arXiv:2602.14826v1 [math.CV] 16 Feb 2026

扭曲对数微分形式的霍奇理论

曹俊彦

霍奇理论在复几何中发挥着核心作用，为复流形的解析、拓扑和代数方面提供了深刻而优雅的对应。通过将上同调不变量与调和形式空间相联系，它揭示了深刻的结构性见解，并在整个领域带来有力的影响。

与此同时， L^2 估计源于对赋有可能是奇异度量的全纯线丛的研究，已成为复几何中不可或缺的解析工具。它们支撑着消失定理、延拓现象以及奇异空间分析中的基本结果。

因此，将这两种视角结合起来，将霍奇理论延拓至取值于赋有奇异度量的向量丛的微分形式，既顺理成章，又富有成效。在这一更广阔的框架下， L^2理论中的技巧被证明极为有效。在这篇综述中，我们回顾了这一方向的最新进展，并借鉴了 [CP23、CP20、CDHP]的研究成果。最后三节讨论的应用既展现了这些进展的广度，也指明了未来研究的潜在方向。

接下来，我们简要介绍本文的结果和结构安排。

在第1节中，我们讨论紧致凯勒流形上配备奇异度量的线丛的一个版本的霍奇理论。设 X 是一个紧致凯勒流形， $L \to X$ 是一个全纯线丛。假设 L 具有奇异度量 h_L ，使得相应的曲率流可写为

$$i\Theta_{h_L}(L) = \sum a_i [D_i] + \theta, \tag{0.0.1}$$

其中 D 是一个简单正规交叉除子， $a_i \in \mathbb{Q}$，且 θ 是 X 上的光滑形式。

设 $m \in \mathbb{N}$ 是一个充分大的整除整数。我们考虑轨形结构（X， $(1 - \frac{1}{m}) D$）以及与之相适配的度量 $\omega_{\mathcal{C}}$。在 [CP23], 中，我们为（X， L， h_L， $\omega_{\mathcal{C}}$）发展了一套霍奇理论；参见定理1.6。这可以看作是在轨形背景下（即没有额外的 L 扭曲时）所得结果的自然推广。该理论的主要应用之一，是锥形意义下的关键 $\partial\partial$-引理（在对上述微分形式 θ 作出自然假设的条件下得到）；参见定理 1.7。

在这一框架下，一个重要问题如下：假设某个取值于 L 的微分形式在锥形意义下是 ∂-恰当的。在什么条件下，该微分形式在通常意义下是 ∂-恰当的? 关于这个问题的确切含义以及相关结果，请参见定理 1.11。

在第 2 节中，我们遵循 [CDHP]，将上述构造推广到拟紧情形。更确切地说，设 X 是一个紧致凯勒流形，且 $D = \sum_{i=1}^{k} D_i$ 是 X 上的一个简单正规交叉除子。我们希望研究 (X, D) 上的对数全纯平坦丛 (L, ∇)，即由 X 上的全纯线丛 L 与一个对数全纯联络组成的配对

$$\nabla : L \to L \otimes \Omega^1_X(\log D), \tag{0.0.2}$$

使得 $\nabla^2 = 0$ 在 $X \setminus D$ 上。

总可以在 L 上构造一个调和度量 h_L ，使得等式 $i\Theta_{h_L}(L) = 0$ 在 $X \setminus D$ 上成立。度量 h_L 可能沿 D 有奇点，但总可以假设 h_L 沿 D 的 Lelong 数 $\nu(L, h_L)$ 是有理数。

令 $\Delta_2 \subset D$ 为满足等式的分支之并

$$\mathrm{Res}_{D_i}(L, \nabla) + \nu_{D_i}(L, h_L) \neq 0$$

成立。在这种情况下，我们所研究的 X 上的环境度量在 $D \setminus \Delta_2$ 处具有锥形奇点，在 Δ_2处具有庞加莱型奇点。请注意，这种度量在边界 Δ_2附近是完备的，而且这些奇点是出于几何／解析考量而设置的。

在这一相当复杂的设定下，我们首先要明确“光滑形式”的含义，见定义 2.12。事实证明，这一概念十分合适，因为我们得到了强Hodge分解定理 2.15。此外，我们所定义的空间为由 (0.0.2) 诱导的复形提供了自然的细层解，见第 2.3 小节。

第 3 节致力于推广前两节中的一些结果，方法是用流替换微分形式。这种推广的思路如下：在许多应用中，我们需要考虑沿某些除子 E 具有对数极点的微分形式，其中 $E+D$ 是简单正规交。得益于 Noguchi [Nog95], 的一个想法，我们可以将对数形式嵌入对偶空间，即流空间。我们将这一方法运用于第 1 节和第 2 节的设定。

这一方法中需要确立的一个关键点是正则性引理，见第 3.2 小节。它断言，若一个对数形式模去一个支撑在 E 上的零阶流后是 ∂-恰当的，那么它可以写成一个具有对数极点的微分形式的 ∂。本节中的许多思想源自 Nog95] 和 LRW] 的开创性工作。

在接下来的第 4、5 和 6 节中，我们将讨论上述理论的若干应用，包括多重正则形式的延拓、拟紧凯勒流形上秩一局部系统的上同调跳跃轨迹性质，以及对数卡拉比–丘流形的变形理论。最后，我们想提及，在一篇即将发表的论文 [CDHP2],中，我们将上述一些构造推广到拟射影簇上的高秩局部系统。

对于本综述中的大多数结果，我们不会给出完整证明，而是引用原始论文。值得注意的例外是定理 3.16 和定理 6.2，我们为这两个结果提供了新的论证，主要是因为我们认为这些论证比原有论证略为简单。

致谢： 作者谨向本综述所述成果的合作者 Ya Deng、Christopher D. Hacon 和 Mihai Paun 致谢，感谢他们围绕锥形霍奇理论及本文介绍的应用所进行的许多富有成果的讨论。特别感谢 Mihai Paun，就本综述所述的所有论文和项目与作者进行了广泛的讨论与合作，并为本综述提出了诸多建议，极大地完善了本文稿。

作者感谢法国国家科研署（ANR）在项目编号 ANR-21-CE40-0010 下提供的支持，并感谢法国大学研究院为其提供了优良的工作条件。

目录

记号与约定 3 1. L值微分形式的霍奇理论 3 2. 对数全纯平坦线丛的霍奇理论 8 2.1. 调和度量与基本霍奇恒等式 9 2.2. 对数全纯平坦线丛的霍奇理论 11 2.3. 超上同调的解消 14 3. 流的霍奇分解与正则性引理 15¯3.1. 德拉姆–小平分解与流的 $\partial\partial$-引理 15 3.2. 正则性引理 18 3.3. 对数典范消失定理 19 4. 应用 I：多重典范形式的延拓 21 5. 应用 II：上同调跳跃轨迹性质 23 6. 应用 III：对数卡拉比–丘流形的变形 26 参考文献 28

记号与约定

- 在本文中， X 表示一个紧致凯勒流形， $D = \sum D_i$ 是 X上的一个简单正规交叉除子。
- $\omega_{\mathcal{C}}$ 是 $X \setminus D$ 上的一个凯勒度量，在 D沿线具有锥奇点，参见 (1.0.4)。
- 设 L 是 X 上的全纯线丛，带有满足 (0.0.1) 的度量 h_L 。我们用 $\mathcal{C}^\infty(X, L)$表示相对于 $(\omega_{\mathcal{C}}, h_L)$ 在锥意义下光滑的 L值微分形式空间，参见定义 1.1。
- 我们用 $\Omega^p_X(\log D)$ 表示沿 D具有对数极点的全纯形式层。
- 我们用 $A^{p,q}(X, D, L)$表示沿 D具有对数极点的光滑 L值微分形式空间。
- 设 $D = \Delta_1 + \Delta_2$ 是 X上的简单正规交叉除子。除了 (0.0.1) 外，我们还假设等式

$$i\Theta_{h_L}(L) = \sum_{D_i \subset \Delta_2} a_i [D_i] + \theta \tag{0.0.3}$$

成立，也就是说，我们只允许度量 h_L 沿 Δ_2 的分支出现奇异性。我们用 $\mathcal{C}^\infty(X, \Delta_1, L)$ 表示沿 Δ_1 具有对数极点、并沿 Δ_2 锥意义下光滑的 L-值微分形式空间，参见定义 1.9。

- 若厄米度量 $L|_{X\setminus D}$ 满足 2.5 节所述条件，则称其为调和度量。令 D''_K、 D'_K 和 D_K 为 L 上的相应联络，其定义见 2.1 节。
- $M_{\mathrm{DR}}(X/D)$ 表示由数对 (L, ∇) 构成的模空间，其中 L 是 X 上的全纯线丛， $\nabla : L \to L \otimes \Omega_X(\log D)$ 是对数可积联络。 $M_{\mathrm{B}}(X/D)$ 表示 $X \setminus D$ 上秩一局部系统的模空间。
- 对于每一对（L， ∇） $\in M_{\mathrm{DR}}(X/D)$，我们都可以关联一个自然分解

$$D = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$$

除子 D，参见 (2.8.2)（各个分支 Δ_i 有不同的几何解释）。

- 在此设定下构造的度量 ω_D 具有混合奇点：在 Δ_2 上为庞加莱型，在 Δ_3上为锥型，参见 (2.9.1)。
- 在相同设定下，我们将 $\mathcal{C}^\infty_K(X, L)$ 和 $\mathcal{C}^\infty_K(X, \Delta_1, L)$ 分别记作 X 上“光滑形式”和“对数光滑形式”的空间，它们在定义 2.12 和定义 2.19 中引入。
- $\mathcal{D}(X, L)$ 是 $\mathcal{C}^\infty(X, L^\star)$ 的对偶空间，而 $\mathcal{D}_K(X, L)$ 是 $\mathcal{C}^\infty_K(X, L^\star)$ 的对偶空间，参见定义 3.5 和定义 3.9。

1. 取值于 L的微分形式的霍奇理论

设 (X, ω_X) 是一个紧致凯勒流形，且 $L \to X$ 是一个全纯线丛。假设 L 具有一个可能奇异的度量 h_L ，使得

$$i\Theta_{h_L}(L) = \sum a_i [D_i] + \theta, \tag{1.0.1}$$

其中 $D := \sum D_i$ 是一个简单正规交叉除子， $a_i \in \mathbb{Q}$，且 θ 是定义在 X 上的光滑形式。本节遵循 [CP 23] 中的构造，为 (X, L, h_L) 建立霍奇理论。

首先，我们固定一个充分大且可被整除的整数 $m \in \mathbb{N}$ ；特别地，我们假设对每个 i， $ma_i \in \mathbb{Z}$ 都成立。我们将系统地使用与轨形结构相对应的 m-分歧覆盖

$$\Delta := \sum_i \Big(1 - \frac{1}{m}\Big) D_i.$$

更准确地说，令 $\{(V_i, z_i)\}_{i\in I}$ 是由坐标图覆盖 X 的一个有限覆盖，使得

$$z_i^1 \cdots z_i^r = 0 \tag{1.0.2}$$

是除子 D 在 V_i上的局部方程。接着，我们考虑局部的 m-分歧映射

$$\pi_i : U_i \to V_i, \qquad \pi_i(w_i^1, \ldots, w_i^n) := \big((w_i^1)^m, \ldots, (w_i^r)^m, w_i^{r+1}, \ldots, w_i^n\big), \tag{1.0.3}$$

它们定义了与 (X,Δ) 相关联的轨形结构。设 $\omega_{\mathcal{C}}$ 是关于 (X,Δ) 的锥形凯勒度量；也就是说， $\omega_{\mathcal{C}}$ 是 $X\setminus D$上的光滑Kähler度量，并且对于每个 i， $\pi_i^\star\omega_{\mathcal{C}}$ 都延拓为 U_i 上的光滑Kähler度量。这样的锥度量可以按如下方式构造：

$$\omega_{\mathcal{C}} := C\,\omega_X + \sum_i \sqrt{-1}\,\partial\bar\partial|s_{D_i}|_{h_i}^{2/m}, \tag{1.0.4}$$

其中， s_{D_i}是 $\mathcal{O}_X(D_i)$的典范截面， h_i是 $\mathcal{O}_X(D_i)$上的光滑度量。若正数常数 C 足够大，则 $\omega_{\mathcal{C}}$ 是锥形凯勒度量。

在没有扭转丛 L的情况下，$(X,\ \Delta)$上的有意义对象是所谓的轨形微分形式，例如参见 [Rai96]。在我们这里的情形中，相应的概念如下。

定义 1.1。 设 ϕ 是 $X\setminus D$上的一个 L值光滑形式。若局部商

$$\phi_i := \frac{1}{w_i^{am}}\,\pi_i^\star(\phi|_{V_i}) \tag{1.1.1}$$

e能光滑延拓到 U_i。这里我们采用简写 $\qquad and$

$$w_i^{am} := (w_i^1)^{a_1 m}\cdots(w_i^r)^{a_r m}.$$

L值且在锥形意义下光滑的微分形式空间记作 $\mathcal{C}^\infty(X,\ L)$。注意，该定义取决于度量 h_L 和 $\omega_{\mathcal{C}}$。

注意，当$(L,\ h_L)$是平凡的时，这与通常所说的轨形微分形式 相符。这里的思路类似，只是我们也考虑了 L上度量 h_L 的奇点。

以下命题将与 $(X,\omega_{\mathcal{C}})$ 和 (L,h_L) 相关联的内蕴微分算子，与通过局部单值化 π_i 定义的相应局部算子联系起来。

命题 1.2. [CP23, 命题 2.17] 设 ϕ 是一个在轨形意义下光滑的 L-值(p,q)微分形式。那么，它的“自然”导数 D'_{h_L}、 $D^\star_{h_L}$ 等也在轨形意义下光滑。此外：

(1) $\sup_{X\setminus Y}|\phi|_{h_L,\omega_{\mathcal{C}}}<\infty$；特别地，在锥形意义下光滑的微分形式是有界的。

(2) 成立以下恒等式：

$$\pi_i^\star(D'_{h_L}\phi) = w_i^{am}D'\phi_i,\qquad \pi_i^\star(\bar\partial\phi) = w_i^{am}\bar\partial\phi_i,$$

and

$$\pi_i^\star\big(D'^\star_{h_L}\phi\big) = w_i^{am}D'^\star\phi_i,\qquad \pi_i^\star(\bar\partial^\star\phi) = w_i^{am}\bar\partial^\star\phi_i,$$

其中 $D'\psi_i:=\partial\psi_i-\partial(\varphi_{L,\ 0}\circ\pi_i)\wedge\psi_i$ 且 $\varphi_L=\sum a_i\log|z_i|^2+\varphi_{L,\ 0}$。

(3) 令 $\Delta'':=[\,\bar\partial,\bar\partial^\star]$ 是关于$(\omega_{\mathcal{C}},h_L)$的拉普拉斯算子。接下来

$$\pi_i^\star(\Delta''\phi) = w_i^{am}\cdot\Delta''_{\mathrm{sm}}\,\phi_i,$$

其中， Δ''_{sm} 是局部非奇异情形$(\pi_i^\star\omega_{\mathcal{C}},\ \varphi_{L,0}\circ\pi_i)$中的拉普拉斯算子。

注意，根据我们的定义，给定两个在锥形意义下光滑的微分形式 u 和 v ，等式

$$\bar\partial u = v\qquad \text{on } X$$

¯在锥形意义下成立，简单来说就是 $\partial u=v$ 在 $X\setminus D$上。下面的例子/注¯清楚地说明了通常的 ∂ 算子与我们在锥状情形中引入的算子之间的一个重要区别。

例1.3。设

$$A^{p,q}(X,D,L) := C^\infty_{(0,q)}\big(X,\Omega^p_X(\log D)\otimes L\big)$$

是沿 D 具有经典意义下对数极点的 L 值光滑微分形式空间，并令 $s\in A^{p,\ q}(X,D,L)$。假设对于 ***(1.0.1)*** 中的每个 i ，都有 $a_i<0$ 。那么 s 在锥形意义下是光滑的。

