arXiv:2602.14845v1 [math.RT] 16 Feb 2026

超越稳定性的相对特征渐近$\mathrm{PGL}_2 \times \mathrm{GL}_1$

TRAJAN HAMMONDS

摘要。Nelson 和 Venkatesh 研究了实李群中由 Gan-Gross-Prasad 对 (G, H) 所产生的表示 (π, σ) 的相对特征渐近行为。他们成功计算了相关 Rankin-Selberg L-函数 $L(\pi \boxtimes \sigma^\vee)$ 的导子处于稳定轨迹（即远离导子下降）时的相对特征渐近行为。本文给出了（PGL_2,GL_1）在非阿基米德 情形下的相对特征渐近行为。我们方法的关键创新在于克服了稳定性假设，并允许导子显著下降。

目录

1. 引言 1致谢 72. 预备知识 73. 测试函数与Op演算 124. 不变泛函与相对特征 165. 相对特征的分析 176. 命题 5.8 的证明 247. 相空间积分 27参考文献 28

1. 引言

令 $G = \mathrm{PGL}_2(\mathbf{F})$ 和 $H = \mathrm{GL}_1(\mathbf{F})$ 对角嵌入于 G，其中 $\mathbf{F}$ 是一个非阿基米德局部域，例如$\mathbf{Q}_p$。对于 G的一个表示 π 以及 H 的一个特征 χ，我们将研究两个主要对象：积分算子 $\mathrm{Op}(a)$ 和线性泛函 ℓ_χ，定义如下：对于函数 $a\colon \mathrm{Lie}(G)^* \to \mathbf{C}$，我们定义

$$\mathrm{Op}(a) := \int_{x \in \mathrm{Lie}(G)} a^\vee(x) \pi(\exp x)\, dx.$$

（更多详情请参见第 3 节）。与此同时，线性泛函 $\ell_\chi\colon \pi \to \mathbf{C}$ 定义为

$$\ell_\chi(v) := \int_{\mathbf{F}^\times} W_v \begin{pmatrix} h & \\ & 1 \end{pmatrix} \overline{\chi}(h)\, d^\times h,$$

其中 W_v 是 v 在其 Whittaker模型中的像（详见第 4 节）。在此情形下，我们将相对特征定义为如下分布

$$\mathcal{H}_{\pi,\chi}(a) = \sum_{v \in \mathcal{B}(\pi)} \ell_\chi(\mathrm{Op}(a)v)\overline{\ell_\chi(v)}. \tag{1}$$

在 Harish-Chandra 的特征标理论中，Θ_π 不可约表示 π 的分布特征标渐近行为，受 p-进群 G的幂零锥几何结构控制。特别地，设 $\mathfrak{g}$为 G的李代数，$\mathbf{F}$为一个 p-进域。设 $\mathcal{N}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的幂零锥，$\mathcal{N}/G$ 为 G-共轭类的（有限）集合。对于 $\mathcal{O} \in \mathcal{N}/G$，记 $\mu_{\mathcal{O}}$ 为幂零轨道积分。Harish-Chandra 证明，对于在 G的单位元附近（以 π为度量）有足够小支集的 f,

$$\Theta_\pi(f) := \mathrm{tr}(\pi(f)) = \sum_{\mathcal{O} \in \mathcal{N}/G} c_{\mathcal{O}}(\pi)\mu_{\mathcal{O}}(a), \tag{2}$$

其中 a 满足： $a^\vee$ 是 f 在指数映射下拉回到 $\mathfrak{g}$ 后的傅里叶变换。可以将分布特征标看作由以下复合给出

$$\Theta_\pi : C_c^\infty(G) \xrightarrow{f \mapsto \pi(f)} \mathrm{End}(\pi) \xrightarrow{T \mapsto \sum_v Tv \otimes v} \pi \otimes \overline{\pi} \xrightarrow{v_1 \otimes \overline{v_2} \mapsto \langle v_1, v_2 \rangle} \mathbf{C}. \tag{3}$$

这些特征与几何通过基里洛夫特征标公式相关联。该公式指出，对于 G 的一个不可约表示 π ，可以将一个余伴随轨道（或有限个轨道）$\mathcal{O}_\pi \subseteq \mathrm{Lie}(G)^*$ 与 π 联系起来，使得

$$\Theta_\pi(f) = \int_{\mathcal{O}_\pi} (a^\vee j^{-1/2})^\vee \tag{4}$$

其中 j 是指数映射 $\exp : \mathrm{Lie}(G) \to G$ 的雅可比行列式。基里洛夫公式给出了 Harish-Chandra 特征标展开的显式类比：它在尺度 $x \ll 1/T$ 处提供一致渐近，其中 T 是表示 π 的最高权。

对于一个对称对 (G, H)，相应的分布是相对特征 $\mathcal{H}_{\pi,\sigma}$，它与 (G, H) 的一对表示 (π, σ) 相联系。完全类似地，可以通过将泛函 $\ell_\chi \in \mathrm{Hom}_H(\pi, \mathbf{C})$ 替换为 $\ell_\sigma \in \mathrm{Hom}_H(\pi, \sigma)$ 来定义 $\mathcal{H}_{\pi,\sigma}$，如上所述。不过，我们将在陈述一个核心问题后，于下文给出另一种定义：

问题 1.1。 相对特征的渐近行为如何？是否存在类似的按几何轨道展开的式子?

为帮助回答这个问题，我们给出相对特征的一种替代定义。给定 G 的一个缓增不可约表示 π，我们可以沿着子群 H 将其分解为

$$\pi \mid_H = \int_\sigma m_\pi(\sigma)\sigma \, d\sigma, \tag{5}$$

其中 σ 遍历 H 的缓增不可约表示。则内积

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \int_\sigma m_\pi(\sigma)\mathcal{H}_{\pi,\sigma}(v_1 \otimes v_2) \, d\sigma, \tag{6}$$

其中 $\mathcal{H}_{\pi,\,\sigma}(v_1 \otimes v_2)$ 是由下式给出的相对特征

$$\int_H \langle \pi(h)v_1, v_2 \rangle \overline{\chi_\sigma(h)} \, d\sigma. \tag{7}$$

由此，我们通过复合得到一个分布

$$\mathcal{H}_{\pi,\sigma} : C_c^\infty(G) \to \mathrm{End}(\pi) \cong \pi \otimes \overline{\pi} \xrightarrow{\mathcal{H}_{\pi,\sigma}} \mathbf{C}. \tag{8}$$

因此，$\mathcal{H}_{\pi,\sigma}(f) = \int_H \mathrm{tr}(\pi(h)\pi(f))\overline{\chi_\sigma}(h)\,dh$。现在暂且假设 $\exp : \mathfrak{g} \to G$ 是一个雅可比行列式为 1 的同构，根据基里洛夫公式，我们预期

(9)
$$\mathcal{H}_{\pi,\sigma}(f) = \int_{h\in H} \mathrm{tr}(\pi(h)\pi(f))\overline{\chi_\sigma}(h)\,dh = \int_{x\in\mathfrak{g}} a^\vee(x) \int_{y\in\mathfrak{h}} \chi_\pi(e^{y+x})\chi_\sigma(e^{-y})\,dx\,dy$$

(10)
$$= \int_{x\in\mathfrak{g}} a^\vee(x) \int_{y\in\mathfrak{h}} \int_{\xi\in\mathcal{O}_\pi} e^{i(x+y)\xi} \int_{\eta\in\mathcal{O}_\sigma} e^{-iy\eta} = \int_{\mathcal{O}_{\pi,\sigma}} a$$

其中 $\mathcal{O}_{\pi,\sigma}$ 是由满足以下条件的矩阵组成的集合 $\xi \in \mathcal{O}_\pi$，其限制 ξ_H 到 $\mathfrak{h}^*$ 为 $\eta \in \mathcal{O}_\sigma$。因此看来，相对余伴随轨道$\mathcal{O}_{\pi,\sigma}$ 可能是我们所寻找的几何轨道的合适候选。我们称$\mathcal{O}_{\pi,\sigma}$ 稳定的，若它是一个 H-扭子。问题 1.1 即使在低秩情形下也很微妙。我们先通过一个例子说明超越稳定情形时会遇到的挑战。

例 1.2。设 $(G, H) = (\mathrm{GL}_3(\mathbf{R}), \mathrm{GL}_2(\mathbf{R}))$，并选取表示 π 和 σ，使得余伴随轨道为整个幂零锥，即 $\mathcal{O}_\pi = \mathcal{N} \subset \mathfrak{g}^*$ 和 $\mathcal{O}_\sigma = \mathcal{N}_H \subset \mathfrak{h}^*$。相对余伴随轨道是集合

(11)
$$\mathcal{O}_{\pi,\sigma} = \mathcal{N} \cap \mathrm{pr}^{-1}(\mathcal{N}_H) = \left\{ \xi = \begin{pmatrix} A & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_3(\mathbb{R}) : \xi, A \text{ are nilpotent} \right\} \subset \mathfrak{g}^*,$$

其中 $\mathrm{pr} : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{h}^*$ 是自然投影映射。在$\mathcal{O}_{\pi,\sigma}$ 上有无穷多个 H-轨道，其代表元为 $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix} \right\}$。

因此，由于本例中$\mathcal{O}_{\pi,\sigma}$ 的几何结构，不存在明显的单一几何轨道可作为控制 $\mathcal{H}_{\pi,\sigma}$渐近行为的候选对象。对于这一对，正确的渐近图景究竟应当如何，目前并不十分清楚；不过，我们仍希望本文中的方法能够阐明这一情况。

对于 p-进对称空间，Rader 和 Rallis [RR96] 发展了 Harish-Chandra 特征标理论的一种类似理论。对于 H-区分表示 π G，他们证明，在 H-正则半单轨迹上，相对特征局部常值，并且在单位元附近，它们具有类似于 Harish-Chandra 情形的芽展开，通过

(12)
$$H_\pi(\exp X) \sim \sum_{\mathcal{O}\subset\mathcal{N}(\mathfrak{s})} c_\mathcal{O}(\pi)\,\widehat{\mu}_\mathcal{O}(X),$$

其中，$\mathfrak{s}$ 是定义该对称对的对合的（-1）-特征子空间，$\mathcal{N}(\mathfrak{s})$是其幂零锥，而 $\widehat{\mu}_\mathcal{O}$ 是 H-不变幂零轨道积分的傅里叶变换。尽管如此，由于相对余伴随轨道$\mathcal{O}_{\pi,\sigma}$的不稳定几何，仍然缺乏一种能够涵盖上述示例等情形的系统理论。然而，在某些（稳定）情形下，得益于 Nelson 和 Venkatesh[NV21]的工作，已有一种一般理论。对于实 Gan–Gross–Prasad 对，如 $(\mathrm{SO}_{n+1}, \mathrm{SO}_n)$ 和 $(\mathrm{U}_{n+1}, \mathrm{U}_n)$，Nelson 和 Venkatesh 运用轨道方法和微局部分析，发展了相对特征理论。对于由其最高权标记的稳定表示对（π_T，σ_T），Nelson 和 Venkatesh 研究了 T-依赖函数 a的$\mathcal{H}_{\pi,\sigma}(a_T)$的渐近行为。他们证明，对于任意 a，只要其支集包含在稳定元素的某个固定紧子集 $U \subset \mathfrak{g}^*$中，则当 $T \to \infty$

$$\mathcal{H}_{\pi,\sigma}(a_T) = \int_{\mathcal{O}_{\pi,\sigma}} a + O\left(T^{2\delta-1}\right)$$

对于某个固定的 $0 \leq \delta < 1/2$，在稳定轨迹之外，相对轨道变得奇异，分析也随之退化。这促使我们将研究特殊情形作为进一步理解的起点：即使稳定性失效，我们在多大程度上仍应预期相对特征的渐近行为由单个几何轨道支配。现在可以陈述我们的主定理，它给出了一个在非稳定情形下相对特征渐近行为的实例。

定理 1.3. 设 π 是 G 的主系列或超尖点酉表示，且 χ 是 H 的酉特征。若 π 是主系列 $\pi = \chi_0 \boxplus \chi_0^{-1}$，则假设 $\chi \neq \chi_0$、 χ_0^{-1} 或其非分歧扭曲。设 $a : \mathrm{Lie}(G)^* \to \mathbf{C}$ 是一个在尺度 $|T| = q^N$ 上为常数的函数，满足 $N \geq c(\chi)/2$，且支集于元素 $T\tau$，其 y 和 z 坐标 τ_y 与 τ_z 满足 $|\tau_y|, |\tau_z| \leq \min\left(q^{c(\chi_0\chi^{-1})/2}, q^{c(\chi_0^{-1}\chi^{-1})/2}\right)$（主系列情形）以及 $|\tau_y|, |\tau_z| \leq (q^{c(\pi\otimes\chi)/2})$（超尖点情形）。那么，存在一条双曲线（见 7）$\mathrm{Hyp}(\pi, \chi) \subset \mathrm{Lie}(G)^*$，使得

$$\mathcal{H}_{\pi,\chi}(a) = \int_{\mathrm{Hyp}(\pi,\chi)} a(\xi)\, d\xi. \tag{13}$$

当 $F = \mathbf{R}$时，这一定理的类似结果由 Nelson 和 Venkatesh 在[NV21] 中证明，适用于稳定情形下（G， H）的一对表示（π， σ）。在此情形下，定理 1.3 中的双曲线可解释为一个相对余伴随轨道。设（G， H）$= (\mathrm{PGL}_2(\mathbf{R}), \mathrm{GL}_1(\mathbf{R}))$，且 π 是主系列， σ 是一个特征，并以 $\mathbf{C}(\pi)$ 和 $\mathbf{C}(\sigma)$ 分别表示 π 和 σ的导子。 π 的余伴随轨道由下式给出

$$\mathcal{O}_\pi := \left\{ \begin{pmatrix} x & y+z \\ y-z & -x \end{pmatrix} : x^2 + y^2 - z^2 = \mathbf{C}(\pi)^2 \right\} \subseteq \mathfrak{g}^* \cong \mathbf{R}^3, \tag{14}$$

而 σ 的余伴随轨道由下式给出

$$\mathcal{O}_\sigma := \{x = \mathbf{C}(\sigma)\} \subseteq \mathfrak{h}^* \cong \mathbf{R}. \tag{15}$$

当$\mathbf{C}(\sigma) \neq \mathbf{C}(\pi)$时，相对余伴随轨道为

$$\mathcal{O}_{\pi,\sigma} := \mathcal{O}_\pi \cap \mathrm{pr}^{-1}(\mathcal{O}_\sigma) = \{\mathrm{y}^2 - \mathrm{z}^2 = \mathbf{C}(\pi)^2 - \mathbf{C}(\sigma)^2\},$$

它刻画出一条双曲线，这正是我们的 $\mathrm{Hyp}(\pi, \chi)$ 的类似情形（见1）。然而，当$\mathbf{C}(\sigma) = \mathbf{C}(\pi)$时，所得轨迹是一个十字形，并在原点处有一个奇点。在[NV21], 中，他们必须通过考察表示（π， σ）的稳定对来排除这种退化；也就是说，这类表示满足 H 在$\mathcal{O}_{\pi,\sigma}$上单传递。这种稳定性概念归结为对π 和 σ的无穷小特征 λ_π 和 λ_σ 的一个条件：即 $\{$ $\lambda_\pi\} \cap \{$ 的特征值 $\lambda_\sigma\} = \emptyset$的特征值。此外，若一对（$\lambda$， μ）$\in \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{h}^*$ 满足 $\{$ $\lambda\} \cap \{$ 的特征值 $\mu\} = \emptyset$.的特征值，我们就称其为稳定。

注 1.4。 在稳定对之外，导子 $C(\pi \times \sigma)$ 的 Rankin–Selberg L-函数 $L(s,\ \pi \times \sigma)$ 会下降。近期的次凸性结果，例如 [N23] ，依赖于稳定范围之外的这些相对特征渐近，因此要求满足导子不下降 这一假设

$$\forall i, j\ |\lambda_{\pi,i} - \lambda_{\sigma,j}| \gg T.$$

我们的主定理的优势在于，它在允许导子显著下降的情形下给出了相对特征的渐近公式。事实上，定理中对 π 和χ 的假设，类似于不允许导子下降的要求

$$\forall i, j\ |\lambda_{\pi,i} - \lambda_{\sigma,j}| \gg 1,$$

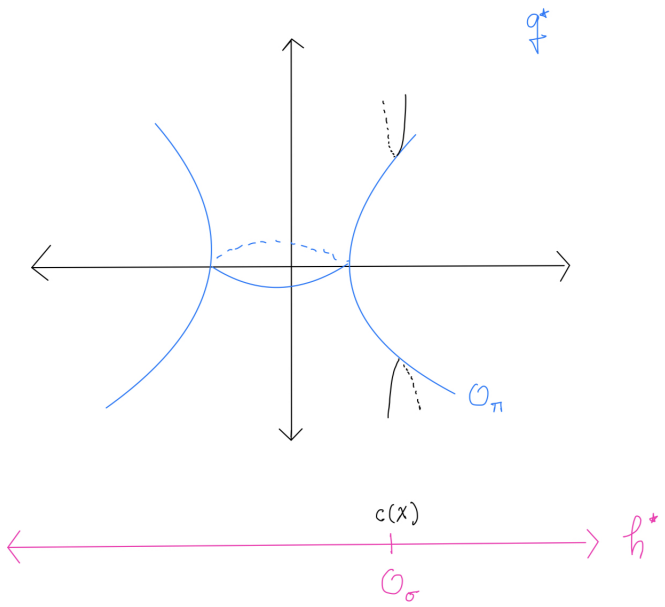

图 1. 相对余伴随轨道

但仅适用于$(G,\ H) = (\mathrm{PGL}_2, \mathrm{GL}_1)$的非阿基米德情形。在这种情形下，$\lambda_{\pi,\ i}$ 就是 χ_0 或 χ_0^{-1}的导子指数，而$\lambda_{\sigma,\ j}$ 是 χ的导子指数。

定理 1.3 与例 1.2中稳定性失效的情况有所不同。具体而言，在定理1.3中，十字形无法成为一个 H-挠子，因为它在 0 处的稳定子并非平凡稳定子，而且不包含零的轨道不是闭的；而在例 1.2中，稳定性失效是因为 $\mathcal{O}_{\pi,\sigma}$ 上有无穷多个 H-轨道，因此稳定子甚至不一定是有限的！

问题 1.5。 定理 1.3在多大程度上可以推广到其他非稳定情形?

