arXiv:2602.14753v1 [math.GT] 16 Feb 2026

$\mathbb{C}P^2$ 和 $S^2 \times S^2$中的柔性曲面

JOSHUA LEHMAN

Abstract. 若4-流形 M 中的曲面 Σ的任意映射类都能作为某个微分同胚的限制（M，Σ）（M，Σ），则称其为柔性曲面。我们在$\mathbb{C}P^2$ 和 $S^2 \times S^2$ 中任意给定的非特征同调类内构造柔性曲面。在特征同调类内，某个自旋结构会阻碍柔性；对此我们构造所谓的自旋柔性代表。

1. Introduction

设 $\Sigma^2 \subset M^4$是闭定向4-流形 M中的闭定向曲面。与二元组（M，Σ）相关联的是相对映射类群 $\mathrm{Mod}(M,\Sigma) = \pi_0(\mathrm{Diff}^+(M,\Sigma))$，其中 $\mathrm{Diff}^+(M,\Sigma)$由保持 M 定向并将 Σ 作为集合固定的微分同胚组成。限制映射确定了一个同态 $\mathcal{R} : \mathrm{Mod}(M,\Sigma) \to \mathrm{Mod}^{\pm}(\Sigma) = \pi_0(\mathrm{Diff}(\Sigma))$。沿用 Hirose [Hir02], 的术语， Σ 在 M 中的可延拓子群 $\mathcal{E}(M,\Sigma)$是 $\mathcal{R}$ 在 $\mathrm{Mod}(\Sigma) = \pi_0(\mathrm{Diff}^+(\Sigma))$中的像。若曲面 Σ在 M中满足 $\mathcal{E}(M,\Sigma) = \mathrm{Mod}(\Sigma)$，则称其为柔性曲面。若 Σ在 M中是特征的[1]，且 $H_1(M;\mathbb{Z}) = 0$，则存在柔性障碍，即 Rochlin 二次型 q_Σ： $H_1(\Sigma;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$（命题 2.5）。映射类群 $\mathrm{Mod}(\Sigma)$通过拉回作用于 H_1上的二次型集合（$\Sigma;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$）。根据 q_Σ的定义， $\mathcal{E}(M,\Sigma) \leq \mathrm{Mod}(\Sigma)[q_\Sigma]$，其中 $\mathrm{Mod}(\Sigma)[q_\Sigma]$ 表示q_Σ的稳定子。若 Σ 满足 $\mathcal{E}(M,\Sigma) = \mathrm{Mod}(\Sigma)[q_\Sigma]$，则称其为自旋柔性。Hirose 提出的一个指导性问题，作为 [Hir15],中的问题 6.3，内容如下。

问题 1.1。 假设 M 是单连通的。设 $x \in H_2(M;\mathbb{Z})$ 是一个非特征元素。 x 是否存在柔性代表?

我们针对 $\mathbb{C}P^2$ 和 $S^2 \times S^2$解决了这个问题。特别地，我们证明:

定理A。 设 $M = \mathbb{C}P^2$ 或 $S^2 \times S^2$。固定 $x \in H_2(M;\mathbb{Z})$。若 x 是特征的，则存在 x的自旋柔性代表；否则， x存在柔性代表。

我们还可以进一步要求柔性代表在其同调类中使亏格最小。回顾一下，光滑的次数为 d的平面曲线在 $\mathbb{C}P^2$中代表 $d[\mathbb{C}P^1] \in H_2(\mathbb{C}P^2;\mathbb{Z})$，在其同调类中使亏格最小（Thom猜想， [KM94]），并且当且仅当 d 为奇数时是特征的。沿着这一方向，我们证明一次 稳定化 就足以实现（自旋）柔性。

定理 B。 设 $X_d \subset \mathbb{C}P^2$ 是次数为 d的光滑平面曲线。设 $T \subset S^4$ 是 S^4中一个实心环面的边界。设 Z_d是稳定化 $X_d \# T \subset \mathbb{C}P^2 \# S^4 \cong \mathbb{C}P^2$。若 d为偶数，则 Z_d是柔性的。若 d为奇数，则 Z_d 是自旋柔性的。

这一结果可视为 [Hir05 定理 5 的推广1]，适用于所有 $d \neq 3$（注 5.7）。

背景与相关工作。回顾一下，在 4-流形 M 中，若一个曲面是把手体[2] 在 M 中的边界，则称其为无结的。Montesinos 证明了 [Mon83, 定理 5.4]： S^4 中的平凡环面是自旋柔性的；Hirose [Hir02, 定理 1.1] 将这一结论推广到了所有更高亏格的平凡纽结。另一方面，也存在一些例子（非平凡自旋环面），它们是 S^4 中的有结曲面，其可延拓子群要小得多（具体而言，其指数为无限，精确细节见 [Hir93]）。在 $\mathbb{C}P^2$ 中，平凡纽结不再是特征的，而是柔性曲面 [Hir05, 定理 3.1]。问题 1.1 的一个更宽泛版本只询问单连通 4-流形中柔性曲面的存在性。在这方面，Hirose 和 Yasuhara 构造了亏格为

Date: 2026年2月17日。[1]回忆一下， $H^2(M;\mathbb{Z})$ 中的一个类若是 M 的第二斯蒂费尔-惠特尼类的整数提升，则称其为 *characteristic* 。闭曲面 $\Sigma \subset M$ 若是特征的，则 $[\Sigma] \in H_2(M;\mathbb{Z})$ 的庞加莱对偶是´。[2]本文只讨论可定向曲面。

任意亏格的曲面，位于 $\mathbb{C}P^2$、$S^2 \times S^2$、$\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ 或任意椭圆曲面 [HY08，定理 3。1]。另一个版本允许通过添加一个 $S^2 \times S^2$ 直和项来稳定环境 4-流形。Hirose 和 Yasuhara 证明了 [HY08，定理 4。1]：对于任意一个 $\Sigma^2 \subset M^4$ 满足 M 单连通条件的流形，曲面$\Sigma \# S^2 \times \{*\} \subset M \# S^2 \times S^2$ 都是柔性的。特别是，如果允许同时改变环境流形和同调类，就可以得到最佳结果。

设 $X_d \subset \mathbb{C}P^2$ 为一条光滑的 d 次平面曲线。Hirose 证明了 X_3 和 X_4 是 $\mathbb{C}P^2$ [中的柔性曲面 Hir05, 定理 4.2]。此外，Hirose 证明，对于亏格为 g的平凡结 $\Sigma_g \subset S^4$，曲面 $X_3 \# \Sigma_g$ 是自旋柔性的 [Hir05, 定理 5.1]。Salter 的一项工作的推论是，$X_5 \subset \mathbb{C}P^2$ 是自旋柔性的 [Sal25, 定理 A]。据作者所知，对于次数更高的平面曲线，情况尚不明确。不过，当 $d \geq 6$ 时，$\mathcal{E}(\mathbb{C}P^2, X_d)$ 是 $\mathrm{Mod}(X_d)$ 的有限指数子群。这一结论源于 Salter 的工作 [Sal19, 定理 1.3]。

具体而言，令 $\mathcal{P}_d \subset |\mathcal{O}(d)|$ 表示光滑 d 次平面曲线的轨迹。$\mathcal{P}_d$ 上的典范族确定了一个单值表示 $\rho_d \colon \pi_1(\mathcal{P}_d, X_d) \to \mathrm{Mod}(X_d)$。根据同痕延拓定理，同态 ρ_d 可经由一个嵌入单值表示$\widetilde{\rho_d} \colon \pi_1(\mathcal{P}_d, X_d) \to \mathrm{Mod}(\mathbb{C}P^2, X_d)$ 进行分解。特别地，ρ_d 的像给出了 $\mathcal{E}(\mathbb{C}P^2, X_d)$ 的一个下界。Salter [Sal19]，的工作 [的推广中，Calderon-Salter [CS21] 证明，ρ_d 在 $\mathrm{Mod}(X_d)$ 中的像与某个 $(d-3)$-自旋结构 ϕ_d 的稳定子 $\mathrm{Mod}(X_d)[\phi_d]$ 重合。特别地，

$$\mathrm{Mod}(X_d)[\phi_d] \leq \mathcal{E}(\mathbb{C}P^2, X_d).$$

高阶自旋结构 ϕ_d 是一个更普遍现象的实例；证明定理 A 和 B 时都会用到这一现象——它源自仿射部分$\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{C}P^2$中曲面 X_d 的特定框架[4]。令 $B^4_\varepsilon(0) \subset \mathbb{C}^2$ 表示以原点 $0 \in \mathbb{C}^2$为中心、半径为 $\varepsilon > 0$的球。经过同痕，$X_d \cap B^4_\varepsilon(0) \subset \mathbb{C}^2$ 是正辫闭包的一个塞弗特曲面。Ferretti [Fer 25], 利用 Stallings [Sta78], 的工作，为任意正辫 β 的闭包关联了一个带标架的塞弗特曲面 $F_\beta \subset S^3$。我们的代表元是通过对这类塞弗特曲面进行封帽得到的。只固定环境同调类时，我们可以用一个无结曲面进行稳定化。我们的技巧基于带标架曲面的几何刚性与 Hirose 针对平凡纽结所建立的方法 S^4 [Hir02]之间的对比。

注1.2. (高阶自旋结构与 Rochlin 二次型) 当 d 为奇时，这一讨论便与拓扑情形有所关联。在这种情况下，$d-3$ 为偶，且 ϕ_d 有一个模 2 约化 ϕ_d，它与对应于 Rochlin 二次型的 2-自旋结构一致（详情见 [Lib88] ），并且我们有

$$\mathrm{Mod}(X_d)[\phi_d] \leq \mathcal{E}(\mathbb{C}P^2, X_d) \leq \mathrm{Mod}(X_d)[\overline{\phi_d}].$$

概述。考虑 $M = \mathbb{C}P^2$ 或 $S^2 \times S^2$，并赋予其标准的把手体分解。回顾一下，任意同调类 $x \in H_2(M; \mathbb{Z})$ 都有一个代表元 $\Sigma \subset M$，它与 0-把手 $B^4 \subset M$ 的交集是一个塞弗特曲面 $F_\Sigma = \Sigma \cap B^4 = \Sigma \cap \partial B^4$，其中 $\Sigma \backslash \mathrm{int}(F_\Sigma) = D_\Sigma$ 是由闭2-圆盘组成的集合（第4.2小节）。令 $\theta_{F_\Sigma} \colon H_1(F_\Sigma; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 为塞弗特型，$i_\Sigma \colon F_\Sigma \to \Sigma$ 为包含映射。我们首先假设曲面 Σ 是特征的。

令 $q_\Sigma \colon H_1(\Sigma; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 表示 Rochlin 二次型。于是 $i_\Sigma^* q_\Sigma = \theta_{F_\Sigma}$（命题2.9）。注意，$\theta_{F_\Sigma}$ 总是有定义的。一般而言，θ_{F_Σ} 无法延拓至 $H_1(\Sigma; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$，这证明了 Σ 不具特征性。这最终正是柔性的来源（请参阅图 6，该图构造了 $2[\mathbb{C}P^1] \in H_2(\mathbb{C}P^2; \mathbb{Z})$ 的一个柔性代表）。

根据 Calderon-Salter [CS21，命题 5：1], 如果 Σ的亏格至少为 3，则其稳定子

$$\mathrm{Mod}(\Sigma)[q_\Sigma] = \mathcal{T}_{q_\Sigma} := \langle T_\gamma \,|\, \gamma \subset \Sigma \text{ nonseparating simple closed curve}, q_\Sigma(\gamma) = 1 \rangle.$$

为证明定理 A，我们构造一个代表元 Σ，使得 $\mathcal{T}_{q_\Sigma} \leq \mathcal{E}(M, \Sigma)$。这一方法的一个结果是，我们必须处理任意的 曲线。这分两步完成。

[3]曲面 Σ 上的 r-自旋结构是单位切丛 $\xi \in H^1(UT\Sigma; \mathbb{Z}/r\mathbb{Z})$ 上的一个上同调类 ξ，它在正向定向纤维上取值为 1。[4] 切丛的平凡化。

首先，我们为 $\mathcal{E}(M,\ \Sigma)$ 建立一个下界，它支持换坐标 原理[5]。它是一个带框架的映射类群（定义 3.3）的像。其次，我们用一个无结的曲面作稳定化，以构造更多可延拓映射类。

