上都是单射。因此，$L^2(M\ \omega)$ 是 $D^2(M\ \omega)$ 的一个李二子代数。

证明。 直接验证即可。 □

命题 6.16。 由 $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ 以及 $\Phi_{1,\,0} = \mathrm{id}$、$\Phi_{1,\,-1} = pr_1$ 和 $\Phi_2 = 0$ 构成的对是从 $\mathsf{D}^2(\mathsf{M}\ \omega)$ 到 $\mathsf{L}^2(\mathsf{M}\ \omega)$ 的 *Lie 2-* 态射，且在每个次数上都是满射。此外 $\Phi \circ I = \mathrm{id}$。

证明。 验证很直接。 □

定义 6.17。 *2-*辛梯度（映射）是一个李*2-*代数态射

$$\Psi = (\Psi_1, \Psi_2) : \widetilde{\mathsf{D}^2(\mathsf{M}, \omega)} = (C^\infty(M) \times Ham^0(M)) \oplus \Omega^1_{Ham}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}^2(M) \oplus \mathfrak{X}^1(M)$$

满足~

~*(1)* $\Psi_{1,-1}(f, (0, 0)) = 0$ 对所有 $f \in C^\infty(M)$ 都成立。*(2)* $\Psi_{1,-1}(0, (f, v)) = v$ 对所有 (f, v) 属于 $Ham^0(M)$ 都成立。*(3)* $\Psi_{1,0}(\alpha) = X_\alpha$ 对所有满足 $d\alpha = -\iota_{X_\alpha}\omega$ 且 X_α 属于 $\mathfrak{X}^1(M)$ 的 $\alpha \in \Omega^1_{Ham}(M)$ 都成立。

~命题 *6.18*。设 $\Psi_1: D^2(M\ \omega) \longrightarrow \mathfrak{X}^2(M) \oplus \mathfrak{X}^1(M)$ 是一个分次线性映射，且 $\Psi_2: \Lambda^2\Omega^1_{Ham}(M) \to \mathfrak{X}^2(M)$ 是一个线性映射。那么，当且仅当以下条件对 $\tilde{f} \in C^\infty(M)$、$(f, v) \in Ham^0(M)$ 以及 $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^1_{Ham}(M)$ 成立时， $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)$ 定义一个李 *2-*态射：

(A_1) *for* Ψ *:* $\Psi_{1,0} \circ (d \circ pr_1(\tilde{f}, (f, v))) = X_{d\tilde{f}} = 0$
(A_2) *for* Ψ *:* $\Psi_{1,0}(i_{X_\alpha \wedge X_\beta}\omega) = [\Psi_{1,0}(\alpha), \Psi_{1,0}(\beta)]_S$
(A_3) *for* Ψ *:* $\Psi_{1,-1}(\tilde{l_2^m}((\tilde{f}, (f, v)), \alpha) = [\Psi_{1,-1}(\tilde{f}, (f, v)), \Psi_{1,0}(\alpha)]_S$
and $\Psi_2(d \circ pr_1((\tilde{f}, (f, v)), \alpha) = \Psi_2(d\tilde{f}, \alpha) = 0$
(A_4) *for* Ψ *:* $\Psi_2(i_{X_\alpha \wedge X_\beta}\omega, \gamma) + c.p. = [X_\alpha, \Psi_2(\beta, \gamma)]_S + c.p.$

此外， $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)$ 满足前述定义中的条件 *(1)-(3)* 是一个 *2-plectic* 梯度~当且仅当 Ψ_2 满足 $\Psi_2(df, \alpha) = 0$ 和 (A_4)（对于 Ψ）。若 $\Psi_2 = 0$，前述定义中的条件 *(1)-(3)* 已经蕴含 (A_1) $-(A_4)$（对于 Ψ）。

证明。 对于 Ψ，关系 (A_1)–(A_4) 是李 2-代数态射定义~中关系 (A_1)–(A_4) 在当前情形下的特化。显然，若 $(f, v) = 0$，则条件 (A_3) 中其他项消失，从而推出 $\Psi_2(df, \alpha) = 0$；也就是说，李 2-代数态射的关系 (A_3)~对于 Ψ 等价于关系 $\Psi_2(df, \alpha) = 0$，并且

$$(A_3') \quad \Psi_{1,-1}(\tilde{l_2^m}((\tilde{f}, (f, v)), \alpha) = [\Psi_{1,-1}(\tilde{f}, (f, v), \Psi_{1,0}(\alpha)]_S\,.$$

此外，对于任意分次线性映射，“规则”(1)-(3)立即蕴含（A_1）（对 Ψ）和（A_2）（对 Ψ），并且还蕴含如下事实：（A_3'）的左端等于$\Psi_{1,-1}((0, (\iota_{v \wedge X_\alpha}(\omega)\ [v, X_\alpha]_S)) = [v, X_\alpha]_S$，而这恰好也是（$A_3'$）的右端。因此，说满足(1)-(3)的分次线性映射 Ψ =~(Ψ_1, Ψ_2)是2-plectic梯度，与说 Ψ_2 满足条件 $\Psi_2(df, \alpha) = 0$和（A_4）是等价的。当 $\Psi_2 = 0$时，这最后两个条件平凡地得到保证。□

注 6.19。

(1) 我们总能通过将 $\Psi_2 = 0$ 和 Ψ_1 设为定义 *6.17* 的(1) $-(3)$ 所规定的值，得到唯一的严格 *2-*辛梯度 Ψ。（*2*）由于 Ψ_2 可以取非零值，我们给出了适用于一般情形的定义和公式。尽管如此，我们主要考虑这样的情形： Ψ 是本注释第一部分所描述的严格 *2-*辛梯度。

7. 余动量映射

本节中，我们假设 (M, ω) 是一个 2-辛流形，并引入 2-余动量映射的概念。这类映射是取值于 $\mathrm{D}^2(\mathrm{M}\ \omega)$ 的李 2-态射，并且与一般李 2-代数 $\mathfrak{g}$ 在 M 上给定的 2-作用 ρ 相容。我们还将说明"同伦（共）动量映射"这一概念（参见 [CFRZ16、MZ20、RW15、Mit21]）如何纳入我们更一般的框架。

7.1. 2-余动量映射的概念。

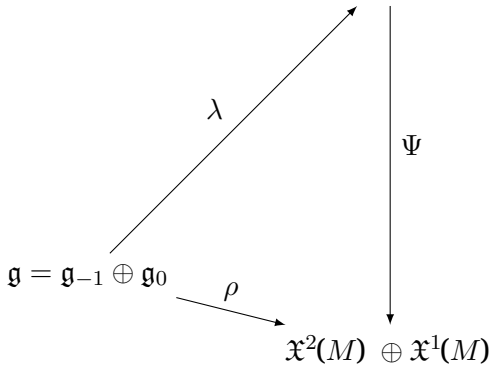
设 (M,ω) 是一个 2-辛流形，且 $\rho\colon\ \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \longrightarrow \mathfrak{X}^2(M) \oplus \mathfrak{X}^1(M)$ 是李 2-代数 $(\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0, l_1, l_2, l_3)$ 在 M 上的一个 2-作用。我们为 (M,ω) 给出一个与 ρ 相容的 2-余动量映射概念。我们将余动量映射通常的目标 $\mathrm{L}^2(\mathrm{M}\ \omega)$（参见第 7.2 节）替换为 $\mathrm{D}^2(\mathrm{M}\ \omega)$，因为它允许 $\mathfrak{g}_{-1}$ 作用（根据 2-作用的定义）。

7.1.1. 一般定义。

定义 *7.1.* 设 $\Psi : D^2(M\ \omega) = \left(C^\infty(M) \times Ham^0(M)\right) \oplus \Omega^1_{Ham}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}^2(M) \oplus \mathfrak{X}^1(M)$ 是一个 *2-plectic* 梯度，即一个李 *2*-态射，满足 $\Psi_{1,0}(\alpha) = X_\alpha$, $\Psi_{1,-1}((f,(f,v))) = v$，其中 (f, v) 满足 $\iota_v\omega = -df$，且 $X_\alpha \in \mathfrak{X}^1(M)$ 由 $\iota_{X_\alpha}\omega = -d\alpha$ 给出。

(1) 沿 Ψ 的 *2*-作用 ρ 的 *(Delgado) 2*-余动量映射或余动量映射 λ，是将该作用提升到如下李*2*-态射的交换图：

$$\mathrm{D}^2(\mathrm{M}\ \omega) = \left(C^\infty(M) \times Ham^0(M)\right) \oplus \Omega^1_{Ham}(M)$$



(2) 若存在 ρ 沿 Ψ 的余动量映射，则称作用 ρ 为沿 Ψ 的（强）哈密顿作用（或带余动量映射的作用）。

注记 7.2. 由于 λ 是李 *2*-态射，它可以分解为分量 $\lambda_{1,0}\colon\ \mathfrak{g}_0 \longrightarrow \Omega^1_{Ham}(M)$,$\lambda_{1,-1}\colon\ \mathfrak{g}_{-1} \longrightarrow C^\infty(M) \times Ham^0(M)$ 以及 $\lambda_2\colon \bigwedge^2 \mathfrak{g}_0 \longrightarrow C^\infty(M) \times Ham^0(M)$ 满足如下关系 $\forall a \in \mathfrak{g}_{-1}$ 与 $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}_0$:

(A_1) 对于 $\lambda\colon\ \lambda_{1,0}(l_1(a)) = d \circ pr_1(\lambda_{1,-1}(a))$ (A_2) 对于 $\lambda\colon\ \lambda_{1,0}(l_2^p(x,y)) = \iota_{X_{\lambda_{1,0}(x)}\wedge X_{\lambda_{1,0}(y)}}\omega + d \circ pr_1(\lambda_2(x,y))$ (A_3) 对于 $\lambda\colon\ \lambda_{1,-1}(l_2^m(a,x)) = l_2^m(\lambda_{1,-1}(a)\lambda_{1,0}(x)) + \lambda_2(l_1(a)\ x)$ (A_4) 对于 $\lambda\colon\ \left(\lambda_2(l_2^p(x,y)\ z) + c.p.\right) + \lambda_{1,-1}(l_3(x,y,z)) = (-\iota_{X_{\lambda_{1,0}(x)}\wedge X_{\lambda_{1,0}(y)}\wedge X_{\lambda_{1,0}(z)}}\omega, 0) + \left(\tilde{l_2^m}(\lambda_{1,0}(x)\ \lambda_2(y,z)) + c.p.\right)$,

其中 pr_1 表示对 $C^\infty(M) \times Ham^0(M)$的第一分量的投影。

命题 7.3. 等式 $\Psi \circ \lambda = \rho$ 蕴含 $\forall a \in \mathfrak{g}_{-1}$ 和 $\forall x,\ y \in \mathfrak{g}_0$：

$(C_1)\ \Psi_{1,0}(\lambda_{1,0}(x)) = X_{\lambda_{1,0}(x)} = \rho_{1,0}(x)$，即 $\iota_{\rho_{1,0}(x)}\omega = -d\lambda_{1,0}(x)$ $(C_2)\ \Psi_{1,-1}(\lambda_{1,-1}(a)) = \rho_{1,-1}(a)$，即 $\iota_{\rho_{1,-1}(a)}\omega = -d \circ pr_{2,1}(\lambda_{1,-1}(a))$ $(C_3)\ \Psi_{1,-1}(\lambda_2(x, y)) + \Psi_2(\lambda_{1,0}(x)\lambda_{1,0}(y)) = \rho_2(x, y)$，即，

$$\iota_{\left(\rho_2(x,y)-\Psi_2(\lambda_{1,0}(x),\lambda_{1,0}(y)\right)}\omega = -d \circ pr_{2,1}(\lambda_2(x, y)).$$

其中 $pr_{2,1}$ 在 $C^\infty(M) \times Ham^0(M) \times Ham^0$ 上定义为

$$pr_{2,1}(\tilde{f}, (f, v)) = pr_1 \circ pr_2(\tilde{f}, (f, v)) = f.$$

证明。 通过将引理 2.9 特化即可得到证明。 □

推论 *7.4.* 如果 λ 是沿任意 Ψ 的 ρ *2*-余动量映射，那么 $\forall a \in \mathfrak{g}_{-1}$ 以及 $\forall x、\ y \in \mathfrak{g}_0$、$\iota_{\rho_{1,0}(x)}\omega$、$\iota_{\rho_{1,-1}(a)}\omega$ 和 $\iota_{\left(\rho_2(x,y)-\Psi_2(\lambda_{1,0}(x)\lambda_{1,0}(y)\right)}\omega$ 都是恰当的。因此，哈密顿 *2*-作用是拟 *2*-辛的。