尽管定理 1.3中的稳定性失效，但仍存在一个自然的轨道。因此，我们可以非正式地猜想，相对特征渐近应由具有有限稳定子群的非闭轨道所支配；这适用于定理 1.3 这类情形，但不适用于例 1.2。

Nelson 和 Venkatesh 的策略尤其促成了次凸问题上的诸多突破，其中包括 [N23], [N21], [M23], [HN18] 等。本文不探讨次凸性方面的任何应用，并完全避开相对迹公式的相关技巧。若想深入了解这一主题，我们推荐阅读 Nelson 和 Venkatesh 原论文的引言 [NV21]，以及近期预印本 [AT25], 中的详尽阐述；该预印本也探讨了非阿基米德微局部分析。

1.1. **证明概要**。 对等式 1 形式地应用帕塞瓦尔公式后，只需计算

$$\langle \mathrm{Op}(a)\ell_\chi, \ell_\chi \rangle,$$

其中 a 如定理 1.3 所述。这类函数可分解为波包（命题 3.4），因此由线性性，只需计算单个波包1_τ^T的相对特征。函数 1_τ^T 是某个固定元素 $\tau \in \mathfrak{g}^*$附近的凸起函数。事实上，1_τ^T是一个波包的傅里叶变换，该波包支集于同余子群 $K(N)$ 上，并以固定频率 τ 振荡（见第 3 节）。为计算$a = 1_\tau^T$的相对特征，我们将 $\mathrm{Op}(a)$ 按方向分解，对应于 Iwahori 分解$K(N) = K_- K_0 K_+$。对于任意函数 $b\colon F \to \mathbb{C}$ 以及 $\star \in \{-, 0, +\}$，$\mathrm{Op}^\star(b)$ 对 $K_\star$的作用取加权平均，权重为 b（精确定义见等式 22）。因此，我们将 $a = a_- a_0 a_+$ 分解为这类函数，每个函数都是 $\mathrm{Lie}(G_\star)^*$ 上的单变量函数。由于 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{g}^*$ 之间的对偶性（见第 3.2 节），函数 a_+（分别为 a_-）与算子 Op^-（分别为 Op^+）的配对最为自然。我们将使用 Weyl 元素 $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 以及 $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_1$ 局部函数方程，

在 Op^- 与 Op^+ 之间转换（见第 5.2 节）。特别地，有关系式 $\mathrm{Op}^+ = \pi(w)\,\mathrm{Op}^-\,\pi(w)$。这些分解与因式分解使我们能够将相对特征表示为

$$\begin{aligned}
\langle \mathrm{Op}(a)\ell_\chi, \ell_\chi\rangle &= \langle \mathrm{Op}^-(a_+)\,\mathrm{Op}^0(a_0)\,\mathrm{Op}^+(a_-)\ell_\chi, \ell_\chi\rangle \\
&= \langle \pi(w)\,\mathrm{Op}^0(a_0)\,\mathrm{Op}^+(a_-)\ell_\chi, \mathrm{Op}^+(a_+)\pi(w)\ell_\chi\rangle \\
&= \gamma(\pi\otimes\overline{\chi})\langle \pi(w)\,\mathrm{Op}^+(a_-)\,\mathrm{Op}^0(a_0)\ell_\chi, \mathrm{Op}^+(a_+)\ell_{\chi^{-1}}\rangle \\
&= \gamma(\pi\otimes\overline{\chi})a_0(\tau_x)\langle \pi(w)\,\mathrm{Op}^+(a_-)\ell_\chi, \mathrm{Op}^+(a_+)\ell_{\chi^{-1}}\rangle.
\end{aligned}$$

将这个最后的内积记作

$$I = \langle \pi(w)\,\mathrm{Op}^+(a_+)\ell_\chi, \mathrm{Op}^+(a_-)\ell_{\chi^{-1}}\rangle.$$

从这里开始，我们在 π 的基里洛夫模型 $\mathbf{K}(\pi,\ \psi)$ 中工作，因为该模型将 G 中幺幂子群 G_+ 的作用对角化。事实上，将 ℓ_χ 与基里洛夫模型中的一个适当向量对应起来之后，我们基本上得到

$$\mathrm{Op}^+(a_+)\ell_\chi = \{h \mapsto a_+(h)\chi(h)\} \in \mathbf{K}(\pi, \psi)$$

and

$$\mathrm{Op}^+(a_-)\ell_{\overline{\chi}} = \{h \mapsto a_-(h)\overline{\chi}(h)\} \in \mathbf{K}(\pi, \psi).$$

于是，我们可以按特征标基展开，并通过梅林反演将研究归结为

$$I = \int_\eta \langle a_-\overline{\chi}, \eta\rangle\langle \eta, \pi(w)a_+\chi\rangle\, d\eta = \int_\eta \gamma(\pi\otimes\overline{\eta})\langle a_-\overline{\chi}, \eta\rangle\langle \overline{\eta}, a_+\overline{\chi}\rangle\, d\eta.$$

此处我们关键地利用了这样一个事实：我们使用的是特定选择的测试函数 a，即 $a = 1_\tau^T$。本文技术上最繁重的部分都用于计算 I，我们将在第 5 节中完成这项计算。

另一方面，计算定理1.3右端的积分相对直接。我们通过计算右端并将其与先前左端的计算结果进行比较，完成证明。

1.2. **论文结构**。 第 2 节给出一些重要定义，并为本文后续内容作好铺垫。第 3 节明确描述我们所研究的函数，并考察其中的一些性质，同时证明算子 $\mathrm{Op}(a)$ 的所需性质。第 4节证明线性泛函的一些所需性质，并说明它们与相对特征之间的关系。第 5节进行必要的计算，以完成上一节的证明概要。

最后，在第 7节中，我们计算相空间中的相应积分，并证明它与相对特征一致。

致谢

我们感谢 Paul Nelson 与 Akshay Venkatesh 就早期草稿进行的有益讨论并提出的意见。本文构成作者的博士论文，并在 VILLUMFONDEN 的研究资助（VIL54509）支持下进行了修订。

2. 预备知识

设 v 为全局域 $\mathbf{F}$ 的一个有限处，并设 $\mathbf{F}_v$ 表示相应的非阿基米德局部域。我们只在局部情形下工作，因此，在记号的滥用下，我们将把$\mathbf{F}_v$ 简记为 F。设 $\mathcal{O}$ 为其整数环，极大理想为 $\mathfrak{p}$。我们用 ϖ 表示其赋值参数。 F上的绝对值记为 $|\cdot|$（下标有时省略），使得$|\varpi| = q^{-1}$，其中 q 是剩余域 $\mathcal{O}/\mathfrak{p}$的基数。设 $\mathrm{val}(x) = v(x)$: $F \to \mathbf{Z}$满足 $|x| = q^{-v(x)}$。就本论文而言，我们将假定 q 为奇数。
我们经常用 ψ 表示 F 的加性特征，即 $\psi(x+y) = \psi(x)\psi(y)$。令 $\mathrm{cond}(\psi)$ 表示 $\mathcal{O}_F$ 中使 ψ 平凡的最大理想，并记其导子指数为 $\mathrm{c}(\psi)$，使得 $\mathrm{cond}(\psi) = \mathfrak{p}^{\mathrm{c}(\psi)}$。若 $\mathrm{cond}(\psi) = \mathcal{O}_\mathrm{F}$，则称 ψ 是非分歧的，并且有 $\mathrm{c}(\psi) = 0$。诸如 χ、ν 或 η 这样的字母表示 $F^\times$ 的乘性特征。我们用 $U(n)$ 表示乘法子群 $\mathcal{O}^\times \cap (1+\mathfrak{p}^n)$。令 $\mathrm{cond}(\chi)$ 表示 $\mathcal{O}_F^\times$ 中使 χ 平凡的最大子群，并记其导子指数为 $\mathrm{c}(\chi)$，使得 $\mathrm{cond}(\chi) = \mathrm{U}(\mathrm{c}(\chi))$。若 $\mathrm{cond}(\chi) = \mathcal{O}^\times$ F，则 $\mathrm{c}(\chi) = 0$ ，并称 χ 是非分歧的。每个非分歧特征 η 都可写成 $\eta(x) = |x|^s$ ，其中某个 $s \in \mathrm{C}$。令 $X(F^\times)$ 表示 F 的乘性特征群。$F^\times$ 的非分歧特征构成 $X(F^\times)$ 的一个子群，该子群同构于 $\mathrm{C}/(\mathrm{Z} \cdot 2\pi i/\log q)$。

加法群 F上存在唯一的哈尔测度 du，将其归一化，使得体积$(\mathcal{O}, du) =1$。 $F^\times$ 上的乘法哈尔测度 $d^\times u$ 归一化为体积$(\mathcal{O}^\times, d^\times u) = 1$。这些测度满足 $d^\times u = \zeta_F(1) \frac{du}{|\cdot|}$，其中 $\zeta_F(1) = (1-q^{-1})^{-1}$ 是局部$\overline{\zeta}$因子。对于这些测度，我们有体积$(\mathfrak{p}^n, du) = q^{-n}$，以及体积$(U(n) \ d^\times u) = \zeta_F(1)q^{-n}$。令 $\mathcal{X}_n$ 表示导子不超过 n的特征集合。于是 $|\mathcal{X}_n| = \zeta_F(1)^{-1}q^n$。我们定义同余子群

$$K^0[m_v] := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G(\mathcal{O}_v) \mid c \equiv 0 \bmod \varpi_v^{m_v} \right\}.$$

如果 $\pi_v^{K^0[m-1]}$为空但 $\pi_v^{K^0[m]}$非零，则称 m为 π的导子指数，并记作 $C(\pi) = \mathfrak{p}^{v(\pi)}$。我们所关注的主要子群是主同余子群，其定义为

$$K(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G(\mathcal{O}_v) \mid a-1, b, c, d-1 \equiv 0 \bmod \varpi_v^n \right\}.$$

我们将 $K_v(n)$ 分解为其 Iwahori 分解，形式如下：

$$K(n) = N(\varpi^n) A(1+\varpi^n) N_-(\varpi^n),$$

其中，$\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}$、$N$（$\mathfrak{a}$）的右上项位于 $\mathfrak{a}$，A（$\mathfrak{a}$）的对角子群项位于 $1+\mathfrak{a}$，而 N_-（$\mathfrak{a}$）的左下项位于 $\mathfrak{a}$。

我们记

$$N := \left\{ n(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : x \in F \right\} \text{ and } A := \left\{ a(y) = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y \in F^\times \right\}.$$

2.1. **Whittaker模型与基里洛夫模型。** 对于一个一般的不可约表示 π 以及加法特征 ψ 的 F，我们将 π 嵌入其光滑 Whittaker模型 $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ 中，该模型由函数空间给出（参见 [JS83] 或 [BH06，第 37] 节）

$$\mathcal{W}(\pi, \psi) = \{W \in C^\infty(G) : n(x)W(g) = \psi(x)W(g) \text{ for all } (x, g) \in F \times G\}.$$

限制映射 $\mathcal{W}(\pi, \psi) \to \{$ 函数 $A_F \to \mathbf{C}\}$ 是单射，其像 包含$C_c^\infty(A_F)$，但并非仅由这类函数构成。因此，每个 $W \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ 都由一个函数 $W\colon F^\times \to \mathbf{C}$ 确定，使得

$$W(y) := W(a(y)).$$

此外，每个紧支集光滑函数都可由此方式得到。将 π 实现为 $F^\times$ 上的函数空间，便是 π 的基里洛夫模型。对于酉 π，不变内积定义为

$$\langle W_1, W_2 \rangle = \int_{F^\times} W_1(y)\overline{W_2(y)}\, d^\times y.$$

2.2. GL_1 **伊瓦萨瓦-泰特理论。** 若 χ 是一个乘性特征，则其扭曲对偶为 $\chi^\vee$: $= \chi^{-1}|\cdot|$。令 $d^\times x$ 为 $F^\times$上的哈尔测度，我们取为 $\frac{dx}{|x|}$，其中 dx是 F上的哈尔测度。对于 f上的施瓦茨函数 F，定义局部 zeta 泛函 $Z(f, \chi)$ 如下

$$Z(f, \chi) = \int_{F^\times} f(x)\chi(x)\, d^\times x.$$

接下来回顾局部 L 因子：若 χ 非分歧，则为 $L(\chi) = (1 - \chi(\varpi))^{-1}$；若 χ 分歧，则为 $L(\chi) = 1$。于是 GL_1 的局部函数方程表明：

$$\frac{Z(f, \chi)}{L(\chi)}\epsilon(\chi, \psi) = \frac{Z(\hat{f}, \chi^\vee)}{L(\chi^\vee)},$$

其中 $\hat{}\, f$表示傅里叶变换 $\hat{}\, f(y) = \int_F f(x)\psi(xy)\, dx$. 理解 ε 因子十分重要，它将在我们的分析中发挥特殊作用。为此，我们先定义高斯和（见 [GH11]）

$$g(\nu, \psi) = \int_{\mathcal{O}^\times} \nu(x)\psi(x)\, d^\times x.$$

它具有如下性质：若 ν 和 ψ 的导子不同，则高斯和为零。若导子均为 $\mathfrak{p}^n$，则 $|g(\nu, \psi)|^2 = q^{-n}$。将 χ 替换为 $\chi|\cdot|^{s-1/2}$ 时，我们将 $\epsilon(s, \chi, \psi)$ 记为 ε 因子。

引理 1. 设 χ 是一个乘性特征，具有形式 $\eta|\cdot|^s$，其导子 $\mathfrak{c}(\chi) = n$。设 ψ 是一个非分歧加法特征。则

$$\epsilon(s, \chi, \psi) = q^{n(1-s)}\eta(\varpi^n)g(\eta^{-1}, \psi_{\varpi^{-n}}), \tag{16}$$

其中 $\psi_t(x) := \psi(\{v4)$。

证明。参见 [GH11] 定理 2.3.8。 □

我们将经常使用以下推论，其证明是直接的。

推论 2.1。 对于 χ 酉表示，ε 因子满足

$$|\epsilon(1/2, \chi, \psi)|^2 = 1.$$

我们还将用到这样一个事实： $\epsilon(s, \chi|\cdot|^a) = q^{-ac(\chi)}\epsilon(s, \chi)$。最后，我们需要两个命题来理解乘性特征与加性特征之间的相互作用。