例如，假设 D_1 局部由 $z_1 = 0$ 定义。那么 $\frac{dz_1}{z_1}\big|_{X\setminus D}$ 是光滑的。此外，经过 m 次分歧覆盖 π 后，我们有

$$w_1^{-a_1 m}\,\pi^\star\left(\frac{dz_1}{z_1}\right) = m\,w_1^{-a_1 m}\,\frac{dw_1}{w_1},$$

并且当 $a_1 < 0$ 时右端是光滑的（回顾 $a_1 m \in \mathbb{Z}$）。因此 $\frac{dz_1}{z_1}$ 在锥意义下光滑。

此外，我们有 $\bar\partial(\frac{dz_1}{z_1}) = 0$ 在锥形意义下：事实上，该条件是

$$w_1\,\bar\partial\left(\frac{dw_1}{w_1}\Big|_{\mathbb{D}^\star}\right).$$

可穿过圆盘延拓，这显然成立。注意这有些令人困惑，因为微分形式dz_1 在通常意义下并非 $\bar\partial$-闭的。事实上，等式z_1

$$\bar\partial\left(\frac{dz_1}{z_1}\right) = -[z_1 = 0]$$

成立——至多相差某个倍数。

注 1.4. 设 u 与 v 为两个取值于 L的微分形式，它们在锥意义下光滑，并且使得 等式 $\bar\partial u = v$ 在 D的补集上逐点成立。那么我们确实在锥形意义下有 $\bar\partial u = v$，但如前一例子所示，这在通常意义下并不成立。

我们现在列出锥意义下光滑微分形式的一些基本性质。下面的命题表明，锥形光滑形式关于分部积分表现良好。

命题1.5. [CP23，推论2。19] 设 (L, h_L) 是满足 (1.0.1)的全纯线丛，并设 $(L^\star, h_L^\star)$ 是其赋予对偶度量的对偶。设 α 是一个取值于 L的(p,q)-微分形式， β 是一个取值于 $L^\star$的$(n-p-1, n-q)$-微分形式。假设 α 和 β 在锥形意义下均为光滑的。则通常的分部积分公式成立：

$$\int_X D'_{h_L}\alpha\wedge\beta = (-1)^{p+q+1}\int_X \alpha\wedge D'_{h_L^\star}\beta, \tag{1.5.1}$$

其中D'_{h_L} 和$D'_{h_L^\star}$ 均按锥形意义理解。

F为证明命题1.5，我们考虑 $X\setminus D$的标准截断函数 μ_ε，即 ly

$$\mu_\varepsilon = \rho_\varepsilon\left(\log\log\frac{1}{|s_D|_h^2}\right), \tag{1.5.2}$$

其中 $\mathcal{O}_X(D)$的典范截面为 s_D， h是一个光滑度量，而 ρ_ε是一个在 $[1,\varepsilon^{-1}]$上等于1、在$[1+\varepsilon^{-1},+\infty[$，上等于0的函数，其中 $|\rho'_\varepsilon|\leqslant 2$。由于锥形意义下的光滑形式在$X\setminus D$ 上按经典意义光滑，我们有

$$\int_X D'_{h_L}(\mu_\varepsilon\cdot\alpha)\wedge\beta = (-1)^{p+q+1}\int_X \mu_\varepsilon\cdot\alpha\wedge D'_{h_L^\star}\beta.$$

再结合$\int_X |\partial\mu_\varepsilon|_{\omega_\mathcal{C}}\omega_\mathcal{C}^n < +\infty$这一事实，令 $\varepsilon\to 0$，我们即得(1.5.1)。

标准的加丁不等式与Sobolev不等式，连同Rellich嵌入定理，在锥状情形下仍然成立；它们可经由(X,Δ)的局部一致化由其经典对应结果推出。因此，霍奇分解在锥状情形下也成立。

定理1.6。 [CP23，定理 2。28] 设 $(L, h_L)\to X$ 为一个赋有度量 h_L的线丛，且该度量满足 (1.0.1)；再设 $\omega_\mathcal{C}$ 为一个具有锥形奇点的凯勒度量，如(1.0.4)所示。则有如下 *Hodge* 分解

$$L^2_{p,q}(X,L) = \mathrm{Ker}\Delta''_{h_L}\oplus\mathrm{Im}\,\bar\partial\oplus\mathrm{Im}\,\bar\partial^\star \tag{1.6.1}$$

and

$$\mathcal{C}^{\infty}_{p,q}\big(X,(L,h_L)\big)=\mathrm{Ker}\Delta''_{h_L}\oplus\mathrm{Im}\,\Delta''_{h_L}. \tag{1.6.2}$$

此处所有微分算子均按锥形意义理解。

回顾一下，求解 ∂-方程和研究变形空间的一种重要方法是 $\partial\bar{\partial}$-引理。关键在于，与 L^2 估计的情形不同，求解 ∂-方程并不需要严格正性。有关这一思想的详情，请参见第4、5、6节。

作为定理1.6的推论，我们得到以下 $\partial\partial$-引理的锥版本。

Cor推论 1.7。 设$(L,h_L)\to X$ 是一个赋有度量 h_L 且满足 g (1.0. 1)的全纯线丛，并设 u 是一个取值于 L的(p,q)-微分形式，且在锥意义下光滑。

- 若 $\theta=0$和 $u\in\mathrm{Ker}\,\partial\cap\mathrm{Im}\ D'_{h_L}$，则方程

$$u=\bar{\partial}\circ D'_{h_L}v \tag{1.7.1}$$

存在解 v，且该解在锥意义下光滑。

- 一般而言，若 $\theta\geqslant 0$，设 u 是一个取值于 L 的 (n,q)-微分形式，且在锥意义下光滑，其中 $n=$维数X。若 $\partial u=0$ 在锥形意义下，并且

$$u=D'_{h_L}v_1+\theta\wedge v_2$$

在锥形意义下，对某些 $v_1,v_2\in\mathcal{C}^{\infty}(X,L)$ 成立，那么 $u=\partial v$ 在锥形意义下，对某些 $v\in\mathcal{C}^{\infty}(X,L)$ 成立，且与调和部分 $\mathrm{Ker}\,\Delta''_{h_L}$ 正交。

第一个结论直接由定理1.6和经典 $\partial\partial$-引理的证明得出。第二个结论由定理1.6及锥形意义下的 Bochner 恒等式得出；参见 [CP23，命题 2.21]。

注 1.8。 在 (1.7.1) 中，等式仅在锥形意义下成立；正如我们所见，这未必等同于经典意义。因此，了解 u 何时在通常意义下为 $\partial\partial$-恰当形式非常重要。关于这方面的结果，参见定理 *1.11*。

受本文末尾将介绍的应用启发，接下来我们引入具有对数极点的锥形光滑形式。

定义 1.9. 设 (X,ω_X) 为紧致凯勒流形，且 $D=\Delta_1+\Delta_2$ 是 X上的简单正规交叉除子。设 $L\to X$ 为全纯线丛。假设 L 带有一个可能奇异的度量h_L，使得

$$i\Theta_{h_L}(L)=\sum_{D_i\subset\Delta_2}a_i[D_i]+\theta,$$

其中 $a_i\in\mathbb{Q}$ 且 θ 是 X上的光滑形式。设 $\omega_{\mathcal{C}}$ 为关于锥形结构 $(1-\frac{1}{m})\Delta_2$的锥形凯勒度量，并设 $\pi_i:U_i\to V_i$ 为沿 Δ_2 的m- 分歧覆盖。

设 ϕ 为一个取值于 L 的 $X\setminus D$上的光滑微分形式。若 ϕ 具有 沿 Δ_1 的对数极点，并且在锥形意义下光滑，则

$$\frac{\pi_i^{\star}\phi}{w_i^{am}}$$

可延拓为 U_i 上的光滑形式，且沿 Δ_1的原像至多有对数极点。我们用 $\mathcal{C}^{\infty}(X,\Delta_1,L)$ 表示取值于 L、沿 Δ_1具有对数极点的锥形光滑形式空间。

我们可以如下为 $\mathcal{C}^{\infty}(X,\ \Delta_1,\ L)$ 建立一种霍奇理论。在对数切丛 $T_X\langle\Delta_1\rangle=(\Omega^1_X(\log\ \Delta_1))^{\star}$ 上，我们考虑厄米度量

$$g_D:=\omega_{\mathcal{C}}+\sqrt{-1}\sum_{D_i\subset\Delta_1}\frac{D's_{D_i}\wedge\overline{D's_{D_i}}}{|s_{D_i}|^2}, \tag{1.9.1}$$

其中 s_{D_i} 是 $\mathcal{O}_X(D_i)$的典范截面。于是 g_D 沿 Δ_2 有锥形奇点，我们可以使用 $D_i\subset\Delta_1$ 的局部生成元 $(\frac{ds_{D_i}}{s_{D_i}})^{\star}$，以便在$X\setminus\Delta_2$上定义一个近似正交归一基。注意，$g_D$（以 L的度量 h_L 扭曲）可以解释为向量丛上的奇异厄米度量

$$E_p:=\Omega^p_X(\text{对数 }\Delta_1)\otimes L.$$

令 $\pi_i\colon U_i \to V_i$ 为 (1.0.3) 中局部的 m-分歧覆盖。对于一个取值于 E_p的 $(0,q)$-微分形式 ϕ， $\pi_i^*\phi$可以视为定义在 $U_i \setminus (\pi_i)^{-1}(D)$上的取值于 $\pi_i^\star L$的微分形式。若 $\pi_i^\star L$-值微分形式满足以下条件，我们称 ϕ 在锥形意义下光滑

$$\frac{\pi_i^\star \phi}{w_i^{am}} \qquad \text{on } U_i \setminus (\pi_i)^{-1}(D)$$

延拓为 U_i 上的光滑形式，沿 Δ_1 的原像至多有对数极点。我们用 $\mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(X, E_p)$ 表示这类取值于 E_p 的 $(0, q)$-形式所构成的空间。于是我们有一个自然的同一化

$$\mathcal{I}: \mathcal{C}^\infty_{(p,q)}(X, \Delta_1, L) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(X, E_p), \tag{1.9.2}$$

接下来我们将看到，定理1.6的类似结论对 (E_p, g_D) 也成立（其中 X 上的环境度量与 $\omega_{\mathcal{C}}$ 相同）。

定理 1.10. 我们有霍奇分解

$$\mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(X, E_p) = \mathrm{Ker}\Delta''_{g_D,\omega_{\mathcal{C}}} \oplus \mathrm{Im}\,\Delta''_{g_D,\omega_{\mathcal{C}}}.$$

这里，所有微分算子均按锥形意义理解。

证明. 论证与定理1.6中的几乎完全相同。通过局部的 m-分歧覆盖，原像

$$\frac{\pi_i^\star \phi}{w_i^{am}}$$

一个微分形式 ϕ 变为 U_i 上的光滑形式，沿 Δ_1 的原像至多有对数极点；也就是说，它是下列对象的一个截面

$$\frac{\pi_i^\star \phi}{w_i^{am}} \in C^\infty(U_i, \Omega^p_{U_i}(\log \pi_i^{-1}(\Delta_1)) \otimes L).$$

注意，$(\pi_i)^\star g_D$ 是 $\Omega^p_{U_i}(\log \pi_i^{-1}$ $(\Delta_1))$ 上的光滑厄米特度量：这正是我们在 g_D 的表达式中规定锥形奇点的主要原因。于是，标准的加丁不等式、Sobolev不等式以及 Rellich嵌入定理在这一设置下仍然成立。从这里开始，完成定理 1.10 的证明细节就相当容易了。

□

注意，一般而言，度量 g_D 不是平坦的。因此，即使 $\theta = 0$，我们也无法使用适用于 $\mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(X, E_p)$ 的$\partial\partial$-引理。这是建立关于流的 Hodge 分解定理版本的主要动机之一，相关讨论见第 3 节。

给定一个在锥形意义下为 ∂-恰当的微分形式 u，理解 u 何时在经典意义下也是∂-恰当的十分重要。我们有如下相关结果。

定理 1.11。设 X 是一个紧致凯勒流形， $D = \Delta_1 + \Delta_2$ 是X上的一个简单正规交叉除子。设 $L \to X$ 是一个赋有度量 h_L 的全纯线丛，使得

$$i\Theta_{h_L}(L) = \sum_{D_i \subset \Delta_2} a_i [D_i] + \theta,$$

其中 $a_i \in [-1, 0[\cap\mathbb{Q}$, $D = \sum D_i$ 是简单正规交， θ 是光滑形式。设 $A^{p,\,q}(X, D, L)$ 是经典意义下沿 D 具有（至多）对数极点的L值光滑形式空间。

设 $u \in A^{p,\,q}(X, D, L)$。由于 $a_i < 0$，我们有 $u \in \mathcal{C}^\infty_{(p,q)}(X, \Delta_1, L)$。假设 u 在锥形意义下是 ∂恰当的，即

$$u = \bar\partial v_1 \qquad on\ X \setminus \Delta_1$$

对于某个 $v_1 \in \mathcal{C}^\infty_{(p,q-1)}(X, \Delta_1, L)$，它在锥形意义下成立。那么存在 $v \in A^{p,\,q-1}(X, D, L)$ 使得

$$u = \bar\partial v \qquad on\ X \setminus D.$$

证明。证明思路沿用 [LRW] 和 [CDHP]。考虑全纯向量丛

$$E := \Omega^p_X(\log D) \otimes L$$

赋予光滑厄米特度量 h_E，并令 $(E^\star, h_E^\star)$ 为其对偶。我们有一个自然的识别

$$\mathcal{I}: A^{p,q}(X, D, L) \longrightarrow C^\infty_{(0,q)}(X, E),$$

以及一个自然态射

$$\iota : C^{\infty}_{(n,n-q)}(X, E^{\star}) \longrightarrow C^{\infty}_{(0,n-q)}\big(X, \Omega_X^{n-p} \otimes L^{\star}\big)$$

由收缩诱导。

由于 $\partial u = 0$ 在 $X \setminus D$上，我们有 $\partial \mathcal{I}(u) = 0$ 在 X上。取 X 上的一个 Kähler 度量 ω_X，并考虑相对于（X，ω_X）和（E，h_E）的光滑Hodge分解。由于 $\mathcal{I}(u)$是一个 ∂-闭的光滑 E值微分形式，我们可以写成

$$\mathcal{I}(u) = u_0 + \bar{\partial} u_1,$$

其中 u_0 是调和的，且$u_1 \in C^{\infty}_{(0,q-1)}(X, E)$。因此，只需证明 $u_0 = 0$。

令 $\sharp : C^{\infty}_{(0,q)}(X, E) \to C^{\infty}_{(n,n-q)}(X, E^{\star})$为Hodge星算子。由于 u_0 是调和的，$\sharp u_0$也调和，参见 [Dem-book，第 VI 章，定理 7.3]。于是

$$\|u_0\|^2_{L^2} = \int_X u_0 \wedge \sharp u_0 = \int_X \mathcal{I}(u) \wedge \sharp u_0 = \int_X u \wedge \iota(\sharp u_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_X \mu_\varepsilon \, u \wedge \iota(\sharp u_0) = - \lim_{\varepsilon \to 0} \int_X \bar{\partial} \mu_\varepsilon \wedge v_1 \wedge \iota(\sharp u_0),$$

其中 μ_ε 是(1.5.2)中为 $X \setminus D$ 定义的标准截断函数。

我们假设 $z_i = 0$ 在局部定义 D_i，且 $w_i = 0$ 定义了 D_i的原像。由于$v_1 \in \mathcal{C}^{\infty}_{(p,q-1)}(X, \Delta_1, L)$ 且 $-1 \leqslant a_i < 0$，因此在 $w_i = 0$ 的一般点附近，微分形式 $dw_i \wedge \pi^{\star} v_1$ 可能有如下形式的极点

$$\frac{d\overline{w}_i \wedge dw_i}{w_i},$$

但没有高阶极点：否则，由于 $\pi^{\star} v_1$ 是 π-不变的，$dw_i \wedge \pi^{\star} v_1$ 应有如下形式的极点 $\frac{dw_i \wedge dw_i}{w^{1+m}}$。这与 v_1 在锥形意义下光滑这一事实矛盾，因为其系数 $a_i \geqslant -1$。另一方面，由于在 ι中的收缩，楔积 $\iota(\sharp u_0) \wedge dz_i$ 可被 z_i整除。因此，微分形式

$$d\overline{w}_i \wedge \pi^{\star} v_1 \wedge \pi^{\star}\big(\iota(\sharp u_0)\big)$$