具体而言，设 $S = F_\Sigma \# \Sigma_g \subset S^3$，其中 $\Sigma_g \subset S^3$ 是一个亏格为 g的无结曲面。用 D_Σ 将 S封帽，得到一个代表元 $Z = S \cup D_\Sigma$。我们证明，对于 $g \geq 5$和 $\gamma \subset S$，若 $\gamma \subset S$是一条非分离简单闭曲线，且满足

$$\theta_S(\gamma) = \mathrm{lk}(\gamma, \gamma^+) = 1 \mod 2,$$

有 $T_\gamma \in \mathcal{E}(M,\ Z)$（引理 4.6）。由于 $Z \backslash S = D_\Sigma$ 是由圆盘组成的集合，且 $i_Z^* q_Z = \theta_S$，因此可得

$$\mathcal{T}_{q_Z} \leq \mathcal{E}(M, Z).$$

现在假设 x 不是特征元。引理 4.6 仍然适用，只需考虑这一对（$B^4,\ S$）。要证明其具有柔性，只需证明对于任意满足以下条件的非分离简单闭曲线 $\delta \subset S$：

$$\theta_S(\delta) = \mathrm{lk}(\delta, \delta^+) = 0 \mod 2$$

有 $T_\delta \in \mathcal{E}(M,Z)$。我们证明，将 δ 同痕变形，使其穿过 D_Σ 中的一个圆盘，可得到 S 上的一条曲线 δ，满足 $\theta_S(\delta) = 1$ 模 2（命题4.8）。由引理 4.6，$T_{\tilde{\delta}} \in \mathcal{E}(M,Z)$。在 Z上，曲线 δ和 δ 同痕，因此 $T_\delta \in \mathcal{E}(M,Z)$。由于 Mod$(Z)$ 由非分离简单闭曲线上的德恩扭转生成，Z 是柔性的。

本文提纲。在第 2 节中，我们回顾有关可延拓映射类的基础内容。我们对此作了详细介绍，因为本节最后将证明，Hirose 在 [Hir02] 中确立的方法证明了四维球中恰当嵌入的平凡纽结具有自旋柔性。在第 3 节中，我们回顾有关带标架的和自旋映射类群的相关背景。在第 4 节中，我们证明定理A。我们从一族在 [Fer25], 中研究的齐次辫子闭包的带标架塞弗特曲面出发，运用第 3 节中的技巧证明：在与一个亏格足够大的平凡纽结进行稳定化之后，任意具有奇数自环绕数的非分离简单闭曲线上的德恩扭转都是可延拓映射类（引理4.6）。随后，我们便能在 $\mathbb{C}P^2$ 和 $S^2 \times S^2$ 中构造（自旋）柔性代表。非特征类的柔性是命题4.8的推论。在第 5 节中，我们证明定理B。我们将第 4 节中的方法改用于仅进行一次稳定化的情形，并利用几何单值——它与 [Fer25]中确定的正辫相关。

约定与记号。全文均在光滑范畴中讨论。所有流形均默认定向，所有子流形均为嵌入的。对于曲面 Σ 上的简单闭曲线 γ，记沿 γ 的左旋Dehn扭转为 $T_\gamma \colon \Sigma \to \Sigma$。我们将曲面上的曲线以及微分同胚与其对应的同痕类视为相同。对于一对曲线 $\alpha,\ \beta \subset \Sigma$，其几何相交数记为 $i(\alpha,\ \beta)$。给定流形 M 及其子空间 $A \subset M$，令 $\mathrm{Diff}_\partial(M,\ A)$ 表示保持 A 整体不变且在 ∂M 上限制为恒等映射的 M 的微分同胚。对于子流形 $S \subset M$，将 S 在 M 中的法丛记为 $\nu_{S \subset M}$，并默认将其与 M 中 S 的一个开邻域等同。

致谢。感谢 Inan̡c Baykur 与我就可延拓子群进行了有益的交流。感谢我的导师 Nick Salter 提供了大量反馈并与我深入讨论，也感谢他在这两方面给予的慷慨帮助。此外，我还要感谢 Aru Mukherjea 对早期稿件提出的意见。

2. Extension Methods and Rochlin's Quadratic Form

我们回顾在 4-流形中延拓曲面映射类的主要技术，以及由此产生的障碍。最后指出，四维球中恰当嵌入的平凡纽结是边界相对自旋柔性的（命题2.15）。

[5]换坐标指一系列结果：如果曲面上的曲线配置具有相同的“组合学”，就可以通过曲面的微分同胚将一种配置变换为另一种。

可延拓子群。设 $(\Sigma^2, \partial\Sigma)$ 是定向 4-流形 M 中恰当嵌入的定向紧曲面。令 $\mathrm{Mod}(M,\Sigma) = \pi_0(\mathrm{Diff}^+_\partial(M,\Sigma))$ 为这对 (M,Σ) 的光滑相对映射类群。限制映射确定了一个同态

$$\mathcal{R} : \mathrm{Mod}(M,\Sigma) \to \mathrm{Mod}^{\pm}(\Sigma) = \pi_0(\mathrm{Diff}_\partial(\Sigma, \partial\Sigma)).$$

定义 2.1。定义 $\mathcal{E}_\partial(M, \Sigma)$ 为 $\mathcal{R}$ 在 $\mathrm{Mod}(\Sigma) = \pi_0(\mathrm{Diff}^+_\partial(\Sigma, \partial\Sigma)) \leq \mathrm{Mod}^{\pm}(\Sigma)$ 中的像。

注 2.2。文献中对 $\mathcal{E}(M, \Sigma)$ 的若干计算（[Hir05], [Hir02]）通过对 Σ 中的 M的同痕构造映射类的延拓。特别是，它们实际上计算了 光滑单值群 of Σ in M。本文始终采用同样的方法。在存在边界时，所有同痕均相对于边界进行。

注 2.3。限制 $\mathcal{R} : \mathrm{Mod}(M, \Sigma) \to \mathrm{Mod}^{\pm}(\Sigma)$ 的目标是扩展的 映射类群，这是有其特殊意义的。例如，$\mathbb{C}P^2$ 上的复共轭在光滑平面曲线上诱导出一个反定向微分同胚（该曲面由一个具有实系数的齐次多项式定义）。当然，复共轭在 $\mathbb{C}P^2$ 上仍然是一个保持定向的微分同胚。另一方面，M 中的曲面的任何同痕都必须（经过同伦延拓后）保持定向，并且在 M 的同调上作用平凡。

2.1. **Rochlin 二次型**。一张 膜 对于这一对（M, Σ）是一个嵌入定向曲面$F \subset \mathrm{int}(M)$，其中 $\partial F \subset \Sigma$是简单闭曲线，且其内部与 Σ横截。若 $H_1(M; \mathbb{Z}) = 0$上任意一条曲线 Σ 都有一张膜。在提取映射类延拓的障碍时，一个指导原则是，与膜相关的不变量必须由 $\mathcal{E}_\partial(M, \Sigma)$保留（例如，[LNSW13], 中沿一条简单闭曲线记录各膜中该曲线的最小亏格，便采用了这一思路）。

给定一张膜 F，对应于这一对（M, Σ），相对欧拉数 $e_\Sigma(F) \in \mathbb{Z}$定义如下。在同痕意义下，我们可以假设 F沿着 ∂F与 Σ 横截相交。令 $\nu_F \to F$表示 M中 F的法丛。由于 F同伦等价于圆周的楔和，且 ν_F是一个可定向的二维平面丛，因此存在一个平凡化 $\nu_F \cong F \times \mathbb{R}^2$。法丛 $\nu_{\partial F \subset \Sigma}$ 的一个处处不为零的截面的像 ν_F位于其中，而该平凡化随即确定一个光滑映射$\partial F \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$。此映射的次数即为相对欧拉数 $e_\Sigma(F) \in \mathbb{Z}$。提醒读者，相对欧拉数本身并不是旋转构造下 ∂F 的不变量；该构造会改变 $e_\Sigma(F)$，代价是在 $\mathrm{int}(F)$ 与 Σ 之间产生交点（见 [FK78]）。

我们记录 Rochlin 二次型在相对边界情形中的出现。回顾：一个二次型 $q : H_1(\Sigma; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 是满足以下条件的函数

$$q(x + y) = q(x) + q(y) + \langle x, y\rangle$$

对所有 $x, y \in H_1(\Sigma; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 成立。这里 $\langle -, -\rangle$ 表示模 2 交数配对，它来自由包含映射与 Poincar´e 对偶所诱导的同态 $H_1(\Sigma; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H_1(\Sigma, \partial\Sigma; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$。映射类群 $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ 通过拉回 $(f \cdot q)(x) := q(f_*^{-1}(x))$ 作用在 $H_1(\Sigma; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 上的二次型集合上。

定义 2.4. 设 $q : H_1(\Sigma; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 为一个二次型。q 的稳定子记为 $\mathrm{Mod}(\Sigma)[q]$，即

$$\mathrm{Mod}(\Sigma)[q] = \{f \in \mathrm{Mod}(\Sigma) \mid (f \cdot q) = q\}.$$

命题 2.5。假设 $H_1(M; \mathbb{Z}) = 0$，且 $\Sigma \subset M$是特征的，也就是说，$[\Sigma, \partial\Sigma] \in H_2(M, \partial M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$在勒夫谢茨对偶下与 $w_2(M) \in H^2(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$对偶。那么，*Rochlin* 二次型 $q_\Sigma : H_1(\Sigma; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 有定义，并且

$$\mathcal{E}(M, \Sigma) \leq \mathrm{Mod}(\Sigma)[q_\Sigma].$$

证明。我们简要回顾其中的一些细节，读者可参阅 [Klu21，引理 2]。对于一条简单闭曲线 $\gamma \subset \Sigma$，取一张膜 F满足 $\partial F = \gamma$。那么

$$q_\Sigma(\gamma) = |\mathrm{int}(F) \cap \Sigma| + e_\Sigma(F) \mod 2.$$

Σ 在 M 中是特征的这一条件，确保其与为 γ选择的膜无关。通过微分同胚（M, Σ）$\to$（M, Σ）传输膜可知，$\mathcal{E}$（M, Σ）$\leq \mathrm{Mod}(\Sigma)[q_\Sigma]$。□

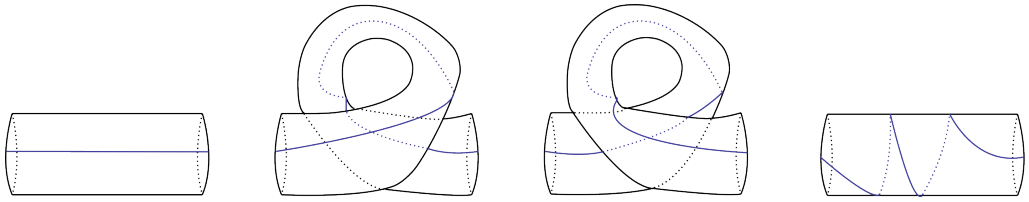


图 1. 在 $S^3 \times I$ 中一个标准环带的著名同痕（保持边界不动），它沿核心曲线诱导了一个（右手）扭转的平方。

定义 2.6. 若 $\Sigma \subset M$ 满足 $\mathcal{E}_\partial(M,\ \Sigma) = \mathrm{Mod}(\Sigma)$，则称其为边界相对柔性。若特征曲面 $\Sigma \subset M$ 满足 $\mathcal{E}_\partial(M,\ \Sigma) = \mathrm{Mod}(\Sigma)[q_\Sigma]$，则称其为自旋边界相对柔性。

Arf不变量。若 $H_1(\Sigma;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 上的交数配对非退化，则 $H_1(\Sigma;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 上的二次型在 $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ 的作用下属于同一轨道，当且仅当它们具有相同的 *Arf*不变量，这是二次型的一个取值于 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的不变量（详见 [RW14] ）。Arf不变量为 1（分别为 0）的二次型称为奇（分别称为偶）。在闭情形中，Arf不变量以如下方式刻画环境拓扑。

定理 2.7 (Freedman-Kirby [FK78])。 假设 M 是闭的、单连通的，并且$\Sigma \subset M$ 是特征的。那么

$$\mathrm{Arf}(q_\Sigma) = \frac{1}{8}(\sigma(M) - \Sigma\cdot\Sigma) \mod 2,$$

其中 σ（M）表示 M的签名，而 $\Sigma\cdot\Sigma$ Σ在 M中的自交数。

注记2.8。虽然我们只讨论光滑范畴，但值得指出的是，Rochlin 二次型也可以在拓扑局部平坦范畴中定义（关于此问题的讨论，见 [Klu21] ）。

Rochlin 二次型在 $3\frac{1}{2}$ 维中的情形。我们记录一种关于曲面上的 Rochlin 二次型的著名观点，它介于三维和四维之间。回顾一下，对于塞弗特曲面$S \subset S^3 = \partial B^4$，存在自链接型 θ_S：$H_1(S;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，其定义在本原元素上:

$$\theta_S(\gamma) = \mathrm{lk}(\gamma,\gamma^+) \mod 2$$

其中 γ^+ 表示曲线 $\gamma \subset S$的正向推开，而 lk 表示 S^3中的一维圈的链接数。

命题 *2.9*（ [*Sav*12] 第 *117* 页）。设 $\Sigma^2 \subset M^4$为特征曲面， $H_1(M;\mathbb{Z}) = 0$，且 $B^4 \subset M$ 为一个嵌入的四维球。假设 $\Sigma \cap B^4 = \Sigma \cap \partial B^4 = S$ 是链环的一个塞弗特曲面。令 $i: S \to \Sigma$ 为包含映射，且 θ_S 为 S上的链接形式。那么 $i^* q_\Sigma = \theta_S$ 其中$q_\Sigma: H_1(\Sigma;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 表示 *Rochlin* 二次型。

上述是严格意义上的等式陈述。我们记录一个实例：虽然链接形式和 Rochlin 二次型并非定义在同一个曲面上，但仍然可以将二者对应起来。

命题 2.10。 对于 $S \subset S^3 = \partial B^4$ 一个塞弗特曲面，令 S' 表示将 S 的内部 *Push* 到 B^4的内部所得的结果。曲面 $(S', \partial S') \subset (B^4, S^3)$ 是特征的，并且 *Rochlin* 二次型 $q_{S'}$ 定义在 S'上。将曲面 *Push* 到 B^4 所使用的同痕给出一个对应$S' \cong S$，而将 θ_S 拉回到 S' 所得的形式与 *Rochlin* 二次型 $q_{S'}$一致。

证明。 论证与 2.9 中命题 [Sav12的证明相同，见第 117]页。 □

2.2. **扩展 方法**。 现在我们转向研究 $\mathcal{E}_\partial(M,\Sigma)$ 中元素的例子，这些元素对应于序对 (M,Σ) .