命题 2.2。 [BH06，第 1 节。8] 设 χ 是一个导子指数为 $c(\chi) = n$的乘性特征。对于一个固定的非分歧加性特征 ψ，存在 $\alpha_\chi \in F$ 使得

$$\chi(1+x) = \psi(\alpha_\chi x),$$

对 $x \in \mathfrak{p}^{n/2+1}$。

我们指出，这样的 α_χ 并不唯一，且仅在相差 $\mathfrak{p}^{-n/2-1}$的意义下确定。

注 2.3。 我们简要说明一下类似命题 2.2 的结果为何可能有用。考虑实数情形下的积分

$$G(\lambda, t) := \int_0^\infty |x|^{i\lambda} e^{-itx}\, dx. \tag{17}$$

为应用驻相法，我们将乘性特征 $|x|^{i\lambda}$ 写成加性特征 $e^{i\lambda \log(x)}$，从而得到相位函数 $\Phi(x) = i(\lambda \log(x) - tx)$ 和一个驻点 $x = \lambda/t$。类似地，将乘性特征 χ写成加性特征后，我们便可应用非阿基米德驻相法，且此时驻相法变为精确的。

命题 2.4。 [Tat75，第 3]设 χ和 ω 是两个特征，且 $m = c(\omega) \le c(\chi)/2 = n/2$。假设 ψ 是非分歧的，且 n 是偶的。设 α_χ 满足 $\chi(\exp a) = \psi(\alpha_\chi a)$ 对$a \in \mathfrak{p}^{n/2}/\mathfrak{p}^n$成立。则

$$\epsilon(1/2, \chi\omega, \psi) = \omega(\alpha_\chi)\epsilon(1/2, \chi, \psi).$$

注 2.5。 我们也可以再次将命题 2.4 理解为一个驻相法结果，类似于实数情形中的情形。事实上，假设我们用一个小特征 $G(\lambda, t) = \int_0^\infty |x|^{i\lambda} e^{-itx}$ 对其进行扭曲，其中 $|x|^{i\nu}$ 满足 $\nu \ll \lambda^{1/2}$。根据相同的推理，这个扭曲后的积分

$$G(\lambda, \nu, t) = \int_0^\infty |x|^{i\lambda}|x|^{i\nu} e^{-itx}\, dx$$

在 $x = \frac{\lambda+\nu}{t}$ 处有一个驻点。这个驻点的贡献为

$$|\lambda+\nu|^{-1/2} \left|\frac{\lambda+\nu}{t}\right|^{i(\lambda+\nu)} e^{-i(\lambda+\nu)}.$$

我们可以将其写为

$$|\lambda|^{-1/2} \left|(1+\frac{\nu}{\lambda})\right|^{-1/2} |\lambda|^{i(\lambda+\nu)} \left|(1+\frac{\nu}{\lambda})\right|^{i(\lambda+\nu)} e^{-i\lambda} e^{-i\nu}$$

应用一些泰勒展开并利用 $\nu \ll \lambda^{1/2}$后，这近似等于

$$|\lambda|^{-1/2} \left|\frac{\lambda}{t}\right|^{i\nu} \left|\frac{\lambda}{t}\right|^{i\lambda} e^{-i\lambda} \approx \left|\frac{\lambda}{t}\right|^{i\nu} G(\lambda, t).$$

因此，事实上，在 $\nu \ll \lambda^{1/2}$ 的条件下，我们有 $G(\lambda, \nu, t) \approx |\frac{\lambda}{t}|^{i\nu} G(\lambda, t)$。

2.3. **局部表示**。 为了进行相对特征的计算，我们需要为我们的表示关联一些数据。具体而言，我们需要理解导子 $\mathfrak{c}(\pi \otimes \chi)$，以及将出现在 $\mathrm{Hyp}(\pi, \chi)$ 的定义中的元素 $\alpha_{\pi,\chi} \in F$。我们已经看到了上一小节末尾出现的 α_χ 的定义。

设 π 是 $\mathrm{GL}_2(F)$ 的一个中心特征平凡的泛型超尖点表示。根据局部朗兰兹对应，它对应于一个二维表示 $\rho = \mathrm{Ind}_{E/F}\xi := \mathrm{Ind}_{\mathcal{W}_{\mathbf{E}}}^{\mathcal{W}_F}\xi$，其中$\mathbf{E}$ 是 F 的一个二次扩张，ξ 是 $\mathbf{E}^\times$的一个特征。注意，由于我们研究的是 PGL_2, ，因此要求 $\det \rho = 1$。根据类域论，我们可以将 ξ 视为韦伊群 $\mathcal{W}_E$ 的一个特征。具体而言，若 $\alpha_{\mathbf{E}}$ 是阿廷互反映射，

$$\alpha_{\mathbf{E}} : \mathcal{W}_{\mathbf{E}}^{\mathrm{ab}} \to \mathbf{E}^\times,$$

则 $\xi \circ \alpha_{\mathbf{E}}$ 是 $\mathcal{W}_{\mathbf{E}}$ 的一个特征。对于 $F^\times$ 的任意特征 η，或 F 的任意特征 ψ，令 $\eta_{\mathbf{E}} := \eta \circ \mathrm{Nm}_{\mathbf{E}/F}$，且 $\psi_{\mathbf{E}} := \psi \circ \mathrm{Tr}_{\mathbf{E}/F}$。最后，令 $e := e(\mathbf{E}|F)$ 为分歧指数，$f := f(\mathbf{E}|F)$ 为惯性次数。局部朗兰兹对应与伽马因子和 ε 因子之间的关系如下（见 [BH06，第 34] 节）：对于 $F^\times$ 上的任意特征 ν，

$$\gamma(\pi \otimes \nu) = \gamma(\rho \otimes \nu) = \gamma(\xi\nu_E)$$

and

$$\epsilon(1/2, \pi \otimes \nu, \psi) = \epsilon(1/2, \xi\nu_E, \psi_E).$$

特别地，导子满足 $\mathfrak{c}(\pi \otimes \chi) = f\mathfrak{c}(\xi\chi_E^{-1})$。

定义 2.6. 我们将 $\alpha_{\pi,\chi}$ 对于 π 超尖表示定义为 $\mathrm{Nm}(^{\alpha}\xi\chi_E^{-1})$，其中 $^{\alpha}\xi\chi_E^1$ 满足

$$\xi\chi_E^{-1}(1+x) = \psi(\alpha_{\xi\chi_E^{-1}}x),$$

对于 $x \in \mathfrak{p}^{c(\xi\chi_E^{-1})/2}\mathbf{E}$。

另一种情形是 π 为主系列。在这种情形下，我们记作 $\pi = \chi_0 \boxplus \chi_0^{-1} = \mathrm{Ind}^{G(F)}_{B(F)}(\chi_0, \chi_0^{-1})$。伽马因子和 ε 因子都分解为 GL_1 伽马因子与 ε 因子的乘积。具体而言，

$$\gamma(\pi \otimes \nu) = \gamma(\chi_0\nu)\gamma(\chi_0^{-1}\nu)$$

and

$$\epsilon(1/2, \pi \otimes \nu, \psi) = \epsilon(1/2, \chi_0\nu, \psi)\epsilon(1/2, \chi_0^{-1}\nu, \psi).$$

为理解 $\mathfrak{c}(\pi \otimes \chi)$，令 $\chi_\flat = \chi_0\chi^{-1}$ 和 $\chi_\sharp = \chi_0^{-1}\chi^{-1}$。那么 $\mathbf{C}(\pi \otimes \chi)$ 是$\chi_\flat$ 和$\chi_\sharp$的导子之和，即

$$\mathbf{C}(\pi \otimes \overline{\chi}) = c(\chi_\flat) + c(\chi_\sharp).$$

定义 2.7。 对于 π 主系列，我们定义 $\alpha_{\pi,\ \chi} = \alpha_{\chi_\sharp}\alpha_{\chi_\flat} \in F$，其中 $\alpha_{\chi_\flat}$ 以及 $\alpha_{\chi_\sharp}$的定义与命题 2.2类似。

2.4. GL_2 **Hecke-Jacquet-Langlands 理论**。 首先我们讨论整体理论。设**F**为全局域， $F = \mathbf{F}_v$ 为相应的局部域。设 φ 为 GL_2上的尖点形式，即 $\varphi \in L^2_{\text{cusp}}$(GL$_2$(**F**)\GL$_2$(**A**))。对于 χ这个$\mathbf{F}^\times\backslash\mathbf{A}^\times$ 的特征，我们定义整体zeta积分

$$Z(s,\varphi,\chi) = \int_{\mathbf{F}^\times\backslash\mathbf{A}^\times} \varphi(a(y))\chi(y)|y|^{s-1/2}\, d^\times y.$$

根据 w 的左不变性，我们有

$$\varphi(a(y)) = \varphi(wa(y)) = \varphi(wa(y)w^{-1}w) = \omega(y)\varphi(a(y^{-1})w),$$

其中， ω 表示 π 的中心特征。注意，这个关系也迫使 φ 在 0 处和无穷远处都衰减（因为它是尖点形式）。因此，整体函数方程表明

$$Z(s,\varphi,\chi) = Z(1-s,\pi(w)\varphi,\chi^{-1}\omega^{-1}).$$

利用 Whittaker模型中的因子分解 φ，我们可以从整体函数方程推导出局部函数方程。我们有

$$Z(s,\varphi,\chi) = \prod_v Z(s,W_{\varphi,v},\chi_v),$$

其中对于 Re(χ_v) +Re(s) $> \frac{1}{2}$

$$Z(s,W_v,\chi_v) = \int_{\mathbf{F}_v^\times} W_v\begin{pmatrix} a & \\ & 1\end{pmatrix}\chi_v(a)|a|^{s-1/2}\, d^\times a.$$

当 v 是非分歧时，

$$Z(s,W_v,\chi_v) = L(s,\pi_v\otimes\chi_v) = (1-\mu_v\chi_v(\varpi)q_v^{-s})^{-1}(1-\nu_v\chi_v(\varpi)q_v^{-s})^{-1},$$

其中 $\pi_v = \text{Ind}^{\text{G}(\text{F}_\text{v})}_{\text{B}(\text{Fv})}(\mu_\text{v},\ \nu_\text{v})$。单位元

$$Z(s,\varphi,\chi) = L(s,\pi\otimes\chi)\prod_v \frac{Z(s,W_v,\chi_v)}{L(s,\pi_v\otimes\chi_v)}$$

从而得到

命题 2.8. 局部函数方程（参见 [JL70，定理 2.18]）我们有

$$\frac{Z(s,W_v,\chi_v)}{L(s,\pi_v\otimes\chi_v)}\epsilon(s,\pi_v,\chi_v,\psi_v) = \frac{Z(1-s,\pi(w)W_v,\omega_v^{-1}\chi_v^{-1})}{L(1-s,\pi_v\otimes\omega_v^{-1}\chi_v^{-1})},$$

其中 $\epsilon(s,\ \pi_v,\ \chi_v,\ \psi_v)$ 具有 Ae^{Bs} 的形式。更简洁地说，我们可以写成

$$Z(s,W_v,\chi_v)\gamma(s,\pi_v\otimes\chi_v,\psi_v) = Z(1-s,\pi(w)W_v,\omega_v^{-1}\chi_v^{-1}),$$

其中 $\gamma(s,\ \pi_v\otimes\chi_v,\ \psi_v) = \epsilon(s,\ \pi_v,\ \chi_v,\ \psi_v)\frac{L(1-s,\pi_v\otimes\omega_v^{-1}\chi_v^{-1})}{L(s,\ \pi_v\otimes\chi_v)}$。

在全文中，我们将把局部函数方程特化为 $s = 1/2$，并将s 留作后文中的变量名。局部函数方程提供了一种通过梅林反演计算$\pi(w)W(a(y))$ 的方法。具体而言（见 [MV10]），有如下形式的等式

$$\pi(w)W\begin{pmatrix} y & \\ & 1\end{pmatrix} = \int_{\widehat{F^\times}}\gamma(1/2,\pi\otimes\chi)\omega\chi(y)\int_{F^\times} W\begin{pmatrix} a & \\ & 1\end{pmatrix}\chi(a)\, d^\times a\, d\chi,$$

其中 ω 是 π 的中心特征，对我们而言它是平凡的。

3. 测试函数与Op 演算

在本节中，我们为 Lie(G)* 上的施瓦茨函数 a定义 Op(a)。对于我们这一类函数 a，我们将 a 分解为 $a = \sum a_\tau$，其中每个 a_τ 都是一个凸起函数在 $T\tau$附近。然后我们证明，对于这些函数，我们可以写出

$$\mathrm{Op}(a_\tau) = \mathrm{Op}^-(a_{\tau,+})\,\mathrm{Op}^0(a_{\tau,0})\,\mathrm{Op}^+(a_{\tau,-})$$

顺序任意，其中每个 $a_{\tau,\star}$ 都是定义在 F 上的单变量函数。

3.1. 测试函数。

设 $\mathfrak{g}$ 为 G的李代数，坐标为

$$\begin{pmatrix} p_x & p_y \\ p_z & -p_x \end{pmatrix} = p \in \mathfrak{g}, \tag{18}$$

以及具有坐标 $\mathfrak{g}^*$ 的对偶李代数

$$\begin{pmatrix} \xi_x & \xi_z \\ \xi_y & -\xi_x \end{pmatrix} = \xi \in \mathfrak{g}^*. \tag{19}$$

对于李代数，我们将使用基 $e_0 = \begin{pmatrix} 1/2 & \\ & -1/2 \end{pmatrix}$、$e_+ = \begin{pmatrix} & 1 \\ & \end{pmatrix}$ 和 $e_- = \begin{pmatrix} & \\ 1 & \end{pmatrix}$。

对于固定的 $\mathcal{O}_F$ 上的非分歧酉特征 ψ，存在一个自然的双线性配对 $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \to \mathbf{C}^*$，由迹配对给出

$$\langle x, \xi \rangle = \psi(\mathrm{Tr}(x\xi)).$$

注意，坐标 y 和 z 在方程 18 和 19 中，从李代数转到对偶李代数或反向转换时会互换；这是由上文定义的迹配对所诱导的对偶性造成的。在阿基米德情形中，可以构造投影到微局部化向量上的算子，即满足

$$\pi(\exp x)v \approx e^{ix\tau/h}v, \tag{20}$$

对于所有 $x \in \mathfrak{g}$ 大小为 $|x| = O(h)$。当方程 20 成立时，我们称 v 在 τ处微局部化。我们将 h 视为一个趋于零的无穷小缩放参数，因此我们选取在单位元的一个不断缩小的邻域下具有对称性质的向量。我们将尝试在非阿基米德情形中仿照这一构造。

注记 3.1. 在其他近期涉及非阿基米德情形下微局部分析的研究中，作者们在超尖点表示的情形使用了最小向量（参见 [HN18]），并在主系列表示的情形使用了微局部提升向量（参见[N18]）。这里我们选择使用与方程20中的微局部化概念完全吻合的向量。

令 $k(N)$ 为 $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}^N\mathrm{Mat}_2(\mathcal{O})$ 中矩阵的集合。令 $K(N)$ 为 $k(N)$ 在指数映射下的像。

定义 3.2. 非阿基米德微局部化向量是满足以下条件的向量

$$\pi(\exp x)v = \langle -x, \tau \rangle v$$

对所有 $x \in k(N)$ 以及某个 $\tau \in \mathfrak{g}^*$ 均成立。

注记3.3。 与方程20中的阿基米德概念相比，我们应将 h 视为 $h = 1/T$，其中 $T = \varpi^{-N}$。于是当 $N \to \infty$，$|T| \to \infty$微局部化便成为原点处一个越来越小邻域的特征向量性质。

我们希望找到一个 a，使得 $\mathrm{Op}(a)$ 将非阿基米德微局部化向量投影到.....上。为此，我们选取 $a = a_\tau$，使其逆傅里叶变换为

$$a_\tau^\vee(x) = \mathrm{vol}(k(N))^{-1} 1_{k(N)}(x)\langle x, T\tau\rangle.$$

相位 $\langle x, T\tau\rangle$ 起着阿基米德相位 $e^{ix\xi/h}$ 的作用，其中 $h = 1/T$。注意， a_τ 是一个依赖于 T的函数，但为避免记号繁琐，我们常常省略这种依赖关系。