是光滑的。因此，根据勒贝格控制收敛定理，我们有

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_X \bar{\partial} \mu_\varepsilon \wedge v_1 \wedge \iota(\sharp u_0) = 0.$$

因此 $\|u_0\|_{L^2} = 0$，所以 $u_0 = 0$，证明至此完成。 □

最后，我们提出以下问题。

问题 1.12. 在 h_L 具有解析奇点的情形下，能否建立强霍奇分解？或者，即使 h_L 的权重是两个准拟次调函数之差，是否也可以做到？

在 h_L 具有解析奇点的情形下，对 X作一次修改后，我们可以假设度量 h_L 的奇点是除子型的。然而，当 h_L 的 ***Lelong*** 数不是有理数时，尚不清楚 X 上的度量应如何定义。

2. 对数全纯平坦线丛的霍奇理论

设 (X, D) 是由紧致 Kähler 流形 X 和简单正规交除子 D组成的一对。我们用 $M_{\mathrm{B}}(X_0)$ 表示开流形 $X \setminus D$上的秩一局部系统空间。以下优美的结果归功于 Budur-Wang。

定理 2.1 ([BW20]). 考虑全纯圆盘的芽 $\gamma : (\mathbb{C},0) \to M_{\mathrm{B}}(X_0)$，并固定$\gamma(0) = \tau$。设 k 为正整数，使得 $\dim H^p(X \setminus D, \gamma(t)) \geqslant k$ 对每个 $|t| \ll 1$成立。则有

$$\dim H^p(X \setminus D, \tau + t\dot{\alpha}) \geqslant k \tag{2.1.1}$$

对 $|t| \ll 1$成立，其中 $\dot{\alpha}$ 是无穷小形变 $d\gamma(0)$。

在上述陈述中，我们用 $H^{\bullet}(X \setminus D, \tau)$ 表示系数取为 τ 的上同调群。近期论文 [CDHP] 的主要目标之一，是通过为拟紧凯勒流形上的秩一局部系统发展一种霍奇理论，提出这一结果的一种新证明。2.1 的证明是自足的，与 [BW20], 中的原始论证大不相同；后者依赖于涉及模空间和 Riemann–Hilbert

对应（其中一些思想可追溯至 [Sim93]）。现在我们简要概述 [CDHP]，中的主要思想；接下来的几个小节将更详细地介绍若干关键陈述和事实。

令 $M_{\mathrm{DR}}(X/D)$ 表示对数平坦丛的空间，即由线丛 $L \to X$ 及其上的全纯联络 L，∇ 组成的配对

$$\nabla : L \to L \otimes \Omega_X(\log D)$$

其沿 D 有对数极点，且满足 $\nabla^2 = 0$。我们有一个自然映射

$$\rho : M_{\mathrm{DR}}(X/D) \to M_{\mathrm{B}}(X \setminus D), \tag{2.1.2}$$

根据 Deligne 的一个著名结果，该映射是满射，参见 [Del70, II, 6.10]。同一文献还表明，(2.1.2) 中这两个空间之间的对应关系远不止于此：考虑复形

$$0 \to \mathcal{O}(L) \to \mathcal{O}(L) \otimes \Omega^1_X(\log D) \to \mathcal{O}(L) \otimes \Omega^2_X(\log D) \to \cdots \mathcal{O}(L) \otimes \Omega^n_X(\log D) \to 0 \tag{2.1.3}$$

由联络 ∇诱导，则有

$$\mathbb{H}^p(X, L \otimes \Omega^\bullet_X(\log D)) \simeq H^p(X_0, \tau),$$

前提是 (L, ∇) 在 D 的任一分支上的留数都不是正整数。这里，τ 是 (L, ∇) 在映射 ρ下的像。

[CDHP] 为证明定理 2.1 所采用的策略，是发展必要的工具，以构造 (2.1.3) 的解。之后便用到霍奇理论中的思想：在 同上文献中，证明了所得复形的上同调可由对应于 $\nabla + \partial$的 Laplace 型算子的核˜计算。最后，建立了一个适用于当前情形的 _$\partial\bar{\partial}$-引理的版本；这是证明中的主要技术工具之一。

为了能够在一个上同调类中选出“最佳”代表元，首先需要在相应的向量丛/流形（在我们的情形中为 L 和 (X, D)）上赋予具有几何意义的度量。对于线丛 L，这将是一个调和度量。下面的前两个小节将概述其定义，以及除子 D 的自然分解（该分解由包含 τ的 $M_{\mathrm{B}}(X \setminus D)$分支所诱导）。上述 D 的分解基本上决定了在 (X, D) 上选取环境度量 ω_D 的方式——它将具有混合锥型-Poincaré 型奇性。这样，陈述并证明 Hodge 分解定理所需的条件便已齐备，参见第 2.2 节。复形 (2.1.3) 的解将在第 2.3 节构造；不出所料，其中涉及带对数极点的微分形式，而这些形式相对于上述对象未必是 L^2 的。特别是，我们无法直接应用前面提到的霍奇理论。因此，我们需要考虑更一般的对象，即 L值流。第 3 节将讨论它们在我们这一情形中的定义及其重要性。

2.1. 调和度量与基本霍奇恒等式。 首先，我们回顾调和度量的定义，以及基础著作 [Sim92] 中确立的关于 $(L, \nabla) \in M_{DR}(X/D)$ 的基本霍奇恒等式。

设 $D_K := \bar{\partial} + \nabla$，其中 $\bar{\partial}$定义了 L 的全纯结构。于是 $D_K^2 = 0$ 在 $X \setminus D$ 上。令h 为 L 上的一个度量，它在 $X \setminus D$ 上光滑，并且沿 D 可能具有解析奇点。令 D'_h 为 (L, h) 的切恩联络的 $(1, 0)$ 部分，并设

$$\theta_0 := \frac{D'_h - \nabla}{2}.$$

于是 θ_0 是一个 $(1, 0)$-微分形式，沿 D 可能具有对数极点。根据构造，两个联络 $D'_h + \partial$ 和 $\nabla + (\partial - 2\theta_0)$ 保持度量 h。因此，我们可以如下定义 D''_K。

定义 2.2。 我们设

$$D''_K := \frac{\bar{\partial} + (\bar{\partial} - 2\overline{\theta}_0)}{2} + \frac{\nabla - D'_h}{2} = \bar{\partial} + (\theta_0 - \overline{\theta}_0), \tag{2.2.1}$$

$$D'_K := D'_h + \theta_0 + \overline{\theta}_0. \tag{2.2.2}$$

and

$$D^c_K := D''_K - D'_K. \tag{2.2.3}$$

注意，根据构造，等式

$$D''_K + D'_K = \bar\partial + \nabla = D_K$$

成立。此外，事实证明，在这一框架下，关键的霍奇恒等式仍然成立 .

命题 2.3. 设 ω 是 $X \setminus D$上的一个凯勒度量，并设 $(D'_K)^\star$ 和 $(D''_K)^\star$ 分别是 D'_K 和 D''_K 关于(h,ω)的形式伴随算子。则

$$(D'_K)^\star = i[\Lambda_\omega, D''_K] \qquad and \qquad (D''_K)^\star = -i[\Lambda_\omega, D'_K]. \tag{2.3.1}$$

给定一个局部系统 (L,∇)，一般而言，无法构造出满足$D'_h = \nabla$的厄米度量 h 。替代方案是所谓的调和度量，这是一个重要概念，我们现在来回顾一下。

定义 2.4（调和度量）。 我们称 h 是调和度量，若满足 $(D''_K)^2 = 0$ 于 $X \setminus D$。

高秩半单局部系统的调和度量的存在性是一个深刻的问题；紧凯勒情形可参见 [Sim92] ，拟射影情形可参见 [Moc06] 。然而，在我们的秩一情形中，情况要简单得多，这要归功于以下刻画。

命题 2.5。 度量 h 是调和度量，当且仅当 $i\Theta_h(L) = 0$ 在 $X \setminus D$上成立。

命题 2.5 的证明可由直接计算得到，参见 [CDHP，命题 6.6]

在讨论调和度量的存在性之前，我们先回顾秩一局部系统的留数的定义（L， ∇）。

定义 2.6。 设 $(L,\nabla) \in M_{DR}(X/D)$，并设 e_L 是 L的局部全纯标架。假设 D_i 局部由 $z_1 = 0$定义。由 D_i的紧致性，存在常数 a_i 使得

$$\nabla e_L = \frac{a_i\, dz_1}{z_1} \wedge e_L + C^\infty.$$

我们称 a_i 为 (L,∇) 沿 D_i的留数，记作 留数$_{D_i}(L,\nabla)$。显然，这一定义与标架 e_L的选取无关。

命题 2.7。设 $(L,\nabla) \in M_{DR}(X/D)$。则

$$c_1(L) = -\sum_i \mathrm{Re}\big(\mathrm{Res}_{D_i}(L,\nabla)\big)\,[D_i] \in H^2(X,\mathbb{Q}).$$

特别地， h *on* (L,∇)上总存在调和度量。

证明。 在 L上取一个光滑度量 h_L。那么 $\alpha \coloneqq D'_{h_L} - \nabla$ 是一个沿 D具有对数极点的(1,0)-微分形式。我们计算得

$$\bar\partial\alpha = [\bar\partial, \alpha] = [\bar\partial, D'_{h_L} - \nabla] = i\Theta_{h_L}(L) + \sum_i \mathrm{Res}_{D_i}(L,\nabla)\,[D_i] = 0 \in H^2(X,\mathbb{C}).$$

由于$i\Theta_{h_L}(L) \in H^2(X,\mathbb{R})$，取实部可得

$$c_1(L) = -\sum_i \mathrm{Re}\big(\mathrm{Res}_{D_i}(L,\nabla)\big)\,[D_i] \in H^2(X,\mathbb{R}).$$

因此，我们可以在 L 上找到一个度量 h ，使得

$$i\Theta_h(L) = -\sum_i \mathrm{Re}\big(\mathrm{Res}_{D_i}(L,\nabla)\big)\,[D_i].$$

特别地， h 在(L,∇)上是调和的。 □

注意，调和度量并不唯一。事实上，设 $a_i \in \mathbb{R}$ 满足

$$\sum_i a_i\, c_1(D_i) = 0 \in H^2(X,\mathbb{R}).$$

¯那么，根据熟知的 $\partial\partial$-引理（不过，参见定理 3.2），存在一个函数 ϕ使得

$$dd^c\phi = \sum_i a_i [D_i].$$

因此，如果 h 是调和的，那么度量 $h\,e^{-\phi}$ 也是调和的。

给定一个调和度量 h，我们有以下重要结果。

命题 2.8。 [Sim92，第 1] 考虑拉普拉斯算子

$$\Delta_K := [D_K, D_K^\star], \qquad \Delta'_K := [D'_K, (D'_K)^\star], \qquad \Delta''_K := [D''_K, (D''_K)^\star].$$

若 h是调和的，则

$$\Delta''_K = \Delta'_K = \frac{1}{2}\Delta_K \qquad on\ X \setminus D. \tag{2.8.1}$$

此外， D''_K、 D'_K、（D''_K）*和（D'_K）* 与 Δ''_K 和 Δ'_K可交换。

在紧凯勒情形下，由于 Δ_K 是光滑椭圆算子， Δ_K 的 Hodge 分解定理成立，参见 [Si m92，第 2]节。结合命题 2.8，可推出$D'_K \circ D''_K$-引理（$= D_K \circ D_K^c$），参见 [Sim92，引理 2.1],，该引理对许多应用至关重要。在准紧凯勒情形下，人们希望为 Δ_K建立类似的 Hodge 分解定理，从而得到 $D_K \circ D_K^c$-引理。这是下一小节的目标。

2.2. **对数全纯平坦线丛的霍奇理论**。 为了在准紧扭曲凯勒情形下建立 Hodge 分解定理，我们首先选择 L上的一个调和度量 h_L。对于 M_B（$X \setminus D$）中包含像ρ（L， ∇） $\in M_{DR}$（X/D）的连通分支，我们可以将除子 D分解为

$$D = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3, \tag{2.8.2}$$

满足以下条件：

- $\Delta_2 \subset D$ 是分支 D_i 的并，且存在微分形式 $s \in H^0(X, \Omega^1_X(D))$，使得留数$_{D_i}(s) \neq 0$。
- $\Delta_1 \subset D \setminus \Delta_2$ 由分支 D_i 组成，且留数$_{D_i}(L, \nabla) = 0$。
- $\Delta_3 := D \setminus$({v3)。

我们不对这一重要事实作详细说明，而是请参阅 [CDHP], 命题 6.11 和 6.12。不过，为方便读者，下面列出几条基本性质。存在定义在 L 上的调和度量 h_L ，使得以下结论成立。

(1) 等式

$$\mathrm{Res}_Y(L, \nabla) = -\nu_Y(h_L)$$

对 $\Delta_1 + \Delta_3$ 的任意分支 Y，上述共同值都是一个有理数。

(2) 对 Δ_2 的任意分支 W，沿着 W，有 $\nu(h_L) \neq -$Res(L, ∇)。

(3) 等式

$$H^0(X, \Omega^1_X(\log D)) = H^0(X, \Omega^1_X(\log \Delta_2))$$

成立，因此我们有

$$\mathrm{Res}_Y(L, \nabla) = \mathrm{Res}_Y(L', \nabla')$$

对 $\Delta_1 + \Delta_3$ 的任意分支 Y，只要 $\rho(L, \nabla)$ 和 $\rho(L', \nabla')$ 属于 $M_{DR}(X/D)$ 的同一个连通分支。

(4) 将 (L, ∇) 替换为 $(L \otimes \prod \mathcal{I}_{D_i}^{a_i}, \nabla')$ 后，我们可以假设 ReRes$_{D_i}(L, \nabla) \in [0, 1[$。其中， ∇' 是由 ∇ 诱导的自然平坦联络。这源于映射 (2.1.2) 具有如下性质

$$\rho(L, \nabla) = \rho\big(L \otimes \prod \mathcal{I}_{D_i}^{a_i}, \nabla'\big).$$

以上讨论可总结如下。

Lemma 2.9. 我们可以构造一个调和度量 h_L ，使得在 L上满足以下断言 h *old.*

- $\nu_Y(h_L) = -$留数$_Y(L, \nabla) = 0$ 对 Δ_1的任意分支 Y；
- $\nu_Y(h_L) \neq -$留数$_Y(L, \nabla)$ 并且 $\nu_Y(h_L) < 0$ 对 Δ_2的任意分支 Y；
- $\nu_Y(h_L) = -$留数$_Y(L, \nabla) \in]-1, 0[\cap \mathbb{Q}$ 对于 Δ_3的任意分支 Y。

现在我们在基流形 X上定义一个度量。设 ω_D 是 $X \setminus (\Delta_2 + \Delta_3)$上的一个凯勒度量，它沿着 Δ_2 的支撑具有庞加莱奇点，并且沿着 Δ_3的每个分支具有角度为 $2\pi(1 - 1/k)$的锥形奇点，其中 $k \geqslant 3$ 是一个充分大的整除整数。特别地，$k \cdot$ 留数$_{\Delta_3}(L, \nabla) \in \mathbb{Z}$。

可以显式地构造这样的度量。记 $\Delta_2 = \sum_{i=1}^{m} D_i$ 和 $\Delta_3 = \sum_{i=m+1}^{N} D_i$。我们定义

$$\omega_D := \omega_X + \sum_{i=m+1}^{N} \sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial}|s_i|^{2/k} - \sum_{i=1}^{m} \sqrt{-1}\,\partial\bar{\partial} \log\log \frac{1}{|s_i|^2}, \tag{2.9.1}$$

其中 ω_X是 X上的一个固定 Kähler 度量，取为充分正，使得 $\omega_D \geqslant \frac{1}{2}\omega_X$。这里，$s_i$表示相对于某个光滑度量的 $\mathcal{O}_X(D_i)$的典范截面。