注 7.5。 方程 (A_i) 和 (C_j) $(i = 1、\ldots\ldots、4;\ \ j = 1、\ldots\ldots、3)$ 将是研究示例的关键工具（见附录 *C*）。

如果我们不假设 λ 是李 2-态射，就会得到一种弱化的余动量映射概念。

定义 *7.6.* 设 (M, ω) 是一个 *2*-辛流形。若存在映射 $\lambda: \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \longrightarrow D^2(M\ \omega)$，且该映射可分解为线性分量 $\lambda_{1,0}: \mathfrak{g}_0 \longrightarrow \Omega^1_{Ham}(M)$, $\lambda_{1,-1}: \mathfrak{g}_{-1} \longrightarrow C^\infty(M) \times Ham^0(M)$ 以及 $\lambda_2: \bigwedge^2 \mathfrak{g}_0 \longrightarrow C^\infty(M) \times Ham^0(M)$, 并沿 Ψ 提升作用，则称李 *2*-作用 $\rho: \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \longrightarrow \mathfrak{X}^2(M) \oplus \mathfrak{X}^1(M)$ 沿 Ψ 弱哈密顿。

命题 7.7. 一个 *2*-辛作用沿 Ψ 弱哈密顿，当且仅当存在满足 $(C_1), (C_2)$ 和 (C_3) 的线性映射 $\lambda_{1,0}, \lambda_{1,-1}$ 以及 λ_2。

证明。 由于 $\Psi \circ \lambda = \rho$，结论由命题 7.3 得出。

□

命题 7.8。 强哈密顿 *2*-作用是弱哈密顿的。

证明。 显然。 □

7.1.2。 基本情形。

定义 7.9。

(1) 沿 Ψ 的 ρ 的 *2*-余动量映射称为基本的，如果 Ψ 是严格李 *2*-态射（即 $\Psi_2 = 0$）（参见命题 *6.18*）。*(2)* 沿 Ψ 的强（或弱）哈密顿 *2*- 作用称为基本的，如果 Ψ 是严格的。

命题 7.10。 如果 λ 是一个基本的 *2*-余动量映射，那么

(1) $\iota_{\rho_{1,0}(x)}\omega = -d\lambda_{1,0}(x)$, *(2)* $\iota_{\rho_{1,-1}(a)}$ $\omega = -d \circ pr_{2,1}(\lambda_{1,-1}(a))$ *(3)* $\iota_{\rho_2(x,y)}$ $\omega = -d \circ pr_{2,1}(\lambda_2(x, y))$,

$\forall a \in \mathfrak{g}_{-1}$ 和 $\forall x,\ y \in \mathfrak{g}_0$。

证明。 使用命题 7.3 及 $\Psi_2 = 0$。 □

命题 7.11。 如果 λ 是一个基本的 *2*-余动量映射，那么 $\iota_{\rho_{1,0}(x)}\omega$, $\iota_{\rho_{1,-1}(a)}\omega$ 和 $\iota_{\rho_2(x,y)}\omega$ 都是恰当的。因此，（弱或强）基本哈密顿 *2*-作用是 *2*-辛的。

证明。 根据前一个命题，它们是恰当的，因此是闭的。而且，由于 ω 是闭的

- $\mathcal{L}_{\rho_{1,0}(x)}\omega = 0 \Longleftrightarrow d \circ \iota_{\rho_{1,0}(x)}\omega = 0$,

- $\mathcal{L}_{\rho_{1,-1}(a)}\omega = 0, \iff d \circ \iota_{\rho_{1,-1}(a)}\omega = 0,$
- $\mathcal{L}_{\rho_2(x,y)}\omega = 0 \iff d \circ \iota_{\rho_2(x,y)}\omega = 0.$

□

注 7.12。 在这些例子中（参见附录 *C*），我们将只考虑基本 *2*-余动量映射。

7.2. **2-余动量映射与同伦动量映射**。

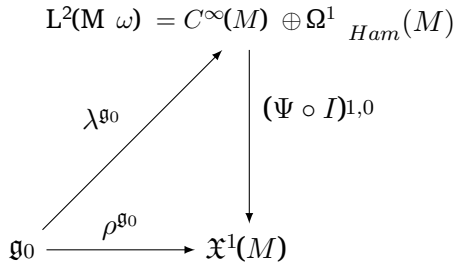
在本小节中，我们将说明，我们的定义推广了与2-辛流形上的李代数 $\rho^{\mathfrak{g}_0}$ 的李代数作用 $\mathfrak{g}_0$ 相关联的同伦动量映射概念（参见 [CFRZ16] 和 [MZ20]）。

7.2.1. 同伦动量映射回顾。

定义 *7.13*（[*CFRZ*16]）。设（M，ω）为一个 n-辛流形，设 $\mathfrak{g}_0$ 为一个李代数，并设 $\rho^{\mathfrak{g}_0}$ 为 $\mathfrak{g}_0$ 在 M 上的无穷小作用，该作用将 $\mathfrak{g}_0$ 中的 x 对应到一个哈密顿向量场 v_x。该作用的同伦余动量映射（在 [*CFRZ*16] 中称为“同伦动量映射”）是一个从 $\mathfrak{g}_0$ 到 L^n（M ω）的 L_∞-态射 $\lambda^{\mathfrak{g}_0}$，满足：对所有 $\mathfrak{g}_0$ 中的 x，$-\iota_{v_x}\omega = d$（$\lambda_1^{\mathfrak{g}_0}$（$x$））， 其中 $\lambda_1^{\mathfrak{g}_0}$: $\mathfrak{g}_0 \to \Omega^{n-1}_{Ham}$（$M$）。

现在将前面的定义专门应用于 (M,ω) 为 2-辛流形的情形。此时，$L^n(M\ \omega)$ 是李 2-代数 $L^2(M\ \omega) = C^\infty(M) \oplus \Omega^1_{Ham}(M)$，并且我们有如下重要注记。

注 7.14. 设 (M,ω) 为一个 *2*-辛流形， $\mathfrak{g}_0$ 为一个李代数，并设 $\rho^{\mathfrak{g}_0}$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 在 M 上的无穷小作用，它将 x 映射为哈密顿向量场 v_x。此作用对应于从 $\{0\} \bigoplus \mathfrak{g}_0$ 到 $\{0\} \bigoplus \mathfrak{X}^1(M)$ 的一个李 *2*-态射（将其视为李 *2*-代数）。此外，同伦余动量映射 $\lambda^{\mathfrak{g}_0}$ 对应于沿 $(\Psi \circ I)^{1,0}$，对 $\mathfrak{g}_0$ 在 (M,ω)上的作用作提升的一个李 *2*-态射；该李 *2*-态射将 $\Omega^1_{Ham}(M)$ 中的 α 映射为哈密顿向量场 X_α，并且在所有其他次数上均为平凡映射，这由下方交换图的交换性给出。



在下文中，为简便起见，我们将 $\Psi_1(\Psi \circ I)^{1,0}$ 记作$_{,0}$。

这一概念已推广到李 2-代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0$，使得 $(\mathfrak{g}_0, l_2)$ 是一个李代数（需要强调的是，对于一般的李 2- 代数，这一点并不成立）。

定义 7.15 ([Mam20], [MZ20])。

假设(M,ω) 是一个 *2*-辛流形，并且 $(\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0, l_1, l_2, l_3)$ 是一个李 *2*-代数，且$(\mathfrak{g}_0, l_2)$ 是一个李代数。设 $\rho^{\mathfrak{g}_0}$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 在 M 上的无穷小作用，它将 $\mathfrak{g}_0$ 中的 x 关联到哈密顿向量场 v_x。李 *2*-代数 $\mathfrak{g}$ 的同伦余动量映射是一个李 *2*-态射

$$\lambda^{\mathfrak{g}} : (\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0, l_1, l_2, l_3) \to (C^\infty(M) \oplus \Omega^1_{Ham}(M), l_1^{\tilde{R}}, l_2^{\tilde{R}}, l_3^{\tilde{R}})$$

使得

$$-\iota_{v_x}\omega = d(\lambda^{\mathfrak{g}}_{1,0}(x))$$

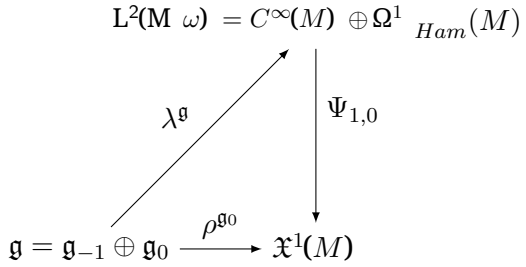
对所有 x 属于 $\mathfrak{g}_0$，其中 $\lambda^{\mathfrak{g}}_{1,0}$: $\mathfrak{g}_0 \to \Omega^1_{Ham}(M)$，$\lambda^{\mathfrak{g}}_{1,-1}$: $\mathfrak{g}_{-1} \to C^\infty(M)$ 且 $\lambda^{\mathfrak{g}}_2$: $\bigwedge^2(\mathfrak{g}_0) \to C^\infty(M)$。[20]

下面的注记使我们能够将这一定义改写为经由李2-态射交换图的 $\rho^{\mathfrak{g}_0}$ 的提升。

注记7.16。 设(M,ω)是一个 *2*-辛流形，$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{-1}\bigoplus\mathfrak{g}_0$使得 $\mathfrak{g}_0$是一个李代数，并设$\rho^{\mathfrak{g}_0}$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 在 M 上的无穷小作用，它将 $\mathfrak{g}_0$ 中的 x 映射为哈密顿向量场 v_x。如（[Mam20], [MZ20]）中所述，由于 $\lambda^{\mathfrak{g}}$ 是一个李 *2*-态射，对于所有 $\mathfrak{g}_{-1}$中的 a， $\lambda^{\mathfrak{g}}_{1,0}(l_1(a))$ 都是恰当的；由关系

$$-\iota_{v_{l_1(a)}}\omega=d(\lambda^{\mathfrak{g}}_{1,0}(l_1(a)))$$

我们推得，对于所有 $\mathfrak{g}_{-1}$中的 a， $\rho_{1,0}(l_1(a))=0$。这意味着，作用 $\rho^{\mathfrak{g}_0}$ 对应于一个从$\mathfrak{g}_{-1}\bigoplus\mathfrak{g}_0$到 $\{0\}\bigoplus\mathfrak{X}^1(M)$的李 *2*-态射，其中令$\rho_{1,0}=\rho^{\mathfrak{g}_0}$, $\rho_{1,-1}=0$和 $\rho_2=0$。此外，同伦余动量映射 $\lambda^{\mathfrak{g}}$ 对应于该作用沿(M,ω) 在$\Psi_{1,0}$上的提升；将其视为一个李 *2*-态射，它把$\Omega^1_{Ham}(M)$ 中的 α 映射为哈密顿向量场 X_α，并且在所有其他次数上均为平凡的，这可由下方交换图的交换性看出。



为清楚起见，我们将写出 $\lambda^{\mathfrak{g}}$, $\rho^{\mathfrak{g}_0}=\rho_{1,0}$ 和 $\Psi_{1,0}$ 所满足的所有关系。

性质7.17。 由于 $\lambda^{\mathfrak{g}}$ 是李 *2*-态射，我们有 $\forall a\in\mathfrak{g}_{-1}$, $\forall x,y,z\in\mathfrak{g}_0$

(A_1) *for* $\lambda^{\mathfrak{g}}$ *:* $\lambda^{\mathfrak{g}}_{1,0}(l_1(a))=d(\lambda^{\mathfrak{g}}_{1,-1}(a))$
(A_2) *for* $\lambda^{\mathfrak{g}}$ *:* $\lambda^{\mathfrak{g}}_{1,0}(l_2^p(x,y))=\iota_{((X_{\lambda^{\mathfrak{g}}_{1,0}(x)})\wedge(X_{\lambda^{\mathfrak{g}}_{1,0}(y)}))}\omega+d(\lambda^{\mathfrak{g}}_2(x,y))$
(A_3) *for* $\lambda^{\mathfrak{g}}$ *:* $\lambda^{\mathfrak{g}}_{1,-1}(l_2^m(a,x))=\lambda^{\mathfrak{g}}_2(l_1(a),x)$
(A_4) *for* $\lambda^{\mathfrak{g}}$ *:* $\big(\lambda^{\mathfrak{g}}_2(l_2^p(x,y),z)+c.p.\big)+\lambda^{\mathfrak{g}}_{1,-1}(l_3(x,y,z))=-\omega(X_{\lambda^{\mathfrak{g}}_{1,0}(x)},X_{\lambda^{\mathfrak{g}}_{1,0}(y)},X_{\lambda^{\mathfrak{g}}_{1,0}(z)})$.