这些函数构成了本文所考虑的测试函数的基本构件。算子 $\mathrm{Op}(a_\tau)$ 具有这样的性质：其像由在如下意义下微局部化于 τ的向量组成，定义见 3.2。主定理适用于函数 a_τ的任意线性组合。我们有时称它们为“非阿基米德波包”。若将它们视为支集于元素属于$T^{-1}\mathcal{O}$的矩阵上，则对偶区域为

$$\{\xi \in \mathfrak{g}^* : |x \cdot \xi| \le 1 \ \forall x \in T^{-1}k(0)\} =: Tk(0)^\perp.$$

引理 2。 傅里叶变换 $a_\tau(\xi)$ 是 $T\tau + Tk(0)^\perp$ 上的凸起函数。

证明。我们有

$$\begin{aligned} a_\tau(\xi) = \widehat{a_\tau^\vee}(\xi) &= \frac{1}{\mathrm{vol}(k(N))} \int_{x\in\mathfrak{g}} \psi(xT\tau) 1_{T^{-1}k(0)}(x)\psi(-x\xi)\, dx \\ &= \frac{1}{\mathrm{vol}(k(N))} \int_{x\in T^{-1}k(0)} \psi(x(T\tau - \xi))\, dx \\ &= \int_{u\in k(0)} \psi(u(\tau - T^{-1}\xi))\, du = 1_{k(0)^\perp}(\tau - T^{-1}\xi) \\ &= 1_{T(\tau + k(0)^\perp)}(\xi). \end{aligned}$$

作为一种记号上的滥用，我们有时会将这个特征函数写作 $1_{T(\tau+\mathcal{O})}$，甚至更简洁地仅写作 1_τ^T。□

换言之， $a_\tau(\xi)$ 是球 $B(T\tau, T)$ 的特征函数，其中

$$B(x, R) = \{y \in \mathfrak{g}^* : |y - x| \le R\}.$$

那么，我们可以设想用 $\mathfrak{g}^*$ 的平移来铺砌空间 $Tk(0)^\perp$，每个 $\tau \in \mathfrak{g}^*/Tk(0)^\perp$ 对应一个。这便得到如下分解（参见 [L23，引理 3。4]）

命题 3.4 （波包分解）。设 $T = \varpi^{-N}$，并假设 a 是定义在 $\mathfrak{g}^*$ 上的施瓦茨函数，且在陪集 $Tk(0)^\perp$ 上为常数。设 $a_\tau = 1_\tau^T := 1_{T(\tau+\mathcal{O})}$ 是球 $B(T\tau, T)$ 的特征函数。那么我们可以写成

$$a = \sum_{\tau \in \mathfrak{g}^*/Tk(0)^\perp} a(\tau) 1_\tau^T. \tag{21}$$

每一项 $a1_\tau^T$ 都傅里叶支撑于 $T^{-1}k(0)^\perp$ ，并且在每个球 $B(T\tau, T)$ 上具有恒定大小。

波包分解给出了 a 在 $\mathfrak{g}^*$ 上处处的描述，但实际上，相对特征只会“看到”支集位于某个 $T\tau$ 附近的 $a1_\tau^T$，而该 $T\tau$ 位于相对余伴随轨道 $\mathcal{O}_{\pi,\sigma}$ 的 $Tk(0)^\perp$ 内。

3.2. 算子**演算**。 现在我们可以定义一类算子

$$\mathrm{Op}(a) := \int_{x\in\mathfrak{g}} a^{\vee}(x)\pi(\exp x)\,dx.$$

固定一个元素 $\tau \in \mathfrak{g}^*$，并在全文中保持不变。然后， $a_\tau^\vee(x)$ 将是与 T 相关的函数，与之前一样，它在 $k(N)$ 上以频率 $T\tau$ 振荡，而 $a_\tau(\xi)$ 则是其傅里叶变换，即定义在 $T\tau$ 上的凸起函数 1_τ^T。

我们有 Iwahori 分解 $K(N) = K_-K_0K_+$，其中 K_- 是负幺幂子群， K_0 是对角子群，而 K_+ 是幺幂子群。我们将指数映射下 $K_\star$ 的原像记为 $k_\star$，其中 $\star \in \{0,+,-\}$。它们对应于李代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_+ + \mathfrak{g}_-$ 中的分解，其中每个空间定义为

$$\mathfrak{g}_0 := \begin{pmatrix} * & \\ & -* \end{pmatrix},\ \mathfrak{g}_+ := \begin{pmatrix} & * \\ & \end{pmatrix},\ \mathfrak{g}_- := \begin{pmatrix} & \\ * & \end{pmatrix}.$$

迹配对诱导出对偶关系 $\mathfrak{g}_0^* \cong \mathfrak{g}_0$、 $\mathfrak{g}_\pm^* \cong \mathfrak{g}_\mp$。每个 K_* 都是一维的，因此我们可以用满足相应同余条件的 F 中的元素对它们进行参数化。这意味着我们可以按 $\tau = \tau_0 + \tau_- + \tau_+$ 将 $\tau \in \mathfrak{g}^*$ 分解，其中 $\tau_0 \in k(N) \cap \mathfrak{g}_0$，且$\tau_\pm \in k(N) \cap \mathfrak{g}_\mp$。对于 $\star \in \{-,0,+\}$，我们定义一维函数 $a_{\tau_\star}\colon F \to \mathbf{C}$，使得

$$a_{\tau_\star}^\vee(x) = \frac{1}{\mathrm{vol}(k_\star)} \mathbb{1}_{T^{-1}\mathcal{O}}(x)\psi(xT\tau_\star).$$

现在我们可以定义作用于 $\star \in \{0,\pm\}$ 和 a 的算子 $\mathrm{Op}^\star\colon F \to \mathbf{C}$，定义如下

$$\mathrm{Op}^{\pm}(a) = \int_{x\in\mathfrak{g}} a^{\vee}(x)\pi(\exp(xe_\pm))\,dx$$

and

$$\mathrm{Op}^{0}(a) = \int_{x\in\mathfrak{g}} a^{\vee}(x)\pi(\exp(xe_0))\,dx$$

其中， $e_\star$ 是 $k_\star$ 中的基元素，例如 $e_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。

对于函数 $a_{\tau_\star}$，例如有

$$\begin{aligned}\mathrm{Op}^{\pm}(a_{\tau_\mp}) &= \int_{x\in k_\star} a_{\tau_\mp}^{\vee}(x)\pi(\exp(xe_\pm))\,dx \\ &= \int_{u\in\mathcal{O}} \psi(u\tau_\mp)\pi(\exp(T^{-1}ue_\pm))\,du,\end{aligned}$$

对于 $\mathrm{Op}^{\pm}(a_{\tau_0})$ 也类似。因此，对于 $\dagger \in \{0,\pm\}$，函数 $a_{\tau_\dagger}$ 的逆傅里叶变换沿 $\dagger$ 方向以频率 $\tau_\dagger$ 振荡，而 $\mathrm{Op}^\star$ 则对限制在 $k_\star$ 上的 π 的作用取平均。

接下来要理解的是这些算子如何复合。我们希望得到类似于

$$\mathrm{Op}(a)\,\mathrm{Op}(b) = \mathrm{Op}(ab),$$

从而这些算子彼此可交换。事实证明，对于我们对 a 和 b的选择而言，并且就我们的目的来说，基本上可以获得这一性质。在陈述命题之前，我们先定义一个乘积

$$\star : k(n) \times k(n) \to k(n)$$

要求

$$e^x e^y = e^{x \star y}.$$

Baker-Campbell-Hausdorff公式由此推出： $x \star y = x + y + \frac{1}{2}[x,y] + O(x^2 y, y^2 x)$。

命题3.5。设 $\xi \in k(-m)$，也就是说 ξ 的每个元素都属于 $\varpi^{-m}\mathcal{O}$。若 $N \geq \frac{m}{2}$，则对于 x， $y \in k(N)$，

$$\langle x, \xi\rangle\langle y, \xi\rangle = \langle (x \star y), \xi\rangle. \tag{22}$$

换言之，映射

$$\psi_\xi : K(N) \xrightarrow[\log]{} k(N) \xrightarrow{\langle\ ,\ \xi\rangle} \mathbf{C}^\times, \tag{23}$$

是一个特征。

证明。只需证明差

$$\{x, y\} = x \star y - x - y$$

与 ξ 的配对恒为零。这很容易验证。首先注意到 $\{x,y\} = \frac{1}{2}[x,y] + O(x^2 y) + O(y^2 x)$。对于 $x, y \in k(N)$，有 $\{x,y\} \in k(2N)$。因此，矩阵 $[x,y]$ 的每个元素 a_{ij} 都满足 $a_{ij} \in \mathfrak{p}^{2N}$。所以

$$\langle \{x,y\}, \xi\rangle \equiv \langle [x,y], \xi\rangle = \psi(a_{11}\xi_x + a_{12}\xi_y + a_{21}\xi_z - a_{11}\xi_x) = 1$$

因为根据条件 $2N \geq m$，每一项 $a_{ij}\xi_\star \in \mathcal{O}$。

□

为了解这如何有助于 Op-演算，定义

$$(a \star b)(\xi) = \int_{x,y} a^\vee(x) b^\vee(y) \langle x \star y, \xi\rangle \, dx\, dy.$$

那么根据傅里叶反演

$$\begin{aligned} \mathrm{Op}(a)\,\mathrm{Op}(b) &= \int_{x,y} a^\vee(x) b^\vee(y) \pi(e^x)\pi(e^y)\, dx\, dy \\ &= \int_{x,y} a^\vee(x) b^\vee(y) \pi(e^{x\star y})\, dx\, dy = \mathrm{Op}(a \star b). \end{aligned}$$

若 $x \star y = x + y$，则这将是标准卷积，我们将得到 $a \star b = \widehat{(a^\vee * b^\vee)} = ab$，从而 $\mathrm{Op}(a \star b) = \mathrm{Op}(ab)$。只需证明相位 $\psi(\cdot\{x,y\}) = 1$。此时我们需要对 a 和 b 作出具体选择。

命题 3.6. 回顾 $T = \varpi^{-N}$ 是我们的缩放参数，并设 $a = a_\tau = 1_{T(\tau + \mathcal{O})}$ 满足 $|T\tau| \leq q^{2N}$。则

$$\mathrm{Op}(a_\tau) = \mathrm{Op}^-(a_{\tau_+})\,\mathrm{Op}^0(a_{\tau_0})\,\mathrm{Op}^+(a_{\tau_-}), \tag{24}$$

并且右侧的算子可交换。

证明. 回顾我们有 Iwahori 分解 $K(N) = K_-(N)K_0(N)K_+(N)$。设

$$\psi_\tau : K(N) \to \mathbf{C}^\times,$$

是由 $\psi_\tau(x) = \langle x, T\tau\rangle = \psi(\text{迹}(xT\tau))$ 给出的特征。我们希望证明该方程

$$\psi_\tau(k_- k_0 k_+) = \psi_\tau^-(k_-)\psi_\tau^0(k_0)\psi_\tau^+(k_+).$$

对与坐标 τ_-、τ_+、τ_0 相关联的 K_-、K_0 与 K_+ 的特征 ψ_τ^-、ψ_τ^0 与 ψ_τ^+ 的特定选取成立。这将蕴含方程24，因为我们也可以将 $\pi(\exp\ k_-k_0k_+)$ 分解为 $\pi(\exp\ k_-)\pi(\exp k_0)\pi(\exp k_+)$。由命题3.5，特征 ψ_τ 在 $K(2N)$ 上平凡，并且 $[K(N)\ K(N)] \subset K(2N)$，因此 ψ_τ 在 $K(N)/K(2N)$ 上定义一个特征。因此，只需证明 $\psi_\tau(k_-k_0k_+)$ 与 $\psi_\tau^-(k_-)\psi_\tau^0(k_0)\psi_\tau^+(k_+)$ 在相差 $K(2N)$ 中的项的意义下一致。为此，考虑矩阵乘积

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & \\ & t^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ & 1 \end{pmatrix} \in K_-(n)K_0(n)K_+(n).$$

展开后我们得到

$$\begin{pmatrix} t & tu \\ nt & ntu + t^{-1} \end{pmatrix}.$$

我们知道 $t \equiv 1 \mod \mathfrak{p}^N$，且 $u,\ n \equiv 0 \mod \mathfrak{p}^N$，因此 $tu \equiv u \mod \mathfrak{p}^{2N}$，且 $tn \equiv n \mod \mathfrak{p}^{2N}$。此外，$ntu + t^{-1} \equiv t^{-1} \mod \mathfrak{p}^{2N}$。因此该矩阵乘积满足

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & \\ & t^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} t & u \\ n & t^{-1} \end{pmatrix} \bmod \mathfrak{p}^{2N}.$$

容易验证，上述矩阵乘积的每一种排序都同余于 $\begin{pmatrix} t & u \\ n & t^{-1} \end{pmatrix} \bmod \mathfrak{p}^{2N}$。由于 ψ_τ 在 $K(2N)$ 上是平凡的，这就完成了（24）的证明。

接下来我们证明交换性。我们对 Op^+ 与 Op^- 证明，其他情形完全相同。我们有

$$\mathrm{Op}^+(a_{\tau_-})\,\mathrm{Op}^-(a_{\tau_+}) = \int_{x,y\in\varpi^N\mathcal{O}} \psi(xT\tau_-)\psi(xT\tau_+)\pi(\exp(ye_+ \star xe_-))\,dx\,dy.$$

我们可以写成 $ye_+ \star xe_- = ye_+ + xe_- + \{ye_+, xe_-\} = xe_- + ye_+ + \{ye_+, xe_-\}$，并作变量替换 $ze_+ = ye_+ + \{ye_+, xe_-\}$。但注意 $ze_+ \equiv ye_+ \mod k(2N)$，因此我们得到

$$\begin{aligned} \mathrm{Op}^+(a_{\tau_-})\,\mathrm{Op}^-(a_{\tau_+}) &= \int_{x,z\in\varpi^N\mathcal{O}} \psi(xT\tau_-)\psi(zT\tau_+)\pi(\exp(xe_-))\pi(\exp(ze_+))\,dx\,dz \\ &= \mathrm{Op}^-(a_{\tau_+})\,\mathrm{Op}^+(a_{\tau_-}). \end{aligned}$$

□

4. 不变泛函与相对特征

回顾方程 1，我们的情形下的相对特征由下式给出

$$\mathcal{H}_\sigma(a) = \sum_{v\in\mathcal{B}(\pi)} \ell_\chi(\mathrm{Op}(a)v)\overline{\ell_\chi(v)},$$

对于 π 酉，其中

$$\ell_\chi(v) = \int_H W_v \begin{pmatrix} h & \\ & 1 \end{pmatrix} \overline{\chi(h)}\,dh.$$

这里 W_v 是 v 在 π 的 Whittaker模型中的像，而 σ 是一维的，因此它是一个特征。可以如下理解相对特征：取内积 $\langle g^{-1}\ell_\chi,\ \ell_\chi\rangle$。这是定义在 G上的一个分布。形式上展开这个内积，并应用帕塞瓦尔公式，可以得到 G上的函数

$$\sum_{v\in\mathcal{B}(\pi)} \langle \ell_\chi, gv\rangle\langle v, \ell_\chi\rangle.$$

现在，为了从中得到一个实数，我们用积分算子$\pi(f)$（或等价地，算子 $\mathrm{Op}(a)$）对 g 进行积分。这便得到相对特征。

为了利用这一观点，最好将 ℓ_χ 与一个向量对应起来。一般而言，这样的向量并不存在，但实际上我们只需找到一个向量，使其在 $\mathrm{Op}(a_\tau)$ 的像上与 ℓ_χ 一致，因为我们只会在此处用到该泛函。为此，我们定义如下向量：