管状同痕。 我们从一个表面所实现的、呈现出非平凡可延拓映射类的典型且众所周知的同痕（[Hir93]）开始。考虑一个标准环带 F 位于 $S^3 \times \{1/2\} \subset S^3 \times [0,1]$ 中，其核心曲线为 c。图 1 描绘了 F在 $S^3 \times [0,1]$ 中的一个同痕（相对于边界），它沿 c诱导出一个（右手）德恩扭转的平方。

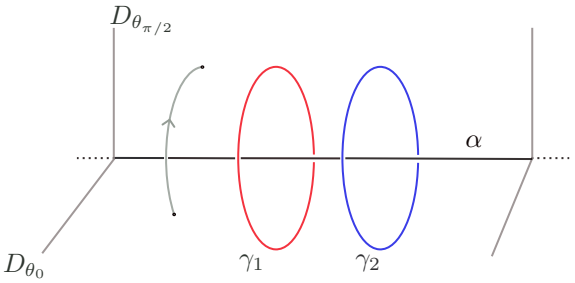


图 2. 图中描绘了二分量平凡链环 $\gamma_1 \cup \gamma_2$ 的一条轴 $\alpha \subset S^3$。该平凡链环与开书分解 $\pi : S^3 \backslash \alpha \to S^1$ 的各页横截。

霍普夫带曲线与纤维化子曲面。 令 B^4 表示 $\mathbb{R}^4$中的闭单位球，$S^3 = \partial B^4$。令 A 为 S^3 中的一个无结的环带，带有一次完整的正扭转或负扭转，因此 A是一个正的或负的 *Hopf*带。将 A 的内部推入 B^4中，我们得到一个适当嵌入曲面 $A' \subset B^4$。令 a 表示环带 A'的核心曲线。Hirose 在 [Hir05，命题 2 中确立的一个关键技术结果是1]，：

命题2.11. 我们有 $T_a \in \mathcal{E}_\partial(B^4, A')$。事实上， T_a 是一对 (B^4, A') 的光滑单值化元素，也就是说，存在一个微分同胚 $T \in \mathrm{Diff}^+_\partial(B^4)$，它与边界相对恒等映射光滑同伦，且满足 $T|_{A'} = T_a$。

我们记录命题 2.11 的典型应用。设 $S \subset S^3$ 是一个链环的塞弗特曲面。

定义 2.12. 若曲线 $\gamma \subset S$ 满足 $\nu_{\gamma \subset S}$ 是 S^3 中的一个 Hopf带，则称其为~~一条~~霍普夫带曲线。特别地， γ 是 S^3 中的一个平凡结，并且在为 γ 定向后，$\mathrm{lk}_S(\gamma, \gamma^+) = \pm 1$，其中 γ^+ 表示 $\gamma \subset S$ 的正向推开。

将 S 的内部推入 $\mathrm{int}(B^4)$，得到一个适当嵌入曲面 S'。具体而言，利用 $\partial B^4 = S^3 \times \{0\}$周围的领圈 $S^3 \times [0, 1]$，令

$$S' = \partial S \times [0, 1/2] \cup \mathrm{int}(S) \times \{1/2\}$$

以及 $\gamma \subset \mathrm{int}(S) \subset S^3 \times \{1/2\}$ 为一条简单闭曲线。应用命题 2.11 可得

引理2.13。 设环带 $A = \nu_{\gamma \subset S}$ 是 $S^3 \times \{1/2\}$中的一个~~*Hopf*~~带。设 ψ 是 B^4 的一个同痕，它将 A 的内部进一步推入 $\mathrm{int}(B^4)$。存在一个微分同胚T: $B^4 \to B^4$，使得 $\psi^{-1} \circ T \circ \psi$: $B^4 \to B^4$ 在边界 $S^3 \times \{0\}$上是恒等映射， $T(S') = S'$并沿环带 A的一条核心曲线诱导德恩扭转。特别地， $T_\gamma \in \mathcal{E}_\partial(B^4, S')$。

对这些方法作直接推广可知，任意纤维化子曲面的单值化都可以由一个可延拓映射类实现。

沿分离平凡链环作扭曲。 下文将用到 [Hir02中的引理 2。2]为方便读者，我们将其重新表述如下（另见 [LS25]，其中将此论证置于任意开书分解这一更一般的情形中）。

命题 2.14 （参见 [Hir02]中的引理 2.2。若曲面 $\Sigma \subset M^4$ 与一个 $S^3 \times [0, 1] \subset \mathrm{int}(M^4)$ 相交于 n 分支平凡链环的圆柱中 γ_1，……，$\gamma_n \subset S^3$，则多重扭曲 $T_{\gamma_1} \dots T_{\gamma_n} \in \mathcal{E}_\partial(M, \Sigma)$。

证明。设 $\alpha \subset S^3$ 为平凡链环 $\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$ 的轴（见图2）。考虑标准开书分解 $\pi : S^3 \backslash \alpha \cong \mathrm{int}(D^2) \times S^1 \to S^1$。取 n 个互异点 $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathrm{int}(D^2)$。不妨设平凡链环 $\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$ 具有如下形式 $\{x_1, \dots, x_n\} \times S^1$。由同伦延拓， π 的单值化给出一个同痕

$$\varphi : S^3 \times [0, 1] \to S^3$$

与 $\varphi|_{S^3 \times \{0\}} = \varphi|_{S^3 \times \{1\}} =$ 恒等映射$_{S^3}$。同痕 φ 使点 $\{x_1, \dots, x_n\}$ 绕轴 α自旋，同时保持平凡链环 $\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$ 作为一个集合不变。定义 Φ： $S^3 \times [0, 1] \to S^3 \times [0, 1]$，使得 $\Phi(x, t) = (\varphi(x, t)\ t)$。映射 Φ 在每个环带 $\gamma_1 \times [0, 1] \cup \dots \cup \gamma_n \times [0, 1]$上诱导一个德恩扭转。将 Φ通过恒等映射延拓到 M 上，可得 $T_{\gamma_1} \cdots T_{\gamma_n} \in \mathcal{E}_\partial(M, \Sigma)$。□

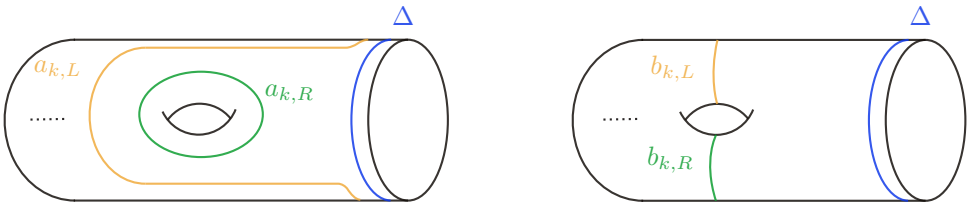


图 3. 并集 $a_{k,L} \cup a_{k,R} \cup \Delta$ 在 S^3 中构成一个 3 分支平凡链环；$b_{k,L} \cup b_{k,R} \cup \Delta$. 的情形类似

应用命题 2.14时，我们省略通过同痕进行的共轭；该同痕将候选曲面调整为使其与一个平凡链环上的圆柱中的 $S^3 \times [0,1]$ 相交。

Hirose [Hir02] 证明了， S^4 中的平凡打结曲面是自旋柔性的（亏格一情形归功于 Montesinos [Mon83]）。更具体地说，Hirose 构造了 Rochlin 二次型（一个偶二次型）的稳定子的生成集，并运用上述方法证明每个生成元都是可延拓映射类。

本节最后指出，平凡纽结的自旋柔性可以直接推广到相对边界情形。引理4.6利用这一结果，沿着一个无结子曲面提升映射类。

命题 2.15. 对于 $g \geq 1$，令 $\Sigma_g^1 \subset B^4$ 表示一个亏格为 g 的无结塞弗特曲面，它是 $S^3 = \partial B^4$ 中一个平凡结的塞弗特曲面，且其内部被推入 B^4 的内部。于是 $\mathcal{E}_\partial(B^4, \Sigma_g^1) = \mathrm{Mod}(\Sigma_g^1)[q_{\Sigma_g^1}]$。

证明。 将边界分支 Δ 的 Σ_g^1 用一个闭的嵌入圆盘封口，该圆盘位于 S^3中。令 Σ_g 表示所得的曲面。Rochlin 二次型 $q : = q_{\Sigma_g^1}$ 可延拓到 Σ_g （包含映射诱导同构$H_1(\Sigma_g^1; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ ）。因此，由（限制后的）圆盘推动 [FM12], 可得一个短正合列

$$1 \to \pi_1(UT\Sigma_g) \to \mathrm{Mod}(\Sigma_g^1)[q] \to \mathrm{Mod}(\Sigma_g)[q] \to 1,$$

其中 $UT\Sigma_g \to \Sigma_g$表示 Σ_g的单位切丛。Hirose [Hir02]为 $g \geq 2$构造了一个 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)[q]$的生成集，其中包含支撑于 Σ_g^1中的多重扭转。 [Hir02]中的方法表明，每个元素都可提升到 $\mathcal{E}_\partial(B^4, \Sigma_g^1)$。对于 $g = 1$，情况也相同（见 [Hir15]）。

现在只需证明

$$\pi_1(UT\Sigma_g) \leq \mathcal{E}_\partial(B^4, \Sigma_g^1).$$

如果 $\tilde{\gamma} \in \pi_1(UT\Sigma_g)$ 在投影 $UT\Sigma_g \to \Sigma_g$ 下的像为 $\gamma \in \pi_1(\Sigma_g)$（以 Δ 中的点为基点），则 $\tilde{\gamma}$ 在 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g^1)$ 中的像是某个 $k \in \mathbb{Z}$ 所对应的多重扭曲 $T_{\gamma_L} T_{\gamma_R}^{-1} T_\Delta^k$，其中 γ_L （相应地， γ_R）是通过将 γ 向左（相应地，向右）推过圆盘 Δ 得到的。曲线 $\gamma_L \cup \gamma_R \cup \Delta$ 在 Σ_g^1 上围成一个裤子曲面。

令 $\{a_k, b_k\}_{k=1}^g$ 表示 $\pi_1(\Sigma_g, *)$、 $* \in \partial\Sigma_g^1$的标准生成集。在图 3中， $a_{k、L} \cup a_{k、R} \cup \Delta$ 以及 $b_{k、L} \cup b_{k、R} \cup \Delta$ 是边界附近领圈的一个 S^3 切片中的三分支分离平凡链环。由命题 2.14，沿裤子曲面各边界分支的多重扭转属于 $\mathcal{E}_\partial(B^4, \Sigma_g^1)$。

根据管状同痕（图 1），沿 a_k, b_k 的每个德恩扭转的平方都属于 $\mathcal{E}_\partial(B^4, \Sigma_g^1)$ 。由命题 2.14，可得 $T_\Delta \in \mathcal{E}_\partial(B^4, \Sigma_g^1)$ 。由于互不相交的扭转彼此交换，因此 $\pi_1(UT\Sigma_g)$ 的一个生成集包含于 $\mathcal{E}_\partial(B^4, \Sigma_g^1)$ 中。 □

3. Framed and Spin mapping class groups

3.1. 框架。 回顾一下，流形的框架 是其切丛的一种平凡化。设$\Sigma = \Sigma_g^b$ 为一个亏格为 g 且有 $b \geq 1$ 个边界分支的紧致定向曲面。固定一个框架

$\phi\colon T\Sigma \cong \Sigma \times \mathbb{R}^2$。令 $\mathcal{S}(\Sigma)$表示 Σ上简单闭曲线的定向同痕类集合。框架 ϕ 确定一个绕数函数 （仍记为） $\phi\colon \mathcal{S}(\Sigma) \to \mathbb{Z}$，定义如下：

$$\phi(\gamma) = \deg(\phi \circ \vec{\gamma} : S^1 \to \mathbb{R}^2 - \{0\}) \in \mathbb{Z}.$$