映射 $\Psi_{1,0}$ 满足

(A1) 对于 $\Psi_{1,0}$ *:* $\Psi_{1,0}\circ d=0$ *(A2)* 对于 $\Psi_{1,0}$ *:* $\Psi_{1,0}(\iota_{X_\alpha\wedge X_\beta}\omega)=[\Psi_{1,0}(\alpha),\Psi_{1,0}(\beta)]_S$, $\forall\alpha,\beta\in\Omega^1_{Ham}(M)$。由于 $\Psi\circ\lambda^{\mathfrak{g}}=\rho^{\mathfrak{g}_0}$，我们有， $\forall x\in\mathfrak{g}_0$, $X_{\lambda^{\mathfrak{g}}_1}$, $0(x)=\rho_{1,0}(x)$。映射 $\rho^{\mathfrak{g}_0}=\rho_{1,0}$ 满足 (A_1) 对于 $\rho_{1,0}$ *:* $\rho_{1,0}\circ l_1(a)=0$, $\forall a\in\mathfrak{g}_{-1}$ *(A2)* 对于 $\rho_{1,0}$ *:* $\rho_{1,0}(l_2(x,y))=[\rho_{1,0}(x),\rho_{1,0}(y)]_S$, $\forall x,y\in\mathfrak{g}_0$。

在这种情境下，作用化简为 $\rho_{1,0}$ ($\rho_{1,-1}=0$ ，且 $\rho_2=0$ ，这是因为作用的目标是 $\mathfrak{X}^1(M)$，而不是 $\mathfrak{X}^2(M)\oplus\mathfrak{X}^1(M)$（与我们的 2-作用相反）；同时，$\rho_{1,0}$必须满足$\rho_{1,0}(l_1(a))=0$，对任意 a 属于 $\mathfrak{g}_{-1}$均成立。这解释了为什么 [Mam20] 和 [MZ20] 的作者会假设（不失一般性）他们的李 2-代数 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{-1}\bigoplus\mathfrak{g}_0$（其中 $\mathfrak{g}_0$ 是一个李代数）是骨架的。

注 7.18. 即使对于 $\rho^{\mathfrak{g}_0}=0$，同伦余动量映射也可能非平凡。事实上，若 $\rho^{\mathfrak{g}_0}=0$，则 $\lambda^{\mathfrak{g}}_{1,0}(x)$ 是闭的 $\forall x\in\mathfrak{g}_0$，因为 $d(\lambda^{\mathfrak{g}}_{1,0}(x))=-\iota_{\rho_{1,0}(x)}\omega$ ，但 $\lambda^{\mathfrak{g}}_{1,0}$、 $\lambda^{\mathfrak{g}}_{1,-1}$ 以及 $\lambda^{\mathfrak{g}}_2$ 都不必为零。

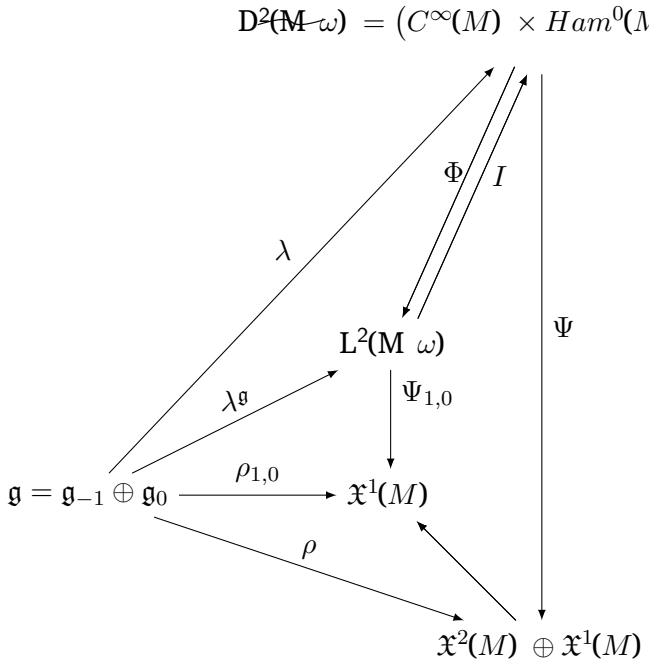
例 7.19. 取李 2-代数$(\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0,\ \ l_1,\ \ l_2=0,\ \ l_3=0)$，其中 $\mathfrak{g}_0$是一个阿贝尔李代数，可写作 $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}_{0,\ 0}\oplus \mathrm{im}(l_1)$，参见附录 C 中的例 2。

我们分次定义 $\lambda^{\mathfrak{g}}$ ：

- $\lambda^{\mathfrak{g}}_{1,0}$：$\mathfrak{g}_{0,0}\oplus im(l_1)\ \longrightarrow \Omega^1_{Ham}(M)$ 线性，且 $\lambda^{\mathfrak{g}}_{1,0}|_{im(l_1)}=0$ 以及 $\lambda^{\mathfrak{g}}_{1,0}(x)\ =d(f_x)$，其中 $f_x\in C^\infty(M)$，$\forall x\in\mathfrak{g}_{0,0}$，
- $\lambda^{\mathfrak{g}}_{1,-1}:\ \mathfrak{g}_{1,-1}\longrightarrow C^\infty(M)$ 且 $\lambda^{\mathfrak{g}}_{1,-1}\in\mathfrak{g}^*_{1,-1}$，
- $\lambda^{\mathfrak{g}}_2:\ \bigwedge^2(\mathfrak{g}_{0,0}\oplus\mathrm{im}(l_1))\longrightarrow C^\infty(M)$ 且 $\lambda^{\mathfrak{g}}_{2|\bigwedge^2(\mathfrak{g}_{0,0})}\in\bigwedge^2\mathfrak{g}^*_{0,0}$ 以及 $\lambda^{\mathfrak{g}}_2(x,y)=0$，每当 x 或 y属于 $\mathrm{im}(l_1)$。

7.2.2. 同伦动量映射作为2-余动量映射。

在上一小节中，我们已经看到，[CFRZ16、MZ20] 中以及因而也在 [RW15、Mit21]中的同伦动量映射概念，可以视为李代数$\mathfrak{g}_0$ 的无穷小作用 $\rho^{\mathfrak{g}_0}$ 经由李2-态射的交换图的一个提升。此处尚需说明，此类同伦动量映射是2-动量映射的特例。我们首先用下面的交换图来说明这一论断。



让我们回顾，在此交换图中，M 是一个2-辛流形，$(\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0,l_1,l_2,l_3)$是一个李 2-代数，使得$(\mathfrak{g}_0,l_2)$是一个李代数，$I$ 是将$L^2(M,\omega)$嵌入$D^2(M,\omega)$的李 2-态射，它在命题 6.15中构造，Φ 是在命题 6.16中构造的李 2-态射，Ψ是李 2-态射，它从$D^2(M,\omega)=(C^\infty(M)\times Ham^0(M))\oplus\Omega^1_{Ham}(M)$映入 $\mathfrak{X}^2(M)\oplus\mathfrak{X}^1(M)$，此前已研究并使用过（此处假定 Ψ 是严格的）。

现在可以轻松描述同伦余动量映射与 2-余动量映射之间的精确对应关系。首先，如果 $\lambda^{\mathfrak{g}}$ 是李 2-代数 $\mathfrak{g}$ 在 ~ ~ ~意义下的同伦余动量映射 [MZ20]，（即 $\lambda^{\mathfrak{g}}:(\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0,l_1,l_2,l_3)\to(L^2(M,\omega),l_1^R,l_2^R,l_3^R)$，满足$-\iota_{v_x}\omega=d(\lambda^{\mathfrak{g}}_{1,0}(x))$、$\forall x\in\mathfrak{g}_0$，其中 $\lambda^{\mathfrak{g}}_{1,0}:\ \mathfrak{g}_0\to\Omega^1_{Ham}(M)$，$\lambda^{\mathfrak{g}}_{1,-1}:\mathfrak{g}_{-1}\to C^\infty(M)$，且 $\lambda^{\mathfrak{g}}_2:\ \bigwedge^2(\mathfrak{g}_0)\to C^\infty(M)$），那么由 $\rho_{1,0}=\rho^{\mathfrak{g}_0}$, $\rho_{1,-1}=0$, $\rho_2=0$ 定义的 $\rho:\ \mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0\to\mathfrak{X}^2(M)\oplus\mathfrak{X}^1(M)$ 是一个 2-作用。此外，~映射 $\lambda=I\circ\lambda^{\mathfrak{g}}:\ \mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0\to D^2(M,\omega)$ 是此 2-作用的一个 2-余动量映射。

反过来，设 ρ: $\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0\to\mathfrak{X}^2(M)\oplus\mathfrak{X}^1(M)$ 是一个 2-作用，且 $\rho_{1,\ -1}=0$ 和 $\rho_2=0$，并设

$$\lambda:(\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0,l_1,l_2,l_3)\to(\widetilde{\mathsf{D}^2(\mathsf{M},\omega)},\tilde{l_1},\tilde{l_2},\tilde{l_3})$$

是这一 2-作用的 2-余动量映射。那么，$\lambda^{\mathfrak{g}}=\Phi\circ\lambda:(\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0,l_1,l_2,l_3)\to\mathsf{L}^2(\mathsf{M}\ \omega)$ 是李 2-代数 $\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0$ 的同伦余动量映射，其意义见 [MZ20]；而 $\rho_{1,\ 0}$ 定义了李代数 $\mathfrak{g}_0$ 在 M 上通过哈密顿向量场给出的无穷小作用 $\rho^{\mathfrak{g}_0}=\rho_{1,\ 0}$。

附录 A. 与骨架李 2-代数的拟同构

在本附录中，我们将给出命题 2.12 的构造性证明。为方便读者，我们没有将该证明放在论文正文中。我们还给出了该命题具体应用的实例。

A.1. **证明**。

断言： 每个李 2-代数 $(L_{-1}\oplus L_0,l_1,l_2,l_3)$ 都拟同构于一个骨架李 2-代数 $(\overline{L_{-1}}\oplus\overline{L_0},\overline{l_1}=0,\overline{l_2},\overline{l_3})$，其中 $\overline{L_{-1}}=\ker(l_1)$ 且 $\overline{L_0}=L_0/\mathrm{im}(l_1)$。

证明。 我们对向量空间 L_{-1} 和 L_0 作如下分解

$$L_{-1}=\ker(l_1)\oplus C\quad\text{and}\quad L_0=\mathrm{im}(l_1)\oplus C'$$

其中，子向量空间 C 是 $\ker(l_1)$ 的补空间，而 C' 是 $\mathrm{im}(l_1)$ 的补空间。我们需要构造映射 $\overline{l_2}$，即 $\overline{l_2^p}$ 和 $\overline{l_2^m}$，以及 $\overline{l_3}$，并定义从 $L_{-1}\oplus L_0$ 到 $\overline{L_{-1}}\oplus\overline{L_0}$ 的李 2- 代数态射。首先，我们定义映射 $F_{1,\ 0}=L_0\to\overline{L_0}$：它将 L_0 中的元素 x 对应到其在 $\overline{L_0}$ 中的类；以及映射 $F_{1,\ -1}:\ L_{-1}\to\overline{L'_{-1}}$，它将 $\ker(l_1)$ 中的元素 $a=a'+c\ \ L_{-1}=$ 对应到 $\ker(l_1)$ 中的元素 a'，如以下交换图所示：

$$\begin{array}{ccc} L_{-1}=\ker(l_1)\oplus C & \xrightarrow{l_1} & L_0=\mathrm{im}(l_1)\oplus C' \\ \Big\downarrow F_{1,-1} & & \Big\downarrow F_{1,0} \\ \overline{L_{-1}}=\ker(l_1) & \xrightarrow{\overline{l_1}=0} & \overline{L_0}=L_0/\mathrm{im}(l_1)\,. \end{array}$$

根据构造，F_1 是从 $L_{-1}\xrightarrow{l_1}L_0$ 到微分为零的链复形 $\overline{L_{-1}}\xrightarrow{\overline{l_1}=0}\overline{L_0}$ 的链复形态射。显然，该态射在相应的上同调向量空间之间诱导出一个同构。现在，李2-代数态射 (F_1,F_2) 必须满足以下关系。