定义 4.1. </style}对于 $R \in q^{\mathbf{Z}}$，令 $v_\chi^R \in \pi$ 为基里洛夫模型中的一个向量，由下式给出

$$v_\chi^R(h) = \chi(h)\mathbb{1}_{[-R,R]}(v(h)). \tag{25}$$

命题 4.2. 设 v 属于 π。那么对于 $F^\times$的酉特征 χ，有

$$\ell_\chi(v) = \lim_{R\to\infty} \langle v, v_\chi^R \rangle. \tag{26}$$

证明。这由惠特克函数的行为可知 W_v。　$W_v(y)$表现为$|y|^{1/2-\epsilon}$ 当 $|y| \to 0$ 且 $W_v(y)$ 在无穷远处衰减（参见 [MV10第 3 节中的讨论。2]）。因此 $\ell_\chi(v)$ 绝对收敛，所以我们可以将其写为 极限$_{R\to\infty}\langle v,\ v_\chi^R\rangle$。 □

5. Analysis of the Relative Character

现在我们开始分析按照第 1.1 节中的证明概要计算 a_τOp() 的像。直到计算 π Op^- 时，我们都不必使用其为超尖表示或主系列表示这一事实；在该计算中，对 $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_1$ 函数方程的分析将迫使我们选择表示 π。本节的主要结果是命题 5.8，它计算了相对特征。我们将在第 6节证明命题 5.8。

5.1. $\mathrm{Op}(a_\tau)$**的像。** 在本文余下部分，我们固定一个 τ，并选择 $a = a_\tau = \mathbb{1}_\tau^T = \mathbb{1}_{B(T\tau,T)}$ (ξ)。简记为 $a_\star$，表示 $a_{\tau_\star}$。我们首先从 $\mathrm{Op}^0(a_0)v_\chi^R$开始。对于任意向量 v，有

$$\begin{aligned}
\ell_\chi(\mathrm{Op}^0(a_0)v) &= \int_{h\in H} \left(\mathrm{Op}^0(a)W_v\right) \begin{pmatrix} h & \\ & 1 \end{pmatrix} \overline{\chi}(h)\, d^\times h \\
&= \int_{h\in F^\times} \int_{u\in\mathcal{O}} \psi(u\tau_x) \left(\pi\left(\exp(T^{-1}ue_0)\right) W_v\right) \begin{pmatrix} h & \\ & 1 \end{pmatrix} \overline{\chi}(h)\, du\, d^\times h \\
&= \int_{h\in F^\times} \overline{\chi}(h) \int_{u\in\mathcal{O}} \psi(u\tau_x) W_v \begin{pmatrix} h\exp(T^{-1}u) & \\ & 1 \end{pmatrix} d^\times h\, du \\
&= \int_{u\in\mathcal{O}} \psi(u\tau_x)\chi(\exp(T^{-1}u))\, du \int_{h\in F^\times} W_v \begin{pmatrix} y & \\ & 1 \end{pmatrix} \overline{\chi}(y)\, d^\times h \\
&= \left(\int_{u\in\mathcal{O}} \psi(u\tau_x)\chi(\exp(T^{-1}u))\, du\right) \ell_\chi(v).
\end{aligned}$$

其中，e_0 是 $\begin{pmatrix} 1/2 & \\ & -1/2 \end{pmatrix}$的基元素。剩下的工作是计算该积分。取 N足够大，使得 $2N \geq c(\chi)$，如定理陈述中所述。由于 q 是奇数，$\chi(\exp x) = \chi(1+x)$ 对 $x \in \mathfrak{p}^{c(\chi)/2}$成立。因此，根据命题 2.2，我们可以写成

$$\begin{aligned}
\ell_\chi(\mathrm{Op}^0(a)v) &= \left(\int_{u\in\mathcal{O}} \psi(u(\tau_x + \alpha_\chi T^{-1}))\, du\right) \ell_\chi(v) = 1_{\mathcal{O}}(\tau_x + T^{-1}\alpha_\chi)\ell_\chi(v) \\
&= a_0(\alpha_\chi)\ell_\chi(v)
\end{aligned}$$

现在我们可以看出，H方向算子 $\mathrm{Op}^0(a_0)$ 实际上在做什么。它希望投影到这样的向量上：这些向量在对偶李代数中某些元素处经过微局部化，而这些元素经过缩放后的

x坐标接近映射 $\mathrm{Lie}(G)^* \to \mathrm{Lie}(H)^*$ 的原像，即 χ 的导子 f。换句话说，它正在检测“切片” $\mathcal{O}_\pi \cap \left(\mathfrak{c}(\chi) + \mathrm{Lie}(H)^\perp\right)$。

接下来我们计算 $\mathrm{Op}^+(a_-)v_\chi^R$。对于基里洛夫模型中的任意向量 W_v，我们有

$$\begin{aligned}(\mathrm{Op}^+(a_-)W_v)(h) &= \int_{u\in\mathcal{O}} \psi(u\tau_y)\pi(\exp(T^{-1}ue_+)W_v)\begin{pmatrix} h & \\ & 1\end{pmatrix} du \\ &= \left(\int_{u\in\mathcal{O}} \psi(u(\tau_y + T^{-1}h))\, du\right) W_v\begin{pmatrix} h & \\ & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

积分的具体表现取决于 $\tau_y \in \mathcal{O}$，但其总体效果是限制 h 的支集。事实上，二分情形如下：

$$\int_{u\in\mathcal{O}} \psi(u(\tau_y + \varpi^N h))\, du = \begin{cases} 1_{v(h)\geq -N}(h) & \text{if } \tau_y \in \mathcal{O} \\ 1_{\varpi^{-N-r}(\mathfrak{p}^r + \varpi^r\tau_y)}(h) & \text{if } \tau_y \in \varpi^{-r}\mathcal{O}^\times,\ r>0.\end{cases}$$

因此

$$\mathrm{Op}^+(a_-)v_\chi^R = \begin{cases} v_\chi^R(h)1_{v(h)\geq -N} & \text{if } \tau_y \in \mathcal{O} \\ v_\chi^R(h)1_{\varpi^{-N-r}(\mathfrak{p}^r + \varpi^r\tau_y)}(h) & \text{if } \tau_y \in \varpi^{-r}\mathcal{O}^\times,\ r>0.\end{cases}$$

为了更好地理解这一点，我们先来弄清楚特征函数$\mathbb{1}_{\varpi^{-N-r}(\mathfrak{p}^r+\varpi^r\tau_y)}(h)$。注意

$$\mathfrak{p}^r + \varpi^r\tau_y \subset \mathcal{O}^\times,$$

特征函数$\mathbb{1}_{\varpi^{-N-r}(\mathfrak{p}^r+\varpi^r\tau_y)}(h)$定义了 $\mathcal{O}^\times$ 的一个特征。

引理 3. 设 $u_0 \in \mathcal{O}^\times$ 与 $\mathcal{X}_m$ 表示导子至多为 m的特征标群。则对于 $u \in \mathcal{O}^\times$,

$$1_{u_0+\mathfrak{p}^m}(u) = \frac{1}{|\mathcal{X}_m|}\sum_{\omega\in\mathcal{X}_m} \omega^{-1}(u_0)\omega(u) =: \mathbb{E}_{\omega\in\mathcal{X}_m}\, \omega^{-1}(u_0)\omega(u) \tag{27}$$

证明。 该证明由有限群$(\mathcal{O}/\mathfrak{p}^m)^\times$上的傅里叶分析得出。 □

据此，我们可以将 $\mathrm{Op}^+(a_+)$ 的计算更新为

$$\mathrm{Op}^+(a_-)v_\chi^R = \begin{cases} v_\chi^R(h)1_{v(h)\geq -N} & \text{if } \tau_y \in \mathcal{O} \\ v_\chi^R(h)1_{v(h)=-N-r}\, \mathbb{E}_{\omega\in\mathcal{X}_r}\, \omega^{-1}(\varpi^r\tau_y)\omega(\varpi^{N+r}h) & \text{if } \tau_y \in \varpi^{-r}\mathcal{O}^\times,\end{cases}$$

其中 $r>0$。注意 $\varpi^r\tau_y$ 与 $\varpi^{N+r}h$ 均为单位。

5.2. **负幺幂子群与函数方程**。 接下来我们需要计算来自负幺幂元方向的贡献，也就是说，我们需要理解 $\mathrm{Op}^-(a)v$。首先我们记录一个简单引理。

引理 4. 我们有

$$\ell_\chi(\pi(w)W_v) = \gamma(\pi\otimes\chi)\ell_{\chi^{-1}}(W_v). \tag{28}$$

证明。 这只是对 $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_1$ 局部函数方程（参见命题2.8）的重新表述。事实上，根据局部函数方程，左端为

$$\int_{h\in F^\times} W_v\left(\begin{pmatrix} h & \\ & 1\end{pmatrix} w\right)\chi^{-1}(h)\, d^\times h = \gamma(\pi\otimes\chi)\int_{h\in F^\times} W_v\begin{pmatrix} h & \\ & 1\end{pmatrix}\chi(h)\, d^\times h.$$

□

为了计算负幺幂情形，我们将使用泛函 ℓ_χ，直到转而使用向量 v_χ^R 更为方便为止。例如，我们可以先从泛函一侧入手，对基里洛夫模型 π 中任意满足 W_v 的 $v\in\pi$，写出

$$\begin{aligned}\ell_\chi(\mathrm{Op}^-(a_+)v)&=\ell_\chi\left(\int_{u\in\mathcal{O}}\psi(u\tau_z)(\pi(\exp(T^{-1}ue_-))W_v)\,du\right)\\&=\ell_\chi\left(\int_{u\in\mathcal{O}}\psi(u\tau_z)(\pi(w)\pi(\exp(T^{-1}ue_+))\pi(w)W_v)\,du\right)\\&=\gamma(\pi\otimes\chi)\ell_{\overline{\chi}}\left(\int_{u\in\mathcal{O}}\psi(u\tau_z)\pi(\exp(T^{-1}ue_+))\pi(w)W_v\right).\end{aligned}$$

我们应当认为，内部的积分大致起到与 Op^+ 相同的作用，但作用于向量 $\pi(w)W_v$，而不是 W_v。然而，最终的二分情形将取决于 $\tau_z\in\mathcal{O}$，而非 τ_y。

明确地说，

$$\begin{aligned}&\ell_{\overline{\chi}}\left(\int_{u\in\mathcal{O}}\psi(u\tau_z)\pi(\exp(T^{-1}ue_+))\pi(w)W_v\right)\\&\quad=\int_{h\in H}\int_{u\in\mathcal{O}}\psi(u(\tau_z+T^{-1}h))\,du(\pi(w)W_v)(h)\chi(h)\,d^\times h.\end{aligned}$$

因此，对于 $\tau_z\in\mathcal{O}$,

$$\ell_\chi(\mathrm{Op}^-(a_+)v)=\gamma(\pi\otimes\chi)\ell_{\overline{\chi}}\left((\pi(w)v)1_{v(\cdot)\geq -N}\right).$$

当 $\tau_z\notin\emptyset$ 时，所得到的分析相当复杂。因此，我们先考虑 $\tau_z\in\emptyset$ 情形，这一情形体现了核心思想。由于对 $\pi(w)v$ 的支集存在限制，我们无法直接再次应用局部函数方程。我们需要明确理解韦伊元的作用。为此，我们改从向量的角度来考察。也就是说,

$$\ell_\chi\left(\mathrm{Op}^-(a_+)W_v\right)=\gamma(\pi\otimes\chi)\ell_{\overline{\chi}}\left(\pi(w)(W_v1_{v(\cdot)\geq -N})\right)\tag{29}$$

$$=\gamma(\pi\otimes\chi)\lim_{R\to\infty}\langle\pi(w)(W_v1_{v(\cdot)\geq -N}),v_\chi^R\rangle\tag{30}$$

$$=\gamma(\pi\otimes\chi)\lim_{R\to\infty}\langle W_v,\pi(w)(v_\chi^R1_{v(\cdot)\geq -N})\rangle.\tag{31}$$

为了完成这一计算，我们以一个一般引理作为本节的结尾，该引理概括了如何利用局部函数方程计算 $\pi(w)$ 在基里洛夫模型中的向量上的作用。

引理5。设 $[n,\omega]\in\pi$ 在基里洛夫模型中由 $1_{\varpi^n\mathcal{O}^\times}\omega$ 给出。那么

$$\pi(w)[n,\omega]=\omega^{-1}(y)\frac{\log q}{2\pi i}\int_{|z|=1}\gamma(\pi\otimes\omega^{-1}|\cdot|^s)z^{v(y)+n}\frac{dz}{z},$$

其中 $z=q^{-s}$。

证明。 我们通过梅林反演继续推导。可以写成

$$(\pi(w)[n,\omega])(y)=\int_{\widehat{F^\times}}\gamma(\pi\otimes\nu)\nu(y)\int_{F^\times}[n,\omega](h)\nu(h)\,d^\times h\,d\nu\tag{32}$$

$$=\int_{\widehat{F^\times}}\gamma(\pi\otimes\nu)\nu(y)\int_{F^\times}1_{\varpi^n\mathcal{O}^\times}(h)\omega(h)\nu(h)\,d^\times h\,d\nu\tag{33}$$

$$=\int_{\widehat{F^\times}}\gamma(\pi\otimes\nu)\nu(y)\omega\nu(\varpi^n)\int_{u\in\mathcal{O}^\times}\omega(u)\nu(u)\,d^\times u\,d\nu.\tag{34}$$

第二个积分用于检测以下条件： $\omega = \nu^{-1}$ 在 $\mathcal{O}^\times$ 上，换句话说， $\omega\nu$ 是非分歧的。因此，对于某个 $s \in \mathbf{C}$，我们可以写成 $\omega\nu = |\cdot|^s$。若 $x = \varpi^k u$且 $u \in \mathcal{O}^\times$，则 $|x|^s = q^{-ks}$。记 $z = q^{-s}$，于是我们可以将上述积分重新参数化如下：

$$(\pi(w)[n,\omega])(y) = \omega^{-1}(y)\frac{\log q}{2\pi i}\int_{|z|=1}\gamma(\pi\otimes\nu)z^{v(y)+n}\frac{dz}{z}.$$

将 ν写作 $\omega^{-1}\nu\omega$，并利用 $\nu\omega$ 是非分歧的这一事实，即得所求结果。 □

接下来的两节将通过在基里洛夫模型中计算 $\pi(w)(v_\chi^R 1_{v(\cdot)\geq -N})$ 来展开：将引理 5 专门化到 π 为超尖或主系列的情形，然后应用柯西积分公式。

5.3. **超尖点情形**。 回想一下，我们希望计算公式 31，即下式右端

$$\ell_\chi\left(\mathrm{Op}^-(a_+)W_v\right) = \gamma(\pi\otimes\chi)\lim_{R\to\infty}\langle W_v, \pi(w)(v_\chi^R 1_{v(\cdot)\geq -N})\rangle.$$

要计算公式 31，我们需要理解基里洛夫模型中的 $\pi(w)(v_\chi^R 1_{v(\cdot)\geq -N})$。为此，我们先计算 $\pi(w)(v_\chi^R 1_{\varpi^m\mathcal{O}^\times})$，再对一段范围求和。现在需要利用我们所研究的是一个特定表示这一点来确定伽马因子，并将分别对超尖情形和主系列情形进行相应分析。回想一下，在局部朗兰兹对应下，有一个表示 $\rho = \mathrm{Ind}_{E/F}\xi := \mathrm{Ind}_{\mathcal{W}_E}^{\mathcal{W}_F}\xi$ 与 π 相对应。此对应与伽马因子和 ε 因子相容。对于任意特征 η（属于 $F^\times$）或 ψ（属于 F），令 $\eta_E := \eta\circ\mathrm{Nm}^{E/F}$，并令 $\psi_E := \psi\circ\mathrm{Tr}^{E/F}$。令 $f := f(E|F)$ 为惯性次数。

命题 5.1。 在基里洛夫模型中，当 R 足够大时，我们有

$$\pi(w)(v_\chi^R 1_{\varpi^m\mathcal{O}^\times})(y) = \epsilon(1/2,\xi\chi_E^{-1},\psi_E)v_{\chi^{-1}}^R(y)1_{v(y)=-m-fc(\xi\chi_E^{-1})}. \tag{35}$$

推论 5.2。 于是

$$\pi(w)(v_\chi^R 1_{v(\cdot)\geq -N}) = \epsilon(1/2,\xi\chi_E^{-1},\psi_E)v_{\chi^{-1}}^R 1_{v(\cdot)\leq N-fc(\xi\chi_E^{-1})} \tag{36}$$