注 2.10. 乍看之下，ω_D 的奇点选择似乎有些人为或任意。然而，鉴于接下来将要讨论的结果，这似乎是恰当的选择。

现在，我们将第 1 节中发展的技巧应用于拟紧流形 $X \setminus \Delta_2$，并考虑度量 $(L,\ h_L,\ \omega_D)$。特别地，所有微分算子 D_K、$D_K^\star$、Δ_K等，都是相对于锥形结构 $(1 - \frac{1}{k})\Delta_3$定义的。

在 [CDHP] 中得到的主要估计如下。关于类似的讨论（在简化的情形下），请参阅 [Biq97]这篇优美的文章。

定理 2.11。 [CDHP，定理 7。9] 令 h_L 为引理 *2.9* 中的调和度量。存在常数 $C > 0$，使得对于任意在 $X \setminus \Delta_2$中具有紧支集、在锥意义下光滑的 L值微分形式 u，不等式

$$\|u\|_{L^2}^2 + \int_X \langle \Delta_K u, u\rangle\, dV_{\omega_D} \geqslant \frac{1}{C}\int_X \Big(|u|^2|\theta_0|^2 + \langle [D_{h_L}, D_{h_L}^\star]u, u\rangle\Big)\, dV_{\omega_D} \tag{2.11.1}$$

成立。

证明思路。 我们简要说明证明思路。利用恒等式 $D_K = D_{h_L} + 2\theta_0$，可得

$$[D_K, D_K^\star] = [D_{h_L}, D_{h_L}^\star] + 4[\theta_0, \theta_0^\star] + 2[D_{h_L}, \theta_0^\star] + 2[\theta_0, D_{h_L}^\star]. \tag{2.11.2}$$

我们可以证明

$$[D'_{h_L}, \theta_0^\star]u = \theta_0^\star \lrcorner \nabla^{1,0}_{\mathrm{cov}} u,$$

其中 $\nabla^{1,\ 0}_{\mathrm{cov}} u$ 表示（1，0）型协变导数。此外，利用 [Siu82], ，我们有

$$\|\nabla^{1,0}_{\mathrm{cov}} u\|^2 \simeq \|\bar{\partial} u\|^2 + \|\bar{\partial}^\star u\|^2.$$

结合这三个要素即可得到 (2.11.1)。 □

现在我们说明定理 2.11 的几个推论。

- 若 $u \in L^2$ 且 $\Delta_K u \in L^2$，则由 (2.11.1) 可得

$$\int_X \log^2 |s_{D_i}|\, |u|^2\, \omega_D^n < +\infty$$

对任意 $D_i \subset \Delta_2$均成立。事实上，这是因为 θ_0 在 Δ_2 的各分支上的留数均非零。

- 更一般地，我们考虑加权测度

$$d\mu_a := \prod_{D_i \subset \Delta_2} \log^{2a_i}(|s_{D_i}|^2)\, dV_{\omega_D},$$

其中 $a_i \in \mathbb{N}$。于是存在正常数 C_i，使得不等式

$$C_0 \int_X |u|^2\, d\mu_a + \int_X \langle \Delta_K u, u\rangle\, d\mu_a \geqslant C_1 \int_X |\theta_0|^2_{\omega_D} |u|^2\, d\mu_a + C_2 \int_X \langle [D_{h_L}, D_{h_L}^\star]u, u\rangle\, d\mu_a$$

成立。

• 利用上述两个性质，我们可以证明，对于调和形式 u，也就是说，在 $X \setminus \Delta_2$ 上有 $u \in L^2$和 $\Delta_K u = 0$，我们有

$$\int_X |\nabla^k_{\mathrm{cov}} u|^2 \, d\mu_a < +\infty \tag{2.11.3}$$

对于任意的 $a_i \in \mathbb{N}$ 和 $k \in \mathbb{N}$。这里，∇_{cov} 表示关于（ω_D，h_L）的协变导数。

注意，由于 ω_D 沿着 Δ_2完备，因此在完备度量空间上定义光滑形式有多种方式。受 $\mathbb{R}^n$ 上的 Schwartz空间定义以及（2.11.3）的启发，我们引入以下定义。

定义 2.12。 [CDHP，定义 8。9] 在本小节的设定下，我们将 $\mathcal{C}^\infty_K(X, L)$记为由 L取值的微分形式 u 构成的空间，这些微分形式在 $X \setminus \Delta_2$ 上锥意义下光滑，并满足

$$\int_X |\nabla^k_{\mathrm{cov}} u|^2 \, d\mu_a < +\infty$$

对于所有 $k \in \mathbb{N}$ 以及所有多重指标 $a = (a_i)_{i \in I} \in \mathbb{N}^I$。

空间 $\mathcal{C}^\infty_K(X, L)$ 还有另一项重要性质。

注2.13。 设 $\beta \in H^0\big(X, \Omega^1_X(\log D)\big)$。根据 Δ_2的定义，微分形式 β沿着 Δ_2只有对数极点。于是，由定义 *2.12*，若 $f \in \mathcal{C}^\infty_K(X, L)$，则有

$$\beta \wedge f \in \mathcal{C}^\infty_K(X, L).$$

得益于定理 2.11 和引理 2.9 中的关键条件，我们得到了算子 Δ_K的椭圆正则性结果。特别地，我们有如下结论。

命题2.14。 设 $g \in L^2$ 和 $f \in$ 定义域(Δ_K) 满足 $\Delta_K f = g$。若 $g \in \mathcal{C}^\infty_K(X, L)$，则

$$f \in \mathcal{C}^\infty_K(X, L), \qquad D_K f \in \mathcal{C}^\infty_K(X, L), \qquad D^\star_K f \in \mathcal{C}^\infty_K(X, L).$$

最后，我们建立如下强Hodge分解定理。

定理 2.15。 [CDHP，定理 8。20] 我们有强*Hodge*分解

$$\mathcal{C}^\infty_K(X, L) = \operatorname{Ker} \Delta_K \oplus \operatorname{Im} \Delta_K = \operatorname{Ker} \Delta_K \oplus \operatorname{Im} D_K \oplus \operatorname{Im} D^\star_K$$

在锥形意义下。此外，核 Δ_K 是有限维的。

证明思路。 主要思路如下。由于度量 ω_D 沿着 Δ_2是完备的， L^2- 霍奇理论 [Dem-book]给出了分解

$$L^2_\bullet(X, L) = \operatorname{Ker} \Delta_K \oplus \overline{\operatorname{Im} \Delta_K}$$

在锥形意义下。因此，关键是证明 $\operatorname{Im} \Delta_K = \operatorname{Im} \Delta_K$。

反设 $\operatorname{Im} \Delta_K \neq \operatorname{Im} \Delta_K$。那么存在一个序列 f_m，使得$\|f_m\|_{H^1} = 1$、 $\Delta_K f_m \to 0$，且 $f_m \perp \operatorname{Ker} \Delta_K$。取一个子列，我们有 $f_m \rightharpoonup f_0$ 在 H^1中弱收敛，且 $\Delta_K f_0 = 0$ 、 $f_0 \perp \operatorname{Ker} \Delta_K$，因此 $f_0 = 0$。

另一方面，在任意紧子集 $K \Subset X \setminus \Delta_2$上，椭圆正则性意味着 $f_m \to f_0$在 H^1中强收敛。在 Δ_2附近，定理 2.11结合引理 2.9中的关系表明，L^2范数下的 f_m 可以任意小。因此，对于某个常数 $c > 0$，有 $\|f_0\|_{L^2} \geqslant c$，这就产生了矛盾。

$\dim \operatorname{Ker} \Delta_K$ 的有限性可由类似的论证得出。 □

¯定理 2.15 的一个主要推论是以下 $\partial\partial$-引理。

C推论 2.16. 设 $u \in \mathcal{C}^\infty_K(X, L)$。如果 $u \in \operatorname{Im} D_K \cap \operatorname{Ker} D^c_K$在 $X \setminus \Delta_2$上以锥形意义成立，则 n

$$u = D_K \circ D^c_K v \qquad on\ X \setminus \Delta_2$$

对某个 $v \in \mathcal{C}^\infty_K(X, L)$，以锥形意义成立。

最后，我们提出以下问题。

Que问题 2.17. 上述霍奇理论能否推广到高秩情形？这个问题 n 是代数 当 维数 $X = 1$ 准备就绪时，非常有趣。

2.3. **超上同调的解消**。 给定一个对数全纯平坦线丛 $(L,\nabla)\in M_{DR}(X/D)$，它导出两个自然对象。

首先，正如我们在本节开头已经提到的，对数平坦联络 ∇ 诱导出复形

$$0\to\mathcal{O}_X(L)\to\mathcal{O}_X(L)\otimes\Omega^1_X(\log D)\to\mathcal{O}_X(L)\otimes\Omega^2_X(\log D)\to\cdots\to\mathcal{O}_X(L)\otimes\Omega^n_X(\log D)\to 0. \tag{2.17.1}$$

令 $\mathbb{H}^\bullet(X,L\otimes\Omega^\bullet_X(\log D))$表示（2.17.1）的超上同调。

其次， ∇ 的平行移动在 $X\setminus D$上诱导出一个自然的秩一局部系统。令$M_{\mathrm{B}}(X\setminus D)$为 $X\setminus D$ 上的秩一局部系统空间。平行移动诱导出一个自然映射

$$\rho: M_{DR}(X/D)\longrightarrow M_{\mathrm{B}}(X\setminus D). \tag{2.17.2}$$

根据 [Del70, II, 6.10], ，这个映射是满射：给定 $X\setminus D$上的一个平坦丛，它可以延拓为 X上的全纯线丛，而平坦联络可能沿 D出现简单极点。此外， ρ 的核同构于 $\mathbb{Z}^m$。事实上，给定一个对数平坦丛（L,∇），对于任意 $a_i\in\mathbb{Z}$，我们都可以构造新的对数平坦丛 $L\otimes\prod\mathcal{I}_{D_i}^{a_i}$，而 ∇ 在 $L\otimes\prod\mathcal{I}_{D_i}^{a_i}$ 上诱导出一个平坦联络 ∇'，其沿 D有对数极点。

在上同调层面上，我们有如下由 Deligne 提出的基本结果。

定理 2.18. [Del70, II, 6.10] 设 $(L,\nabla)\in M_{DR}(X/D)$. 若对每个 D_i，都有 留数$_{D_i}(L,\nabla)\notin\mathbb{N}^\star$，则对所有 p,

$$\mathbb{H}^p\big(X,L\otimes\Omega^\bullet_X(\log D)\big)\simeq H^p\big(X\setminus D,\rho(L,\nabla)\big).$$

在 [CDHP]，中，我们利用定义 2.12 中定义的光滑形式空间 $\mathcal{C}^\infty_K(X,L)$ 构造了复形 (2.17.1) 的一个自然解。结合 Hodge 分解定理 2.15，我们可以利用 $\mathcal{C}^\infty_K(X,L)$ 计算 $H^\bullet(X\setminus D,\rho(L,\nabla))$。下面我们简要说明这些构造。

令 ω_D 为 (2.9.1) 中定义的庞加莱–锥度量，并令 $\mathcal{C}^\infty_K(X,L)$ 为相对于 (h_L,ω_D)、在定义 2.12 中定义的空间。

注意到，在 Δ_1的一般点附近， h_L 和 ω_D 是光滑的。因此，对于 $u\in\mathcal{C}^\infty_K$（X， L），微分形式 u在 Δ_1 的一般点附近具有经典意义下的光滑性。为研究层 $\mathcal{O}_X(L)\otimes\Omega^\bullet_X(\log D)$，我们引入如下对数锥光滑空间，作为定义 1.9 的类似物。

定义 2.19。 令 $\mathcal{C}^\infty_K$（X、Δ_1、L）表示局部上具有如下形式的微分形式所构成的空间

$$\sum_{I\subset J}\frac{dz_I}{z_I}\wedge f_I,$$

其中 $f_I\in\mathcal{C}^\infty_K$（$X$、$L$），且 $\prod_{i\in J}z_i=0$ 在局部定义 Δ_1。

我们用 $\mathcal{C}^\infty_K$（Δ_1、L）表示由 $\mathcal{C}^\infty_K$（X、Δ_1、L）的局部截面生成的层。

于是得到如下局部可解性结果。

定理 2.20。 [CDHP，推论 9。9] 令 h_L 为引理 *2.9* 中的调和微分形式。令 $U\subset X$ 为一个小的 *Stein* 开集，并令 $f\in\mathcal{C}^\infty_{s,\,K}$（$U$、$\Delta_1$、$L$）满足 $D_Kf=0$ 和 $f\in L^2(U)$。

(2.20.1) 若 $s>n$，则存在 $g\in\mathcal{C}^\infty_{s-1,\,K}(U$、$\Delta_1$、$L)$ 使得 $g\in L^2(U)$ 并且 $D_Kg=f$ 在 $U\setminus D$ 上。

(2.20.2) 若 $s\leqslant n$，则存在 $g\in\mathcal{C}^\infty_{s-1,\,K}(U$、$\Delta_1$、$L)$ 使得 $g\in L^2(U)$ 并且

$$f-D_Kg\in H^0\big(U,\Omega^s_X(\log D)\otimes L\big),\qquad\nabla(f-D_Kg)=0.$$

证明。证明依赖于 A. Fujiki [Fuj92] 给出的一个估计，以及椭圆估计 (2.11.1)。详情请参见 [CDHP, Cor 9.9] 。□

根据引理 2.9 中调和度量的选取，我们有 $\nu(h_L)<0$ 在 $\Delta_2+\Delta_3$ 上，以及$\nu(h_L)=0$ 在 Δ_1 上。因此，存在一个层的自然嵌入

$$i:\Omega^\bullet_X(\log D)\otimes L\subset\mathcal{C}^\infty_{\bullet,K}(\Delta_1,L). \tag{2.20.3}$$

作为定理 2.20 的推论，我们得到以下结果。

定理2.21. 以下层复形之间的自然包含态射 i (2.20.3)是拟同构:

$$i : (\Omega_X^\bullet(\log D) \otimes L, \nabla) \longrightarrow (\mathcal{C}^\infty_{\bullet,K}(\Delta_1, L), D_K)$$

特别地，我们有一个同构

$$\frac{\operatorname{Ker} D_K : \mathcal{C}^\infty_{\bullet,K}(X, \Delta_1, L) \to \mathcal{C}^\infty_{\bullet+1,K}(X, \Delta_1, L)}{\operatorname{Im} D_K : \mathcal{C}^\infty_{\bullet-1,K}(X, \Delta_1, L) \to \mathcal{C}^\infty_{\bullet,K}(X, \Delta_1, L)} \simeq \mathbb{H}^\bullet(X, L \otimes \Omega_X^\bullet(\log D)).$$

在特殊情形 $\Delta_1 = 0$ 中，我们得到如下精细化。

定理 2.22. 若 $\Delta_1 = 0$，则以下三个空间典范同构:

$$\operatorname{Ker} \Delta_K \simeq \frac{\operatorname{Ker} D_K : \mathcal{C}^\infty_{\bullet,K}(X, \Delta_1, L) \to \mathcal{C}^\infty_{\bullet+1,K}(X, \Delta_1, L)}{\operatorname{Im} D_K : \mathcal{C}^\infty_{\bullet-1,K}(X, \Delta_1, L) \to \mathcal{C}^\infty_{\bullet,K}(X, \Delta_1, L)} \simeq \mathbb{H}^\bullet(X, L \otimes \Omega_X^\bullet(\log D)).$$

证明. 这直接由定理 2.15 与定理2.21 得出。 □

3. 流的霍奇分解与一个正则性引理

在前两节中，我们建立了锥光滑形式 $\mathcal{C}^\infty(X, L)$ 与 $\mathcal{C}^\infty_K(X, L)$ 的霍奇理论。特别地，我们得到了 $\mathcal{C}^\infty(X, L)$ 与 $\mathcal{C}^\infty_K(X, L)$ 中微分形式的 $\partial\partial$-引理（定理 1.7 与定理 2.16）。然而，正如我们在定理2.21 中已经观察到的，为了研究超上同调

$$\mathbb{H}^\bullet\big(X, L \otimes \Omega_X^\bullet(\log D)\big),$$

我们需要考虑一个更大的空间，即 $\mathcal{C}^\infty_K(X, \Delta_1, L)$。

得益于 Noguchi [Nog95], 提出的一个巧妙想法，我们可以通过将 $\mathcal{C}^\infty_K(X, \Delta_1, L)$ 嵌入 $\mathcal{C}^\infty_K(X, L)$ 的对偶空间来研究它，也就是说，将其嵌入流空间。这种方法有两个关键要素。第一个是流的霍奇分解，即所谓的德拉姆–小平分解。第二个是一个正则性引理，它指出，如果一个对数形式模去支撑在 Δ_1 上的零阶流后是 ∂-恰当的，那么就可以找到一个对数解来满足 ∂-方程。本节回顾其中一部分思路，并说明如何将其应用于我们的广义情形。