(A_1) $F_{1,0}\circ l_1=0$
(A_2) $\overline{l_2^p}(F_{1,0}(x),F_{1,0}(y))=F_{1,0}(l_2^p(x,y))$
(A_3) $F_{1,-1}(l_2^m(a,x))=F_2(l_1(a),x)+\overline{l_2^m}(F_{1,-1}(a),F_{1,0}(x))$
(A_4) $F_{1,-1}(l_3(x,y,z))+\big(F_2(l_2^p(x,y),z)\big)+c.p.$
$\quad=\overline{l_3}(F_{1,0}(x),F_{1,0}(y),F_{1,0}(z))+\big(\overline{l_2^m}(F_{1,0}(x),F_2(y,z))\big)+c.p.$

其中 $c.p.$ 表示循环置换。
关系 (A_1) 根据构造即可满足。关系 (A_2) 推出上述关于 $\overline{l_2^p}$ 的公式，该公式可立即验证为良定义。对于 a' in $\ker(l_1)$ 和 x in L_0，我们定义 $\overline{l_2^m}$，如下：

$$\overline{l_2^m}(a',F_{1,0}(x))=l_2^m(a,x),$$

由 (A_3) 强制给出，并且同样很容易验证为良定义。对于 a' in $\ker(l_1)$、 c in C、 x in L_0 和 b inL_{-1}，必须满足以下恒等式

$$\overline{l_2^m}\big(F_{1,-1}(a'+c), F_{1,0}(x+l_1(b))\big) = \overline{l_2^m}\big(a', F_{1,0}(x)\big).$$

这一关系意味着，对于所有 c 属于 C 且 x 属于 L_0,

$$F_2(x, l_1(c)) = F_{1,-1}(l_2^m(x,c)).$$

因此，我们定义：对于所有 x 以及 y 属于 L_0， F_2 由下式给出

$$F_2(x,y) = F_{1,-1}(l_2^m(x,c))$$

其中，我们将 y 分解为

$$y = l_1(a'+c) + c' = l_1(c) + c'$$

其中 a' 属于 $\ker(l_1)$， c 属于 C 且 c' 属于 C'，这里用到了 L_0 和 L_{-1}的分解。最后，关系 (A_4) 给出了 $\overline{l_3}$的定义。对于所有 x、y、z 属于 L_0,

$\overline{l_3}(F_{1,0}(x)\, F_{1,0}(y)\, F_{1,0}(z)) = F_{1,-1}(l_3(x,y,z)) + \big(F_2(l_2^p(x,y)\ z)\big) + c.p. - \big(\overline{l_2^m}(F_{1,0}(x)\ F_2(y,z))\big) + c.p.$

由于映射 $\overline{l_2}$和 $\overline{l_3}$是良定义的，我们得出结论：$(\overline{L_{-1}} \oplus \overline{L_0}, \overline{l_1} = 0, \overline{l_2}, \overline{l_3})$ 是一个骨架李2-代数。□

A.2. **例子**。

让我们针对李 2-代数的两个基本例子，明确检验上述拟同构。

（1）对于 (M,ω) 上 Rogers 的可观测量代数（其中 (M,ω) 是一个连通2辛流形），该拟同构由如下交换图描述

$$\begin{array}{ccc} L_{-1} = C^\infty(M) & \xrightarrow{l_1 = d} & L_0 = \Omega^1_{Ham}(M) \\ \Big\downarrow F_{1,-1} & & \Big\downarrow F_{1,0} \end{array}$$

$$\overline{L_{-1}} = \ker(l_1) \cong \mathbb{R} \xrightarrow{\overline{l_1}=0} \overline{L_0} = L_0/\mathrm{im}(l_1) = L_0/dC^\infty(M)\,.$$

在此情形下 $l_2^m = 0$, $F_2 = 0$。此外， $F_{1,\ 0}$ 将 $\Omega^1_{Ham}(M)$ 中的 1-形式 α 关联到其在 $L_0/dC^\infty(M)$ 中的类，$F_{1,\ -1}$将 $C^\infty(M)$ 中的函数 f 关联到 R 的一个元素，并且对于 L_0 中的任意 α, β, γ,

$$\overline{l_2}^p(F_{1,0}(\alpha), F_{1,0}(\beta)) = F_{1,0}(\iota_{X_\alpha \wedge X_\beta}(\omega)) \text{ and}$$

$$\overline{l_3}(F_{1,0}(\alpha), F_{1,0}(\beta), F_{1,0}(\gamma) = F_{1,-1}\big(\iota_{X_\alpha \wedge X_\beta \wedge X_\gamma}(\omega)\big).$$

（2）设李 2-代数 $(\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0, l_1, l_2, l_3)$ 由 $\mathfrak{g}_{-1} =< a >_{\mathbb{R}}$ 和 $\mathfrak{g}_0 =< x_1, x_2, x_3 >_{\mathbb{R}}$ 以及下列括号给出

- $l_1(a) = x_2$,
- $l_2(x_1, x_2) = -x_2$,
- $l_2(x_1, x_3) = x_1$,
- $l_2(a, x_1) = a$,
- $l_3(x_1, x_2, x_3) = -a$。

对于这个李 2-代数，可以得到如下交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_{-1} =< a > & \xrightarrow{l_1} & \mathfrak{g}_0 \\ \Big\downarrow F_{1,-1} & & \Big\downarrow F_{1,0} \\ \overline{\mathfrak{g}_{-1}} = \{0\} & \xrightarrow{\overline{l_1}=0} & \overline{\mathfrak{g}_0} = \mathfrak{g}_0/\mathrm{im}(l_1) = \mathfrak{g}_0/ < x_2 >_{\mathbb{R}} \end{array}$$

在这种情况下， $F_2 = 0, l_2^m = 0, l_3 = 0, F_{1,\ -1} = 0$ 和 $\overline{\mathfrak{g}_0} =< F_{1,\ 0}(x_1)F_{1,\ 0}(x_3) >$ 是带有如下括号的李代数

$$\overline{l_2^p}(F_{1,0}(x_1), F_{1,0}(x_3)) = F_{1,0}(x_1).$$

附录B. 可观测量空间的 2-作用与自同态

由于流形 M 上的向量场的李代数结构是由“可观测量” $C^\infty(M)$的自同态的交换子诱导的，因此在本附录中，我们将这一机制推广到李 2-代数 $\mathfrak{X}^2(M) \oplus \mathfrak{X}^1(M)$的情形。

B.1. 2-分次向量空间上的自同态的李 2-代数结构。设$V = V_{-1} \oplus V_0$ 是一个分次向量空间，其中 V_{-1} 的次数为 -1 ，而 V_0 的次数为 0。我们将空间 $\mathrm{End}(V_{-1} \oplus V_0) = Hom(V_0, V_{-1}) \oplus (\mathrm{End}(V_{-1}) \times \mathrm{End}(V_0))$ 视为一个分次向量空间，并赋予其李 2-代数结构 ([LL20]):

(1) $\tau_1 : Hom(V_0, V_{-1}) \to \mathrm{End}(V_{-1}) \times \mathrm{End}(V_0)$ 且 $\tau_1 = 0$; (2) τ_2 分解为 (a) $\tau_2^p : \big(\mathrm{End}(V_{-1}) \times \mathrm{End}(V_0)\big) \times \big(\mathrm{End}(V_{-1}) \times \mathrm{End}(V_0)\big) \to \mathrm{End}(V_{-1}) \times \mathrm{End}(V_0)$，定义为$\tau_2^p((s_{-1}, s_0), (t_{-1}, t_0)) = ([s_{-1}, t_{-1}], [s_0, t_0])$，其中当 $s_i, t_i \in \mathrm{End}(V_i)$ 时， $[.,.]$ 是自同态的交换子（对 $i \in \{-1, 0\}$）。(b) τ_2^m: $Hom(V_0, V_{-1}) \times \big(\mathrm{End}(V_{-1}) \times \mathrm{End}(V_0)\big) \to Hom(V_0, V_{-1})$，定义为 $\tau_2^m(\phi, (s_{-1}, s_0)) = \phi \circ s_0 - s_{-1} \circ \phi$ ，其中 $\phi \in Hom(V_0, V_{-1})$、 $s_0 \in \mathrm{End}(V_0)$ 且 $s_{-1} \in \mathrm{End}(V_{-1})$。(3) $\tau_3 : \bigwedge^3 \big(\mathrm{End}(V_{-1}) \times \mathrm{End}(V_0)\big) \to Hom(V_0, V_{-1})$ 且 $\tau_3 = 0$。

证明。 由于 $\tau_1 = 0$ 与 $\tau_3 = 0$，关系(R_1)、(R_2)、(R_3)和(R_6)成立。(R_4)由$\mathrm{End}(V_{-1})$与$\mathrm{End}(V_0)$上的雅可比恒等式得出，而(R_5)由直接验证得出。□

注 B.1。 我们在此略去项 $Hom(V_{-1}, V_0)$ ，因为它的次数将为1 .

B.2. **2-作用作为自同态**。

考虑 映射 $F : \big(\mathfrak{X}(M) \oplus \mathfrak{X}(M)\ 0, \nu_2, 0\big) \to \big(\mathrm{End}\ \big(C^\infty(M) \oplus \Omega^1(M)\big), 0, \tau_2, 0\big)$ 给定by:

(1) $F_{1,\ 0} : \mathfrak{X}^1(M) \to \mathrm{End}(C^\infty(M)) \times \mathrm{End}(\Omega^1(M)), \quad X \mapsto (\mathfrak{L}_X, \mathfrak{L}_X)$

(2) $F_{1,\ -1} : \mathfrak{X}^2(M) \to Hom(\Omega^1(M)\ C^\infty(M)), \quad X \wedge Y \mapsto \mathfrak{L}_{X \wedge Y}$(3) $F_2 :$ $\bigwedge^2(\mathfrak{X}^1(M)) \to Hom(\Omega^1(M)\ C^\infty(M)), \quad F_2 = 0$。

命题 B.2。 F 是一个李 *2*-态射。

证明。 关系 (A_1) 和 (A_4) 显然，而 (A_2) 可直接由 $[\mathfrak{L}_X, \mathfrak{L}_Y] = \mathfrak{L}_{[X,Y]_S}$ 得出。关系 (A_3) 也是如此: $\mathfrak{L}_{[X \wedge Y, Z]_S} = [\mathfrak{L}_{X \wedge Y}, \mathfrak{L}_Z]$，最后一个是 $\tau_2^m(\mathfrak{L}_{X \wedge Y}, (\mathfrak{L}_Z, \mathfrak{L}_Z))$，由此得到 (A_3) $(F_{1,\ -1}([X \wedge Y, Z]_S) = \tau_2^m(F_{1,\ -1}(X \wedge Y), (\mathfrak{L}_Z, \mathfrak{L}_Z))$。□

注 B.3. 显然，上述映射 F 是向量场李导数的一种自然推广。线性映射 F_1 是单射，因为 $F_{1,0}$ 和$F_{1,-1}$ 都是单射。

附录 C. 2-作用和余动量映射的例子

我们考察李 2-代数 $(\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0, l_1, l_2, l_3)$，并给出李 2-作用的若干具体示例 s
以及余动量映射，涵盖不同情形，并通过以下简写进行分类：S0 表示 $\mathfrak{g}_0$ 不是李代数，等价地，$l_1 \circ l_3 \neq 0$（因而 $l_1 \neq 0$ 和 $l_3 \neq 0$），而（$\neg$ S0）表示 $\mathfrak{g}_0$ 是李代数，即 $l_1 \circ l_3 = 0$。

我们利用李 2-代数结构（Sx）或 2-作用（Tx）满足的以下条件，对这些情形（在本附录中也称为状况）作进一步细分：

- S1: $l_1 \neq 0$
- S2: $l_1 = 0$
- S3: $l_2 \neq 0$
- S4: $l_2 = 0$
- S5: $l_3 \neq 0$
- S6: $l_3 = 0$

- T1: $\rho_{1,0} \neq 0$
- T2: $\rho_{1,0} = 0$
- T3: $\rho_{1,-1} \neq 0$
- T4: $\rho_{1,-1} = 0$
- T5: $\rho_2 \neq 0$
- T6: $\rho_2 = 0$