命题的证明 *5.1*。 首先注意，当 R 足够大时， $v_\chi^R(h)1_{\varpi^m\mathcal{O}^\times}(h) = \chi(h)1_{\varpi^m\mathcal{O}^\times}$。因此，由引理5

$$\pi(w)(v_\chi^R(y)1_{v(y)=m}) = \frac{\log q}{2\pi i}\int_{|z|=1}\gamma(\pi\otimes\nu)\overline{\chi(y)}z^{v(y)+m}\frac{dz}{z}.$$

由于 π 是超尖的， L-因子等于 1，因此 $\gamma(\pi\otimes\nu) = \epsilon(\pi\otimes\nu)$。于是

$$\epsilon(1/2,\pi\otimes\nu,\psi) = \epsilon(1/2,\xi\nu_E,\psi_E).$$

由于 $\chi\nu$ 是非分歧的， $\chi_E\nu_E$ 是非分歧的，并且对于 $x = \varpi^k u \in F^\times$， $\chi_E\nu_E(x) = z^{fk}$，其中 f 是 $f(E|F)$ 的惯性次数。因此

$$\epsilon(1/2,\xi\nu_E,\psi_E) = \epsilon(1/2,\xi\chi_E^{-1}\chi_E\nu_E,\psi_E) = \epsilon(1/2,\xi\chi_E^{-1},\psi_E)z^{fc(\xi\chi_E^{-1})}.$$

因此，

$$\begin{aligned}\pi(w)(v_\chi^R(y)1_{v(y)=m}) &= \epsilon(1/2,\xi\chi_E^{-1},\psi_E)\frac{\log q}{2\pi i}\int_{|z|=1}z^{fc(\xi\chi_E^{-1})+m+v(y)}\frac{dz}{z}\\ &= \epsilon(1/2,\xi\chi_E^{-1},\psi_E)1_{v(y)=-m-fc(\xi\chi_E^{-1})}.\end{aligned}$$

□

当 $\tau_z \in \mathcal{O}$ 时，我们可以写作

$$\begin{aligned}\ell_\chi(\mathrm{Op}^-(a_+)W_v) &= \gamma(\pi\otimes\chi)\lim_{R\to\infty}\langle W_v, \pi(w)(v_\chi^R 1_{v(\cdot)\geq -N})\rangle \\ &= \epsilon(1/2,\xi\chi_E,\psi_E)\lim_{R\to\infty}\langle W_v, \epsilon(1/2,\xi\chi_E^{-1},\psi_E)v_{\chi^{-1}}^R(y)1_{v(y)\leq N-fc(\xi\chi_E^{-1})}\rangle \\ &= \epsilon(\xi\chi_E)\overline{\epsilon(\xi\chi_E^{-1})}\ell_{\overline{\chi}}\left(W_v 1_{v(\cdot)\leq N-fc(\xi\chi_E^{-1})}\right).\end{aligned}$$

这就完成了 $\tau_z \in \mathcal{O}$的情形。 $\tau_z \notin \mathcal{O}$ 的情形在概念上并不更困难，只是记号上较为繁琐。回想一下，在这种情形下，我们要计算

$$\ell_\chi(\mathrm{Op}^-(a_+)W_v) = \gamma(\pi\otimes\chi)\lim_{R\to\infty}\langle W_v, \pi(w)(v_\chi^R 1_{v(\cdot)=-N-s}\,\mathbb{E}_{\omega\in\mathcal{X}_s}\,\omega^{-1}(\varpi^s\tau_z)\omega(\varpi^{N+s})\omega)\rangle$$

对于 $\tau_z \in \varpi^{-s}\mathcal{O}^\times$ ，其中 s 为正。为此，我们再次使用梅林反演。

命题 5.3. 在基里洛夫模型中，对于充分大的 R ，有

$$\mathbb{E}_{\omega\in\mathcal{X}_s}\,\pi(w)(v_\chi^R 1_{v(\cdot)=-N-s}\omega)\omega^{-1}(\varpi^s\tau_z)\omega(\varpi^{N+s}) \tag{37}$$

等于

$$v_{\chi^{-1}}^R 1_{v(\cdot)=N+s-fc(\xi\chi_E^{-1}\omega_E^{-1})}\,\mathbb{E}_{\omega\in\mathcal{X}_s}\,\epsilon(\xi\chi_E^{-1}\omega_E^{-1})\omega^{-1}(\tau_z)\omega(\varpi^N)\omega^{-1}. \tag{38}$$

证明。 与第一个证明中一样，我们首先注意到，对于 R 足够大时， $v_\chi^R(h)1_{\varpi^m\mathcal{O}^\times}(h) = \chi(h)1_{\varpi^m\mathcal{O}^\times}$对任意固定的 m均成立。由引理 5，我们可以将这一切写成

$$\mathbb{E}_{\omega\in\mathcal{X}_s}\,\omega^{-1}(\tau_z)\omega(\varpi^N)\frac{\log q}{2\pi i}\int_{|z|=1}\gamma(\pi\otimes\nu)\chi^{-1}(y)\omega^{-1}(y)z^{v(y)-N-s}\frac{dz}{z}.$$

和之前一样，伽马因子可以化简为

$$\begin{aligned}\gamma(\pi\otimes\nu) &= \epsilon(1/2,\xi\nu_E,\psi_E) = \epsilon(1/2,\xi\chi_E^{-1}\omega_E^{-1}\chi_E\omega_E\nu_E,\psi_E) \\ &= \epsilon(1/2,\xi\chi_E^{-1}\omega_E^{-1},\psi_E)z^{fc(\xi\chi_E^{-1}\omega_E^{-1})}\end{aligned}$$

其中 $f := f(E|F)$ 是惯性次数。因此，我们的表达式变为

$$\mathbb{E}_{\omega\in\mathcal{X}_s}\,\omega^{-1}(\tau_z)\omega(\varpi^N)\frac{\log q}{2\pi i}\int_{|z|=1}\epsilon(\xi\chi_E^{-1}\omega_E^{-1})\chi^{-1}(y)\omega^{-1}(y)z^{v(y)-N-s+fc(\xi\chi_E^{-1}\omega_E^{-1})}\frac{dz}{z}$$

$$= \mathbb{E}_{\omega\in\mathcal{X}_s}\,\epsilon(\xi\chi_E^{-1}\omega_E^{-1})\omega^{-1}(\tau_z)\omega(\varpi^N)\chi^{-1}(y)\omega^{-1}(y)1_{v(y)=N+s-fc(\xi\chi_E^{-1}\omega_E^{-1})}.$$

当 R 足够大时， $v_{\chi^{-1}}^R 1_{v(y)=N+s-fc(\xi\chi_E^{-1}\omega_E^{-1})}$ 与 $\chi^{-1}(y)1_{v(y)=N+s-fc(\xi\chi_E^{-1}\omega_E^{-1})}$一致，由此便得到结论。□

5.4. **主系列情形**。 提醒一下，类比于我们在超尖点情形中的工作，我们的目标是在基里洛夫模型中计算 $\pi(w)(v_\chi^R 1_{v(\cdot)\geq -N})$。为此，我们将计算 $\pi(w)(v_\chi^R 1_{v(\cdot)=m})$，然后对 $m \geq -N$ 求和。回顾一下， $\pi = \chi_0 \boxplus \chi_0^{-1}$，其中 χ_0 是 $F^\times$ 的一个分歧特征标。我们假设 $\chi_0\chi^{-1}$ 和 $\chi_0^{-1}\chi^{-1}$ 均为分歧的，在这种情况下，我们称 (χ_0, χ^{-1}) 为一般对。我们将用 $\chi_\flat$ 和 $\chi_\sharp$ 表示特征 $\chi_0\chi^{-1}$ 和 $\chi_0^{-1}\chi^{-1}$，其导子分别为 $f_\flat$ 和 $f_\sharp$。

命题 5.4。 设 $(\chi_0,\ \chi^{-1})$ 是一对一般对。那么在 R 足够大时的基里洛夫模型中，我们有，

$$\pi(w)(v_\chi^R(y)(y)1_{v(y)=m}) = \epsilon(1/2,\chi_\flat)\epsilon(1/2,\chi_\sharp)v_{\chi^{-1}}^R(y)1_{v(y)=-m-f_\sharp-f_\flat}.$$

推论 5.5。 当 $\tau_z \in \mathcal{O}$ 时，我们必有

$$\pi(w)(v_\chi^R(y)1_{v(y)\geq -N}) = \epsilon(1/2,\chi_b)\epsilon(1/2,\chi_\sharp)v_{\chi^{-1}}^R(y)1_{v(y)\leq N-f_\sharp-f_\flat}.$$

命题 5.4 的证明。 首先注意，对于 R 足够大时，

$$v_\chi^R(h)1_{\varpi^m\mathcal{O}^\times}(h) = \chi(h)1_{\varpi^m\mathcal{O}^\times}.$$

根据引理5，我们可以将其写为

$$(\pi(w)v_\chi^R)(y)1_{v(y)=m} = \frac{\log q}{2\pi i}\int_{|z|=1}\gamma(\pi\otimes\nu)\overline{\chi}(y)z^{v(y)+m}\frac{dz}{z}.$$

接下来我们使用伽马因子的分解式：

$$\begin{aligned}\gamma(1/2,\pi\otimes\nu) &= \epsilon(1/2,\pi\otimes\nu)\frac{L(1/2,\tilde{\pi}\otimes\nu^{-1})}{L(1/2,\pi\otimes\nu)}\\ &= \epsilon(1/2,\chi_0\nu)\epsilon(1/2,\chi_0^{-1}\nu)\frac{L(1/2,\chi_0^{-1}\nu^{-1})L(1/2,\chi_0\nu^{-1})}{L(1/2,\chi_0\nu)L(1/2,\chi_0^{-1}\nu)}.\end{aligned}$$

回顾 $\chi_\flat = \chi_0\chi^{-1}$ 和 $\chi_\sharp = \chi_0^{-1}\chi^{-1}$，其导子指数分别等于 $f_\flat$ 和 $f_\sharp$。于是我们可以将 ε 因子写为 $\epsilon(1/2,\ \chi_\flat z^{\mathrm{val}}) = \epsilon(1/2,\ \chi_\flat)z^{f_\flat}$以及 $\epsilon(1/2,\ \chi_\sharp z^{\mathrm{val}}) = \epsilon(1/2,\ \chi_\sharp)z^{f_\sharp}$。

当 $(\chi_0,\ \chi)$ 是一般对时，L 因子全部是分歧的，并且都等于 1。因此伽马因子为

$$\gamma(1/2,\pi\otimes\nu) = \epsilon(1/2,\chi_\flat)\epsilon(1/2,\chi_\sharp)z^{f_\flat+f_\sharp}. \tag{39}$$

于是我们可以如下计算：

$$\pi(w)(v_\chi^R(y)1_{v(y)=m}) = \epsilon(1/2,\chi_\flat)\epsilon(1/2,\chi_\sharp)\overline{\chi}(y)\frac{\log q}{2\pi i}\int_{|z|=1}z^{f_\flat+f_\sharp+m+v(y)}\frac{dz}{z} \tag{40}$$

$$= \epsilon(1/2,\chi_\flat)\epsilon(1/2,\chi_\sharp)\overline{\chi}(y)1_{v(y)=-m-f_\sharp-f_\flat}. \tag{41}$$

□

因此，当 $\tau_z\in\mathcal{O}$时，我们可以写成

$$\begin{aligned}\ell_\chi(\mathrm{Op}^-(a_+)W_v) &= \gamma(\pi\otimes\chi)\lim_{R\to\infty}\langle W_v,\pi(w)(v_\chi^R1_{v(\cdot)\geq -N})\rangle\\ &= \gamma(\pi\otimes\chi)\overline{\epsilon(1/2,\chi_\flat)\epsilon(1/2,\chi_\sharp)}\ell_{\chi^{-1}}(W_v1_{v(\cdot)\leq N-f_\sharp-f_\flat}).\end{aligned}$$

这就完成了 $\tau_z\in\mathcal{O}$的情形。接下来，我们需要了解当$\tau_z\notin\mathcal{O}$时会发生什么。

命题5.6。 设 $\tau_z\in\varpi^{-s}\mathcal{O}^\times$ 满足 $s<\min(f_\sharp,f_\flat)$。那么在 Kirillo v
模型中，当 R 充分大时，我们有

$$\pi(w)(v_\chi^R1_{v(\cdot)=-N-s}\mathbb{E}_{\omega\in\mathcal{X}_s}\omega^{-1}(\varpi^s\tau_z)\omega(\varpi^{N+s})\omega) \tag{42}$$

等于

$$v_{\chi^{-1}}^R1_{v(\cdot)=N+s-f_\flat^\omega-f_\sharp^\omega}\mathbb{E}_{\omega\in\mathcal{X}_s}\omega^{-1}(\varpi^s\tau_z)\omega^{-1}\epsilon_{f_\flat^\omega}\epsilon_{f_\sharp^\omega}. \tag{43}$$

证明。 利用引理5，我们有

$$\begin{aligned}&\pi(w)(v_\chi^R(y)\mathbb{E}_{c(\omega)\leq s}1_{v(y)=-N-s}\overline{\omega}(\varpi^s\tau_z)\omega(y))\\ &= \mathbb{E}_{c(\omega)\leq s}\overline{\omega(\varpi^s\tau_z)}\frac{\log|q|}{2\pi i}\int_{|z|=1}\gamma(\pi\otimes\omega^{-1}\chi^{-1}|\cdot|^{s'})\omega^{-1}(y)\chi^{-1}(y)z^{v(y)-N-s}\frac{dz}{z}\\ &= \mathbb{E}_{c(\omega)\leq s}\overline{\omega(\varpi^s\tau_z)}\epsilon(\chi_0\omega^{-1}\chi^{-1})\epsilon(\chi_0^{-1}\omega^{-1}\chi^{-1})\omega^{-1}\chi^{-1}(y)I(\flat,\sharp,N)\\ &= \mathbb{E}_{c(\omega)\leq s}\omega^{-1}(\varpi^s\tau_z)\chi^{-1}(y)\omega^{-1}(y)\epsilon(\chi_\flat\omega^{-1})\epsilon(\chi_\sharp\omega^{-1})1_{v(y)=N+s-f_\flat^\omega-f_\sharp^\omega},\end{aligned}$$

其中$\epsilon_{f_\flat^\omega}$ 和$\epsilon_{f_\sharp^\omega}$是特征 $\chi_\flat\omega$ 与$\chi_\sharp\omega$ 的ε 因子，并且

$$I(\flat,\sharp,N)=\frac{\log|q|}{2\pi i}\int_{|z|=1} z^{f_\flat^\omega+f_\sharp^\omega+v(y)-N-s}\frac{dz}{z}.$$

□

注 5.7。 在上述证明中，关键假设 $s<\min(f_\sharp,f_\flat)$ 确保对 ω 的扭曲不会引入 L-因子，因此我们可以将伽马因子写成

$$\gamma(1/2,\pi\otimes\nu)=\epsilon(1/2,\chi_\flat\omega^{-1})\epsilon(1/2,\chi_\sharp\omega^{-1})z^{f_\flat^\omega+f_\sharp^\omega}, \tag{44}$$

其中， $f_\flat^\omega$和 $f_\sharp^\omega$分别是 $\chi_\flat\omega^{-1}$和 $\chi_\sharp\omega^{-1}$的导子。由于 ω 的导子相较于 $\chi_\flat$ 和$\chi_\sharp$的导子较小，这一假设在相关范围内理应自动成立。

5.5. **主要命题**。 再次回顾，计算相对特征的策略是利用 Iwahori 分解将其分解为

$$\langle \mathrm{Op}(a)v_\chi^R, v_\chi^R\rangle=\langle \mathrm{Op}^+(a_+)\pi(w)v_\chi^R, \pi(w)\,\mathrm{Op}^0(a_0)\,\mathrm{Op}^+(a_-)v_\chi^R\rangle,$$

并将其计算为 $R\to\infty$。

由局部函数方程，这可以写成

$$\gamma(\pi\otimes\overline{\chi})a_0(\alpha_\chi)\langle \mathrm{Op}^+(a_+)v_{\chi^{-1}}^R, \pi(w)\,\mathrm{Op}^+(a_-)v_\chi^R\rangle.$$