3.1. **流的德拉姆–小平分解与 $\partial\partial$-引理。** 我们先简要回顾经典的德拉姆–小平分解定理 [DK]。设 X 是一个配备凯勒度量 ω_X 的紧致凯勒流形。设 T 是 X 上的一个 (p, q)-流，且 $(\xi_i)_i$ 是一组类型为 (p, q) 的调和形式的标准正交基。我们将 T 的调和投影定义为

$$\mathcal{H}(T) := \sum_i \langle T, \xi_i \rangle \, \xi_i, \tag{3.0.1}$$

其中配对 $\langle T, \xi_i \rangle$ 定义为

$$\langle T, \xi \rangle := \int_X T \wedge \sharp\xi. \tag{3.0.2}$$

这里 $\sharp$ 表示 Hodge 星算子。特别地， ξ 是调和的，当且仅当 $\sharp\xi$ 是调和的[Dem-book，第 VI 章，（3.18）]

我们通过对偶性定义流上的格林算子:

$$\int_X \mathcal{G}(T) \wedge \phi := \int_X T \wedge G(\phi), \tag{3.0.3}$$

对于任意光滑形式 ϕ，其中 G是（光滑）格林算子。于是得到 de Rham–Kodaira 分解。

定理 3.1（de Rham–Kodaira）。 我们有如下分解

$$T = \mathcal{H}(T) + \Delta''\big(\mathcal{G}(T)\big). \tag{3.1.1}$$

此外，若 T 是 ∂-闭的，则

$$T = \mathcal{H}(T) + \bar\partial T_1, \tag{3.1.2}$$

其中 $T_1 := \bar\partial^\star(\mathcal{G}(T))$。

证明。 第一个结论直接由光滑Hodge分解以及 $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{G}$ 的定义得出。

对于第二个陈述，注意到 $\mathcal{H}(T)$ 根据 (3.0.1) 是 ∂-闭的。将 ∂ 应用于 (3.1.1)，并利用 $\partial T = 0$，可得

$$\Delta'' \bar{\partial}(\mathcal{G}(T)) = 0.$$

由此可知，$\bar{\partial}\big(\mathcal{G}(T)\big)$ 是光滑的，进而通过分部积分论证可得

$$\bar{\partial}^{\star}\bar{\partial}\big(\mathcal{G}(T)\big) = 0.$$

这便推出 (3.1.2)。 □

作为定理 3.1 的一个应用，我们得到流的 $\partial\bar{\partial}$-引理。

定理 *3.2*。 *</style}*设 T 是一个 ∂-闭的流，且 $\bar{\partial}$-恰当（就流而言）。则存在一个流 S 使得

$$T = \partial\bar{\partial}S.$$

特别地，若进一步有 T 的总次数为1，则 $T = 0$。

作为定理 3.2 的一个漂亮应用，我们得到以下 Noguchi [Nog95] 的结果。射影情形在 [Del71] 中得到证明。

推论 3.3. [Nog95] 设 X 为一个紧致凯勒流形。设 $\alpha \in H^0\big(X、\Omega^1_X(\text{对数 } D)\big)$。那么$\partial\alpha = 0$。

证明. 由于 α 是一个全纯 1-形式， $\partial\alpha$ 由 D的分支上的一组常值函数给出。特别地，这个流是 ∂-闭的，并且显然是 ∂-恰当的。

根据 $\partial\bar{\partial}$-引理（定理 3.2），存在一个流 T 使得

$$\bar{\partial}\alpha = \partial\bar{\partial}T.$$

于是， $\alpha - \partial T$是 ∂-闭的 $(1,0)$ 流，定义在 X上。由针对 $\partial + \partial^{\star}$的椭圆正则性可知，流 $\alpha - \partial T$是光滑的，因此

$$\alpha - \partial T \in H^0\big(X, \Omega^1_X\big).$$

特别地， $\alpha - \partial T$是 ∂-闭的，因此 α也如此。 □

注 3.4. 更一般地，如 $[\mathrm{Del71}, \mathrm{Nog95}]$, 所证明的，对于任意 $\alpha \in H^0\big(X，\Omega^k_X(\text{对数 } D)\big)$ 都有 $\partial\alpha = 0$。证明结合上述论证，并对 D每个层上的 α 的留数作归纳。

借助类似的思路，我们可以将定理 3.1 和定理 3.2 推广到第 1 节和第 2 节的情形。我们首先定义锥形意义下的流。

定义 3.5. 设 (X, ω_X) 是一个紧致凯勒流形，且 $L \to X$ 是一个全纯线丛。假设 L 具有一个（可能奇异的）度量 h_L ，使得

$$i\Theta_{h_L}(L) = \sum a_i[D_i] + \theta, \tag{3.5.1}$$

其中 $D := \sum D_i$是一个简单正规交叉除子， $a_i \in \mathbb{Q}$，且 θ是 X 上光滑的$(1、1)$-微分形式。

设 $\omega_{\mathcal{C}}$ 是如$(1.0.4)$中所述的锥形凯勒度量。一个$(p、q)$型的 L-值锥形流 T 是一个L-值流，满足存在常数 $C > 0$ 和整数 $d \geqslant 0$ ，使得

$$\left| \int_X T \wedge \phi \right|^2 \leqslant C \sum_{s=0}^{d} \sup_{X \setminus Y} \left| \nabla^s \phi \right|^2_{h_L^{\star}, \omega_{\mathcal{C}}} \tag{3.5.2}$$

对所有 $L^{\star}$-值$(n-p、\ n-q)$-微分形式 ϕ ，若它们关于 $h_L^{\star}$在锥意义下光滑，则

我们用 $\mathcal{D}(X、\ L)$ 表示所有关于 $h_L、\ \omega_{\mathcal{C}}$的 L-值锥形流所构成的空间 .

例 3.6。 设 Δ_1 是一个简单正规交除子，使得 $\Delta_1 + D$ 是简单正规交的，且与其没有共同分支。设 $u \in \mathcal{C}^{\infty}(X、\ \Delta_1、\ L)$ 是一个在锥意义下光滑且沿Δ_1 有对数极点的微分形式（参见定义 *1.9*）。则 $u \in \mathcal{D}(X、\ L)$。

注意，将导数 ∂u 视为锥形流时，它可能有支撑在 Δ_1上的除子部分。

类比经典的 de Rham–Kodaira 定理，我们可以为 $\mathcal{D}(X,\ L)$ 中的流定义格林算子 $\mathcal{G}$和调和投影 $\mathcal{H}$ 。通过与上文相同的论证，我们得到¯以下锥形流的德拉姆–小平分解和 $\partial\partial$-引理。

T定理 3.7（de Rham–Kodaira）。 在定义 *3.5* 的设定下，设 $T \in \mathcal{D}$（X, L）。则

$$T = \mathcal{H}(T) + \Delta''\big(\mathcal{G}(T)\big).$$

¯此外，若 T 在锥形意义下是 ∂-闭的，则

$$T = \mathcal{H}(T) + \bar{\partial} T_1, \qquad T_1 := \bar{\partial}^{\star}\big(\mathcal{G}(T)\big).$$

¯**定理 3.8**。 在定义 *3.5* 的设定下，设 $T \in \mathcal{D}$（X, L）。若 T 在锥形流意义下是 ∂-闭且 ∂-恰当的，则存在 $S \in \mathcal{D}$（X, L），使得

$$T = \partial\bar{\partial} S$$

在锥形流意义下。特别地，若此外 T 的总次数为 1，则 $T = 0$。

现在设 $(L,\ \nabla) \in M_{DR}(X/D)$。我们还可以如下定义流空间，即 $\mathcal{C}^{\infty}_{K}(X,\ L)$ 的对偶空间。

定义 3.9。 在定义 *2.12* 的设定下，空间 $\mathcal{D}_K$（X, L）由 L 值流 T 组成，且满足存在常数 $C > 0$ 及正整数 d, a，使得不等式

$$\left|\int_X T \wedge \phi\right|^2 \leqslant C \sum_{s=0}^{d} \int_X \left|\nabla^s_{\mathrm{cov}} \phi\right|^2_{h_L^{\star}, \omega_{\mathcal{C}}} \, d\mu_a \tag{3.9.1}$$

对所有 $\phi \in \mathcal{C}^{\infty}_{K}(X, L^{\star})$ 成立。

微分 D_K 在流的空间上诱导一个算子。首先注意到，由于 h_L 在 Δ_1的一般点处是光滑的，我们有包含关系

$$\mathcal{C}^{\infty}_{K}(X, \Delta_1, L) \subset \mathcal{D}_K(X, L).$$

定义 3.10. 我们用 $\mathcal{D}_K$ 表示由对偶定义的、作用在 $\mathcal{D}_K(X, L)$ 上的算子

$$\int_X \mathcal{D}_K T \wedge \phi = (-1)^{\bullet} \int_X T \wedge D_K \phi$$

对每一个 $T \in \mathcal{D}_K(X, L)$ 和 $\phi \in \mathcal{C}^{\infty}_{K}(X, L^{\star})$。于是 $\mathcal{D}_K$ 作用在 $\mathcal{D}_K(X, L)$上：

$$\mathcal{D}_K : \mathcal{D}_K(X, L) \to \mathcal{D}_K(X, L).$$

注意，我们同样可以有算子

$$D_K : \mathcal{C}^{\infty}_{K}(X, \Delta_1, L) \to \mathcal{C}^{\infty}_{K}(X, \Delta_1, L)$$

通过忽略可能出现的当前分量。于是 $\mathcal{D}_K$ 与 D_K 在 $\mathcal{C}^{\infty}_{K}(X, L)$ 上一致，但在 $\mathcal{C}^{\infty}_{K}(X, \Delta_1, L)$ 上并不一致：若 u 沿 Δ_1 具有对数极点，则 $\mathcal{D}_K u$ 可能含有支集位于 Δ_1 上的除子部分。

与锥形情形一样，我们也有德拉姆–小平分解，以及流在 $\mathcal{D}_K(X, L)$ 中的 $\mathcal{D}_K\mathcal{D}^c_K$-引理。

定理 3.11（德拉姆–小平）。 在定义 *3.9* 的设定下，令 $T \in \mathcal{D}_K$（X, L）。则

$$T = \mathcal{H}(T) + \Delta_K\big(\mathcal{G}(T)\big).$$

此外，如果 T 是 $\mathcal{D}_K$-闭的，则

$$T = \mathcal{H}(T) + \mathcal{D}_K T_1, \qquad T_1 := \mathcal{D}^{\star}_K\big(\mathcal{G}(T)\big).$$

定理 3.12。 在定义 *3.9* 的设定下，令 $T \in \mathcal{D}_K$（X, L）。如果 T 是 $\mathcal{D}_K$-闭且 $\mathcal{D}^c_K$-恰当的，则存在 $S \in \mathcal{D}_K$（X, L）使得

$$T = \mathcal{D}_K \circ \mathcal{D}^c_K \, S.$$

特别地，如果此外 T 的总次数小于1，那么 $T = 0$。

3.2. **正则性引理**。 在本小节中，我们讨论本节引言中提到的另一个问题。也就是说，给定一个对数形式 u，如果 u 在流的意义下模去一个除子部分后是 ∂-恰当的¯，那么 u在对数光滑意义下是 ∂-恰当的。该结论在经典情形下已由 [LRW] 证明，并在 [CDHP]中推广到流空间 $\mathcal{D}_K(X,\ L)$。为说明其思路，我们在此简述锥形流情形下的证明。

引理 3.13. 设 X 是一个紧致凯勒流形， $D=\Delta_1+\Delta_2$ 是X上的一个简单正规交除子。设 L 是 X 上的一个全纯线丛，配备可能奇异的度量 h_L ，满足

$$i\Theta_{h_L}(L)=\sum_{D_i\subset\Delta_2}a_i[D_i]+\theta$$

对某个 $a_i\in\mathbb{Q}$成立，其中 θ 是一个光滑形式。设 $u\in\mathcal{C}^\infty_{(p,q)}(X,\Delta_1,L)$ 满足

$$u=\bar\partial T+T_{\Delta_1} \tag{3.13.1}$$

在锥形流意义下成立，其中 T 是一个锥形流， T_{Δ_1} 是一个支撑在 Δ_1上的零阶锥形流。则存在 $v\in\mathcal{C}^\infty_{(p,q-1)}(X,\Delta_1,L)$ 使得

$$u=\bar\partial v\qquad on\ X\setminus\Delta_1$$

在锥形意义下成立。

证明。令

$$E:=\Omega^p_X(\log\Delta_1)\otimes L,$$

这是一个全纯向量丛。设 g_D 是由 (1.9.1) 在 E 上诱导的厄米度量。设 $\mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(X,E)$ 是定理 1.10 之前引入的空间。如其中所述，我们有如下同一

$$\mathcal{I}:\mathcal{C}^\infty_{p,q}(X,\Delta_1,L)\longrightarrow\mathcal{C}^\infty_{0,q}(X,E).$$

设（$E^\star,g_D^\star$）为带有对偶度量的对偶丛，它同样给出空间$\mathcal{C}^\infty_{n,q}$（$X,E^\star$）。我们还引入了自然映射

$$\iota:\mathcal{C}^\infty_{n,q}(X,E^\star)\longrightarrow\mathcal{C}^\infty_{n-p,n-q}(X,L^\star),$$

它由与向量场的收缩得到。可以验证

$$\int_X\mathcal{I}(u)\wedge s\ =\ \int_X u\wedge\iota(s) \tag{3.13.2}$$

对每一个$u\in\mathcal{C}^\infty_{p,q}$（$X,\Delta_1,L$）和$s\in\mathcal{C}^\infty_{n,q}$（$X,E^\star$）。

¯我们指出，(3.13.1) 在锥形意义下蕴含 $\partial\mathcal{I}$（u）$=0$。因此，Hodge 分解 o-sitio n 定理（定理 1.10）得到

$$\mathcal{I}(u)=\mathcal{H}+\bar\partial v_1, \tag{3.13.3}$$

其中 $\mathcal{H}$ 是 Δ''-调和的，且 $v_1\in\mathcal{C}^\infty_{(0,q-1)}(X,E)$。

我们断言 $\mathcal{H}=0$。引入如下反线性算子

$$\sharp:\mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(X,E)\longrightarrow\mathcal{C}^\infty_{(n,n-q)}(X,E^\star)$$

其定义性质为

$$\int_X\langle s_1,s_2\rangle_{g_D}\,\omega_{\mathcal{C}}^n=\int_X s_1\wedge\sharp s_2$$

对所有 $s_1,\ s_2\in\mathcal{C}^\infty_{(0,q)}(X,\ E)$。由于 $\mathcal{H}$ 是调和的，我们有

$$\bar\partial(\sharp\mathcal{H})=0. \tag{3.13.4}$$

此外，

$$\begin{aligned}\int_X|\mathcal{H}|^2\,\omega_{\mathcal{C}}^n&=\int_X\langle\mathcal{I}(u),\mathcal{H}\rangle\,\omega_{\mathcal{C}}^n=\int_X\mathcal{I}(u)\wedge\sharp\mathcal{H}\\&=\int_X u\wedge\iota(\sharp\mathcal{H}),\end{aligned} \tag{3.13.5}$$

其中最后一个等式由 (3.13.2) 得出。利用 (3.13.1)，我们得到

$$\int_X u\wedge\iota(\sharp\mathcal{H})=\int_X(\bar\partial T+T_{\Delta_1})\wedge\iota(\sharp\mathcal{H}). \tag{3.13.6}$$