此处 $\vec{\gamma}$是 γ的前向速度向量场。绕数函数仅依赖于标架同痕类。我们滥用术语，将绕数函数与其各自的框架等同。由于 Σ 是定向的，我们经常借助处处非零向量场来指定标架同痕类。绕数函数满足 Humphries-Johnson 在 [HJ89]中所建立的下列基本性质。

命题 3.1. 对于带标架曲面(Σ, ϕ)，函数 $\phi\colon \mathcal{S}(\Sigma) \to \mathbb{Z}$ 满足

(a)（扭转线性）对任意 a，$b \in \mathcal{S}(\Sigma)$，

$$\phi(T_a(b)) = \phi(b) + \langle b, a\rangle \phi(a)$$

其中 $\langle -, -\rangle\colon H_1(\Sigma;\mathbb{Z}) \times H_1(\Sigma;\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ 表示定向交数配对。

(b)（同调相干性）设 $S \subset \Sigma$ 是一个子曲面，其边界分支为 c_1，……，c_k，且这些边界分支定向为使 S 位于其左侧。则

$$\sum_{i=1}^{k} \phi(c_k) = \chi(S)$$

其中 $\chi(S)$ 表示 S 的欧拉示性数。

曲面的框架 可以延拓至其边界的一次稳定化上。具体而言，我们有 e

引理 3.2 ([BS25]中的引理 3.20。设 (Σ, ϕ) 是一个带标架曲面。设 Σ^+ 是由 Σ 沿 $\partial\Sigma$附加一个 *1*-柄得到的曲面。固定 $w \in \mathbb{Z}$。设 $c \subset \Sigma^+$ 是一条曲线，使得 $c \cap \Sigma$ 是一条单弧。那么存在唯一的 ϕ^+ 的标架同痕类 Σ^+，它延拓了 ϕ，并满足$\phi^+(c) = w \in \mathbb{Z}$。

带框架映射类群。令 $\phi : \mathcal{S}(\Sigma) \to \mathbb{Z}$ 为 Σ的一个框架。令 Mod(Σ) 通过对相应绕数函数作拉回，作用于框架的（同痕类）集合上。具体而言，对于 $x \in \mathcal{S}(\Sigma)$，我们定义 $(f \cdot \phi)(x) = \phi(f^{-1}(x))$。

定义 3.3。设 (Σ, ϕ) 是一个带标架曲面。ϕ 的稳定子记作

$$\mathrm{Mod}(\Sigma)[\phi] = \{f \in \mathrm{Mod}(\Sigma) \mid (f \cdot \phi) = \phi\}.$$

我们称 Mod(Σ)[ϕ]为一个带框架映射类群。

继Calderon-SalterCS21], 之后，我们列出一些关于带框架映射类群结构性质的基础结果，供后文使用。

定义 3.4。设 (Σ, ϕ) 是一个带标架曲面。若非分离简单闭曲线 $\gamma \subset \Sigma$ 满足 $\phi(\gamma) = 0$，则称其为可容许。

根据扭 转线性，若 $\gamma \subset \Sigma$ 是可容许的，则 $T_\gamma \in$Mod(Σ)[ϕ]。可容许子群定义为 as

$$\mathcal{T}_\phi := \langle T_\gamma \mid \gamma \text{ admissible}\rangle \leq \mathrm{Mod}(\Sigma)[\phi].$$

一个基础性结果是

定理 3.5 ([CS23]中的命题 5.11。对于带标架曲面 (Σ_g^b, ϕ)，其中 $g \geq 5$ 且 $b \geq 1$，有

$$\mathrm{Mod}(\Sigma_g^b)[\phi] = \mathcal{T}_\phi.$$

我们记录以下几个带标架换坐标原理的实例（它是[CS23，命题 2.15]的推论）。

引理 3.6。设(Σ, ϕ) 是一个带标架曲面。设 α 和 β 是两条非分离简单闭曲线，满足 $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$。那么存在 $f \in \mathrm{Mod}(\Sigma)[\phi]$，使得 $f(\alpha) = \beta$。

引理 3.7。设 (Σ, ϕ) 是一个带标架曲面。设 $\alpha \subset \Sigma$ 是一条非分离简单闭曲线。那么存在一条可容许曲线 $\beta \subset \Sigma$，它与 α几何对偶，即$i(\alpha, \beta) = |\alpha \cap \beta| = 1$。

本文中发挥基础性作用的一个结果，是关于带框架映射类群的稳定化引理。

引理 3.8 ([CS23]中的引理 5.13)。 设 $(\Sigma,\ \phi)$ 是一个带标架曲面。设 $S \subset \Sigma$ 是一个亏格至少为 5 的子曲面，且 $a \subset \Sigma$ 是一条可容许曲线，使得 $a \cap S$ 是一条单弧。设 S^+ 是 $S \cup a$的一个正则邻域。那么

$$\mathrm{Mod}(S^+)[\phi] = \langle \mathrm{Mod}(S)[\phi], T_a \rangle.$$

3.2. $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ **绕数函数。** 回忆一下， $\mathcal{S}(\Sigma)$ 表示 Σ 上简单闭曲线的定向同痕类集合。

定义 3.9。 一个 $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$绕数函数 ψ 定义在 Σ上，是一个满足以下条件的函数

$$\psi : \mathcal{S}(\Sigma) \to \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$$

满足模 r 意义下的扭转线性和同调相干性(参见命题 3.1)。

注 3.10。 作为同调相干性的推论，绕数函数满足可逆性。对于 $c \in \mathcal{S}(\Sigma)$，令 $c \in \mathcal{S}(\Sigma)$ 表示取相反定向的 c 。那么 $\psi(c) = -\bar{\psi}(c) \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$。

例 3.11. 可按如下方式构造 $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ 绕数函数 [CS23，定义 2.6]。考虑一个带标架曲面（Σ, ϕ）。令 Σ 表示通过用闭圆盘封帽边界分支 Δ_1、……、 Δ_n 而从 Σ 得到的曲面（注意， Σ 仍可能有边界）。定向每个分支 Δ_k ，使得 Σ 位于左侧。将 Σ 上的一条曲线同痕变形，使其穿过以 Δ_k 为边界的圆盘，这会使 ϕ-框架改变 $\phi(\Delta_k) + 1$（同调相干性）。令 $r =$ 为 $\gcd(\phi(\Delta_1) + 1, \ldots\ldots, \phi(\Delta_n) + 1)$，并考虑由 $\mathcal{S}(\Sigma) \to \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ 定义的 ϕ

$$\bar{\phi}(\gamma) = \phi(\gamma) \mod r.$$

我们称绕数函数 ϕ 是将 ϕ 对 r取模后经约化得到的。

定义 3.12。 非分离简单闭曲线 $\gamma \subset \Sigma$ 在 ψ 下是可容许的： $\mathcal{S}(\Sigma) \to \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$，若 $\psi(\gamma) = 0 \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$。

与带框情形一样，我们定义可容许子群

$$\mathcal{T}_\psi = \langle T_\gamma \,|\, \gamma \subset \Sigma \ \ \psi - \text{admissible} \rangle.$$

……的集合 $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$绕数函数通过拉回作用承载映射类群的作用 k.

定义 3.13。 $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$绕数函数 ψ 在 Σ 上的稳定子记作

$$\mathrm{Mod}(\Sigma)[\psi] = \{ f \in \mathrm{Mod}(\Sigma) \,|\, (f \cdot \psi) = \psi \}.$$

注 3.14。 绕数函数的稳定子称为 $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ 绕数函数的*r*-自旋映射类群。这一术语源于 $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ 绕数函数与*r*-自旋结构之间存在双射对应，见 Σ [BS25，命题 3。6]。设 $UT\Sigma \to \Sigma$ 为 Σ的单位切丛。[6] 一个 r-自旋结构在 Σ上是一个上同调类，属于 $H^1(UT\Sigma;\ \mathbb{Z}/r\mathbb{Z})$，它将值 $1 \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ 赋给正向定向纤维的同调类。

对于闭曲面，我们有定理 3.5的一个类似结果。

定理3.15 （命题5.1，见 [CS21]）。 假设 Σ 是闭的且亏格为 g（Σ） ≥ 3。设ψ 是一个 $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ 绕数函数，定义在 Σ上。则

$$\mathrm{Mod}(\Sigma)[\psi] = \mathcal{T}_\psi.$$

二次型与 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ **绕数函数。**在后文中，我们需要在带边界曲面上的二次型与绕数函数之间进行转换。遵循[Joh80] 以及 [RW14], 的第 2.3 节，经计算可得

[6]相对于一个辅助黎曼度量。

命题 3.16. 绕数函数 ψ ： $\mathcal{S}$（Σ） $\to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 定义二次型q_ψ： H_1（Σ； $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$） $\to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，其要求为

$$q_\psi(\gamma) = \psi(\gamma) + 1 \mod 2$$

对于 $\gamma \in \mathcal{S}$（Σ）。反过来， H_1（Σ； $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$）上的二次型按照同一公式定义一个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 绕数函数。此外， H_1（Σ； $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$）上的二次型由其在 H_1（Σ； $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$）的生成集上的取值唯一确定。

注3.17。在存在二次型 q： $H_1(\Sigma;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的情况下，非分离简单闭曲线 $\gamma \subset \Sigma$ 称为可容许，若 $q(\gamma) = 1$ 模 2。

4. (Spin) Flexible Surfaces in $\mathbb{C}P^2$ and $S^2 \times S^2$

我们首先按照 [Fer25]，考察一族带标架的塞弗特曲面。通过与一个亏格足够大的无结曲面作稳定化，我们运用第 3 节中回顾的归纳技巧证明引理 4.6。由此得到定理A。

齐次辫子闭包的塞弗特曲面。回顾一下， n 股辫子 β 可以表示为由 n 个生成元 σ_1、…、σ_{n-1}构成的一个字母串，其中字母 σ_i 由第 $(i+1)$ 股与第 i 股之间的一个上交叉构成。

定义 4.1 ([Sta78])。 如果一个词 $\beta = \sigma_{\iota_1}^{\varepsilon_1} \cdots \sigma_{\iota_k}^{\varepsilon_k}, \varepsilon_i = \pm 1$，则称其为 齐次 ，当且仅当每个字母 σ_i 至少出现一次，并且同一个字母的所有出现次数 σ_i 都相同。

按照 Stallings [Sta78], 构造塞弗特曲面 F_β： 通过叠放一组 β 圆盘，并用半扭带连接相邻的圆盘，从而得到其闭包。参见图 4。我们倾向于在带中使用半卷曲。我们的约定是，正字母对应向下的右卷曲，负字母对应向下的左卷曲。

备注 4.2。 对于齐次辫字 β, F_β 是 纤维化曲面 ，位于 S^3中。事实上， F_β 是通过拼接一系列正/负 *Hopf*带得到的（详情参见 [Sta78] ）。

连接到同一对圆盘上的任意一对相邻带，都通过在圆盘内用简单弧连接带的核，从而在 F_β 上确定一条简单闭曲线。我们将所有此类简单闭曲线（同痕类）构成的有限集记作 $\mathcal{C}_{F_\beta}$。参见图 4。我们称 $\mathcal{C}_{F_\beta}$ 为辫子词组合 在 F_β 上。

定义 4.3 ([Fer25])。 定义

$$\mathcal{T}_{\mathcal{C}_{F_\beta}} = \langle T_\gamma \,|\, \gamma \in \mathcal{C}_{F_\beta} \rangle.$$

我们将$\mathcal{T}_{\mathcal{C}_{F_\beta}}$ 称为辫子词 β的几何单值群。

按照图 $\mathcal{C}_{F_\beta}$ 4 所示，为其中的曲线定向。由于4， β 是齐次的，因此 $\mathcal{C}_{F_\beta}$ 中的每条曲线都是 Hopf 带曲线（定义2.12）。根据构造，曲面 F_β 变形收缩到 $\mathcal{C}_{F_\beta}$中的曲线之并。

为曲面 F_β赋予框架。按照 [Fer25], ， 我们通过图 $F_\beta \subset S^3$ 4 所示的处处非零向量场为曲面赋予框架4。令

$$\phi_\beta : \mathcal{S}(F_\beta) \to \mathbb{Z}$$

表示定义在 F_β上简单闭曲线的定向同痕类集合上的相应绕数函数。所构造的向量场与 1-柄的核平行，因此绕数 ϕ_β 的贡献仅发生在 0-把手中。考虑一条定向简单闭曲线 $\gamma \subset F_\beta$。令 a_R^γ （分别为 a_L^γ ）表示 γ 在 F_β的 0-把手中的“向右”（分别为“向左”）弧段数。我们计算

$$\phi_\beta(\gamma) = \frac{1}{2}(a_L^\gamma - a_R^\gamma).$$

因此， $\mathcal{C}_{F_\beta}$ 中的任意曲线在该框架下都是可容许的，并且存在如下序列 e

$$\mathcal{T}_{\mathcal{C}_{F_\beta}} \le \mathcal{T}_{\phi_\beta} \le \mathrm{Mod}(F_\beta)[\phi_\beta].$$