	S0	(¬ S0)	(¬ S0)	(¬ S0)	(¬ S0)	(¬ S0)	(¬ S0)	(¬ S0)	(¬ S0)
	$l_1 \circ l_3 \neq 0$	S135 $l_1 \neq 0$, $l_2 \neq 0$, $l_3 \neq 0$	S136 $l_1 \neq 0$, $l_2 \neq 0$, $l_3 = 0$	S145 $l_1 \neq 0$, $l_2 = 0$, $l_3 \neq 0$	S146 $l_1 \neq 0$, $l_2 = 0$, $l_3 = 0$	S235 $l_1 = 0$, $l_2 \neq 0$, $l_3 \neq 0$	S236 $l_1 = 0$, $l_2 \neq 0$, $l_3 = 0$	S245 $l_1 = 0$, $l_2 = 0$, $l_3 \neq 0$	S246 $l_1 = 0$, $l_2 = 0$, $l_3 = 0$
T135 $\rho_{1,0} \neq 0$ $\rho_{1,-1} \neq 0$ $\rho_2 \neq 0$	Ex.1	Ex.2	例2a 例3b	例2a	例2a	例3a	例2a		
T136 $\rho_{1,0} \neq 0$ $\rho_{1,-1} \neq 0$ $\rho_2 = 0$	例1a	例2a	例2a 例3b	例2a	例2a	例2b	例2a 例4b		
T145 $\rho_{1,0} \neq 0$ $\rho_{1,-1} = 0$ $\rho_2 \neq 0$	Ex.1	例2a	例2a 例3b	例2a	例2a		例2a 例4a	例2b	
T146 $\rho_{1,0} \neq 0$ $\rho_{1,-1} = 0$ $\rho_2 = 0$	例1a	例2a	例2a 例3b	例2a	例2a	例3a	例2a 例4b	例2b	
T235 $\rho_{1,0} = 0$ $\rho_{1,-1} \neq 0$ $\rho_2 \neq 0$	Ex.1	例2a	例2a 例3b	例2a	例2a	例3a	例2a		
T236 $\rho_{1,0} = 0$ $\rho_{1,-1} \neq 0$ $\rho_2 = 0$		例2a	例2a 例3b	例2a	例2a		例2a 例4b		Ex.5
T245 $\rho_{1,0} = 0$ $\rho_{1,-1} = 0$ $\rho_2 \neq 0$	Ex.1	例2a	例2a 例3b	例2a	例2a		例2a 例4a	例2b	
T246 $\rho_{1,0} = 0$ $\rho_{1,-1} = 0$ $\rho_2 = 0$	例1a	例2a	例2a 例3b	例2a	例2a		例2a Ex.4	例2b	

当然，在 S145 列和 T235 行中找到条目“例2a”，对应于下文的例 2a 满足以下条件这一事实：李 2-代数满足 S1、S4 和 S5，2-作用满足 T2、T3 和 T5（从表格中的标注应可看出这一点）。请注意，由于存在该示例的变体，同一个示例可能出现在表格的多个条目中。

示例列表

我们按照括号 l_1、l_2、l_3 的代数复杂度由高到低给出这些示例，首先介绍一些与李代数作用相去甚远、但颇有意思的 2-作用。

在下面的列表中，流形 M 大多是 $\mathbb{R}^m$ 的一个开子集，其坐标为 $(q^1,\dots,q^m)$。此外，我们始终用 ∂_k 表示满足 $k=1$、…、m 的向量场 $\frac{\partial}{\partial q^k}$。如果某种构造可以轻松推广到更广泛的流形类，我们就会在更一般的情形下表述它。

当然，要描述 2-作用，并不需要在 M 上定义 2-辛形式。当我们考虑带有余动量映射 λ 的作用时，只考虑基本 2-余动量映射（示例 5 除外），并且会取 2-辛流形 $(M,\omega)=(\mathbb{R}^3,\omega)$，其中 $\omega=dq^1\wedge dq^2\wedge dq^3$ 是 $\mathbb{R}^3$，上的标准体积形式；示例 2b、2c、4b 和 5 除外。

例 1. 满足 $l_1\circ l_3\neq 0$ 的李 2-代数 $\mathfrak{g}\ \mathfrak{g}_0$ 不是李代数

在这个涵盖情形 $S0$ 的例子中，我们构造了给定李 2-代数在 M 上的若干李 2-作用。当 $M=\mathbb{R}^3$ 时，我们得到了 2-余动量映射存在的条件，并在其存在时明确给出了余动量映射。

示例 *1a:* 考虑由 $\mathfrak{g}_{-1}=\langle a\rangle_{\mathbb{R}}$ 和 $\mathfrak{g}_0=\langle x_1、x_2、x_3\rangle_{\mathbb{R}}$ 给出的李 2-代数 $(\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0,l_1,l_2,l_3)$，其非零括号如下：

(1) $l_1(a)=x_2$(2) $l_2(x_1,$ $x_2)=-x_2$(3) $l_2(x_1,x_3)$ $=x_1$(4) $l_2(a,x_1)=a$

(5) $l_3(x_1,x_2,x_3)=-a.$

流形 M 上的 $\mathfrak{g}$ 李 2-作用（即从 $\mathfrak{g}_{-1}\oplus\mathfrak{g}_0$ 到 $\mathfrak{X}^2(M)\oplus\mathfrak{X}^1(M)$ 的李 2-态射 ρ）必须满足：

$(A_1)\ \rho_1,0(x_2)=0(A_2)\ \rho_1,0(x_1)=[\rho_{1,0}(x_1)\rho_1,0(x_3)]_S(A_{31})\ \rho_1,_{-1}(a)=[\rho_{1,-1}(a)\rho_1,0(x_1)$ $]_S+\rho_2(x_2,x_1)\ (A_{32})\ [\rho_{1,-1}(a)\rho_1,0(x_3)]_S+\rho_2(x_2,x_3)=0(A_4)\ -\rho_2(x_2,x_3)-\rho_2(x_1,x_2)-\rho_1,$ $_{-1}(a)=[\rho_{1,0}(x_1)\ \rho_2(x_2,x_3)]_S+[\rho_{1,0}(x_3)\ \rho_2(x_1,x_2)]_S.$

注 C.1.

- 关系(A_4) 由关系$(A_2),(A_{31})$ 和(A_{32})自动满足。
- 对 $\rho_2(x_1,x_3)$没有任何条件。因此，在下面的子例中，我们不必指定 $\rho_2(x_1,x_3)$。
- $\rho_2=0$ 推出 $\rho_{1,-1}=0$。

带有 $\rho_{1,0}(x_1)=0$ 的 2-作用

子例 1:

- $\rho_{1,\ 0}(x_1)=\rho_{1,\ 0}(x_2)=0$
- $\rho_{1,0}(x_3)=\partial_3$
- $\rho_{1,\ -1}(a)=\rho_2(x_2,x_1)=\partial_2\wedge\partial_3$
- $\rho_2(x_2,x_3)=0$。

子例 2:

- $\rho_{1,\ 0}(x_1)=\rho_{1,\ 0}(x_2)=0$
- $\rho_{1,0}(x_3)=\partial_3$
- $\rho_{1,\ -1}(a)=\rho_2(x_2,x_1)=\partial_1\wedge\partial_2$
- $\rho_2(x_2,x_3)=0$。

2-辛流形上的作用

现在令（M,ω）为 2-辛流形（$\mathbb{R}^3, dq^1 \wedge dq^2 \wedge dq^3$），并考察余动量映射的存在性问题。

首先，我们必须满足以下条件：

- $\iota_{\rho_{1,0}(x_1)}\omega$ 和 $\iota_{\rho_{1,0}(x_3)}\omega$ 是闭的
- $\iota_{\rho_{1,-1}(a)}\omega$ 是闭的
- $\iota_{\rho_2(x_i,x_j)}\omega$ 对 $\forall i$、j是闭的。

显式2-余动量映射

上述子例 1 和子例 2 满足三个闭性条件，只要再假设$\iota_{\rho_2(x_1,x_3)}\omega$ 是闭的。此时， λ 的相应公式为：

(1) $\lambda_{1,0}(x_1) = \lambda_{1,0}(x_2) = 0$(2) $\lambda_{1,0}(x_3) = q_1 dq_2$(3) $\lambda_2(x_1, x_3) = (c(x_1, x_3),(f, \rho_2(x_1, x_3)))$, 其中 $c \in \bigwedge^2(\mathfrak{g}_0^*)$ 且 $\iota_{\rho_2(x_1,x_3)}\omega = -df_{\rho_2(x_1,x_3)}$ (4) $\lambda_{1,-1}(a) = \lambda_2(x_2, x_1)$

对于子例 1

$$(5)\ \begin{cases}\lambda_2(x_2,x_1) = (0,(q_1,\partial_2\wedge\partial_3))\\ \lambda_2(x_2,x_3) = 0\end{cases}$$

或者对于子例 2

$$(6)\ \begin{cases}\lambda_2(x_2,x_1) = (0,(q_3,\partial_1\wedge\partial_2))\\ \lambda_2(x_2,x_3) = (0,(1,0))\end{cases}$$

注意，在此例中，基本余动量映射的存在性取决于$\iota_{\rho_2(x_1,x_3)}\omega$。

注记 C.2. 上述子例 *2* 的公式由条件 (A_3) 和(A_4)对 λ 施加。

满足 $\rho_{1,0}(x_1) \neq 0$ 的 2-作用

在这种情况下， f以下数据满足 $(A_1) - (A_4)$：

(a) $\rho_{1,0}(x_1) = e^{-q_i}\partial_j$， 其中 $1 \leq i \neq j \leq m$(b) $\rho_{1,0}(x_3) = \partial_i$(c) $\rho_{1,-1}(a) = \rho_2(x_2, x_1)$ $= \partial_k \wedge \partial_l$， 其中 $k, l \neq i$(d) $\rho_2(x_2, x_3) = 0$。

备注 C.3. 上述选择 (c) 和 (d) 在 $\rho_{1,0} = 0$ 的情况下也给出 *2*-作用，而选择(a) 和 (b) 则在 $\rho_{1,-1} = 0$ 和 $\rho_2 = 0$ 时给出 *2*-作用。因此，例 *1* 中的 *2*-作用涵盖了 $T235$、 $T135$和 $T4$ 这些情形。

备注 C.4. 如果我们在 $\mathfrak{g}_{-1}$ 中添加一个元素，比如 $\mathfrak{g}_{-1} = \langle a, b\rangle_{\mathbb{R}}$ 并令其具有与上文相同的括号，那么我们就能构造一个李 *2*-作用，其中 $\rho_2 = 0$ 和 $\rho_{1,-1} \neq 0$， 因为 $\rho_{1,-1}(b)$ 与 ρ_2 无关，且只需满足条件 $[\rho_{1,-1}(b), \mathrm{im}(\rho_{1,0})] = 0$。因此我们处于情形 $T136$。

例 *1b*： 李 2-代数的一个例子，其中 $dim(\mathfrak{g}_{-1}) = 2, l_2 \neq 0$ 和 $l_1 \circ l_3 \neq 0$.

考虑由 $\mathfrak{g}_{-1} = \langle a_z, a_t\rangle_{\mathbb{R}}$ 和$\mathfrak{g}_0 = \langle x, y, z, t\rangle_{\mathbb{R}}$ 给出的李 2-代数 $(\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0, l_1, l_2, l_3)$，其关系如下：

- $l_1(a_z) = z, l_1(a_t) = t$
- $l_2(x, y) = -y$, $l_2(y, z) = z$, $l_2(y, t) = t$
- $l_2^m(y, a_z) = a_z$, $l_2^m(y, a_t) = a_t$

- $l_3(x,y,z) = a_z$, $l_3(x,y,t) = a_t$.