然后我们根据τ_y 和 τ_z的位置分情形讨论。回忆当 $\tau_z\notin\mathcal{O}$时，我们把 $\tau_z\in\varpi^{-s}\mathcal{O}^\times$写成带有 $s>0$ 的形式，而当 $\tau_z\in\mathcal{O}$ 时我们取 $s=0$，对τ_y 和 r亦然。回忆特征 $\chi_\sharp=\chi_0^{-1}\chi^{-1}$ 和 $\chi_\flat=\chi_0\chi^{-1}$。我们有如下命题：

命题 5.8. 保持定理1.3的假设。则内积的值 $\gamma(\pi\otimes\chi^{-1})\langle \mathrm{Op}^+(a_{\tau_+})v_{\chi^{-1}}^R,\ \pi(w)\mathrm{Op}^+(a_{\tau_-})v_\chi^R\rangle$ 由下表给出：其中 $c(\pi,\ \chi)=f_\sharp+f_\flat$在主系列情形中，而 $fc(\xi\chi_E^{-1})$在超尖情形中

τ_z \ τ_y	$\tau_y\in\mathcal{O}$	$\tau_y\notin\mathcal{O}$
$\tau_z\in\mathcal{O}$	$(2N-c(\pi,\chi))\,\mathbb{1}_{2N\geq c(\pi,\chi)}$	$\frac{1}{\lvert\mathcal{X}_r\rvert}\mathbb{1}_{2N+r\geq c(\pi,\chi)}$
$\tau_z\notin\mathcal{O}$	$\frac{1}{\lvert\mathcal{X}_s\rvert}\mathbb{1}_{2N+s\geq c(\pi,\chi)}$	$\frac{1}{\lvert\mathcal{X}_{\max(r,s)}\rvert}\mathbb{1}_{U(min(r,s))}\left(\frac{\alpha_{\pi,\chi}}{T\tau_y T\tau_z}\right)$

表 1. τ_y 与 τ_z 的关系表

并且$\alpha_{\pi,\ \chi}\in\varpi^{-c(\pi,\chi)}\mathcal{O}^\times$ 在主系列情形中等于 $\alpha_{\chi_\sharp}\alpha_{\chi_\flat}$，在超尖点情形中等于 $\mathrm{Nm}(\alpha_{\xi\chi_E^{-1}})$。

6. 证明：命题5.8

6.1. **超尖点情形.**

证明。 我们先从τ_y， $\tau_z \in \mathcal{O}$ 情形开始。接着

$$\begin{aligned}&\langle \mathrm{Op}^+(a_-)v^R_{\chi^{-1}}, \pi(w)\,\mathrm{Op}^+(a_+)v^R_\chi\rangle = \langle \mathrm{Op}^+(a_-)v^R_{\chi^{-1}}, \pi(w)v^R_\chi 1_{v(\cdot)\geq -N}\rangle\\ &= \langle v^R_{\chi^{-1}}1_{v(\cdot)\geq -N}, \epsilon(1/2,\xi\chi_E^{-1},\psi_E)v^R_{\chi^{-1}}(y)1_{v(y)\leq N-fc(\xi\chi_E^{-1})}\rangle\\ &= \overline{\epsilon(1/2,\xi\chi_E^{-1},\psi_E)}\,(2N-fc(\xi\chi_E^{-1}))\end{aligned}$$

下一个情形是：对某个 $s>0$，有 $\tau_y \in \mathcal{O}$ 且 $\tau_z \in \varpi^{-s}\mathcal{O}^\times$ 。于是

$$\begin{aligned}&\langle \mathrm{Op}^+(a_-)v^R_{\chi^{-1}}, \pi(w)\,\mathrm{Op}^+(a_+)v^R_\chi\rangle = \langle \mathrm{Op}^+(a_-)v^R_{\chi^{-1}}, \epsilon(\xi\chi_E^{-1})v^R_{\chi^{-1}}1_{v(\cdot)\leq N-fc(\xi\chi_E^{-1})}\rangle\\ &= \langle v^R_{\chi^{-1}}1_{v(\cdot)=-N-s}\,\mathbb{E}_{\omega\in\mathcal{X}_s}\,\omega^{-1}(\varpi^s\tau_z)\omega(\varpi^{N+s})\omega, v^R_{\chi^{-1}}\epsilon(\xi\chi_E^{-1})1_{v(\cdot)\leq N-fc(\xi\chi_E^{-1})}\rangle.\end{aligned}$$

由线性性，该内积等于

$$\begin{aligned}&\left(\overline{\epsilon(\xi\chi_E^{-1})}\,\mathbb{E}_{\omega\in\mathcal{X}_s}\,\omega^{-1}(\varpi^s\tau_z)\omega(\varpi^{N+s})\right)\\ &\times\int_{F^\times} 1_{[-R,R]}\overline{\chi}(y)\omega(y)\chi(y)1_{v(y)=-N-s}1_{v(y)\leq N-fc(\xi\chi_E^{-1})}\,d^\times y\\ &= \overline{\epsilon(\xi\chi_E^{-1})}\,\mathbb{E}_{\omega\in\mathcal{X}_s}\,\omega^{-1}(\varpi^s\tau_z)1_{\omega=|\cdot|^{s'}}1_{-N-s\leq N-fc(\xi\chi_E^{-1})},\end{aligned}$$

对某个 $s'\in\mathbf{C}$，因为 $\int_{\mathcal{O}^\times}\omega(u)\,d^\times u$ 仅当 ω 为非分歧时才非零。因此，在此情形下我们已算出

$$\langle \mathrm{Op}^+(a_-)v^R_{\chi^{-1}}, \pi(w)\,\mathrm{Op}^+(a_+)v^R_\chi\rangle = \frac{\epsilon(\xi\chi_E^{-1})}{|\mathcal{X}_s|}1_{2N+s\geq fc(\xi\chi_E^{-1})}.$$

下一个情形是当 $\tau_y\in\varpi^{-r}\mathcal{O}^\times$ 对某个 $r>0$ 和 $\tau_z\in\mathcal{O}$时。这个情形类似。我们有

$$\langle \mathrm{Op}^+(a_-)v^R_{\chi^{-1}}, \pi(w)\,\mathrm{Op}^+(a_+)v^R_\chi\rangle.$$

内积的右端由下式给出

$$\pi(w)v^R_\chi 1_{v(\cdot)=-N-r}\,\mathbb{E}_{\omega\in\mathcal{X}_r}\,\omega^{-1}(\varpi^r\tau_y)\omega(\varpi^{N+r})\omega$$

而左端仅为 $v^R_{\chi^{-1}}1_{v(\cdot)\geq -N}$。因此，该内积等于

$$\begin{aligned}&\langle v^R_{\chi^{-1}}1_{v(\cdot)\geq -N}, v^R_{\chi^{-1}}1_{v(\cdot)=N+r-fc(\xi\chi_E^{-1}\omega_E^{-1})}\,\mathbb{E}_{\omega\in\mathcal{X}_r}\,\epsilon(\xi\chi_E^{-1}\omega_E^{-1})\omega^{-1}(\tau_y)\omega(\varpi^N)\omega\rangle\\ &= \frac{\epsilon(\xi\chi_E^{-1})}{|\mathcal{X}_r|}1_{2N+r\geq fc(\xi\chi_E^{-1})},\end{aligned}$$

同样是因为该内积选出了 $\omega=1$。

最后一个情形是当 $\tau_y\in\varpi^{-r}\mathcal{O}^\times$ 和 $\tau_z\in\varpi^{-s}\mathcal{O}^\times$，且 $r,s>0$。这给出

$$\langle \mathrm{Op}^+(a_-)v^R_{\chi^{-1}}, \pi(w)\,\mathrm{Op}^+(a_+)v^R_\chi\rangle.$$

该内积的左端为

$$v^R_{\chi^{-1}}1_{v(\cdot)=-N-s}\,\mathbb{E}_{\omega\in\mathcal{X}_s}\,\omega^{-1}(\varpi^s\tau_z)\omega(\varpi^{N+s})\omega$$

而右端为

$$v^R_{\chi^{-1}}1_{v(\cdot)=N+r-fc(\xi\chi_E^{-1}\eta_E^{-1})}\,\mathbb{E}_{\eta\in\mathcal{X}_r}\,\epsilon(\xi\chi_E^{-1}\eta_E^{-1})\eta^{-1}(\varpi^r\tau_y)\eta(\varpi^{N+r})\eta.$$

结合两者可得

$$\mathbb{E}_{\omega\in\mathcal{X}_s}\mathbb{E}_{\eta\in\mathcal{X}_r}\overline{\epsilon(\xi\chi_E^{-1}\eta_E^{-1})}\omega^{-1}(\varpi^s\tau_z)\eta(\varpi^r\tau_y)I(\flat,\sharp,N,r,s)$$
$$=\mathbb{E}_{\omega\in\mathcal{X}_s}\mathbb{E}_{\eta\in\mathcal{X}_r}\overline{\epsilon(\xi\chi_E^{-1}\eta_E^{-1})}\eta(\varpi^{s+r}\tau_y\tau_z)1_{2N+r+s=fc(\xi\chi_E^{-1}\eta_E^{-1})}\mathbb{1}_{\omega^{-1}=\eta},$$

其中

$$I(\flat,\sharp,N,r,s)=\int_{F^\times}\omega(y)\overline{\eta}(y)1_{v(y)=-N-s}1_{v(y)=N+r-fc(\xi\chi_E^{-1}\eta_E^{-1})}\,d^\times y$$

我们需要了解 ε 因子 $\epsilon(1/2,\xi\chi_E^{-1},\psi_E)$ 在导子较小的特征 η_E 的扭曲下如何变化。导子有多小？特征 η 的导子至多为 r，并且 $r<fc(\xi\chi_E^{-1}\eta_E^{-1})-2N$，因为 $s>0$。当 N 足够大时，特征函数 $1_{2N+r+s=fc(\xi\chi_E^{-1}\eta_E^{-1})}$ 为零，因此，假设 r 远小于导子，并不是非常严格的条件。因此，我们假设 $r\le c(\xi\chi_E^{-1})/2$。这给出 $c(\xi\chi_E^{-1}\eta_E^{-1})=c(\xi\chi_E^{-1})$。此外，令 $\alpha_{\xi\chi_E^{-1}}\in\varpi^{-c(\xi\chi_E^{-1})}\mathcal{O}^\times$，使得$\xi\chi_E^{-1}(1+x)=\psi(\alpha_{\xi\chi_E^{-1}}x)$，其中 $x\in\mathfrak{p}^{c(\xi\chi_E^{-1})/2}$。现在，由于 $c(\eta_E)\le r\le c(\xi\chi_E^{-1})/2$，根据命题 2.4

$$\epsilon(1/2,\xi\chi_E^{-1}\eta_E^{-1},\psi_E)=\eta_E^{-1}(\alpha_{\xi\chi_E^{-1}})\epsilon(1/2,\xi\chi_E^{-1},\psi_E).$$

注意

$$\eta_E^{-1}(\alpha_{\xi\chi_E^{-1}})=\eta^{-1}(\alpha_{\pi,\chi}).$$

根据 $\omega^{-1}=\eta$，条件 $r\le c(\xi\chi_E^{-1})/2$ 迫使 $s\le c(\xi\chi_E^{-1})/2$。于是由特征函数可得

$$fc(\xi\chi_E^{-1})=2N+r+s\le 2N+c(\xi\chi_E^{-1}).$$

由于 E 是二次扩张 $f\in\{1,2\}$。若 $f=1$，则得到 $N\ge 0$；若 $f=2$，则得到“不确定性原理” $N\ge {}^{c(\xi\chi_E^{-1})}{}_2$。因此现在我们的内积为

$$\overline{\epsilon(\xi\chi_E^{-1})}\,\mathbb{E}_{\omega\in\mathcal{X}_s}\mathbb{E}_{\eta\in\mathcal{X}_r}\mathbb{1}_{\eta=\omega^{-1}}\eta(\varpi^{s+r}\tau_y\tau_z\alpha_{\pi,\chi})1_{2N+r+s=fc(\xi\chi_E^{-1})}.$$

不妨设 $s<r$。于是上式可写为

$$\overline{\epsilon(\xi\chi_E^{-1})}\,\mathbb{E}_{\eta\in\mathcal{X}_r}\mathbb{E}_{\omega\in\mathcal{X}_s}1_{\eta=\omega^{-1}}\omega^{-1}(\varpi^{s+r}\tau_y\tau_z\alpha_{\pi,\chi})1_{2N+r+s=fc(\xi\chi_E^{-1})}.$$

对 ω 取平均迫使自变量落在 $U(s)$中，而对 η 取平均则贡献 $\frac{1}{|\mathcal{X}_r|}$，从而得到所需结果。□

6.2. **主系列情形**。

证明。 我们从τ_y，$\tau_z\in\mathcal{O}$开始。然后

$$\begin{aligned}\langle\mathrm{Op}^+(a_-)v^R_{\chi^{-1}},\pi(w)\,\mathrm{Op}^+(a_+)v^R_\chi\rangle&=\langle\mathrm{Op}^+(a_-)v^R_{\chi^{-1}},\pi(w)(v^R_\chi 1_{v(\cdot)\ge -N})\rangle\\&=\langle v^R_{\chi^{-1}}1_{v(\cdot)\ge -N},\epsilon_\sharp\epsilon_\flat v^R_{\chi^{-1}}1_{v(\cdot)\le N-f_\flat-f_\sharp}\rangle\\&=\overline{\epsilon(1/2,\chi_\sharp)\epsilon(1/2,\chi_\flat)}(2N-f_\flat-f_\sharp)\mathbb{1}_{2N\ge f_\sharp+f_\flat}.\end{aligned}$$

接下来考虑 $\tau_y\in\mathcal{O}$ 和 $\tau_z\in\varpi^{-s}\mathcal{O}^\times$ 对于某个 $s>0$的情形。然后

$$\langle\mathrm{Op}^+(a_-)v^R_{\chi^{-1}},\pi(w)\,\mathrm{Op}^+(a_+)v^R_\chi\rangle=\langle\mathrm{Op}^+(a_-)v^R_{\chi^{-1}},\epsilon_\sharp\epsilon_\flat v^R_{\chi^{-1}}1_{v(\cdot)\le N-f_\sharp-f_\flat}\rangle$$
$$=\langle v^R_{\chi^{-1}}1_{v(\cdot)=-N-s}\,\mathbb{E}_{\omega\in\mathcal{X}_s}\omega^{-1}(\varpi^r\tau_y)\omega(\varpi^{N+s})\omega,\epsilon_\sharp\epsilon_\flat v^R_{\chi^{-1}}1_{v(\cdot)\le N-f_\sharp-f_\flat}\rangle.$$

由线性性可知，这个内积等于

$$\overline{\epsilon_\sharp\epsilon_\flat}\,\mathbb{E}_{\omega\in\mathcal{X}_s}\,\omega^{-1}(\varpi^s\tau_z)\omega(\varpi^{N+s})\int_{F^\times}1_{[-R,R]}\overline{\chi}(y)\omega(y)\chi(y)1_{v(y)=-N-s}1_{v(y)\leq N-f_\sharp-f_\flat}\,d^\times y$$
$$=\overline{\epsilon_\sharp\epsilon_\flat}\,\mathbb{E}_{\omega\in\mathcal{X}_s}\,\omega^{-1}(\varpi^s\tau_z)1_{\omega=|\cdot|^{s'}}1_{-N-s\leq N-f_\flat-f_\sharp},$$

对于某个 $s'\in\mathbf{C}$，因为 $\int_{\mathcal{O}^\times}\omega(u)\,d^\times u$ 仅当 ω 是非分歧时才非零。因此，我们已计算出在此情形下

$$\langle\mathrm{Op}^+(a_-)v^R_{\chi^{-1}},\pi(w)\,\mathrm{Op}^+(a_+)v^R_\chi\rangle=\frac{\overline{\epsilon(1/2,\chi_\sharp)\epsilon(1/2,\chi_\flat)}}{|\mathcal{X}_s|}1_{2N+s\geq f_\flat+f_\sharp}.$$

接下来考虑 $\tau_y\in\varpi^{-r}\mathcal{O}^\times$ 的情形，其中 $r>0$ 且 $\tau_z\in\mathcal{O}$。这种情形非常相似。我们有

$$\langle\mathrm{Op}^+(a_-)v^R_{\chi^{-1}},\pi(w)\,\mathrm{Op}^+(a_+)v^R_\chi\rangle.$$