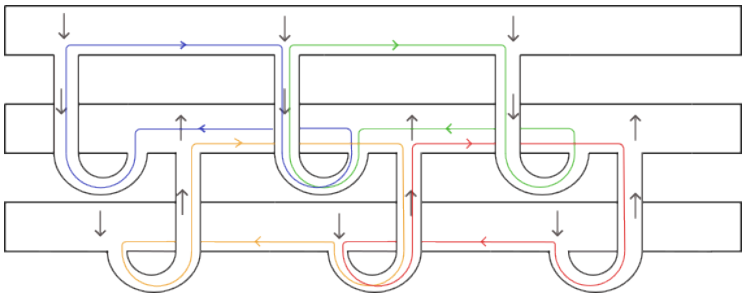


图 4。 与词 $\beta = (\sigma_1\sigma_2^{-1})^3$ 相关联的带标架塞弗特曲面 F_β，以及由霍普夫带曲线组成的辫子词组合。

Ferretti 证明 [Fer25，定理 2] 对于足够一般的一组正辫[7] β，若其闭包是一个纽结，则上述关系构成一系列等式，即

$$\mathcal{T}_{\mathcal{C}_{F_\beta}} = \mathrm{Mod}(F_\beta)[\phi_\beta].$$

推论 4.4。 令 F'_β 表示将 F_β 的内部 *Push* B^4到 ϕ_β 的内部所得的结果。将框架 ϕ'_β 拉回为 F'_β 上的框架。于是，对于 β，若 [Fer25]的定理 *2* 适用，则有

$$\mathrm{Mod}(F'_\beta)[\phi'_\beta] \leq \mathcal{E}_\partial(B^4, F'_\beta).$$

我们使用推论 4.4 来证明定理 B。

4.1. 亏格为 F_β 的稳定化上的链接形式的整数提升。 令 $\Sigma_g \subset S^3 \backslash F_\beta$ 为亏格 g 把手体的边界。考虑沿光滑嵌入圆盘 $D_0 \subset F_\beta$将 F_β 与 Σ_g 进行标准内部连通和。我们假设圆盘 D_0 位于 F_β 的一个 0-把手内，该 0-把手的边界上至少附着有一对带（若不存在这样的 0-把手，则曲面 F_β 为一个圆盘）。将所得曲面记为

$$S_{\beta,g} = F_\beta \# \Sigma_g \subset S^3.$$

令 $\widehat{F_\beta} = F_\beta - \mathrm{int}(D_0) \subset S_{\beta,g}$ 且 $\widehat{\Sigma_g} = \Sigma_g - \mathrm{int}(D_0) \subset S_{\beta,g}$。框架 ϕ_β 在 F_β 上的限制到子曲面 $\widehat{F_\beta}$，仍记作 ϕ_β。此框架无法延拓到曲面 $S_{\beta,g}$上。事实上，绕数函数满足同调相干性。在 F_β 上，曲线 ∂D_0 围成一个圆盘；而在 $S_{\beta,g}$ 上，它围成一个亏格为 g的曲面。

我们通过在无结的部分 $\widehat{\Sigma_g}$内部移去一个小圆盘 D_1 来绕过这一障碍。记

$$P_{\beta,g} = S_{\beta,g} - \mathrm{int}(D_1).$$

根据引理 3.2，框架 ϕ_β 现在可以延拓为 P_β上的一个框架 ϕ_β^+，g 借助曲线链 $\mathcal{U}_g = \{c_1, \ldots, c_{2g-1}\} \subset \widehat{\Sigma}_g$和图 5 中所示的曲线 $\mu \subset S_\beta$，g令每个 $k \in \{1, \ldots, 2g-1\}$都满足 $\phi_\beta^+(\mu) = 0$ 以及$\phi_\beta^+(c_k) = 1$。曲线 μ在同调上等于曲线 $\gamma \subset \mathcal{C}_{\widehat{F_\beta}}$与 $\widehat{\Sigma_g}$中的一条子午线之和。此延拓的关键性质是，所得框架是塞弗特曲面 $S_{\beta,g}$上链接形式的一个整数提升。现在考虑曲面 $S_{\beta,g}$ 上由框架 ϕ_β^+ 诱导的绕数函数（如例 3.11 所示）。

今后省略对 β 和 g 的记号依赖，记作 $S = S_{\beta,g}$、$P = P_{\beta,g}$ 和 $F = F_\beta$。框架 ϕ^+ 诱导出一个绕数函数

$$\psi : \mathcal{S}(S) \to \mathbb{Z}/2g\mathbb{Z}$$

在 S 上。为此，将曲线 ∂D_0 和 ∂D_1 定向，使得 Σ_g 位于左侧。由同调相干性，

$$\phi^+(\partial D_1) + \phi^+(\partial D_0) = 2 - 2g - 2 = -2g$$

因此 $\phi^+(\partial D_1) + 1 = -2g$。令 $\bar{\psi} : \mathcal{S}(S) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 表示 ψ的模 2 约化；特别地，对于 P中的曲线，$\bar{\psi} = \phi^+$ 模 2。回想一下，$S = F \# \Sigma_g \subset S^3$ 是链环 ∂F的塞弗特曲面，

[7]除有限多个外，所有非 A_n 类型的素正辫。

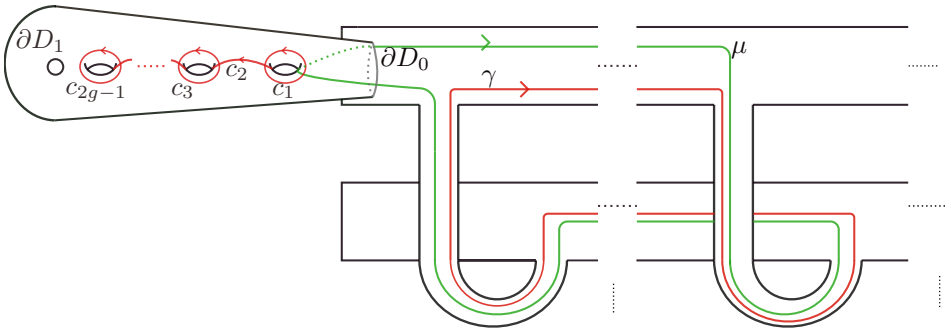


图 5. 我们沿着曲线链 $\{\mu, c_1, \ldots, c_{2g-1}\}$.稳定化 F_β

θ_S： $H_1(S;\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 表示定义在 S上的模 2 环绕形式，而 $\psi+1$： $\overline{H}_1(S;\ \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$定义了一个二次型（命题3.16）。

命题 4.5. 二次型 $\psi+1$ 与 $H_1(S;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$上的链接形式 θ_S 一致。具体来说

$$\overline{\psi}(\gamma)+1 = \theta_S(\gamma) \mod 2$$

对于一条简单闭曲线 $\gamma \subset S$。

证明. 根据命题 3.16，只需证明二次型 $\psi+1$ 和 θ_S 在 $H_1(S;\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$的一组生成集上相等。集合 $\mathcal{C}_F \cup \{\mu\} \cup \mathcal{U}_g$是 $H_1(S;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$的一组基。中的每条曲线 $\mathcal{C}_F$ 都是霍普夫带曲线，其 ϕ^+-框架为零。曲线 μ 是塞弗特曲面 S 上的一条霍普夫带曲线，其 ϕ^+-框架为零。 中的每条曲线 $\mathcal{U}_g$ 的自环绕数为零，且其ϕ^+-框架为一。 □

沿边界延拓可容许扭转。 令 $S' \subset B^4$ 由将 S 的内部推入 B^4的内部而得到。为了沿子曲面提升微分同胚并以恒等映射延拓，采用一个显式模型会很方便。令 $S^3 \times [0,1]$ 为围绕 $\partial B^4 = S^3 \times \{0\}$的领圈，并设

$$S' = \partial F \times [0,1/4] \cup \widehat{F} \times \{1/4\} \cup \partial D_0 \times [1/4,1/2] \cup \widehat{\Sigma}_g \times \{1/2\}.$$

我们略去 S 与 S' 之间的识别，因此从现在起，将 S 上的所有数据拉回到曲面S'上。将子曲面 N 从 S 拉回到 S' 后，记作 N'；曲线及其构形也遵循同一规则。回顾一下， $H_1(S;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 上的链接形式拉回后得到 Rochlin 二次型 $q_{S'}$： $H_1(S';\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ （命题 2.10）。现在，我们利用曲面 S'的无结部分，结合标架映射类群理论背后的归纳框架，构造更多可延拓的映射类，属于 $\mathrm{Mod}(S')$。

引理 4.6. 固定 $g \geq 5$ 和一个齐次辫字 β。设 $\gamma \subset S'_{\beta,g}$ 是满足 $q_{S'_{\beta,g}}(\gamma) = 1$的非分离简单闭曲线。那么

$$T_\gamma \in \mathcal{E}_\partial(B^4, S'_{\beta,g}).$$

证明。 回想一下，我们省略了表示对 β 和 g的依赖关系的下标。如有必要，经过同痕，我们可以假设 $\gamma \subset P'$。由命题 4.5 和 2.10,

$$\phi^+ = q_{S'} + 1 \mod 2$$

在 P' 上。定向 γ 后， $\phi^+(\gamma) = 2k$ ，其中某个 $k \in \mathbb{Z}$。设 $p_{D'_1} : \mathrm{Mod}(P') \to \mathrm{Mod}(S')$ 是通过在闭二维圆盘 D'_1上作恒等延拓所诱导的同态。我们断言

$$p_{D'_1}(\mathrm{Mod}(P')[\phi^+]) \leq \mathcal{E}_\partial(B^4, S').$$

令 $V' = P' \cap \widehat{\Sigma}_g \times \{1/2\} \subset S^3 \times \{1/2\}$。曲面 V' 是我们的亏格 g 平凡结，具有两个标准边界分支。曲面 P' 通过沿着 V' 进行稳定化而得到 ϕ^+-可容许构型 $\mathcal{Z}' = \{\mu'\} \cup \mathcal{C}'_F \backslash \{\gamma'\}$。由于 V' 的亏格至少为 5，由引理3.8 可知

$$\mathrm{Mod}(P')[\phi^+] = \langle \mathrm{Mod}(V')[\phi^+],\ T_c : c \in \mathcal{Z}' \rangle.$$

每条曲线 $c\in\mathcal{Z}'$（在对 S' 作相对 $\partial S'$的同痕后）都是 S^3 领圈的一个切片中的 Hopf带曲线，因此 $T_c\in\mathcal{E}_\partial(B^4,\ S')$。由定理3.5，$\mathrm{Mod}(V')[\phi^+]$ 由容许曲线上的德恩扭转生成。固定一条容许曲线 $\zeta\subset V'$。由命题4.5可得

$$q_{S'}(\zeta)=\mathrm{lk}(\zeta,\zeta^+)=1\mod 2,$$

在 $S^3\times\{1/2\}$中计算的链接数。根据命题 2.15，$T_\zeta\in\mathcal{E}_\partial(B^4,\ S')$。

固定一条非分离简单闭曲线 $\delta\subset\widehat{\Sigma}_g\times\{1/2\}\subset S'$，使得 $\phi^+(\delta)=2k$。根据带框坐标变换原理（命题 5.4），存在 $f\in\mathrm{Mod}(P')[\phi^+]$，使得 $f(\gamma)=\delta$。于是

$$T_\delta=fT_\gamma f^{-1},$$

并且根据 $\widehat{\Sigma}_g\times\{1/2\}$ 关于边界的自旋柔性（命题 2.15），有 $T_\delta\in\mathcal{E}_\partial(B^4,\ S')$ 和 $T_\gamma\in\mathcal{E}_\partial(B^4,\ S')$。□

现在我们在 $\mathbb{C}P^2$ 与 $S^2\times S^2$ 中构造（自旋）柔性代表。

4.2. 中的曲面 $\mathbb{C}P^2$ 和 $S^2\times S^2$。使用流形 $\mathbb{C}P^2$和 $S^2\times S^2$的标准把手体描述——分别移去一个四维球后，$\mathbb{C}P^2$可通过沿着 ∂B^4中一个 $+1$框架的平凡结附加一个 2-柄得到，而 $S^2\times S^2$ 则可通过沿着 ∂B^4中的一个 0 框架霍普链环附加一对 2-柄得到。

设 $\mathbb{C}P^1\subset\mathbb{C}P^2$为一条直线。回顾一下，类 $d[\mathbb{C}P^1]\in H_2(\mathbb{C}P^2;\mathbb{Z})$的一个代表元可按如下方式构造（详见 [GS99] ）。令 $B^4\subset\mathbb{C}P^2$ 为 0-把手。在 ∂B^4 中取附着圆的 d 个平行副本，该附着圆对应于 2-柄；它们构成一个定向的（d,d）环面链环，我们将其表示为辫子 $\beta_d=(\sigma_1\cdots\sigma_{d-1})^d\in B_d$的闭包。我们用 d 个互不相交的二维圆盘封闭在子节 4.1中构造的、向内推入的塞弗特曲面 $S'_{\beta_d,g}$；这些圆盘是 2-柄核的平行副本。由此得到闭定向曲面 $Z_d=Z_{d,g}\subset\mathbb{C}P^2$，其亏格为 $[Z_d]=d[\mathbb{C}P^1]\in H_2(\mathbb{C}P^2;\mathbb{Z})$，且为 $g(Z_d)=\frac{1}{2}(|d|-1)(|d|-2)+g$.