注意， $\iota(\sharp\mathcal{H})$ 是通过与 $T_X\langle\Delta_1\rangle$ 收缩得到的。由于 T_{Δ_1} 的阶为零，我们有

$$\int_X T_{\Delta_1}\wedge\iota(\sharp\mathcal{H})=0.$$

因此，

$$\begin{aligned}\int_X|\mathcal{H}|^2\,\omega_{\mathcal{C}}^n&=\int_X\bar\partial T\wedge\iota(\sharp\mathcal{H})=(-1)^\bullet\int_X T\wedge\bar\partial\big(\iota(\sharp\mathcal{H})\big)\\&=(-1)^\bullet\int_X T\wedge\iota\big(\bar\partial(\sharp\mathcal{H})\big)=0,\end{aligned}\tag{3.13.7}$$

其中最后一个等式由 (3.13.4) 得出。因此 $\mathcal{H}=0$。

因此，由 (3.13.3) 可得 $\mathcal{I}(u)=\bar\partial v_1$，其中 $v_1\in\mathcal{C}^\infty_{(0,q-1)}(X,\ E)$。令 $v:=\mathcal{I}^{-1}(v_1)\in\mathcal{C}^\infty_{(p,q-1)}(X,\ \Delta_1,\ L)$，我们得到

$$u=\bar\partial v\qquad\text{on } X\setminus\Delta_1$$

在锥形意义下。 □

现在，结合定理 1.11 和引理 3.13，我们得到以下推论。

推论 3.14. 设 X 是一个紧致凯勒流形，且 $D=\Delta_1+\Delta_2$ 是其上的一个简单正规交叉除子 X. 设 L 是定义在 X 上的全纯线丛，赋有一个可能是奇异的度量 h_L，使得

$$i\Theta_{h_L}(L)=\sum_{D_i\subset\Delta_2}a_i[D_i]+\theta$$

对某个 $a_i\in[-1,0[\cap\mathbb{Q}$, 成立，其中 θ 是光滑形式。令 $A^{p,\ q}(X,D,L)$ 为沿 D 具有对数极点的 L-值光滑形式空间，这里的对数极点取经典意义。

设 $u\in A^{p,\ q}(X,D,L)$。则

$$u\in\mathcal{C}^\infty(X,\Delta_1,L)\subset\mathcal{D}(X,L).$$

此外，如果

$$u=\bar\partial T+T_{\Delta_1}$$

在锥形流空间 $\mathcal{D}(X,L)$ 中，其中 $T\in\mathcal{D}(X,L)$ 和 $T_{\Delta_1}\in\mathcal{D}(X,L)$ 是支撑在 Δ_1 上的零阶流，那么存在一个 $\beta\in A^{p,\ q-1}(X,D,L)$，使得

$$u=\bar\partial\beta\qquad on\ X\setminus D.$$

引理 3.13 可以推广到关于算子 D_K 的空间 $\mathcal{C}^\infty_K(X,\ \Delta_1,\ L)$。更准确地说，我们证明了以下正则性引理。

引理 3.15. [CDHP，命题 10.17] 在定义 *2.12* 的设定下，设 $u\in\mathcal{C}^\infty_K(X,\Delta_1,L)$。假设存在一个流 $T\in\mathcal{D}_K(X,L)$，使得

$$u=\mathcal{D}_KT+T_{\Delta_1},\tag{3.15.1}$$

其中，$T_{\Delta_1}\in\mathcal{D}_K(X,L)$ 是一个支撑于 Δ_1 上的零阶流。那么存在 $v\in\mathcal{C}^\infty_K(X,\Delta_1,L)$，使得

$$u=D_Kv\qquad on\ X\setminus\Delta_1.\tag{3.15.2}$$

3.3. **一个对数典范消失定理**。 最后，作为所建立理论的一个应用， d
abov我们证明以下消失定理，它将非常有用。

定理 3.16. [CP23，定理 1.1] 设 X 是一个 n 维紧致 *Kähler* 流形，并设$D=\Delta_1+\Delta_2$ 是 X 上的一个简单正规交除子。设 s_{Δ_1} 是 Δ_1 的典范截面。设(L,h_L) 是 X 上的一个全纯线丛，使得

$$i\Theta_{h_L}(L)=\sum_{D_i\subset\Delta_2}a_i[D_i]+\theta,$$

其中 $a_i\in]0、\ 1[\cap\mathbb{Q}$ 与 $\theta\geqslant0$ 是光滑半正形。

¯设 λ 是取值于 $L+\Delta_1$的 ∂-闭光滑(n,q)-微分形式。若存在两个取值于 L、沿 D 具有对数极点的微分形式β_1 与 β_2 ，使得

$$\frac{\lambda}{s_{\Delta_1}} = D'_{h_L}\beta_1 + \theta\wedge\beta_2 \qquad on\ X\setminus D, \tag{3.16.1}$$

¯那么 λ是 ∂-恰当的，即

$$[\lambda] = 0 \in H^q\big(X, K_X + L + \Delta_1\big).$$

我们在这里给出一个与原证明略有不同的证明。在原证明中，关键引理 [CP23, 引理 4.3] 是结合格林算子和霍奇分解的性质，通过归纳法证明的。这里我们通过在 Δ_1 的每个层上使用¯the $\partial\partial$-引理，给出 [CP23, 引理 4.3]的另一种证明。这正是 [CDHP, 第10节2] 中所采用的思路。

证明。 设 $\varphi \in C^\infty_{(0,n-q)}\big(X,\ -L-\Delta_1\big)$ 是一个在 $X\setminus Y$ 中具有紧支集的检验形式。设 $\omega_{\mathcal{C}}$是与 $(L,\ h_L)$ 相关联的锥度量，并在 Δ_1 上赋予任意的光滑度量 h_1。根据定理1.6，对于 $(L+\Delta_1,\ h_L\cdot h_1,\ \omega_{\mathcal{C}})$，我们有锥Hodge分解：

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \qquad \varphi_1 \in \operatorname{Ker}\bar\partial, \quad \varphi_2 \in (\operatorname{Ker}\bar\partial)^\perp. \tag{3.16.2}$$

我们断言

$$\int_X \lambda\wedge\varphi_1 = 0 \tag{3.16.3}$$

并且存在常数 $C>0$ 使得

$$\int_X |\varphi_2|^2\,\omega_{\mathcal{C}}^n \leqslant C\int_X |\bar\partial\varphi_2|^2\,\omega_{\mathcal{C}}^n = C\int_X |\bar\partial\varphi|^2\,\omega_{\mathcal{C}}^n. \tag{3.16.4}$$

一旦确立了(3.16.3)与(3.16.4)，标准的泛函分析论证即蕴含$[\lambda]=0\in H^q(X,K_X+L+\Delta_1)$。

估计(3.16.4)由锥Hodge分解定理1.6中$\operatorname{Im}\Delta''$ 的闭性得出。我们现在解释(3.16.3)的证明。

假设$\Delta_1=\sum_{i=1}^m E_i$。令

$$E_{i_1,\dots,i_k} := E_{i_1}\cap\cdots\cap E_{i_k},$$

并令留数$_{i_1,\dots,i_k}$ 表示层$E_{i_1,\dots,i_k}$上的留数。对(3.16.1)取留数可得

$$\operatorname{Res}_{i_1,\dots,i_k}\left(\frac{\lambda}{s_{\Delta_1}}\right) = D'_{h_L}\operatorname{Res}_{i_1,\dots,i_k}(\beta_1) + \theta\wedge\operatorname{Res}_{i_1,\dots,i_k}(\beta_2) \qquad \text{on } E_{i_1,\dots,i_k}, \tag{3.16.5}$$

它是 E_{i_1} 上取值于 L 的锥形流 $_{,\dots,i_k}$.

我们断言，对每个多重指标（i_1，. . . ， i_k），

$$\operatorname{Res}_{i_1,\dots,i_k}\left(\frac{\lambda}{s_{\Delta_1}}\right) = \bar\partial R_{i_1,\dots,i_k} + \sum_j [R_{j,i_1,\dots,i_k}], \tag{3.16.6}$$

其中，$R_{i_1,\dots,i_k}$ 是 $E_{i_1,\dots,i_k}$ 上的零阶流，它们与 $E_{i_1,\dots,i_k}$ 上的调和形式正交，并满足反对称关系。这里，如果一个取值于 L 的锥形流 T 在$E_{i_1,\dots,i_k}$ 上满足以下条件，我们就称它与调和部分正交：

$$\int_{E_{i_1,\dots,i_k}} T\wedge\xi = 0$$

对每个 $L^\star$-值调和微分形式 ξ （定义在 $E_{i_1,\dots,i_k}$ 上）。

我们从最深层开始，通过归纳法证明这一断言。首先，

$$\operatorname{Res}_{1,\dots,m}\left(\frac{\lambda}{s_{\Delta_1}}\right) = D'_{h_L}\operatorname{Res}_{1,\dots,m}\beta_1 + \theta\wedge\operatorname{Res}_{1,\dots,m}\beta_2.$$

¯左边是 ∂-闭的。根据 Bochner 恒等式，右边与调和部分正交。因此，由定理 1.7，

$$\operatorname{Res}_{1,\dots,m}\left(\frac{\lambda}{s_{\Delta_1}}\right) = \bar\partial R_{1,\dots,m},$$

对于某个 $R_{1,\dots,m}$ 在 $E_{1,\dots,m}$ 上与调和部分正交。

假设通过归纳法，(3.16.6) 在级别 k 成立。对于级别 $k-1$,

$$\bar{\partial}\mathrm{Res}_{i_1,\dots,i_{k-1}}\left(\frac{\lambda}{s_{\Delta_1}}\right)=\sum_j \mathrm{Res}_{j,i_1,\dots,i_{k-1}}\left(\frac{\lambda}{s_{\Delta_1}}\right)=\sum_j[\bar{\partial}R_{j,i_1,\dots,i_{k-1}}],$$

其中，最后一个等号用到了反对称关系。因此，锥形流

$$\mathrm{Res}_{i_1,\dots,i_{k-1}}\left(\frac{\lambda}{s_{\Delta_1}}\right)-\sum_j[R_{j,i_1,\dots,i_{k-1}}] \tag{3.16.7}$$

¯是 ∂-闭的。此外，我们可以证明，式 (3.16.7) 中的两项都与$E_{i_1,\dots,i_{k-1}}$ 上的调和形式正交，如下所示:

利用式 (3.16.5)，可知式 (3.16.7) 的第一项与调和形式正交。为处理式 (3.16.7) 的第二项，我们使用以下事实。由于 $\theta\geqslant 0$，利用 Bochner 等式可证明：若 ξ 是 $L^\star$-值的 Δ''-调和 $(0,q)$ 微分形式，定义在$E_{i_1,\dots,i_{k-1}}$上，则其限制$\xi|_{E_{j,i_1,\dots,i_{k-1}}}$ 仍然是Δ''-调和的。

因此，$\mathrm{Res}_{i_1,\dots,i_{k-1}}\left(\frac{\lambda}{s_{\Delta_1}}\right)-\sum_j[R_{j,i_1,\dots,i_{k-1}}]$ 是 $\bar{\partial}$-恰当的，我们可以写成

$$\mathrm{Res}_{i_1,\dots,i_{k-1}}\left(\frac{\lambda}{s_{\Delta_1}}\right)=\bar{\partial}R_{i_1,\dots,i_{k-1}}+\sum_j[R_{j,i_1,\dots,i_{k-1}}],$$

对于某些$R_{i_1,\dots,i_{k-1}}$ 与调和形式正交；此外，可以安排反对称关系。归纳法至此完成。

应用 $k=0$的 (3.16.6)，我们得出，$\frac{\lambda}{s_{\Delta_1}}$ 在锥形流意义下模去一个支撑在 Δ_1上的零阶流后是 $\bar{\partial}$-恰当的。因此，

$$\int_X \lambda\wedge\varphi_1=\int_X\frac{\lambda}{s_{\Delta_1}}\wedge\left(s_{\Delta_1}\cdot\varphi_1\right)=0,$$

这就证明了 (3.16.3)。 □

4. 应用 I：多重典范形式的延拓

本文余下部分将讨论上述扭曲霍奇理论的若干应用。本节中，我们采用以下设定。

设 $p:\ \mathcal{X}\to\mathbb{D}$ 是定义在单位圆盘 $\mathbb{D}$上的光滑紧流形全纯族。我们假设中心纤维（记为 X）是 Kähler 的。记 $K_{\mathcal{X}}$ 为$\mathcal{X}$的典范丛，并令 $\mathcal{L}\to\mathcal{X}$ 为任意全纯线丛。

我们关注伴随丛 $K_{\mathcal{X}}+\mathcal{L}$ 的整体截面在 p 的中心纤维的 k^{th} 无穷小邻域上定义时的延拓性质，其中 $k\geqslant 1$ 是正整数。换言之，我们考虑层

$$\mathcal{F}_k:=(K_{\mathcal{X}}+\mathcal{L})\otimes\mathcal{O}_{\mathcal{X}}/t^{k+1}\mathcal{O}_{\mathcal{X}}, \tag{4.0.1}$$

以及相应的截面空间 $H^0(\mathcal{X},\mathcal{F}_k)$。这里，$t$ 是 $\mathbb{D}$ 上的坐标。主要问题如下。

问题 4.1。给定 $s\in H^0(\mathcal{X},\mathcal{F}_k)$，我们能否将 s 延拓到中心纤维 X 的 $(k+1)^{\mathrm{th}}$ 无穷小邻域上？换言之，是否存在 $\widehat{s}\in H^0(\mathcal{X},\mathcal{F}_{k+1})$ 使得 $\pi_k(\widehat{s})=s$，其中 π_k 是自然投影

$$\pi_k:\mathcal{F}_{k+1}\to\mathcal{F}_k? \tag{4.1.1}$$

我们首先考虑以下情形

$$\mathcal{L}=(m-1)K_{\mathcal{X}},$$

其中 $m\geqslant 1$ 是正整数。令 $L:=(m-1)K_X$。那么，s 在中心纤维 X 上的限制在 L 上诱导出一个度量，记为 h_L。令 φ_L 为 h_L 的权重。那么

$$\varphi_L\sim\frac{m-1}{m}\log|s|_X|^2.$$

以下陈述是 [CP20] 的主要结果。

定理 4.2。 [CP20，定理 1。1] 设 $s \in H^0(\mathcal{X}, \mathcal{F}_k)$ 满足 $\mathcal{L} = (m-1)K_{\mathcal{X}}$。假设 s 存在一个 C^∞ 延拓 s_k，记

$$\bar{\partial} s_k = t^{k+1}\Lambda_k,$$

积分

$$\int_X \left|\frac{\Lambda_k}{dt}\right|^2 e^{-(1-\varepsilon)\varphi_L}\, dV < +\infty \tag{4.2.1}$$

c对每个 $\varepsilon > 0$ 都收敛。因此，存在一个截面 $\widehat{s} \in H^0(\mathcal{X}, \mathcal{F}_{k+1})$，使得 $\pi_k(\widehat{s}) = s$。

定理 4.2 的证明中的一个关键要素是对数消失定理3.16。现在我们简要概述定理 4.2 的证明。

证明概要。利用单位分解，我们总能构造出一个延拓 s_k，使得 $\bar{\partial} s_k = t^{k+1}\Lambda_k$，其中 Λ_k 是某个光滑形式。令 $\lambda_k := (\Lambda_k/dt)|_X$。由于 Λ_k 是 $\bar{\partial}$-闭的，λ_k 也同样是 ∂-闭的。要证明该定理，只需证明 λ_k 是 ∂-恰当的。

注意，s_k 诱导如下的李导数。截面 s_k 定义了一个算子

$$D' : C^\infty_{p,q}(\mathcal{X} \setminus \mathrm{Div}(s_k), \mathcal{L}) \to C^\infty_{p+1,q}(\mathcal{X} \setminus \mathrm{Div}(s_k), \mathcal{L}),$$

在坐标卡 Ω 上局部表示为

$$D'|_\Omega = \partial - \frac{m-1}{m}\frac{\partial s_k}{s_k} \wedge \cdot.$$

我们固定一个水平向量场 $\Xi \in C^\infty(\mathcal{X},\ T_{\mathcal{X}})$，使得 $p_*(\Xi) = \partial/\partial t$。接着定义李导数为

$$\mathcal{L}_\Xi := [D', \Xi].$$

因此，

$$\mathcal{L}_\Xi : C^\infty_{n+1,q}(\mathcal{X} \setminus \mathrm{Div}(s_k), \mathcal{L}) \to C^\infty_{n+1,q}(\mathcal{X} \setminus \mathrm{Div}(s_k), \mathcal{L}).$$