那么，该李 2-代数在 $M = \mathbb{R}^3$ 上的李 2-作用 ρ 定义如下：

- $\rho_{1,0}(y) = 0$, $\rho_{1,0}(z) = 0$ $\rho_{1,0}(t) = 0$
- $\rho_2(z,t) = 0$
- 任意选取 $\rho_{1,0}(x)$、$\rho_{1,-1}(a_z)$ 和 $\rho_{1,-1}(a_t)$
- 任意选取 $\rho_2(x,y)$
- ρ_2 的其他取值由以下条件确定：(i) $\rho_2(x,z) = [\rho_{1,-1}(a_z)\,\rho_{1,0}(x)]$, $\rho_2(x,t) = [\rho_{1,-1}(a_t)\,\rho_{1,0}(x)]$(ii) $\rho_2(y,z) = \rho_{1,-1}(a_z)$ $\rho_2(y,t) = \rho_{1,-1}(a_t)$,

因为只需确定 $\rho_{1,0}(x)$、$\rho_{1,-1}(a_z)$ 和 $\rho_{1,-1}(a_t)$，即可确定 $\rho_2(x,z)$、 $\rho_2(x,t)$、 $\rho_2(y,z)$ 和$\rho_2(y,t)$。

注 C.5。 由于对 $\rho_2(x,\ y)$没有任何条件，闭性条件并不总是成立。因此，某些作用无法提升为基本余动量映射。

这涵盖了情形 $T135$, $T145$, $T235$, $T245$。

例 2。 满足 $l_1 \circ l_3 = 0$ 的李 2-代数 $\mathfrak{g}$ （$\mathfrak{g}_0$ 是李代数）

这里我们涵盖了结构上施加的所有情形 S （除了 $S0$，见注 C.11），以及 2-作用的所有情形 T（见注 C.10）。我们给出一种初等构造，构造具有 $l_1 \neq 0$、 $l_2 \neq 0$ 和 $l_3 \neq 0$ 的李 2-代数（称为基本李 2-代数，定义 C.7）。第一个例子（例 2a）使用不变双向量。第二和第三个例子（例 2b 和 2c）给出了基本李 2-代数在 $(\mathbb{R}^6, \omega = dq_1 \wedge dq_5 \wedge dq_6 - dq_2 \wedge dq_4 \wedge dq_6 + dq_3 \wedge dq_4 \wedge dq_5)$ 上的两种 2-作用；第一种不是哈密顿的，见备注 C.14，而第二种是。

初等构造

考虑两个向量空间 $\mathfrak{g}_{-1}$ 和 $\mathfrak{g}_0$，以及由三个线性映射 (l_1, l_2, l_3) 组成的集合，其中l_1： $\mathfrak{g}_{-1} \mapsto \mathfrak{g}_0$, l_2 可分解为 l_2^p： $\bigwedge^2 \mathfrak{g}_0 \mapsto \mathfrak{g}_0$ 和 l_2^m: $\mathfrak{g}_{-1} \times \mathfrak{g}_0 \mapsto \mathfrak{g}_0$，最后$l_3$： $\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0 \mapsto \mathfrak{g}_{-1}$。再假设我们有以下分解： $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_{0,0} \oplus \mathrm{im}(l_1) \oplus \mathrm{im}(l_2^p)$ 以及 $\mathfrak{g}_{-1} = \mathfrak{g}_{-1,0} \oplus \mathrm{im}(l_3) \oplus \mathrm{im}(l_2^m)$。为方便起见，我们记 $\mathfrak{g}_{0,2} = \mathrm{im}(l_2^p)$,$\mathfrak{g}_{0,1} = \mathrm{im}(l_1)$, 并记 $\mathfrak{g}_{-1,2} = \mathrm{im}(l_2^m)$, $\mathfrak{g}_{-1,3} = \mathrm{im}(l_3)$, 于是

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_{0,0} \oplus \mathfrak{g}_{0,1} \oplus \mathfrak{g}_{0,2} \text{ and } \mathfrak{g}_{-1} = \mathfrak{g}_{-1,0} \oplus \mathfrak{g}_{-1,3} \oplus \mathfrak{g}_{-1,2}.$$

那么，$(\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0, l_1, l_2, l_3)$ 是李 2-代数的条件由以下关系保证：对所有 $a, b \text{ in } \mathfrak{g}_{-1}$ 以及所有 $x, y, z, t \text{ in } \mathfrak{g}_0$

$(R_2)\ l_1|_{\mathfrak{g}_{-1,2}} = 0$ and $l_2^p|_{\mathfrak{g}_{0,1}} = 0 (R_3)$ $l_2^m(l_1(a)\ b) = l_2^m(a, l_1(b))$ $(R_4)\ l_1|_{\mathfrak{g}_{-1,3}} = 0$ and $\mathfrak{g}_0$ 是一个李代数 (R_5) $l_3|_{\mathfrak{g}_{0,1}} = 0$ and $l_2(l_2(x,y)\ a) + l_2(l_2(y,a)\ x) + l_2(l_2(a,x)\ y) = 0 (R_6)$ $l_3(l_2(x,y)\ z, t) - l_3(l_2(x,z)\ y, t) + l_3(l_2(x, t)\ y, z) + l_3(l_2(y,z)\ x, t) - l_3(l_2(y,t)\ x, z) + l_3(l_2(z,t)\ x, y) = 0$ and $l_2(l_3(x,y,z)\ t) - l_2(l_3(x,y,t)\ z) + l_2(l_3(x,z, t)\ y) - l_2(l_3(y,z,t)\ x) = 0$,

其中，记号 $l_1|_{\mathfrak{g}_{-1,2}} = 0$ 表示 $l_1(a) = 0, \forall a \in \mathfrak{g}_{-1,2}$ ，而记号 $l_2^p|_{\mathfrak{g}_{0,1}} = 0$ 表示 $l_2^p(x, l_1(a)) = 0$, $\forall a \in \mathfrak{g}_{-1}$ ，因为 $\mathfrak{g}_{0,1} = \mathrm{im}(l_1)$。

命题 C.6. 若满足以下条件，带有线性映射$(\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0,\ l_1,\ l_2 = (l_2^p,\ l_2^m)\ l_3)$ 的两个向量空间之和是一个李 *2*-代数：

- $\mathfrak{g}_{-1} = \mathfrak{g}_{-1,0} \oplus \mathfrak{g}_{-1,3} \oplus \mathfrak{g}_{-1,2}$ *is a vector space*

- $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_{0,\ 0} \oplus \mathfrak{g}_{0,\ 1} \oplus \mathfrak{g}_{0,\ 2}$ 是一个李代数
- 以下四个映射是线性的：– l_1 :$\mathfrak{g}_{-1}$, $_0 \mapsto \mathfrak{g}_0$,*1* – l_2^p : $\bigwedge^2(\mathfrak{g}_{0,0} \oplus \mathfrak{g}_{0,}$*2)* $\mapsto \mathfrak{g}_0$,*2* – l_2^m: $\mathfrak{g}_{-1,0} \times \mathfrak{g}_{0,0} \mapsto \mathfrak{g}_{-1}$,*2* – l_3 : $\bigwedge^3 \mathfrak{g}_{0,0} \mapsto \mathfrak{g}_{-1}$,

3 – 其余的部分映射均为零。

证明。 我们使用上述构造，并对 $i = 2, \ldots 6$ 应用关系 (R_i)。 □

定义 C.7. 我们将这样的李 *2*-代数 $\mathfrak{g}$ 称为一个 *basic* 李 *2*-代数。

注 C.8. 如果 $\mathfrak{g}$ 是基本的，且 $\mathfrak{g}_{0,0} = 0$ 或 $\mathfrak{g}_{-1,2} = 0$，那么 $l_2^m = 0$。

基本李2-代数的 2-作用

考虑一个基本李 2-代数。若满足以下关于 ρ的条件： $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1} \longrightarrow \mathfrak{X}^2(M) \oplus \mathfrak{X}^1(M)$，则可保证它是 $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1}$ 在流形 M上的李 2-作用：

(1) $\rho_{1,0}$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 和ρ_1的一个作用,$_0|_{\mathfrak{g}_{0,1}} = 0$(2) $\rho_{1,-1}$: $\mathfrak{g}_{-1,0} \longrightarrow \mathfrak{X}^2$ (M)和$\rho_{1,-1}|_{\mathfrak{g}_{-1,2}} = 0$, $\rho_{1,-1}|_{\mathfrak{g}_{-1,3}} = 0$(3) ρ_2 : $\bigwedge^2 \mathfrak{g}_{0,0} \longrightarrow \mathfrak{X}^2$(M)和$\rho_2|_{\mathfrak{g}_{0,1}} = 0$, $\rho_2|_{\mathfrak{g}_{0,2}} = 0$(4) 其中

- $[\rho_{1,0}(x)\ \rho_2(y,z)]_S + c.p. = 0$ 对于 $x, y, z \in \mathfrak{g}_{0,0}$
- $[\rho_{1,0}(x)\ \rho_2(y,z)]_S = 0$ 对于 $x \in \mathfrak{g}_{0,\ 2}$ 和 $y, z \in \mathfrak{g}_{0,\ 0}$
- $[\rho_{1,0}(x)\rho_{1,\ -1}(a))]_S = 0$。

例 *2a*： 我们利用不变双向量场，构造基本李2-代数在流形 M 上的李 2-作用。

命题 C.9. 设 $\mathfrak{g}_0$ 是一个基本李*2*-代数，并假设存在

- 一个作用 $\rho_{1,\ 0}$ 在 $\mathfrak{g}_0$ 上 M 使得 $\rho_{1,\ 0}|_{\mathfrak{g}_{0,1}} = 0$
- 一个二阶张量 $\pi \in \mathfrak{X}^2(M)$，它在作用 $\rho_{1,\ 0}$下不变。

如果 $im(\rho_{1,-1}|_{\mathfrak{g}_{-1,0}}) \subset \langle\pi\rangle_{\mathbb{R}}$, $\rho_{1,-1}|_{\mathfrak{g}_{-1,2}} = 0$, $\rho_{1,-1}|_{\mathfrak{g}_{-1,3}} = 0$ 以及 $im(\rho_2|_{\mathfrak{g}_{0,0}}) \subset \langle\pi\rangle_{\mathbb{R}}$, $\rho_2|_{\mathfrak{g}_{0,1}} = 0$, $\rho_2|_{\mathfrak{g}_{0,2}} = 0$, 那么 $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1}$ 在 M上构成一个李 *2*-代数作用。

证明。 这样的映射 ρ 满足上述关系 (1) –（4）。 □

注 C.10。 前面的命题涵盖了所有情形 *T*。特别地，如果我们取 $\rho_{1,\ 0} = 0$，则对 $\rho_{1,\ -1}$ 和 ρ_2 （情形 $T2$) 没有任何条件。

注 C.11。 通过前面的构造，也可以得到所有情形 S （除 $S0$ 外）。它们都可视为命题 *C.9* 的特例，并涵盖所有情形 T。例如：

S236 表示 $l_1 = l_3 = 0$。在这种情况下，$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_{0,\ 0} \oplus \mathfrak{g}_{0,\ 2}$， $\mathfrak{g}_{-1} = \mathfrak{g}_{-1,\ 0} \oplus \mathfrak{g}_{-1,\ 2}$，当 $\rho_{1,\ 0}$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 在 M上的作用时，我们得到李 *2*-代数 $\mathfrak{g}$ 在流形 M 上的一个作用，其中 $\rho_{1,\ -1}$: $\mathfrak{g}_{-1,\ 0} \longrightarrow \mathfrak{X}^2(M)$ 且 ρ_2: $\bigwedge^2 \mathfrak{g}_{0,\ 0} \longrightarrow \mathfrak{X}^2$ (M)，如上所述。

S146 表示 $l_1 \neq 0$， $l_2 = 0$， $l_3 = 0$。因此我们得到 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_{0,\ 0} \oplus \mathfrak{g}_{0,\ 1}$， $\mathfrak{g}_{-1} = \mathfrak{g}_{-1,\ 0}$。*S145* 表示 $l_1 \neq 0$， $l_2 = 0$， $l_3 \neq 0$。因此我们得到 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_{0,\ 0} \oplus \mathfrak{g}_{0,\ 1}$， $\mathfrak{g}_{-1} = \mathfrak{g}_{-1,\ 0} \oplus \mathfrak{g}_{-1,\ 3}$。*S136* 表示 $l_1 \neq 0$， $l_2 \neq 0$， $l_3 = 0$。因此我们得到 $\mathfrak{g}_{-1,\ 3} = 0$。

例*2b*：我们给出一个基本2-作用的显式构造，它在 $(\mathbb{R}^6, \omega = dq_1 \wedge dq_5 \wedge dq_6 - dq_2 \wedge dq_4 \wedge dq_6 + dq_3 \wedge dq_4 \wedge dq_5)$ 上不是哈密顿的；该构造对应于由下式给出的（形式为"ax+b"）基本李2-代数：

(1) 李代数 $\mathfrak{g}_0$ 是李代数 "$ax+b$" 的直和，更准确地说是 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_{0,\ 0} \oplus \mathfrak{g}_{0,\ 2} \oplus \mathfrak{g}_{0,\ 1} = \langle y_1、\ \ldots\ldots、\ y_{3l} \rangle_{\mathbb{R}} \oplus \langle x_1、\ \ldots\ldots、\ x_{3l} \rangle_{\mathbb{R}} \oplus \langle y_{3l+1}、\ \ldots\ldots、\ y_{3l+k} \rangle_{\mathbb{R}}$，其中 $[x_i, y_i]_{\mathfrak{g}_0} = x_i、\ \forall i = 1 \ldots 3l$ 以及所有其他括号均为零 (2) 向量空间 $\mathfrak{g}_{-1}$ 由 $\mathfrak{g}_{-1} = \mathfrak{g}_{-1,\ 3} \oplus \mathfrak{g}_{-1,\ 0} \oplus \mathfrak{g}_{-1,\ 2} = \langle a_1、\ \ldots\ldots、\ a_l \rangle_{\mathbb{R}} \oplus \langle b_1、\ \ldots\ldots、\ b_k \rangle_{\mathbb{R}} \oplus \langle c_{i,\ j} \,|\, i = 1、\ \ldots\ldots、\ k$ 给出；$j = 1、\ \ldots\ldots、\ 3l \rangle_{\mathbb{R}}$ (3) 线性映射定义为