固定 $x\in S^2$。考虑

$$(n,m)=n\left[\{x\}\times S^2\right]+m\left[S^2\times\{x\}\right]\in H_2(S^2\times S^2;\mathbb{Z}),$$

n 个竖直球面和 m 个水平球面的类。如果两个系数都严格为正，我们称类 (n,m) 为正类；如果 n 或 m 之一严格为负，则称其为负类。注意，如果 n或 m 之一为零，该类就有一个亏格零代表元，可通过将一组互不相交的 2-球面用管道连接起来得到。

我们先为正类构造代表元。固定 $n,m>0$。在 0-把手的边界上，取 n 个互相平行的竖直附着圆和 m 个互相平行的水平附着圆，它们构成由$\beta_{n,m}$在 $n+m$股辫子上的正辫的闭包。令 $Z_{n,m}$，$_g=Z_{n,m}\subset S^2\times S^2$为以下闭曲面：用 2-柄核的平行副本封帽$S'_{\beta_n,m,g}$（第 4.1 小节）后得到的曲面。曲面 $S'_{\beta_n,m,g}$的亏格为 $(n-1)(m-1)+g$，且 $[Z_{n,m}]=(n,m)\in H_2(S^2\times S^2;\mathbb{Z})$。对于负类，我们将 $S^2\times S^2$的微分同胚作用于曲面$Z_{n,m}$，这些微分同胚在 $S^2\times S^2$ 的相关因子上反转定向。按照约定，我们省略下标 g。

备注4.7。根据构造，在 $H_2(S^2\times S^2;\mathbb{Z})$ 中表示负类的曲面具有如下形式：对于微分同胚 φ：$S^2\times S^2\to S^2\times S^2$ and $n,\ m>0$，其形式为 $\varphi(Z_{n,\ m})$。特别地，如果 $Z_{n,\ m}$ 是（自旋）柔性的，那么 $\varphi(Z_{n,\ m})$ 也是如此。

柔性。回顾一下，S^3 中的链环称为真，如果任一分支与其余分支的链接数为偶数。在我们的例子中，柔性源于 0-把手边界上的链环不是真（参见图6）。对于塞弗特曲面$S\subset S^3$，回顾 θ_S：$H_1(S;\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\to\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 表示 S上的模二链接形式。

命题4.8。设 $\Sigma\subset M^4$是一个4-流形 M中的闭曲面。假设存在一个四维球 $B^4\subset M$，使得 $\Sigma\cap B^4=\Sigma\cap\partial B^4=S$是 S^3中一个非适当链环的塞弗特曲面。假设 $\Sigma\backslash int(S)$ 是由闭2-圆盘组成的集合。那么存在 ∂S 的一个分支 Δ，使简单闭曲线 $\gamma\subset S$ 穿过 Δ 所围成的圆盘进行同痕变形后，得到一条简单闭曲线 $\widetilde{\gamma}\subset S$，满足

$$\theta_S(\widetilde{\gamma})=\theta_S(\gamma)+1\mod 2.$$

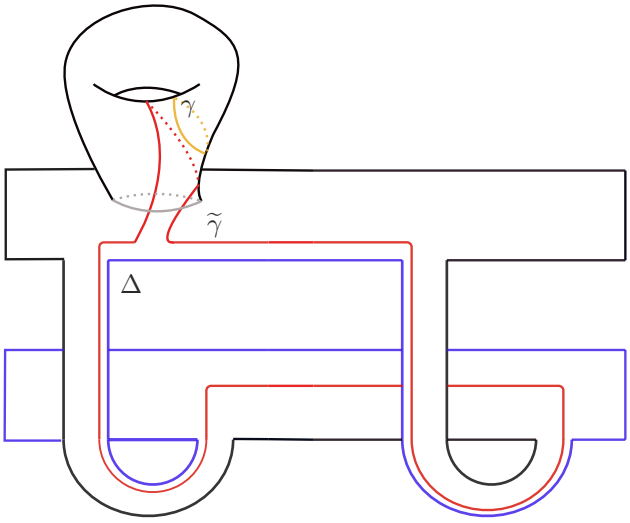


图6. 考虑 $S_{\beta_2,\ 1} \subset S^3$，Hopf带与平凡环面的连通和，是 $Z_2 \subset \mathbb{C}P^2$的一个子曲面。根据构造，Hopf带的边界分支在2-柄中围成圆盘。将 γ滑过其中一个圆盘，可得到曲线 $\widetilde{\gamma}$位于 $S_{\beta_2,\ 1}$，其中 $\mathrm{lk}(\gamma,\ \gamma^+) = 0$且 $\mathrm{lk}(\widetilde{\gamma},\ \widetilde{\gamma}^+) = 1$模2（事实上，$\widetilde{\gamma}$是一条霍普夫带曲线）。将环面上的一对标准对偶曲线滑过2-柄中的圆盘，可得到一对对偶Hopf带曲线。应用命题 2.11 可得 Z_2.具有柔性

证明。 根据假设，∂S 不是适当的。令 Δ表示 ∂S 的一个分支，该分支与其余分支 $\partial S - \Delta$ 的链接数为奇数。那么

$$0 = \mathrm{lk}(\partial S, \Delta^+) = \mathrm{lk}(\partial S - \Delta, \Delta^+) + \mathrm{lk}(\Delta, \Delta^+) = \mathrm{lk}(\partial S - \Delta, \Delta) + \mathrm{lk}(\Delta, \Delta^+).$$

因此，$\theta_S(\Delta) = \mathrm{lk}(\Delta,\ \Delta^+)$是奇数。根据构造，曲线 $\gamma \cup \widetilde{\gamma} \cup \Delta$ 在 S 上围成一个裤子曲面，因此

$$\theta_S(\gamma) + \theta_S(\widetilde{\gamma}) + \theta_S(\Delta) = 0 \mod 2.$$

因此 $\theta_S(\widetilde{\gamma}) = \theta_S(\gamma) + 1$ 模 2。 □

现在我们可以证明

定理A. 设 $M = \mathbb{C}P^2$或 $S^2 \times S^2$。固定 $x \in H_2(M;\ \mathbb{Z})$。若 x是特征的，则 x有一个自旋柔性代表元；否则，x 有一个柔性代表。

证明. 若 x 是平凡类，我们可以使用一个亏格零代表元。若 $M = S^2 \times S^2$，只需处理正类（注 4.7）。给定 $x \in H_2(M;\ \mathbb{Z})$，令 $Z_x \subset M^4$为第4.2节中构造的 x 的一个代表元，它具有 $Z_x \cap B^4 = S'_{\beta_x,\ g}$和 $g \geq 5$。我们先假设 x 是特征的。于是 $\mathcal{E}(M^4, Z_x) \leq \mathrm{Mod}(Z_x)[q_{Z_x}]$，其中 $q_{Z_x}\colon H_1(Z_x;\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$是 Rochlin 二次型。回忆一下，简单闭曲线 $\gamma \subset Z_x$ 是可容许的，当且仅当它是非分离的，并且$q_{Z_x}(\gamma) = 1$ （注 3.17）。由定理3.15和命题 3.16，

$$\mathrm{Mod}(Z_x)[q_{Z_x}] = \langle T_\gamma \,|\, \gamma \subset Z_x \text{ admissible} \rangle.$$

固定一条可容许曲线 $\gamma \subset Z_x$。必要时对 γ 作同痕后，我们可以假设 $\gamma \subset S'_{\beta_x,\ g}$。于是

$$q_{S'_{\beta_x,g}}(\gamma) = q_{Z_x}(\gamma) = 1.$$

根据引理 题 4.6，$T_\gamma \in \mathcal{E}_\partial(B^4,\ S'_{\beta_x,\ g})$。因此 $T_\gamma \in \mathcal{E}(M,\ Z_x)$ 且 $\mathcal{E}(M,\ Z_x) = \mathrm{Mod}(Z_x)[q_{Z_x}]$。

现在假设 x 不是特征元。为了证明 $\mathcal{E}(M,\ Z_x) = \mathrm{Mod}(Z_x)$，根据引理 4.6，只需证明：若 $\gamma \subset S'_{\beta_x,\ g}$是一条非分离简单闭曲线，且$q_{S'_{\beta_x,\ g}}(\gamma) = 0$，则 $T_\gamma \in \mathcal{E}(M,\ Z_x)$。显然，链环 $\partial S'_{\beta_x,\ g}$不是本原的。根据命题4.8，存在 $S'_{\beta_x,\ g}$ 的一个边界分支 Δ，使得将 γ 同痕变形穿过其所围成的圆盘 Δ后，得到一条曲线 $\widetilde{\gamma} \subset S'_{\beta_x,\ g}$，满足

$$q_{S'_{\beta_x,g}}(\widetilde{\gamma}) = 1.$$

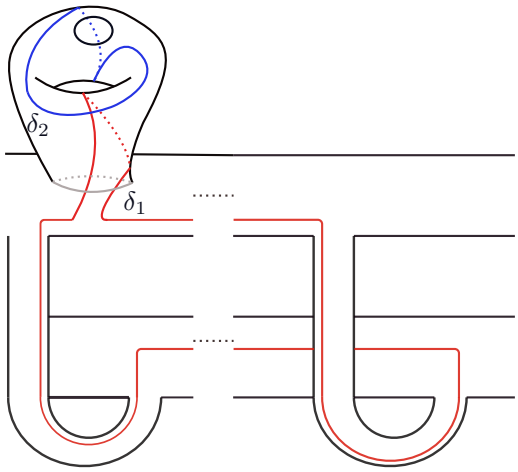


图7. 框架 ϕ_{β_d} 在 F_{β_d} 上被延拓到曲面 $P_{\beta_d,\,1} = S_{\beta_d,\,1} - \mathrm{int}(D_1)$，方法是将曲线 δ_1，δ_2 声明为可容许（绕数为零）。 δ_1， δ_2 二者均为霍普带曲线。

根据引理 4.6， $T_{\tilde{\gamma}} \in \mathcal{E}_\partial(B^4,\ S'_{\beta_x,\,g})$。由于 γ和 $\tilde{\gamma}$在 Z_x上同痕， $T_\gamma = T_{\tilde{\gamma}} \in \mathcal{E}(M,\ Z_x)$。由于 Mod($Z_x$) 由非分离简单闭曲线上的德恩扭转生成， Z_x 是一个柔性曲面。□

5. A Single stabilization for smooth plane curves

设 $X_d \subset \mathbb{C}P^2$ 为次数 d的光滑平面曲线。回想任意两条这样的曲线在 $\mathbb{C}P^2$中均光滑同痕。同样，我们考虑 $\mathbb{C}P^2$ 的标准柄分解，带有0-把手$B^4 \subset \mathbb{C}P^2$。按照 [AK80] 与 [GS99],，在同痕意义下，我们可以假设 $X_d \cap B^4 = X_d \cap \partial B^4 = F_{\beta_d}$，其中 $\beta_d = (\sigma_1 \cdots \sigma_{d-1})^{\,d}$，并且 F_{β_d}是 β_d的闭包的塞弗特曲面，该曲面在第4节中构造。此外， $X_d = F_{\beta_d} \cup D$ ，其中 D 是一组互不相交的2-圆盘（2-柄之核的平行副本）。

鉴于对光滑平面曲线的这一描述，用于证明定理 A的方法表明，对 X_d 在 S^4 中与一个平凡结进行稳定化，若其亏格至少为 5，则可得到一个（自旋）柔性曲面。现在我们将证明，只需单次稳定化即可；我们先给出适用于次数$d \geq 5$ 的曲线的一般论证，再针对 $d \leq 4$给出一系列专门论证。我们继续采用第4.1小节中确立的记号和约定。

令 $Z_d = X_d \# T \subset \mathbb{C}P^2 \# S^4$ ，其中 $T \subset S^4$ 是一个平凡环面。经过同痕，我们可以假设 $Z_d \cap \partial B^4 = S_{\beta_d,\,1}$ 其中 $S_{\beta_d,\,1} = F_{\beta_d} \# T$。回忆一下，我们在 F_{β_d} 上指定了一个框架 ϕ_{β_d}： $S(F_{\beta_d}) \to \mathbb{Z}$，它在 $F_{\beta_d} = F_{\beta_d} - \mathrm{int}(D_0)$ 上诱导出一个框架，其中 D_0 是连通和 $F_{\beta_d} \# T$的手术圆盘。