将方程 $\bar{\partial} s_k = t^{k+1}\Lambda_k$ 应用 $\mathcal{L}_\Xi$ $(k+1)$ 次，可得

$$\lambda_k = \bar{\partial}\alpha + D'_{h_L}\beta \qquad \text{on } X \setminus (s=0),$$

其中 α 和 β 是沿 $s=0$ 亚纯的微分形式（可能有高阶极点）。

经过奇点解消并利用 (4.2.1)，我们可以假设：

- Div(s)的支集可写为 $D+E$，其中 $D+E$ 是简单正规交，且 $D = \sum D_i$ 和 $E = \sum E_i$。
- λ_k 是一个取值于$(F+E)$的$(n,\ 1)$-微分形式，其中对 $\delta_i \in]0,\ 1[\cap \mathbb{Q}$，$F \equiv \sum \delta_i D_i$。

令 h_F 为 F 上的一个度量，使得

$$\frac{i}{2\pi}\Theta_{h_F}(F) = \sum \delta_i [D_i].$$

利用 h_F的奇点，我们可以消去 α 和 β的高阶极点。由此得到以下结论。

T这里存在微分形式 α_1和 β_1，其类型分别为$(n,\ 0)$和$(n-1,\ 1)$，取值于 Fan d with 沿 E的对数极点，使得

$$\bar{\partial}\alpha_1 + D'_{h_F}\beta_1 = \frac{\lambda_k}{s_E} \qquad \text{on } X \setminus E.$$

由定理 3.16 可知，λ_k 是 ∂-正合的。 □

注 4.3. 对于 $k=1$，总能找到一个光滑延拓 s_1，使得可积性条件(4.2.1) 成立；参见 [CP20，定理 4。1]。

定理 4.2 也受到凯勒几何中一个重要猜想的启发，我们现在来回顾这一猜想。继 Y.-T. Siu 关于“多重亏格不变性”的论文 [Siu98、Siu00]（另见 [Pau07]）之后——这些论文研究当 $\mathcal{X}$ 为射影族时 s 的延拓——下述基本问题仍未解决。

猜想 4.4。 [Siu00] 设 $p\colon\ \mathcal{X} \to \mathbb{D}$ 是一个光滑的、n维紧复流形族，且 X 为中心纤维。假设总空间 $\mathcal{X}$ 具有 *Kähler* 度量。则定义在 X 上的任意全纯多重典范截面都能全纯延拓到 $\mathcal{X}$。

在致力于猜想 4.4 的工作中，我们首先提到由 M. Levine 撰写的 [Lev83, Lev85] 。定理 4.2 的一个直接推论是以下陈述，它可以被视为 [Lev83, Lev85]中结果的一个更一般版本。

推论 4.5。 [CP20，推论 1。5] 设 $p:\ \mathcal{X}\to\mathbb{D}$ 是一个紧复流形的光滑全纯族，其中心纤维 X 是 *Kähler* 流形，并设 $s\in H^0(X,mK_X)$ 是X上的一个多重典范截面。假设该理想的零点集

$$\mathfrak{I}:=\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{I}\left((1-\varepsilon)\frac{m-1}{m}\Sigma\right)$$

是离散的，其中 Σ 是与 s对应的除子。那么，任意截面 $\tau\in H^0(X,mK_X)$ 都可以全纯延拓到中心纤维 X的一个邻域。若进一步假设总空间 $\mathcal{X}$ 是 *Kähler* 流形，那么任意截面 $\tau\in H^0(X,mK_X)$ 都可以全纯延拓到 $\mathcal{X}$ 上。

注 4.6。 [CP20] 由注 *4.3* 和定理 *4.2* 可知，我们总能将 s 延拓到 X的一阶无穷小邻域。

5. 应用，II：上同调跳跃轨迹性质。

本节讨论另一类延拓问题：基流形固定，而线丛发生变化。在这种情形下，我们的核心观点是，一阶延拓意味着可以延拓到真正的邻域。首先，我们回顾一个经典结果。

设 X 是一个紧致凯勒流形，其上有一个全纯线丛（L，∂_L），并设 α 是光滑的、∂-闭的（0，1）-微分形式。对每个 $t\in(\mathbb{C},0)$，考虑扭曲的 ∂-算子

$$\bar\partial_t:=\bar\partial_L+t\alpha \tag{5.0.1}$$

它作用于 X 上光滑的、取值于 L 的（p，q）-微分形式空间。一个自然的问题是研究有限维空间

$$\mathrm{Ker}\,(\bar\partial_t)/\mathrm{Im}\,(\bar\partial_t) \tag{5.0.2}$$

如何随 t 变化。一般结果（参见 [Kod86]）保证，(5.0.2) 中空间的维数是 t 的一个上半连续函数。

这类结果的一个出发点来自 Green–Lazarsfeld [GL87, GL91]。设 $u\in\mathrm{Ker}\,\partial_L$。若 u 沿方向 α 一阶延拓，则称之为 u；这意味着楔积 $u\wedge\alpha$ 是 ∂-恰当的，也就是说，我们可以求解

$$\bar\partial v=u\wedge\alpha. \tag{5.0.3}$$

依照 [GL87，第1], 节，我们有如下延拓性质。

定理 5.1. 设 X 为紧致 *Kähler* 流形，且(L,∂_L) 为平凡线丛。设 α 为 X上的光滑 ∂-闭$(0,1)$微分形式。设 u 为 X 上的光滑 ∂-闭(p,q)微分形式，它沿 α方向可一阶延拓。则存在一个光滑族$(u_t)^{t\in(\mathbb{C},0)}$，其元素为$(p,q)$微分形式，使得

$$u_0=u,\qquad u_t\in\mathrm{Ker}\,\bar\partial_t. \tag{5.1.1}$$

换言之，一阶延拓意味着可以延拓到一个真正的邻域。

证明。 我们旨在求解以下方程组：

$$\begin{cases}\bar\partial(u_1)+\alpha\wedge u=0,\\ \bar\partial(u_2)+\alpha\wedge u_1=0,\\ \dots\\ \bar\partial(u_{i+1})+\alpha\wedge u_i=0,\\ \dots\end{cases} \tag{5.1.2}$$

Note 当且仅当 (5.1.2) 中的第一个方程可以求解时， u 才能沿 α 一阶延拓 d. Simi同样， u 可以任意阶延拓，当且仅当 (5.1.2) 中的所有方程均可求解。

Le令 u_0 为 u的调和代表。由于（5.1.2）中的第一个方程可解

根据假

假设下，我们有

$$\alpha\wedge u_0\in\mathrm{Im}\,\bar\partial\cap\mathrm{Ker}\,\partial.$$

¯根据 $\partial\bar{\partial}$-引理，存在 $u_1 \in \operatorname{Im}\partial$，使得

$$\bar{\partial}(u_1) + \alpha \wedge u_0 = 0.$$

为了解第二个方程，注意到由于 $u_1 \in \operatorname{Im}\partial$，我们有 $\alpha \wedge u_1 \in \operatorname{Im}\partial$。此外 ，

$$\bar{\partial}(\alpha \wedge u_1) = -\alpha \wedge \bar{\partial} u_1 = \alpha \wedge \alpha \wedge u_0 = 0.$$

¯ ¯因此 $\alpha \wedge u_1 \in \operatorname{Im}\partial \cap \operatorname{Ker}\partial$。再次应用 $\partial\bar{\partial}$-引理，存在 $u_2 \in \operatorname{Im}\partial$ 使得

$$\bar{\partial}(u_2) + \alpha \wedge u_1 = 0.$$

同样的论证可归纳地应用于其余方程。

最后，如果将每个 u_i 选为 (5.1.2) 的最小解[1]，，则可证明级数 $\sum_{i=0}^{\infty} z^i u_i$ 关于 $|z| \ll 1$收敛。特别地， u 可延拓到一个真正的邻域。□

作为定理 5.1 的一个应用，我们得到以下跳跃轨迹性质。

定理 5.2。 [GL87,GL91] 设 X 是一个紧致凯勒流形。定义跳跃轨迹

$$\Sigma_k^{p,q}(X) := \{L \in \operatorname{Pic}^0(X) \mid \dim H^q(X, \Omega_X^p \otimes L) \geqslant k\}.$$

那么 $\Sigma^{p,\,q}_{k}(X)$ 是 $\operatorname{Pic}^0(X)$ 中有限个子环面平移的并。

定理 5.2 已在若干方向上得到推广。在紧凯勒情形下， [Sim93]还证明了 $\Sigma^{p,\,q}_{k}(X)$ 实际上是 $\operatorname{Pic}^0(X)$ 中有限个子环面的挠平移的并。最近， [BW15, BW20] 将定理 5.2 推广到了准紧凯勒情形。他们的证明依赖于涉及模空间和 Riemann–Hilbert 对应的整体考量（其中一些想法可追溯至 [Sim93]）。

在 [CDHP], 中，我们利用拟紧凯勒流形上秩一局部系统的霍奇理论，给出了准紧情形下跳跃轨迹性质的新证明。其思路是像定理 5.1 中那样使用¯the $\partial\bar{\partial}$-引理。因此，我们的证明是自足的，并且与 [BW15, BW20]中的原始论证有很大不同。更准确地说，我们有以下结果。

定理 5.3。 [BW20, CDHP] 设 X 为紧致凯勒流形，$D = \sum_{i=1}^{k} D_i$ 为简单正规交叉除子。则跳跃轨迹 $\Sigma_k^i(X \setminus D)_{\mathrm{B}}$ 是有限个子环面的平移之并。

注 5.4。 猜想 $\Sigma_k^i(X \setminus D)_{\mathrm{B}}$ 是有限个子环面的挠平移之并。拟射影情形下的证明见 [BW15]。

现在我们简要概述定理 5.3 的证明思路。首先，类比延拓定理（定理 5.1），我们证明一个关于对数全纯平坦线丛的延拓定理。

定理 5.5。 在第 *2.2* 节的设定下，令 $\Delta_1 := \sum_{i=1}^{\ell} Y_i$。设 $(L, \nabla) \in M_{DR}(X/D)$ 并令

$$(\xi, \beta) \in \mathcal{H}^{0,1} \oplus H^0\big(X, \Omega_X^1(\log D)\big) = (T_{M_{DR}(X/D)})_{(L,\nabla)}.$$

令 $u_0 \in \mathcal{C}^{\infty}_{\bullet,\,K}(X, \Delta_1, L)$ 使得

$$D_K u_0 = 0 \qquad on\ X \setminus D.$$

假设以下条件成立。

- *(1)* 微分形式 u_0 可延拓至一阶，即存在 $v_1 \in \mathcal{C}^{\infty}_{\bullet,\,K}(X, \Delta_1, L)$ 使得

$$D_K v_1 = -(\xi + \beta) \wedge u_0 \qquad on\ X \setminus D.$$

- *(2)* 对于每个非空的 $I \subset \{1, \ldots, \ell\}$，$\mathcal{C}^{\infty}_{\bullet-|I|,K}(Y_I, L)$ 中的任意 D_K-闭微分形式都可以延拓到一阶；也就是说，对于任意 $s \in \mathcal{C}^{\infty}_{\bullet-|I|,K}(Y_I, L)$，若 $D_K s = 0$，则 $-\iota_I^*(\xi+\beta)\wedge s$在 Y_I 上是 D_K-恰当的。这里， $Y_I := \cap_{i\in I} Y_i$，且 $\iota_I \colon Y_I \hookrightarrow X$是包含映射。

[1]根据 Hodge 分解定理，它因此自动是 ∂-正合的。

那么，对于任意 $k \geqslant 0$，我们都可以求解

$$\begin{cases} D_K(u_1) = -(\xi+\beta)\wedge u_0, \\ D_K(u_2) = -(\xi+\beta)\wedge u_1, \\ \cdots \\ D_K(u_{k+1}) = -(\xi+\beta)\wedge u_k, \end{cases} \tag{5.5.1}$$

在 $X \setminus D$ 上，满足 $u_i \in \mathcal{C}^\infty_{\bullet,K}(X、\Delta_1、L) \cap \operatorname{Im} D_K$，并且级数 $\sum_{i\geqslant 0} t^i u_i$ 对$|t| \ll 1$收敛。

证明概要。首先假设 $\Delta_1 = 0$。

设 u_0 是一个取值于 L 的 D_K-闭微分形式。改变代表元后，不妨设 u_0 是调和的。于是 $D_K^c u_0 = 0$。根据假设 (1)，我们有

$$(\xi+\beta)\wedge u_0 \in \operatorname{Im} D_K \cap \operatorname{Ker} D_K^c.$$

根据 $\partial\partial$-引理 2.16，存在 $u_1 \in \mathcal{C}^\infty_{\bullet,K}(X, L) \cap \operatorname{Im} D_K^c$，使得

$$D_K u_1 = -(\xi+\beta)\wedge u_0. \tag{5.5.2}$$

现在考虑 (5.5.1) 中的第二个方程。根据注2.13，$(\xi+\beta)\wedge u_1 \in \mathcal{C}^\infty_{\bullet+1,K}(X, L)$。由于 u_1 是 D_K^c-恰当的，$(\xi+\beta)\wedge u_1$ 也是 D_K^c-恰当的。此外，$(\xi+\beta)\wedge u_1$ 是 D_K-闭的，因为$D_K u_1$ 是 $(\xi+\beta)$ 的倍数。根据 $\partial\partial$-引理 2.16，存在 $u_2 \in \mathcal{C}^\infty_{\bullet,K}(X, L) \cap \operatorname{Im} D_K^c$，使得

$$D_K u_2 = -(\xi+\beta)\wedge u_1. \tag{5.5.3}$$

反复进行这一过程，我们依次得到

$$D_K u_m = -(\xi+\beta)\wedge u_{m-1}, \qquad u_m \in \operatorname{Im} D_K^c,$$

对所有 $m \geqslant 1$均成立，即 u_0 可延拓至任意阶。

在一般情形下，Δ_1 不一定为 0。我们首先将 $\mathcal{C}^\infty_{\bullet,K}(X, \Delta_1, L)$ 嵌入流空间 $\mathcal{D}_K(X, L)$。在流的意义下，利用流 $\partial\partial$-引理 3.12，并对 Δ_1的每个层应用归纳法，我们可以求解 (5.5.1)，使其模去支撑在 Δ_1上的流。假设 (2) 在此处发挥作用。最后，借助正则性引理 3.15，我们可以在 $\mathcal{C}^\infty_{\bullet,K}(X, \Delta_1, L)$ 中求解 (5.5.1)。详情请参见 [CDHP，第 10] 节。□

作为定理 5.5 的一个应用，我们研究拟紧凯勒流形上的跳跃轨迹性质。设 X 为紧致凯勒流形，$D \subset X$ 为一个简单正规交叉除子。令

$$\Sigma^i_k(X/D)_{\mathrm{DR}} := \{(L,\nabla) \in M_{DR}(X/D) \mid \dim \mathbb{H}^i(X, \Omega^\bullet_X(\log D)\otimes L) \geqslant k\}.$$

结合定理 5.5 与定理2.21，我们得到如下结论。

推论 5.6. 设 $(L,\nabla) \in \Sigma^i_k(X/D)_{\mathrm{DR}}$ 为一般点，并假设

$$\operatorname{Re}\big(\operatorname{Res}_{D_j}(L,\nabla)\big) \in [0,1[$$

对 D的每一个不可约分量 D_j 。设 $\mathbb{D}$为 $\mathbb{C}$中的单位圆盘，并考虑一个全纯映射

$$\gamma : \mathbb{D} \to \Sigma^i_k(X/D)_{\mathrm{DR}}$$

使得 $\gamma(0) = (L,\nabla)$。设 $\gamma'(0) \in \mathcal{H}^{0,1}(X) \oplus H^0\big(X, \Omega_X(\log D)\big)$ 表示 γ的一阶形变。则

$$\dim \mathbb{H}^i\big(X, \Omega^\bullet_X(\log D)\otimes L_{\gamma(0)+z\gamma'(0)}\big) \geqslant k \tag{5.6.1}$$

对每一个 $|z| \ll 1$。这里$\Omega^\bullet_X(\log D)\otimes L_{\gamma(0)+z\gamma'(0)}$ 是由$\gamma(0) + z\gamma'(0) \in M_{\mathrm{DR}}(X/D)$诱导的对数德拉姆复形。

A因此，我们得到 $X \setminus D$上秩一局部系统的跳跃轨迹性质 .