- $l_2^p = [.,.]_{\mathfrak{g}_0}$
- $l_3(y_{3i+1}, y_{3i+2}, y_{3i+3}) = a_{i+1}$ 对于 $i = 0, \ldots, l-1$
- $l_1(b_j) = y_{3l+j}$ 对于 $j = 1, \ldots, k$
- $l_m^2(b_j, y_i) = c_{i,\ j}$ 对于 $i = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, 3l$。

则 $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{-1}$ 是一个李 2-代数，它按如下方式作用在 $\mathbb{R}^{3l}$ 中的一个开集上：

- $\rho_{1,\ 0}(y_j) = \partial_j,\ \rho_{1,\ 0}(x_j) = e^{-q_j}\partial_j$，对于 $j = 1, \ldots, 3l-2$
- $\rho_{1,\ 0}(x_{3l-1}) = \rho_{1,\ 0}(x_{3l}) = 0 = \rho_{1,\ 0}(y_{3l+i})$ 对于 $i = 1 \ldots, k$
- $\rho_2(y_i, y_j) = 0$ 对于 $i, j \neq 3l, 3l-1$
- $\rho_2\ (y_{3l-1}, y_{3l}) = \partial_{3l-1} \wedge \partial_{3l}$
- $\rho_{1,\ -1}(b_j) = \partial_{3l-1} \wedge \partial_{3l}$ 对于 $j = 1, \ldots, k$
- 对于 $\rho_{1,\ 0}(y_{3l-1})$ 和 $\rho_{1,\ 0}(y_{3l})$，没有任何条件限制。

备注 C.12. 由于 $\rho_{1,\ -1}$ 仅定义在 $\mathfrak{g}_{-1,\ 0}$ 上，附录 *A* 中的拟同构会湮灭该作用，因为 $\rho_{1,\ -1} = 0$。

备注 C.13. 通过这个例子，我们还得到了如下情形：$S245$ 其中 $l_1 = 0$，$l_2 = 0$，$l_3 \neq 0$。在此情形下，$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_{0,\ 0}$ 以及 $\mathfrak{g}_{-1} = \mathfrak{g}_{-1,\ 3}$ 和 $\rho_{1,\ -1} = 0$。我们可以取 $\rho_{1,\ 0}(y_j) = \partial_j$，对于 $j = 1,\ \ldots,\ 3l-2$ 以及 $\rho_2(y_{3l-1},\ y_{3l}) = \partial_{3l-1} \wedge \partial_{3l}$。这涵盖了情形 $T4$。

备注 C.14。如果我们考虑 *2*-辛流形 $(\mathbb{R}^6, \omega = dq_1 \wedge dq_5 \wedge dq_6 - dq_2 \wedge dq_4 \wedge dq_6 + dq_3 \wedge dq_4 \wedge dq_5)$ 上的李 *2*- 作用，那么该李 *2*- 作用无法提升为基本余动量映射，因为对于 $j = 1, ..., 4$，有 $d(\iota_{\rho_{1,0}(x_j)}\omega) \neq 0$，也就是说，闭性条件不满足，因此不存在 $\lambda_{1,0}(x_j)$。

例 *2c*：我们给出一个显式构造，说明由"ax+b"型基本李2-代数给出的李 2-代数在 $(\mathbb{R}^6, \omega = dq_1 \wedge dq_5 \wedge dq_6 - dq_2 \wedge dq_4 \wedge dq_6 + dq_3 \wedge dq_4 \wedge dq_5)$ 上的哈密顿 2-作用：

- $k \geq 1$
- $\mathfrak{g}_0 = \langle y_1, \ldots, y_6 \rangle_{\mathbb{R}} \oplus \langle x_1, \ldots, x_6 \rangle_{\mathbb{R}} \oplus \langle y_7, \ldots, y_{6+k} \rangle_{\mathbb{R}}$ 与 $[x_i, y_i] = x_i,\ \forall i = 1, \ldots 6$
- $\mathfrak{g}_{-1} = \langle a_1, a_2 \rangle \oplus \langle b_1, \ldots, b_k \rangle$
- $l_3(y_1, y_2, y_3) = a_1,\ l_3(y_4, y_5, y_6) = a_2$ 与 $l_1(b_j) = y_{6+j}$ 对于 $j = 2, \ldots, k$ 与 $l_2^m = 0$。

则李 2-作用由下式给出

- $\rho_{1,0}(y_1) = \partial_5,\ \rho_{1,0}(x_1) = e^{-q_5}\partial_1,\ \rho_{1,0}(y_2) = \partial_4,\ \rho_{1,0}(x_2) = e^{-q_4}\partial_2,\ \rho_{1,0} = 0$ otherwise
- $\rho_2(y_5, y_6) = \partial_1 \wedge \partial_2 = \rho_{1,-1}(b_k)$ and $\rho_2 = 0 = \rho_{1,-1}$ otherwise.

该作用可以提升为一个由下式定义的基本余动量映射：

- $\lambda_{1,0}(y_1) = -q_1 dq_6 + q_3 dq_4,\ \lambda_{1,0}(y_2) = q_2 dq_6 - q_3 dq_5\ \lambda_{1,0}(x_1) = -e^{-q_5} dq_6,\ \lambda_{1,0}(x_2) = -e^{-q_4} dq_6, \lambda_{1,0} = 0$ 否则
- $\lambda_{1,-1}(b_k) = 0,\ \lambda_{1,-1} = 0$ 否则
- $\lambda_2(y_1, y_2) = (q_3, 0)$ 由于 (A_2)，对于 $\lambda,\ \lambda_2 = 0$ 否则。

例 3. 满足 $l_1 = 0$ 或 $l_3 = 0$ （$\mathfrak{g}_0$ 是李代数）的李 2-代数 $\mathfrak{g}$

例 *3a*：设 $\mathfrak{g}$ 满足 $l_1 = 0$ 和 $l_3 \neq 0$。在涵盖 $S235$情形的本例中，我们在 $M = \mathbb{R}^3$上构造给定李 2-代数的若干个李 2-作用。当余动量映射存在时，我们将其明确写出；否则给出其存在性的障碍。

考虑由 $\mathfrak{g}_{-1} = \langle a \rangle_{\mathbb{R}}$和 $\mathfrak{g}_0 = \langle x_1、\ x_2、\ x_3 \rangle_{\mathbb{R}}$给出的李 2-代数（$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \bigoplus \mathfrak{g}_0$、$l_1$、$l_2$、$l_3$），其括号如下：

(1) $l_1(a) = 0$（2） $l_2($
$x_1, x_2) = -x_1$（3） $l_2($
$x_1, x_3) = -x_1$（4） $l_3($
$x_1, x_2, x_3) = a$。

2-作用的构造

$\mathfrak{g}$ 在流形 $\mathbb{R}^3$ 上的一个 2-作用必须满足：

（A_{21}）ρ_1、0（x_1）$= -[\rho_{1,0}$（x_1）ρ_1、0（x_2）$]_S$，（A_{22}）ρ_1、0（x_1）$= -[\rho_{1,0}$（x_1）ρ_1、0（x_3）$]_S$（A_{23}）$[\rho_{1,0}$（x_2）ρ_1、0（x_3）$]_S = 0$（A_3）$[\rho_{1,-1}$（a）ρ_1、0（x_i）$] = 0$，对于 $i = 1$、2、3（A_4）ρ_2（x_1, x_2）$- \rho_2$（x_1, x_3）$+ \rho_1$、$_{-1}$（a）$= [\rho_{1,0}$（x_1）ρ_2（x_2, x_3）$]_S + [\rho_{1,0}$（x_2）ρ_2（x_1, x_3）$]_S + [\rho_{1,0}$（x_3）ρ_2（x_1, x_2）$]_S$。

注 C.15。若 $\rho_{1,0}(x_1) = 0$ 条件 (A_{21}),(A_{22}) 以及对于 x_1，(A_3) 均成立 $\forall \rho_{1,0}(x_2)$,$\forall \rho_{1,0}(x_3)$ 和$\forall \rho_{1,-1}(a)$。

2-作用的例子

子例（1）与 $\rho_{1,0}(x_1) = 0$:

- $\rho_{1,\ 0}(x_2) = -\rho_{1,\ 0}(x_3) = -\partial_1$
- $\rho_2(x_1, x_2) = -\rho_{1,\ -1}(a) = \partial_1 \wedge \partial_3$
- $\rho_2(x_1, x_3) = \rho_2(x_2, x_3) = 0$

子例（2），其中 $\rho_{1,\ 0}(x_1) \neq 0$:

- $\rho_{1,\ 0}(x_1) = -e^{-q_1}\partial_1$
- $\rho_{1,\ 0}(x_2) = -\rho_{1,\ 0}(x_3) = -\partial_1$
- $\rho_2(x_1, x_2) = -\rho_{1,\ -1}(a) = 0$
- $\rho_2(x_1, x_3) = -e^{-q_1}\partial_1 \wedge \partial_2$。

注 *C.16*。此例涵盖了情形 $T135$、$T146$ 和 $T235$，因为我们还可以取，子例（*3*）：$\rho_{1、\ 0} = 0$ 和 $\rho_2(x_1, x_2) = -\rho_1$、$_{-1}(a) = \partial_1 \wedge \partial_3$，或者子例（*4*）：$\rho_1,0(x_1) = 0$，其中 $\rho_1,0(x_2) = -\rho_1,0(x_3) = -\partial_1$，且 ρ_1、$_{-1} = 0$ 和 $\rho_2 = 0$。

在 2-辛流形A上的作用

old $(\mathbb{R}^3, dq^1 \wedge dq^2 \wedge dq^3)$满足以下闭性条件时是哈密顿的：

2-辛流形上的李 2-作用

- $\iota_{\rho_{1,0}(x_i)}\omega$ 是闭的 $\forall i$
- $\iota_{\rho_{1,-1}(a)}\omega$ 是闭的
- $\iota_{\rho_2(x_i,x_j)}\omega$ 是闭的 $\forall i, j$。

显式2-余动量映射

上面的子例（1）$\rho_{1,0}(x_1) = 0$满足闭性条件。接下来的 λ 公式为：

- $\lambda_{1,\ 0}(x_1) = 0$
- $\lambda_{1,\ 0}(x_2) = -\lambda_{1,\ 0}(x_3) = -q_2 dq_3$
- $\lambda_2(x_1, x_2) = -\lambda_{1,-1}(a) = (0, (q_2, \partial_1 \wedge \partial_3))$
- $\lambda_2(x_3, x_1) = \lambda_2(x_3, x_2) = 0$.