注 5.1. 为澄清引言中的若干说明，我们指出，伴随线丛的一个 $(d-3)^{\,rd}$ 次根所导出的绕数函数为 ϕ_d： $\mathcal{S}(X_d) \to \mathbb{Z}/(d-3)$，它位于 $\mathbb{C}P^2$ 中的 X 上（更多细节请参阅 [Sal19]）。框架 ϕ_{β_d} 在 X_d 上诱导出一个 $(d-3)$-自旋结构，该结构与 ϕ_d一致。在这种情况下， $\mathcal{C}_{F_{\beta_d}}$ 由平面曲线 X_d 的节点退化所对应的消失圈构成。我们用不到这些事实，因此省略细节。

回顾， $P_{\beta_d,\,1} = S_{\beta_d,\,1} - \mathrm{int}(D_1)$，其中 D_1 是支撑在环面 T 中的一个闭二维圆盘。我们将框架 ϕ_{β_d} 延拓为 $P_{\beta_d,\,1}$ 上的框架 $\phi^+_{\beta_d}$，规定图 7 中所示的曲线 δ_1， $\delta_2 \subset P$ 为可容许曲线（引理 3.2）。根据构造，这一延拓是塞弗特曲面 $S_{\beta_d,\,1}$上链接形式的一个整数提升。

在第4节中，我们依赖于曲面上一块足够大的无结部分来启动归纳框架（引理 3.8）。这进而给出了可延拓子群的一个下界。我们现在依赖于几何单值群 （辫子 β_d的），并利用 Ferretti 在 [Fer25]中的工作。回顾第 3 节，在塞弗特曲面 $F_{\beta_d} \subset S^3$ 上存在 辫子词组合 $\mathcal{C}_{F_{\beta_d}}$ （一个

填充 霍普带曲线的构型）。辫子 β_d的几何单值群 is

$$\mathcal{T}_{\mathcal{C}_{F_{\beta_d}}} = \langle T_c : c \in \mathcal{C}_{F_\beta} \rangle.$$

引理 5.2. 对于 $d \geq 5$, $\mathrm{Mod}(F_{\beta_d})[\phi_{\beta_d}] = \langle T_c : \ c \in \mathcal{C}_{F_\beta} \rangle$。

证明。此结论源于 Ferretti, 并可由 [Fer25, 定理 2] 结合 [Fer25, 注 5.1]推出。它也可直接由 [Fer25, 定理 2] 如下推出。令 $\nu = (\sigma_1 \cdots \sigma_{d-1})^{d-1}$。则 $(F_\nu, \phi_\nu) \subset (F_{\beta_d}, \phi_{\beta_d})$（带标架曲面的包含映射），且 F_ν是 $(d, d-1)$ 环面纽结的塞弗特曲面。根据 [Fer25, 定理 2], $\mathrm{Mod}(F_\nu)[\phi_\nu] = \langle T_c : c \in \mathcal{C}_{F_\nu} \rangle$。曲面 F_{β_d} 是通过沿 $\mathcal{C}_{F_\beta} \backslash C_{F_\nu}$ 中的容许曲线集合对 F_ν 进行稳定化得到的。由于 F_ν的亏格至少为 5，由引理 3.8 可得 $\mathrm{Mod}(F_\beta)[\phi_\beta] = \langle T_c : \ c \in \mathcal{C}_{F_\beta} \rangle$。□

今后省略所有下标，记作 $F = F_{\beta_d}$， $S = F_{\beta_d} \# T$， $P = P_{\beta_d,\ 1}$ 以及 $\phi^+ = \phi^+_{\beta_d}$。稳定化（引理 3.8）给出

命题 5.3。对于 $d \geq 5$，有 $\mathrm{Mod}(P)[\phi^+] = \langle \mathrm{Mod}(\widehat{F})[\phi], \ T_{\delta_1}, \ T_{\delta_2} \rangle$。

令 $p : \mathrm{Mod}(P) \to \mathrm{Mod}(Z_d)$ 为由按恒等映射延拓所诱导的同态。回忆一下， $Z_d \backslash P$ 是一族圆盘。

命题 5.4。对于所有 $d \geq 5$, $p(\mathrm{Mod}(P)[\phi^+]) \leq \mathcal{E}(\mathbb{C}P^2, \ Z_d)$。

证明。 由命题 5.3, $\mathrm{Mod}(P)[\phi^+] = \langle \mathrm{Mod}(\widehat{F})[\phi], \ T_{\delta_1}, \ T_{\delta_2} \rangle$。由于 δ_1和 δ_2都是霍普夫带曲线，根据命题 2.11，它们在 p下的像属于 $\mathcal{E}(\mathbb{C}P^2, \ Z_d)$。还需证明

$$p(\mathrm{Mod}(\widehat{F})[\phi]) \leq \mathcal{E}(\mathbb{C}P^2, Z_d).$$

^对 F用 D_0 进行封帽，并将映射类通过在 F 上取恒等映射来延拓，由此诱导出一个短正合列

$$1 \to \pi_1(UTF) \to \mathrm{Mod}(\widehat{F}) \to \mathrm{Mod}(F) \to 1,$$

其中 UTF表示 F的单位切丛。若 $\widetilde{\gamma} \in \pi_1(UTF)$在投影 $UTF \to F$下的像为 $\gamma \in \pi_1(F)$（基点位于 D_0），则 $\widetilde{\gamma}$在 Mod($\widehat{F}$) 中的像是多重扭曲 $T_{\gamma_L} T_{\gamma_R}^{-1} T_{\partial D_0}^k$, 其中 $k \in \mathbb{Z}$为某个元素，而 γ_L （分别是 γ_R）是通过将 γ 沿 D_0 向左（分别向右）推得到的。

利用引理 5.2中建立的生成集，我们看到封帽在带框架映射类群层面上是满射的，并且有一个短正合列

$$1 \to \pi_1(UTF) \cap \mathrm{Mod}(\widehat{F})[\phi] \to \mathrm{Mod}(\widehat{F})[\phi] \to \mathrm{Mod}(F)[\phi] \to 1.$$

^群 $\mathrm{Mod}(F)[\phi]$ 由提升 $\mathrm{Mod}(F)[\phi]$ 的一个生成集以及 $\pi_1(UTF) \cap$^$\mathrm{Mod}(F)[\phi]$的一个生成集而生成。引理 5.2给出的 $\mathrm{Mod}(F)[\phi]$ 的生成集由绕 ^的 Hopf带曲线的德恩扭转组成，这些曲线支撑在 F上。接下来只需证明

$$p(\pi_1(UTF) \cap \mathrm{Mod}(\widehat{F})[\phi]) \leq \mathcal{E}(\mathbb{C}P^2, Z_d).$$

事实上，我们证明

$$p(\pi_1(UTF)) \leq \mathcal{E}(\mathbb{C}P^2, Z_d).$$

选取 $\{\gamma_k\}_{k=1}^{n_d}$ 的一个生成集 $\pi_1(F)$，其中由基于 ∂D_0 上一点的简单闭曲线组成，且每条曲线都是 F 上的一条霍普夫带曲线。回顾一下， $\pi_1(UTF)$ 在 Mod($\widehat{F}$) 中的像由 $\mathrm{Push}(\gamma_k) = T_{\gamma_k,L} T_{\gamma_k}^{-1}$, $_R$（其中 $k = 1, \ldots, n_d$）以及 $T_{\partial D_0}$生成。$\gamma_{k,L}$ 和 $\gamma_{k,R}$ 都是霍普夫带曲线，因此 $p_Z(\mathrm{Push}(\gamma_k))$ $\in \mathcal{E}(\mathbb{C}P^2, Z_d)$； 由命题 2.14, $p_Z(T_\Delta) \in \mathcal{E}(\mathbb{C}P^2, Z_d)$。□

现在我们利用曲面 S 上存在压缩曲线这一事实，在 $\mathcal{E}(\mathbb{C}P^2, Z_d)$ 中构造更多可延拓映射类。曲面 X_d上不存在这样的曲线，因为它在其同调类中实现了最小亏格（Thom猜想， [KM94]）。

^**命题 5.5**。 存在一条非分离简单闭曲线 $\alpha \subset F \subset S$，使得 $\phi(\alpha) = \pm 2$且 $p(T_\alpha) \in \mathcal{E}(\mathbb{C}P^2, Z_d)$。

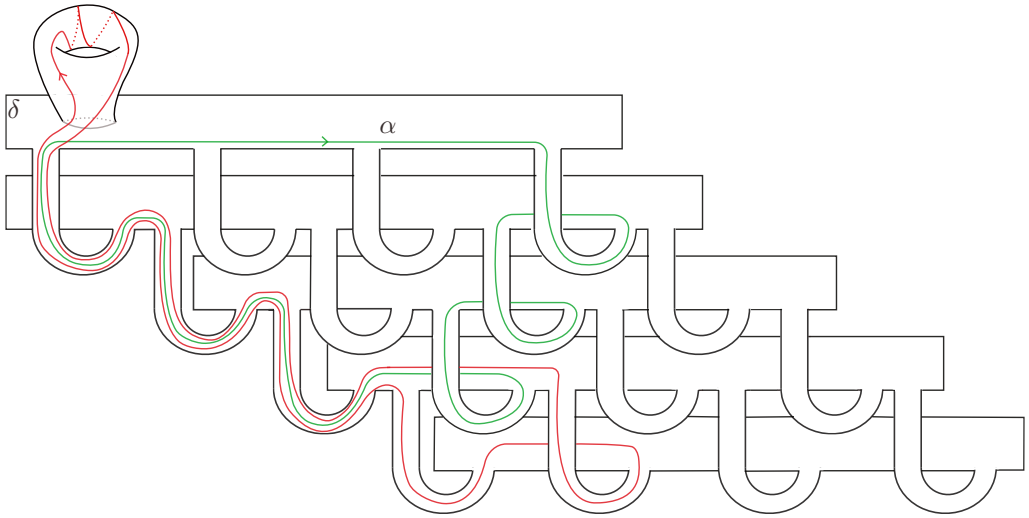


图 8. 如图所示，该计算在$S_{\nu,\ 1}$ 上进行，对于 $\nu = (\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4)^4$, , 它自然是$S_{\beta_d,\ 1}$ 的一个子曲面，对所有 $d \geq 5$均成立。

^证明。考虑图 8 中所示的定向曲线 $\alpha \subset F$ 和 $\delta \subset S$，其中 $\phi(\alpha) = 2$ 且 $\mathrm{lk}(\alpha, \alpha^+) = -3$。曲线 δ 是一个平凡结，且 $\mathrm{lk}(\delta, \delta^+) = +1$，即一条 Hopf带曲线（见定义 2.12）。根据命题2.11， $T_\delta \in \mathcal{E}(\mathbb{C}P^2, Z_d)$。由于 $[T_\delta^{-1}(\alpha)] = [\alpha] + [\delta] \in H_1(F; \mathbb{Z})$，因此

$$\mathrm{lk}(T_\delta^{-1}(\alpha), T_\delta^{-1}(\alpha)^+) = \mathrm{lk}(\alpha, \alpha^+) + \mathrm{lk}(\alpha, \delta^+) + \mathrm{lk}(\delta, \alpha^+) + \mathrm{lk}(\delta, \delta^+) = -3 + 1 + 0 + 1 = -1.$$

显然， $T_\delta^{-1}(\alpha)$是一个平凡结，因此是一条霍普夫带曲线。由命题2.11，可得$T_{T_\delta^{-1}(\alpha)} \in \mathcal{E}(\mathbb{C}P^2, Z_d)$。在 $\mathrm{Mod}(Z_d)$ 中，有

$$T_{T_\delta^{-1}(\alpha)} = T_\delta^{-1} T_\alpha T_\delta,$$

因此， $p(T_\alpha) \in \mathcal{E}(\mathbb{C}P^2, Z_d)$。 □

现在我们使用带框架的坐标变换原理（命题 5.4）来处理任意非分离简单闭曲线。

引理 5.6. 设 $\gamma \subset P \subset Z_d = X_d \# T$ 是一条非分离简单闭曲线，且 $\phi^+(\gamma) = 0$模 2。则 $p(T_\gamma) \in \mathcal{E}(\mathbb{C}P^2, Z_d)$。若 d 为偶，则对于任意非分离简单闭曲线$\delta \subset P$，有 $p(T_\delta) \in \mathcal{E}(\mathbb{C}P^2, Z_d)$。