定理5.7。设 X 为一个紧致凯勒流形，$D = \sum_{i=1}^k D_i$ 为一个简单正规交叉除子。设 $M'_{\mathrm{B}}(X/D) \subset M_{\mathrm{B}}(X/D)$ 为一个连通分支。那么跳跃轨迹

$$\Sigma^i_k(X \setminus D)_{\mathrm{B}} := \{\tau \in M'_{\mathrm{B}}(X/D) \mid \dim H^i(X \setminus D, \tau) \geqslant k\}$$

是子环面的平移的有限并。

证明。取一个一般元素 $\tau \in \Sigma_k^i(X \setminus D)_{\mathrm{B}}$。令 $(L, \nabla) \in M_{\mathrm{DR}}(X/D)$ 满足 $\tau = \rho(L, \nabla)$，且对 D 的每个分支，$\mathrm{Re}(\mathrm{Res}(L, \nabla)) \in [0, 1[$。

那么，对于（L'，∇'）中充分接近（L，∇）的任意一点，D的任何分支上的留数都不是严格正整数。因此，由定理 2.18 可得

$$\dim \mathbb{H}^i\big(X, \Omega_X^\bullet(\log D) \otimes L'\big) = \dim H^i\big(X \setminus D, \rho(L', \nabla')\big).$$

因此，存在（L，∇）的邻域 U 以及 τ 的邻域 V，使得

$$\rho : \Sigma_k^i(X/D)_{\mathrm{DR}} \cap U \longrightarrow \Sigma_k^i(X \setminus D)_{\mathrm{B}} \cap V$$

是双全纯映射。由此，根据推论 5.6 可知，$\Sigma_k^i(X \setminus D)_{\mathrm{B}}$ 是 $M'_{\mathrm{B}}(X \setminus D)$中的有限个子环面的平移之并。□

6. 应用 III：对数卡拉比–丘流形的变形

在最后这一节中，我们想介绍锥形霍奇理论在对数卡拉比–丘 Kähler 流形变形理论中的一项很好的应用，该结果由 R. Zhang 最近证明 [Zha24]。

在 [KKP], 中，L. Katzarkov、M. Kontsevich 和 T. Pantev 证明，对数卡拉比–丘射影对（X，D）的局部平凡变形是无障碍的。在其最近的论文 [Zha24],中，R. Zhang 运用锥形霍奇理论，将 Katzarkov–Kontsevich–Pantev 的定理推广到了 Kähler 情形。更准确地说，R. Zhang 证明了以下结果。

定理 6.1。 [Zha24，定理 A] 设 X 是一个紧致凯勒流形，并设

$$D = \sum_{i=1}^{s} D_i$$

$be\ \ a\quad X$上的简单正规交叉除子。假设存在一组权 ts $\{a_i\}_{1 \leqslant i \leqslant s} \subset [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ 使得

$$c_1(K_X) + \sum_{i=1}^{s} a_i c_1(D_i) = 0 \quad in\ H^2(X, \mathbb{Q}). \tag{6.1.1}$$

那么，偶 （X, D）的局部平凡（无穷小）变形是无障碍的。特别地，偶 （X, D）存在一个以光滑底空间为底的半泛（*Kuranishi*）族。

请注意，定理 6.1 的一些特殊情形已在 [LRW、Wan18]中得到证明。正如[Zha24] 和 [Wan18], 所解释的，定理 6.1 可由以下消失定理推出。

定理 6.2。 [Zha24，定理 B] 设 X 是一个紧致凯勒流形，X上有一个简单正规交叉除子 $D = \sum D_i$ 。设 L 是 X 上的一个全纯线丛，使得

$$c_1(L) = \sum_i a_i D_i \in H^2(X, \mathbb{Q})$$

对于某个 $a_i \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$。

设 h_L 是 L上的一个度量，使得

$$i\Theta_{h_L} = \sum a_i [D_i].$$

设 $h_{L^\star}$ 是 $L^\star$上的对偶度量。设 $\alpha \in A^{p,q}\big(X, D, L^\star\big)$ 满足

$$\bar{\partial} D'_{h_{L^\star}} \alpha = 0 \quad on\ X \setminus D.$$

那么存在

$$\chi \in A^{p,q-1}\big(X, D, L^\star\big)$$

使得

$$\bar{\partial}\chi = D'_{h_{L^\star}} \alpha \quad on\ X \setminus D. \tag{6.2.1}$$

定理 6.2 的原始证明结合了锥形霍奇分解理论与 J. King 关于湮灭零形式的流层的理论 [Kin71, Kin83], 其中 D。这里我们提出一种略有不同的方法，用正则性引理推论 3.14 取代 King 的理论。

定理 *6.2* 的证明。我们分解

$$D = \Delta_1 + \Delta_2,$$

其中，$\Delta_1 := \sum_{i=1}^m D_i$ 由满足 $a_i = 0$ 的分支组成，而 Δ_2 由满足 $a_i > 0$ 的分支组成。于是 $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(X, \Delta_1, L^\star)$。根据例 3.6，$\alpha \in \mathcal{D}(X, L^\star)$ 可视为锥形意义下的一个 $L^\star$ 值流。

我们考虑锥形流

$$T := D'_{h_{L^\star}} \alpha \in \mathcal{D}(X, L^\star).$$

注意，对每个子集 $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, m\}$，我们都有

$$\mathrm{Res}_{i_1,\dots,i_k} T = D'_{h_{L^\star}} \mathrm{Res}_{i_1,\dots,i_k} \alpha \quad \text{on } D_{i_1} \cap \cdots \cap D_{i_k}. \tag{6.2.2}$$

我们声称，对每个子集 $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, m\}$，存在支撑在 $D_{i_1} \cap \cdots \cap D_{i_k}$ 上的零阶锥形流 $R_{i_1,\dots,i_k}$（分别为 $R_{j,i_1,\dots,i_k}$），满足反对称关系，使得

$$\mathrm{Res}_{i_1,\dots,i_k} T = \bar\partial D'_{h_{L^\star}} R_{i_1,\dots,i_k} + \sum_{j=1}^m [D'_{h_{L^\star}} R_{j,i_1,\dots,i_k}] \in \mathcal{D}(D_{i_1} \cap \cdots \cap D_{i_k}, L^\star). \tag{6.2.3}$$

我们从 $k = m$ 出发，对 k 使用归纳法证明该断言。

对于 $k = m$，由 (6.2.2)，我们有

$$\mathrm{Res}_{1,\dots,m} T = D'_{h_{L^\star}} \mathrm{Res}_{1,\dots,m} \alpha$$

在 $D_1 \cap \cdots \cap D_m$ 上锥形流的意义下成立。左边是 ∂-恰当的，而右边是 $D'_{h_{L^\star}}$-恰当的。由锥形流的 $\partial\bar\partial$-引理（引理 3.8），我们得到

$$\mathrm{Res}_{1,\dots,m} T = \bar\partial D'_{h_{L^\star}} R_{1,\dots,m}$$

存在一个流 $R_{1,\dots,m}$，其定义在 $D_1 \cap \cdots \cap D_m$ 上且为零阶，并且可以选取为满足斜对称关系。因此，该断言对 $k = m$ 成立。

假设根据归纳法，(6.2.3) 对 k 成立。对于 $(k-1)$-指标的情形，我们有

$$\bar\partial \mathrm{Res}_{i_1,\dots,i_{k-1}} T = \sum_{j=1}^m \mathrm{Res}_{j,i_1,\dots,i_{k-1}} T$$

$$= \sum_{j=1}^m [\bar\partial D'_{h_{L^\star}} R_{j,i_1,\dots,i_{k-1}}] + \sum_{s,j=1}^m [D'_{h_{L^\star}} R_{s,j,i_1,\dots,i_{k-1}}] = \sum_{j=1}^m [\bar\partial D'_{h_{L^\star}} R_{j,i_1,\dots,i_{k-1}}],$$

其中，最后一个等式由 $R_{s,j,i_1,\dots,i_{k-1}}$ 的斜对称性得出。

因此，该锥形流

$$\mathrm{Res}_{i_1,\dots,i_{k-1}} T - \sum_{j=1}^m [D'_{h_{L^\star}} R_{j,i_1,\dots,i_{k-1}}]$$

是 ∂-闭的。此外，由(6.2.2)，它是 $D'_{h_{L^\star}}$-恰当的。关于锥形流的 $\partial\bar\partial$-引理（引理 3.8）进而表明它是 $\partial\bar\partial$-恰当的。因此，在 $D_{i_1} \cap \cdots \cap D_{i_{k-1}}$上存在零阶流$R_{i_1,\dots,i_{k-1}}$，使得

$$\mathrm{Res}_{i_1,\dots,i_{k-1}} T = \bar\partial D'_{h_{L^\star}} R_{i_1,\dots,i_{k-1}} + \sum_{j=1}^m [D'_{h_{L^\star}} R_{j,i_1,\dots,i_{k-1}}].$$

我们还可以进一步要求$R_{i_1,\dots,i_{k-1}}$ 满足反对称关系。这就完成了归纳法，并证明了该断言。

将断言(6.2.3)应用于 $k = 0$，我们得到支集在 D_i 上的零阶锥形流 R_i，使得

$$T - \sum_{i=1}^m [D'_{h_{L^\star}} R_i]$$

在锥形流意义下是 $\partial\bar\partial$-恰当的。由正则性引理（推论 3.14），定理得证。□

参考文献

[Biq97] O. Biquard《希格斯丛与可积联络：对数情形（光滑除子）》，高等师范学校科学年刊（ 4 30 1997 1, 41 96, 10 1016 0012 9593 97 89915 6）（），第 期，页 – [15] https://doi.org/ 。 /S - ( ) - BW N. Budur, B. Wang《拟射影簇的上同调跳跃轨迹》，高等师范学校科学年刊（第 4 辑）48（2015），第 1 期，页 227–236，https://doi.org/10.24033/ asens.2242。[BW20] N. Budur, B. Wang《拟紧凯勒流形的上同调跳跃轨迹》，纯粹与应用数学季刊 16（2020），第 4 期，页 981–999，https://doi.org/10.4310/PAMQ.2020.v16.n4.a3。[23] 2303 16239 CP Cao, J.; [20] 2012 Paun, M.：《 $\partial\bar{\partial}$-引理与 O. Fujino 的一个猜想》https://arxiv.org/abs/ 。CP Cao, J.; Paun, M.：《多重典范形式的无穷小延拓》https://arxiv.org/abs/ 。 05063 [ ] CDHP J.

Cao, Y. Deng, C. Hacon and M. Paun《局部系统的霍奇理论与上同调支撑轨迹》https://arxiv.org/abs/ 2511 06773 。CDHP J. Cao, Y. Deng, C. Hacon and M. Paun《特殊簇上局部系统的二步幂零单值[2] 群》，即将发表[Del70] P. Deligne《具有正则奇点的微分方程》，数学讲义，第 163 卷，Springer-Verlag，柏林—纽约，1970。[71] 1971 40, 5 57, Del P. [ ] Deligne《霍奇理论 II》，高等科学研究所出版物，数学（），第 期，页 – Dem-book Demailly, J.-P.：《复解析与微分几何》，作者个人网页。[DK] de Rham, G.; Kodaira, K.：《调和积分》，高等研究院，1950。[92] *2* 28 1992 845 884 Fuj A. [87] Fujiki：《一个 L Dolbeault 引理及其应用》，京都大学数理科学研究所出版物（），-[GL M. Green and R. Lazarsfeld《变形理论、一般消失定理及 Enriques、Catanese 和 Beauville 的若干猜想》，数学发明 90（1987），第 2 期，页 389–407，https://doi.org/10.1007/BF01388711。[GL91] M. Green and R. Lazarsfeld《线丛上同调群变形的高阶障碍》，《美国数学会杂志》4（1991），第 1 期，页 87–103，https://doi.org/10.2307/2939255。[KKP] L. Katzarkov, M. Kontsevich, T. Pantev,《镜像对称的霍奇理论方面》，载于《从霍奇理论到可积性与拓扑量子场论 tt*几何》，87–174，纯粹数学专题讨论会论文集，78，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2008。[Kin71] J. R. King,《解析簇定义的流》，数学学报，127(1):185-220，1971。[Kin83] J. R. King,《流的对数复形与阿贝尔–雅可比映射的函子性》，杜克数学杂志 50（1983），第 1 期，1–53。[Kod86] K. Kodaira《复流形与复结构变形》，数学科学基础原理丛书 [数学科学基础原理], 第 283 卷，Springer-Verlag，纽约，1986；日文译本由 Kazuo Akao 翻译，附 Daisuke Fujiwara 的附录，https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8590-5。[Kol15] J. Kollár《椭圆卡拉比–丘流形的变形》，载于《代数几何最新进展》，伦敦数学会讲义系列，第 417 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2015，页 254–290。[Lev83] Levine, M.：《凯勒流形上的多重典范除子》，数学发明 74，（1983）[Lev85] Levine, M.：《凯勒流形上的多重典范除子 II》，杜克数学杂志 52，61–65（1985）[LRW] Liu, K.; Rao, S.; and Wan, X.：《对数形式的几何与复结构变形》，代数几何杂志 28 2019 773 815 （），- [Mat D. Matsushita《拉格朗日纤维化的变形》，[16] 载于《K3曲面及其模空间》，数学进展，第 315 卷，Birkhäuser/Springer，], 2016, Cham[页 237–243，https: // doi.org/10.1007/978-3-319-29959-49。06] Moc[T. Mochizuki《温和调和丛的小林–希钦对应及其应用》，Astérisque，第 309 卷（2006）95] Nog[Noguchi, J.：对数形式闭性的一个简短解析证明，Kodai数学杂志，第 18 卷，第 2 期（1995），295–299。07] Pau[Paun, M.：《Siu多重亏格不变性：单塔证明》，微分几何杂志，76（2007），485–493。96] Rai [ ] 2011 03306 Blache, [92] 1992 75, Raimund《具有孤立奇点的复射影轨形上凝聚层的陈类与希策布鲁赫–黎曼–罗赫定理》。数学杂志 222，第 1 期，7–57（1996）。 5 95 RT [93] Rao, S.; Tsai, I.-H.：《多重亏格不变性与周型引理》https://arxiv.org/abs/ 。Sim C. Simpson，《希格斯丛与局部系统》，高等科学研究所数学出版物（），第 期，页 4, 26 1993 3, 361 401 – Sim C. Simpson, [82] 《秩一局部系统模空间的子空间》，高等师范学校科学年刊，系列 17 1982 1, 55 138, 第（ ）卷，第 期，页 - [98] Siu Y. T. Siu《调和映射的复解析性、消失定理与勒夫谢茨定理》，微分几何杂志[（），第 期，页 – Siu Siu, Y.T.《多重亏格不变性》，数学发明，134（1998），661–673。00] Siu[Siu, Y.T.：《带多重次调和权的扭曲多重典范截面的延拓，以及对不一定为一般型的流形半正扭曲多重亏格的不变性》，《复几何》（哥廷根，2000），Springer，柏林，2002，223–277。18] Wan $\bar{\partial}$X. Wan，《紧致凯勒流形上与光滑除子相关的一个对数[-方程》arXiv:1805.11920。92] Voi[C. Voisin《全纯辛流形中拉格朗日子流形的稳定性》，载于《复射影几何》（的里雅斯特，1989/卑尔根，1989），伦敦数学会讲义系列，第 179 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1992，页 294–303，https://doi.org/10.1017/CBO9780511662652.022。24] Zha $\partial\partial$R. Zhang：《对数

J.A. Dieudonné 数学实验室 联合研究单位 7351 法国国家科学研究中心，蔚蓝海岸大学 瓦尔罗斯公园 06108，尼斯，法国电子邮箱地址：junyan.cao@univ-cotedazur.fr；junyan.cao@unice.fr网址：https://sites.google.com/site/junyancao