注 C.17. 由于在子例（2）中，$\rho_{1,0}(x_1) = e^{-q_1}\partial_1$，形式 $\iota_{\rho_{1,0}(x_1)}\omega$ 不是闭形式，因此不存在基本余动量映射。

例 *3b*：这里我们考虑一个交叉模 $(l_1 \neq 0, l_3 = 0)$，它指向第 2.4 节，并涵盖情形 $S136$。我们给出给定李 2-代数在 $M = \mathrm{R}^3$ 上的李 2-作用，并给出一个带有 $\rho_2 = 0$ 的显式李 2-作用。

考虑一个李代数 $\mathfrak{g}_0 = \langle y, x, z\rangle_{\mathbb{R}}$，以及一个向量空间 $\mathfrak{g}_{-1} = \langle b, c\rangle_{\mathbb{R}}$，其关系为$[x, y] = x$, $l_1(b) = z$, $l_2^m(b, y) = c$。那么交叉模 $(\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0, l_1, l_2, l_3 = 0)$ 是一个李 2- 代数。在 $M =\mathrm{R}^3$ 上的李 2- 作用定义如下：

- $\rho_{1,\ 0}(x) = \rho_{1,\ 0}(z) = 0$，且对 $\rho_{1,\ 0}(y)$ 不作任何限制
- $\rho_{1,-1}(c) = 0$ 且对 $\rho_{1,-1}(b)$ 没有条件
- $\rho_2(x, z) = 0$
- $\rho_2(y, z) = [\rho_{1,-1}(b)\rho_{1,\ 0}(y)]$
- 对 $\rho_2(x, y)$ 没有条件。

因此，我们得到所有情形 T（$T136$ 除外）。

值得注意的是，对于情形 $T136$，即 $\rho_2 = 0$，我们得到另一个由 $\rho_{1,0}(x) = \rho_{1,0}(z) = 0$, $\rho_{1,0}(y) = \partial_1$, $\rho_{1,-1}(c) = \partial_2 \wedge \partial_3$ 以及 $\rho_{1,-1}(b) = -q_1\partial_2 \wedge \partial_3$ 给出的显式 2-作用。

注意，该作用可能不是哈密顿的。

例 4. 满足 $l_1 = 0 = l_3$ 和 $l_2 \neq 0$的李 2-代数 $\mathfrak{g}$

我们处于情形 $S236$。在例 4a 中，我们构造幂零李代数在 R^3 上的李 2-作用，并在余动量映射存在时将其具体给出，否则给出其存在性的障碍。在第二个例子（例 4b）中，我们给出带有 $\rho_2 = 0$的可能李 2-作用。

例 *4a*：我们首先考虑情形 $\mathfrak{g}_{-1} = \{0\}$。因此李 2-代数约化为 $\mathfrak{g} = \{0\} \oplus \mathfrak{g}_0$，其中 $\mathfrak{g}_0$ 是一个李代数，并且$\rho_{1,-1} = 0$。这涵盖了情形 $T4$。

使 $\{0\} \oplus \mathfrak{g}_0 \longrightarrow \mathfrak{X}^2(M) \oplus \mathfrak{X}^1(M)$成为李 2-态射的关于 ρ的条件如下：

- $\rho_{1,0}$ 是一个李代数态射
- $\rho_2([x, y]_{\mathfrak{g}_0}, z) + c.p. = [\rho_{1,0}(x)\ \rho_2(y, z)]_S + c.p.$

注C.18. 如果 $\rho_{1,0} \neq 0$, $\rho_2 = \rho_{1,0} \wedge \rho_{1,0}$ 不能定义李 *2*-作用，除非 $\rho_{1,0}$ 的像至多是一维的。

海森堡李代数的2-作用的例子

设 $\mathfrak{g}_0 = \langle x, y, z\rangle_{\mathbb{R}}$ 为带有 $[x, y] = z$ 的海森堡李代数。 $\{0\} \oplus \mathfrak{g}_0$ 在 $(\mathrm{R}^3, dq_1 \wedge dq_2 \wedge dq_3)$ 上的 2-作用由 $\rho_{1,0}(x) = \partial_1$, $\rho_{1,0}(y) = \partial_2$, $\rho_{1,0}(z) = 0$ 以及 $\rho_2(y, z) = \rho_2(x, z) = \partial_2 \wedge \partial_3$,$\rho_2(x, y) = 0$ 给出。

于是，闭性条件$d\iota_{\rho_{1,\ 0}(.)}\omega = 0$ 和$d\iota_{\rho_2(.,.)}\omega = 0$ 均成立，并且存在一个余动量映射，其定义为

- $\lambda_{1,0}(x) = q_2 d_3$, $\lambda_{1,0}(y) = q_1 d_3$, $\lambda_{1,0}(z) = 0$
- $\lambda_2(y, z) = \lambda_2(x, z) = (0, (q_1, \rho_2(y, z)))$, $\lambda_2(x, y) = 0.$

这就是情形 $T145$。

请注意，由 $\rho_2(y, z) = q_1\partial_2 \wedge \partial_3$, $\rho_2(x, z) = q_2\partial_2 \wedge \partial_3$ 和 $\rho_2(x, y) = 0$ 给出的作用无法提升为基本余动量映射，因为$\iota_{\rho_2(x,\ z)}\omega = q_2\ dq_1$ 并非闭合的。

注C.19. 如果满足以下三个条件，我们就得到李 *2*-代数 $\{0\} \oplus \mathfrak{g}_0$ 的李 *2*-作用：

- $\rho_{1,\ 0}$ 是一个李代数态射
- $\rho_2([x,y]_{\mathfrak{g}_0},.)\ =0,\quad \forall x,y$
- $[\mathrm{im}(\rho_{1,\ 0}),\mathrm{im}(\rho_2)]_S=0$。

作为这种情形的一个例子，考虑 $\rho_{1,\ 0}=0$ 的情况。那么，任何满足 $\rho_2([x,y]_{\mathfrak{g}_0},.)\ =0$ 的 ρ_2：$\bigwedge^2\mathfrak{g}_0\longrightarrow\mathfrak{X}^2(M)$ 都定义一个李 2-作用（参见下面的两个幂零例子）。这涵盖了情形 $T246$。

幂零李代数作用的其他例子

(1) 设幂零李代数 $\mathfrak{g}_0=\langle x_1,x_2,x_3,x_4\rangle_{\mathbb{R}}$ 由 $[x_1,x_2]=x_3$ 和 $[x_1,x_3]=x_4$ 给出，则任何满足 $\rho_2(x_2,x_4)\ =0$ 且 $\rho_2(x_3,x_4)\ =0$ 的 ρ_2：$\bigwedge^2\mathfrak{g}_0\longrightarrow\mathfrak{X}^2(M)$ 都定义了 $\{0\}\oplus\mathfrak{g}_0$ 在 M 上的李 2-作用。

(2) 设 8维幂零李代数 $\mathfrak{g}_0=\langle x_i,i=1\dots8\rangle_{\mathbb{R}}$ 由 $[x_1,x_i]=x_{i+1}$ 给出，其中 $2\leq i\leq7$, $[x_2,x_7]=x_8$, $[x_3,x_6]=-x_7$，且 $[x_4,x_5]=x_8$。那么，条件 $\rho_2([x,y]_{\mathfrak{g}_0},.)\ =0$ 可化简为 $\rho_2([.,[.,.]_{\mathfrak{g}_0}]_{\mathfrak{g}_0},.)\ =0$, 因为成为李 2-作用的条件总是蕴含 $[\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_0]_{\mathfrak{g}_0}$ 中的元素，更确切地说，这些条件为:

$$\begin{aligned}&\rho_2(x_2,x_4)=0,\ \rho_2(x_8,x_1)=\rho_2(x_6,x_4) && \rho_2(x_3,x_i)=\rho_2(x_{i+1},x_2),\ 4\leq i\leq6\\ &\rho_2(x_4,x_6)=\rho_2(x_7,x_1)=\rho_2(x_7,x_3) && \rho_2(x_3,x_7)+\rho_2(x_8,x_1)=\rho_2(x_8,x_2).\end{aligned}$$

例 *4b*：现在我们考虑 $\mathfrak{g}_{-1}$ 可能非零但 $\rho_2=0$ 的情形（情形 $T6$）。

设$(\mathfrak{g}_0,[.,.]_{\mathfrak{g}_0})$为一个李代数，通过$\rho_{1,0}$作用于流形 M，并考虑李 2-代数$(\bigwedge^2\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_0,l_1=0,l_2^m(x\wedge y,z)\ =[x,z]_{\mathfrak{g}_0}\wedge y+x\wedge[y,z]_{\mathfrak{g}_0},l_3=0)$。则$\rho_{1,-1}=\rho_{1,0}\wedge\rho_{1,0}$连同给定的$\rho_{1,0}$与 $\rho_2=0$，定义了 M上的一个李 2-作用。

设两个李代数 $\mathfrak{g}_0$ 和 $\mathfrak{h}$ 分别通过 ν 和 τ 作用于流形 M。考虑李 2-代数$(\bigwedge^2\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{g}_0,l_1=0,l_2^m=0,l_2^p=[.,.]_{\mathfrak{g}_0},l_3=0)$，并由$\rho_{1,0}=\nu$、 $\rho_2=0$和$\rho_{1,-1}=\tau\wedge\tau$定义 ρ： $\bigwedge^2\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{g}_0\longrightarrow\mathfrak{X}^2(M)\ \oplus\mathfrak{X}^1(M)$。于是，若 $[\tau(a)\ \wedge\tau(b)\ \nu(x)]_S=0$、 $\forall a$、 $b\in\mathfrak{h}$和$\forall x\in\mathfrak{g}_0$，则 ρ是一个李 2-作用。

例 5. 满足 $l_1=l_2=l_3=0$ 的李 2-代数 $\mathfrak{g}$

Thi这种退化情形涵盖了 $S246$，但我们仍然可以构造一个余动量映射。

考虑李 2-代数 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{-1}\oplus\{0\}$，其中 $n\geq1$ 且 $\mathfrak{g}_{-1}=\langle a_1,\dots,a_n\rangle_{\mathbb{R}}$，并且$l_1=l_2=l_3=0$。在这种情况下 $\mathfrak{g}_0=\{0\}$，因此$\rho_{1,0}=0$，从而 $\rho_2=0$。

于是 $\mathfrak{g}$ 通过$\rho=\rho_{1,-1}$ 作用在每个流形 M 上： $\mathfrak{g}_{-1}\longrightarrow\mathfrak{X}^2(M)$ 是任意的 R-线性映射。

当 M 是 2-辛时，记 $v_k=\rho_{1,-1}(a_k)$。若对所有 k，都存在一个 $f_k\in C^\infty_{Ham}(M)$ 使得 $df_k=-\iota_{v_k}\omega$, 则可定义余动量映射 $\lambda=\lambda_{1,-1}$：$\mathfrak{g}_{-1}\longrightarrow C^\infty(M)\times Ham^0(M)$，并令 $\lambda(a_k)\ =(0,(f_k,v_k))$。

这涵盖了情形 $T236$。

致谢。 作者感谢 Leonid Ryvkin 提供的有益讨论，并感谢洛林大学的 Émer- gence Exploratoire OAK（2025）项目提供的经费支持。

参考文献

[BC04] John C. Baez 和 Alissa S. Crans。高维代数 VI：李 2-代数。范畴理论与应用，12：492–538，2004。[CFRZ16] Martin Callies、Yaël Frégier、Christopher L. Rogers 和 Marco Zambon。同伦动量映射。数学进展，303：954–1043，2016。[Cra04] Alissa S. Crans。李 2 -代数。博士论文，加利福尼亚大学河滨分校，arXiv:math/0409602 [math.QA]，2004。[Del18] Nestor Leon Delgado。多辛结构与高阶动量映射。预印本，arXiv:1811.01415 [math.SG]，2018。[KS24] Andreas Kraft 和 Jonas Schnitzer。面向数学工作者的 L∞-代数及其同伦论导论。数学物理评论，36(01)：2330006，2024。[LL20] Honglei Lang 和 Zhangju Liu。李 2 674, 2020 49 6 641 -代数综述。数学进展（北京），( ): – 。[Mam20] Leyli Mammadova。多辛几何中的李 2-代数动量映射。博士论文，鲁汶大学，arXiv:1811.01415 [math.DG]，2020。[Mit21] Antonio Michele Miti。多辛几何中的同伦余动量映射。博士论文，圣心天主教大学和鲁汶大学，arXiv:2105.05645 [math.SG]，2021。[MZ20] Leyli Mammadova 和 Marco Zambon。多辛几何中的李 2-代数动量映射。微分几何及其应用，70：101631，2020。[Rog12] Christopher L. Rogers。多辛几何中的 L-无穷代数。数学物理快报，100：29–50，2012。[RW15] Leonid Ryvkin 和 Tilmann Wurzbacher。多辛几何中余动量的存在性与唯一性。微分几何及其应用，41：1–11，2015。[Wag06] Friedrich Wagemann。关于李代数交叉模。代数通讯，34(5)：1699–1722，2006。[Wag21] Friedrich Wagemann。交叉模。德古意特出版社，柏林、波士顿，2021。[Zam12] Marco Zambon。 L_∞-代数以及狄拉克结构和 Courant 代数丛的高阶类似物。辛几何杂志，10(4)：563–599，2012。

洛林埃利·嘉当研究所，洛林大学与法国国家科学研究中心，57070 梅斯，法国电子邮件地址：PHILIPPE.BONNEAU@UNIV-LORRAINE.FR电子邮件地址：VERONIQUE.CHLOUP@UNIV-LORRAINE.FR电子邮件地址：ANGELA.GAMMELLA-MATHIEU@UNIV-LORRAINE.FR电子邮件地址：TILMANN.WURZBACHER@UNIV-LORRAINE.FR