证明。给 γ 定向，并写作 $\phi^+(\gamma) = 2k$。由命题 5.5，存在一条非分离简单闭曲线 $\alpha \subset \widehat{F} \subset P$，满足 $\phi^+(\alpha) = 2$，且 $p(T_\alpha) \in \mathcal{E}(\mathbb{C}P^2, Z_d)$。令 β 为与 α 几何对偶的可容许曲线（根据引理 3.7 ）。令 $\mu = T_\alpha^k(\beta)$。由扭转线性， $\phi^+(\mu) = 2k$，并且

$$T_\mu = T_\alpha^k T_\beta T_\alpha^{-k}.$$

由命题 5.4， $p(T_\beta) \in \mathcal{E}(\mathbb{C}P^2, Z_d)$，因此 $T_\mu \in \mathcal{E}(\mathbb{C}P^2, Z_d)$。根据 P上的带框架换坐标原理（引理 5.4），存在 $f \in \mathrm{Mod}(P)[\phi^+]$，使得 $f(\mu) = \gamma$。现在$T_\gamma = f T_\mu f^{-1}$，由推论 5.4， $p(f) \in \mathcal{E}(\mathbb{C}P^2, Z_d)$。由此可得 $p(T_\gamma) \in \mathcal{E}(\mathbb{C}P^2, Z_d)$。

现在假设 d 是偶数。根据上述内容，我们可以假设 $\phi^+(\delta) = 1$ 模 2。由命题4.8，我们可以将 δ 在 Z_d 上通过 D 中的一个圆盘（与$\mathbb{C}P^2$的 2-柄核平行的一个副本）进行同痕，得到 $\widetilde{\delta}$，且 $\phi^+(\widetilde{\delta}) = 0$ 模 2。由于 δ 和 $\widetilde{\delta}$ 是 Z_d上的同痕曲线，我们得出$p_{Z_d}(T_\delta) = p_{Z_d}(T_{\widetilde{\delta}}) \in \mathcal{E}(\mathbb{C}P^2, Z_d)$。□

在 $\mathcal{E}(\mathbb{C}P^2, Z_d$中构造了大量德恩扭转后，我们证明定理 B。回顾一下，若 d为奇数，且 $Z_d = X_d \# T \subset \mathbb{C}P^2$ 是特征的，则 $q_{Z_d}\colon H_1(Z_d; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 表示 Rochlin 二次型，而 $Z_d \backslash P$ 是一组2-圆盘。

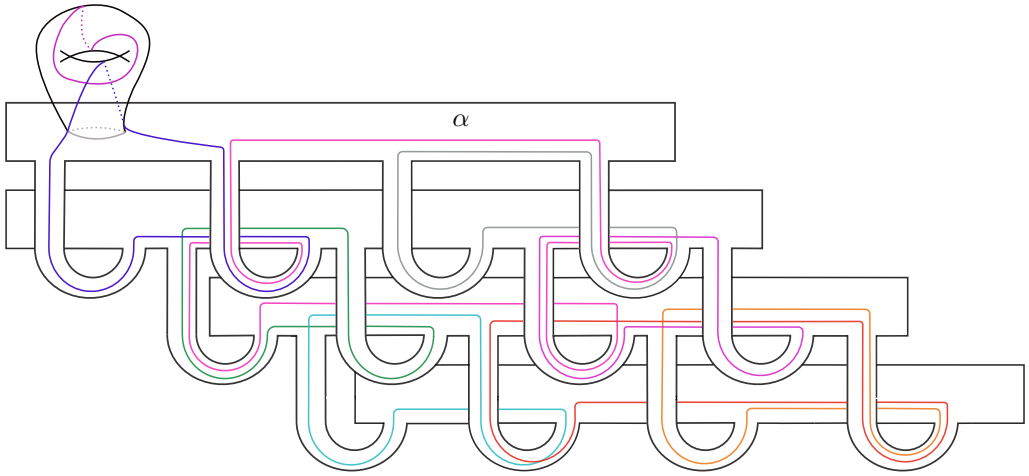


图 9. 对所示曲线构型施加德恩扭转，可得到 Mod(Z_4的生成集。该构型等价于亏格四闭曲面的映射类群的标准 Humphries 生成集 [FM12]。

定理 B。设 $X_d \subset \mathbb{C}P^2$ 是次数为 d 的光滑平面曲线。设 $T \subset S^4$ 是 S^4 中某个实心环面的边界。设 Z_d 是稳定化 $X_d \# T \subset \mathbb{C}P^2 \# S^4 \cong \mathbb{C}P^2$。若 d 为偶数，则 Z_d 是柔性的。若 d 为奇数，则 Z_d 是自旋柔性的。

证明。 我们从一般情形 $d \geq 5$ 开始。假设 d 是偶数。设 $\gamma \subset Z_d$ 为一条非分离简单闭曲线。必要时经过同痕，我们可以假设 $\gamma \subset P$。于是

$$\phi^+(\gamma) = 0 \text{ or } 1 \mod 2.$$

在这两种情形下，由引理 5.6可知 $T_\gamma \in \mathcal{E}(\mathbb{C}P^2, Z_d)$。由于 Mod($Z_d$) 由非分离简单闭曲线上的德恩扭转生成，$Z_d$ 是柔性曲面。

如果 d 是奇数，则有上界

$$\mathcal{E}(\mathbb{C}P^2, Z_d) \leq \mathrm{Mod}(Z_d)[q_{Z_d}].$$

由定理3.15，Mod(Z_d)$[q_{Z_d}]$ 由非分离简单闭曲线上的德恩扭转$\gamma \subset Z_d$ 生成，其中 $q_{Z_d}(\gamma) = 1$。固定这样一条曲线 γ。我们可以假设 $\gamma \subset P$。若 θ_S 表示 $H_1(S; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 上作为 S^3 中塞弗特曲面的链接形式，则 $i^* q_Z = \theta_S$，其中 $i\colon S \to Z_d$ 表示包含映射（命题 2.9）。由此可得 lk(γ, γ^+) $= 1$ 模 2，因此 ϕ^+(γ) $= 0$ 模 2。由引理 5.6，$T_\gamma \in \mathcal{E}(\mathbb{C}P^2, Z_d)$，并且当 d 为奇数时， Z_d 是自旋柔性的。

现在我们处理剩下的低次数情形。若 $d = 1$，则由命题 2.15 可知自旋柔性成立。若 $d = 2$，则由图6可知 $Z_2 = X_2 \# \Sigma_1$ 的柔性成立。若 $d = 3$，则曲面$Z_3 = X_3 \# \Sigma_1$ 的亏格为 2，且 q_{Z_3} 是一个奇二次型（Arf不变量为 1）（定理 2.7）。Mod(Z_3)$[q_{Z_3}]$ 的一个稳定子生成集由四条非分离容许简单闭曲线组成的链给出（见 [Ham21，引理 4.4]），而在$S_{\beta_3,1} \subset S^3$ 上很容易构造出这样的霍普夫带曲线构型。最后，考虑亏格四的 $Z_4 = X_4 \# \Sigma_1$。图9展示了 Mod(Z_4) 的一个 Humphries生成集。除一条曲线外，其余都是霍普夫带曲线。曲线 α 的 lk(α, α^+) $= -3$，并仿照命题 5.5，利用一条适当的对偶正霍普夫带曲线进行论证，可知 $T_\delta \in \mathcal{E}(\mathbb{C}P^2, Z_4)$。□

注 5.7。 Hirose 证明了 [Hir05，定理 51]：对于一个亏格为 $\Sigma_g \subset S^4$ 的平凡结 g，曲面$X_3 \# \Sigma_g$ 对任意 $g \geq 1$都是自旋柔性的。虽然定理 B 将这一结论推广到了任意 d 当 $g = 1$时，但对这些方法进行直接推广可以证明，曲面 $X_d \# \Sigma_g$ 对任意 $g \geq 1$都是（自旋）柔性的。

References

[AK80] S. Akbulut 和 R. Kirby。4维流形中曲面的分支覆盖。131，1979，252 2 111 8015-流形。 *Math. Ann.*, （）：–/。（引文见第 页。）

[BS25] I. Banerjee 和 N. Salter。完全交曲线的单值化与消失圈。https://www.arxiv.org/abs/2408.06479，2025。（引文见第 8 和 9 页。）[CS21] A. Calderon 和 N. Salter。Teichm¨uller 空间上阿贝尔微分分层的高自旋映射类群。 *Adv. Math.*，389：论文编号 107926，56，2021。（引文见第 2、8 和 9 页。）[CS23] A. Calderon 和 N. Salter。标架映射类群与阿贝尔微分分层的单值化。 *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*，25(12)：4719–4790，2023。（引文见第 8 和 9 页。）[Fer25] L. Ferretti。关于正辫、单值化群与框架。 *Algebr. Geom. Topol.*，25 205，2025 1 161 16（）：–。（引文见第 2、3、10、11、15 和 页。）[FK78] M. Freedman 和 R. Kirby。Rochlin定理的几何证明。载于 *Algebraic and geometric topology (Proc. Sympos. Pure Math., Stanford Univ., Stanford, Calif., 1976) Part 2*，第 XXXII 卷，属于 *Proc.*，页码 –。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，。（引文见第 和 页。）[FM12] B. Farb 和 D. Margalit。 *A primer on mapping class groups* 49 *Princeton Mathematical*，第 卷，出自 。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，。（引文见第 和 页。）[GS99] R. Gompf 和 A. Stipsicz。 *4-manifolds and Kirby calculus*。数学研究生系列；第 20 卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1999。（引文见第 13 和 15 页。）[Ham21] U. Hamenst¨adt。用德恩扭转生成自旋映射类群。 *Ann. H. Lebesgue*，41619 18：–1658，2021。（引文见第 页。）[Hir93] S. Hirose。关于纽结上方的微分同胚。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，119(3)：1009–1018，1993。（引文见第 1 和 5 页。）[Hir02] S. Hirose。关于平凡嵌入4-球中的曲面上的微分同胚。 *Algebr. Geom. Topol.*，2791 824，2002 1，2，3，4，6，7：–。（引文见第 和 页。）[Hir05] S. Hirose。复射影平面中的曲面及其映射类群。 *Algebr. Geom.*：–。（引文见第 和 页。） *Topol.* 5 577 613, 2005 1, 2, 4, 6, 18

[Hir15] S. Hirose。嵌入4维流形中的曲面变形及其映射类群。载于 *Handbook of group actions. Vol. II*，第 32 卷，属于 *Adv. Lect. Math. (ALM)*，页码 271–295。Int. Press，马萨诸塞州萨默维尔，2015。（引文见第 1 和 7 页。）[HJ89] S. P. Humphries 和 D. Johnson。曲面上绕数函数的推广。 *Proc.*，（）：–。（引文见第 页。） *London Math. Soc. (3)* 58 2 366 386, 1989 8

[HY08] S. Hirose 和 A. Yasuhara。4-流形中的曲面及其映射类群。 *Topology*，47 1 41 2（）：–50，2008。（引文见第 页。）[Joh80] D. Johnson。曲面上的自旋结构与二次型。 *J. London Math. Soc. (2)*，22 373，1980 2 365 9（）：–。（引文见第 页。）[Klu21] M. R. Klug。 *A Relative Version of Rochlin's Theorem*。ProQuest LLC，密歇根州安娜堡，2021。博士论文——加州大学伯克利分校。（引文见第 4 和 5 页。）[KM94] P. B. Kronheimer 和 T. S. Mrowka。射影平面中嵌入曲面的亏格。 *Math. Res. Lett.* 1 6 797 808, 1994 1 16

[Lib88] A. Libgober。奇异曲线上的theta特征、自旋结构与Rohlin定理。 *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*，21(4)：623–635，1988。（引文见第 2 页。）[LNSW13] Y. Liu、Y. Ni、H. Sun 和 S. Wang。关于4维空间中打结环面的斜率亏格。 *Pacific J. Math.*，261 1 117 144，2013 4（）：–。（引文见第 页。）[LS25] S. Lawande 和 K. Saha。4-流形中的曲面与可延拓映射类。https://arxiv.org/abs/2502.17640，2025。（引文见第 6 页。）[Mon83] J. M. Montesinos。关于四维球中的双胞胎。I。 *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*，34 199，1983 134 171 1 7（）：–。（引文见第 和 页。）[RW14] O. Randal-Williams。带框架、自旋和Pin曲面的模空间与映射类群的同调。 *J. Topol.*，7(1)：155–186，2014。（引文见第 5 和 9 页。）[Sal19] N. Salter。环面曲面中的单值化与消失圈。 *Invent. Math.*，216(1)：153–213，2019。（引文见第 2 和 15 页。）[Sal25] N. Salter。关于光滑五次平面曲线族的单值化群。 *Glasg. Math. J.*，67 2 163 184，2025 2（）：–。（引文见第 页。）[Sav12] N. Saveliev。 *Lectures on the topology of 3-manifolds*。De Gruyter 教科书。Walter de Gruyter & Co.，柏林，修订版，2012。Casson不变量导论。（引文见第 5 页。）[Sta78] J. R. Stallings。纤维结与链环的构造。载于 *Algebraic and geometric topology (Proc. Sympos. Pure Math., Stanford Univ., Stanford, Calif., 1976) Part 2*，第 XXXII 卷，属于 *Proc. Sympos. Pure Math.* 55 60 1978 2 10，页码 –。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，。（引文见第 和 页。）

Dept of Mathematics; Univ of Notre Dame; Hurley Hall; Notre Dame, IN 46556; USA
Email address: jlehman4@nd.edu