内积的右端为

$$\pi(w)v^R_\chi 1_{v(\cdot)=-N-r}\,\mathbb{E}_{\omega\in\mathcal{X}_r}\,\omega^{-1}(\varpi^r\tau_y)\omega(\varpi^{N+r})\omega,$$

内积的左端就是 $v^R_{\chi^{-1}}1_{v(\cdot)\geq -N}$。因此，内积的值为

$$\langle v^R_{\chi^{-1}}1_{v(\cdot)\geq -N},v^R_{\chi^{-1}}1_{v(\cdot)=N+r-f_\sharp-f_\flat}\,\mathbb{E}_{\omega\in\mathcal{X}_r}\,\epsilon_\flat\epsilon_\sharp\omega^{-1}(\tau_y)\omega(\varpi^N)\omega\rangle$$
$$=\frac{\overline{\epsilon(1/2,\chi_\flat)\epsilon(1/2,\chi_\sharp)}}{|\mathcal{X}_r|}1_{2N+r\geq f_\flat+f_\sharp},$$

同样，因为内积会选出 $\omega=1$。

最后，我们处理 $\tau_y\in\varpi^{-r}\mathcal{O}^\times$ 和 $\tau_z\in\varpi^{-s}\mathcal{O}^\times$的情形，其中 $r,\ s>0$。由此可得

$$\langle\mathrm{Op}^+(a_-)v^R_{\chi^{-1}},\pi(w)\,\mathrm{Op}^+(a_+)v^R_\chi\rangle.$$

内积的右端为

$$v^R_{\chi^{-1}}1_{v(y)=N+r-f_\flat^\eta-f_\sharp^\eta}\mathbb{E}_{\eta\in\mathcal{X}_r}\eta^{-1}(\varpi^s\tau_{ij})\eta^{-1}(y)\epsilon(\chi_\flat\eta^{-1})\epsilon(\chi_\sharp\eta^{-1})$$

而左端为

$$v^R_{\chi^{-1}}1_{v(\cdot)=-N-s}\mathbb{E}_{\omega\in\mathcal{X}_s}\omega^{-1}(\varpi^s\tau_z)\omega(\varpi^{N+s})\omega.$$

将两者结合起来计算完整的内积，可得

$$\mathbb{E}_{\omega\in\mathcal{X}_s}\mathbb{E}_{\eta\in\mathcal{X}_r}\overline{\epsilon(\chi_\flat\eta^{-1})\epsilon(\chi_\sharp\eta^{-1})}\omega^{-1}(\varpi^s\tau_z)\eta(\varpi^r\tau_y)\ I(\flat,\sharp,N,r)$$
$$=\mathbb{E}_{\omega\in\mathcal{X}_s}\mathbb{E}_{\eta\in\mathcal{X}_r}\overline{\epsilon(\chi_\flat\eta^{-1})\epsilon(\chi_\sharp\eta^{-1})}\mathbb{1}_{2N+r+s=f_\flat+f_\sharp}\mathbb{1}_{\omega^{-1}=\eta},$$

其中

$$I(\flat,\sharp,N,r)=\int_{\mathbf{F}^\times}\omega(y)\overline{\eta}(y)\mathbb{1}_{v(y)=-N-r}\mathbb{1}_{v(y)=N+r-f_\sharp-f_\flat}\,d^\times y$$

现在我们需要理解 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 因子 $\epsilon(1/2,\ \chi_\flat\eta^{-1})$ 和 $\epsilon(1/2,\ \chi_\sharp\eta^{-1})$ 在被导子较小的特征 η 扭曲时的变化。由于 η 的导子至多为r，且 $s>0$，因此我们有 $r<f_\sharp+f_\flat-2N$。当 N足够大时，特征函数$\mathbb{1}_{2N+r+s=f_\flat+f_\sharp}$为零，所以我们可以并且确实假设 r远小于 $f_\flat$ 和 $f_\sharp$，而不会造成太大损失。因此，$c(\chi_\sharp\eta^{-1})=c(\chi_\sharp)$，且 $c(\chi_\flat\eta^{-1})=c(\chi_\flat)$。令 $\alpha_\flat:=\alpha_{\chi_\flat}$ 且$\alpha_\sharp:=\alpha_{\chi_\sharp}$。由于 $c(\eta)\leq r\leq\min(f_\flat/2,\ f_\sharp/2)$，我们有

$$\epsilon(1/2,\chi_\flat\eta^{-1},\psi)=\eta^{-1}(\alpha_\flat)\epsilon(1/2,\chi_\flat,\psi)$$
$$\epsilon(1/2,\chi_\sharp\eta^{-1},\psi)=\eta^{-1}(\alpha_\sharp)\epsilon(1/2,\chi_\sharp,\psi).$$

由对称性，条件 $r \le \min(f_\flat/2,\ f_\sharp/2)$ 推出 $s \le \min(f_\flat/2,\ f_\sharp/2)$。因此我们有

$$f_\flat + f_\sharp = 2N + r + s \le 2N + 2\min(f_\flat/2, f_\sharp/2).$$

这意味着“不确定性原理” $N \ge \max(f_\flat/2, f_\sharp/2)$。因此，内积由下式给出

$$\overline{\epsilon(1/2,\chi_\flat)\epsilon(1/2,\chi_\sharp)}\,\mathbb{E}_{\omega\in\mathcal{X}_s}\,\mathbb{E}_{\eta\in\mathcal{X}_r}\,\mathbb{1}_{\eta=\omega^{-1}}\eta(\varpi^{s+r}\tau_y\tau_z\alpha_\sharp^{-1}\alpha_\flat^{-1})\mathbb{1}_{2N+r+s=f_\flat+f_\sharp}.$$

不妨设 $s < r$。于是上式可写为

$$\overline{\epsilon(1/2,\chi_\flat)\epsilon(1/2,\chi_\sharp)}\,\mathbb{E}_{\omega\in\mathcal{X}_s}\,\mathbb{E}_{\eta\in\mathcal{X}_r}\,\mathbb{1}_{\eta=\omega^{-1}}\omega^{-1}(\varpi^{s+r}\tau_y\tau_z\alpha_\sharp^{-1}\alpha_\flat^{-1})\mathbb{1}_{2N+r+s=f_\flat+f_\sharp}.$$

对 ω 取平均迫使 ω^{-1} 的自变量落在 $U(s)$ 中，而对 η 取平均贡献了 $\frac{1}{|\mathcal{X}_r|}$，从而得到所需结果。□

7. Phase Space Integral

我们现在将完成主定理的证明1.3。我们希望把我们对相对特征的计算与我们的函数在“相空间”上的积分联系起来 a。换言之，我们计划完成该等式的证明

$$\langle \mathrm{Op}(a)v_\chi, v_\chi\rangle = \int_{\mathrm{Hyp}(\pi,\chi)} a(\xi)\,d\xi$$

通过计算右端。只需取 $a = a_\tau = 1_\tau^T$，由命题 3.4。该映射

$$\begin{aligned}\mathrm{Hyp} : \{\text{ Pairs of irreps of } (G,H)\} &\to \mathrm{Lie}(G)^*\\ (\pi,\sigma) &\mapsto \mathrm{Hyp}(\pi,\sigma),\end{aligned}$$

意在将 π 与 $\sigma = \chi$ 的数据映射到我们在其上积分的双曲线。对我们而言，有

$$\mathrm{Hyp}(\pi,\chi) = \{(x,y,z)\ :\ x = \alpha_\chi,\ yz = \alpha_{\pi,\chi}\},$$

其中，若 π 为主系列，则 $c(\pi,\chi) = f_\flat + f_\sharp$；若 π 为超尖表示，则 $c(\pi,\chi) = fc(\xi\chi_E^{-1})$。我们将测度 $d\xi$ 取为 $F^\times$ 上的乘法哈尔测度。现在我们对特征函数积分

$$a_\tau(\xi) = \mathbb{1}_{B(T\tau,T)}(\xi)$$

大小为 T、围绕重标度微局部频率 $T\tau$ 的方盒的。与之前一样，我们首先注意到 $T\tau_x$ 必须落在距 α_χ 不超过 T 的范围内，否则整个积分为零（在该情形下，特征函数的支集不会与 $\mathrm{Hyp}(\pi,\chi)$ 重叠）。让我们再次对 $\tau_y, \tau_z \in \mathcal{O}$ 分情形讨论。

若 $\tau_y, \tau_z \in \mathcal{O}$，例如，$\xi_y - T\tau_y \in T\mathcal{O} \implies T^{-1}\xi_y \in \mathcal{O}$。类似地$T^{-1}\xi_z \in \mathcal{O}$。因此，我们可以将 $\xi_y = T\xi_y'$和 $\xi_z = T\xi_z'$写成，其中 $\xi_y', \xi_z' \in \mathcal{O}$。于是

$$\xi_y\xi_z = \alpha_{\pi,\chi} \implies T\xi_y' T\xi_z' = \alpha_{\pi,\chi} \implies \xi_y'\xi_z' = \varpi^{2N}\alpha_{\pi,\chi}$$

因此我们有

$$1 \ge |\xi_y'| \ge q^{-2N+c(\pi,\chi)},$$

因为 $|\xi_z| \le 1$。因此我们必须有 $2N \ge c(\pi,\ \chi)$，否则就不存在这样的 ξ_y。于是，积分变为

$$\int_{q^{-2N+c(\pi,\chi)}}^1 \frac{d\xi_y'}{|\xi_y'|} = 2N - c(\pi,\chi),$$

而我们的总贡献为

$$(2N - c(\pi, \chi)) \times \mathbb{1}_{2N \geq c(\pi,\chi)}.$$

接下来考虑 $\tau_y, \tau_z \in F \setminus \mathcal{O}$ 的情形。在这种情形下，我们有 $T^{-1}\xi_y \in \tau_y + \mathcal{O}$和 $T^{-1}\xi_z \in \tau_z + \mathcal{O}$。令 $|\tau_y| = q^r$和 $|\tau_z| = q^s$。那么我们可以写成 $\xi_y = T\tau_y u_y$和$\xi_z = T\tau_z u_z$，其中 $u_y \in U(r)$ 和 $u_z \in U(s)$。于是我们有

$$\xi_y \xi_z = \alpha_{\pi,\chi} \implies u_y u_z = \frac{\varpi^{2N}}{\tau_y \tau_z}\alpha_{\pi,\chi} = \frac{\alpha_{\pi,\chi}}{T\tau_y T\tau_z}$$

现在假设 $s < r$。那么上述等式的右端属于 $U(s)$。因此，更强的同余条件是 $u_y \in U(r)$，且对于每个选择，恰有一个 $u_z \in U(s)$ 满足上述等式。由于我们使用测度$\frac{dy}{y}$，积分具有缩放不变性，因此在此范围内我们需要计算

$$\int_{u_y u_z = \frac{\varpi^{2N-c(\pi,\chi)}}{\tau_y \tau_z \alpha_{\pi,\chi}}} d^\times u_y = \mathrm{vol}(U(r)) = \frac{1}{q^r(1-q^{-1})}.$$

总之，我们得到

$$\frac{1}{q^r(1-q^{-1})} \times \mathbb{1}_{U(s)}\left(\frac{\varpi^{2N}}{\tau_y\tau_z}\alpha_{\pi,\chi}\cdot\right)$$

下一种情形是 $\tau_y \in \mathbf{F} \setminus \mathcal{O}$ 且 $\tau_z \in \mathcal{O}$。这只是前一种情形的 $s = 0$ 版本。在这种情形下，按约定 $U(s) = U(0) = \mathcal{O}$，由此得到条件 $2N + r - c(\pi, \chi) \geq 0$。因此，在这种情形下，对积分的贡献为

$$\frac{1}{q^r(1-q^{-1})} \times \mathbb{1}_{2N+r \geq c(\pi,\chi)}.$$

最后一种情形是 $\tau_y \in \mathcal{O}$ 且 $\tau_z \in F \setminus \mathcal{O}$。这种情形完全对称，只不过现在 $r = 0$ 且 $s > r$。因此，完全采用相同的论证可得

$$\frac{1}{q^s(1-q^{-1})} \times \mathbb{1}_{2N+s \geq c(\pi,\chi)}.$$

参考文献

[AT25] Edgar Assing 和 Radu Toma，《通过 GL(2) 上确界范数问题探讨数论中的轨道方法》，预印本（2025）。[BM03] Ehud M.Baruch 和Zhengyu Mao，《p 进域上的 Waldspurger 对应中的贝塞尔恒等式》，《美国数学杂志》125:2（2003），225–288。[BH06] Colin Bushnell 和 Guy Henniart，《GL(2) 的局部朗兰兹猜想》，《数学科学基础丛书》335，施普林格出版社（柏林）（2006）。[Cas73a] William Casselman，《关于 Atkin 和 Lehner 的一些结果》，《数学年刊》201:4（1973），301–314。[Cas73b] William Casselman，《$\mathrm{GL}_2(k)$ 的表示在 $\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})$ 上的限制》，《数学年刊》206:4（1973），311–318。[Fef83] Charles Fefferman，《不确定性原理》，《美国数学会通报》（新系列）9:2（1983），129–206。[GH11] Dorian Goldfeld 和 Joseph Hundley，《一般线性群的自守表示与 L 函数，第一卷》，剑桥高等数学研究丛书129，剑桥大学出版社，剑桥，2011。[Gro91] Benedict H. Gross，《盖尔范德对在数论中的一些应用》，《美国数学会通报》24:2（1991），277–301。[How77] Roger E. Howe，《紧 p 进群的基里洛夫理论》，《太平洋数学杂志》73:2（1977），365–381。[How81] Roger E. Howe，《李群表示的波前集》，载于《自守形式、表示论与算术》（1981），117–140。

[HN18] Yueke Hu 和 Paul Nelson，《Waldspurger 周期积分、相对迹公式与混合次凸界的新测试向量》，预印本（2018）。[JL70] Herv´e Jacquet 和 Robert Langlands，《GL(2) 上的自守形式》，数学讲义114（1970）。[JS83] Herv´e Jacquet 和 Joseph Shalika，《诱导表示的 Whittaker 模型》，《太平洋数学杂志》109:1（1983），107–120。[L23] Zane Kun Li，《解耦与调和分析导论》，AMS《当代数学》792（2024），67–94。[M23] Simon Marshall，《深度方面 L 函数在 $U(n) \times U(n+1)$ 上的次凸性》，预印本（2023）。[M22] Philippe Michel，《次凸问题的近期进展》，Bourbaki 研讨会 74:1090（2022）。[MV10] Philippe Michel 和 Akshay Venkatesh，《GL2 的次凸问题》，IHES 数学出版物111（2010），171–271。[N18] Paul Nelson，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 上的微局部提升与量子唯一遍历性，《代数与数论》12:9（2018），2033–2064。[N21] Paul Nelson，《标准 L 函数的界》，预印本（2021）。[N23] Paul Nelson，《$U_{n+1} \times U_n$ 的谱方面次凸界》，《数学发明》232（2023），1273–1438。[NV21] Paul Nelson 和 Akshay Venkatesh，《轨道方法与自守形式分析》，《数学学报》226:1（2021），1–209。[Pop08] Alexandru A. Popa，《GL(2) 阿基米德表示的 Whittaker 新形式》，《数论杂志》128:6（2008），1637–1645。[PR68] G. Ponzano 和 T. Regge，《Racah 系数的半经典极限》，《物理学中的光谱学与群论方法》（1968）。[Rob02] Justin Roberts，《渐近行为与 6j 符号》，载于《纽结与三维流形的不变量》，《几何与拓扑专论》4（2002），245–261。[RR96] Cary Rader 和 Steve Rallis，《p 进对称空间上的球特征》，《美国数学杂志》118:1（1996），91–178。[Ree91] Mark Reeder，《GL_n 上的旧形式》，《美国数学杂志》113:5（1991），911–930。[Sch02] Ralf Schmidt，《关于 GL(2) 局部新形式的一些评注》，《拉马努金数学学会杂志》17（2002），115–147。[Tat75] John Tate，《局部常数》，《代数数域：L 函数与伽罗瓦性质（会议录）》（1975），89–131。[Z17] Steve Zelditch，《黎曼流形上拉普拉斯算子的特征函数》，预印本（2017）。[Z14] Wei Zhang，《自守周期与 Rankin–Selberg L 函数的中心值》，《美国数学会杂志》27:2（2014），541–612。