arXiv:2602.14852v1 [math.FA] 16 Feb 2026

运输成本空间的 L_1-畸变下估计

CHRIS GARTLAND[1] 和 MIKHAIL OSTROVSKII

Abstract. 量化有限度量空间 X 上两个概率分布之间的差异程度，是计算机科学和计算机视觉中的一项基础任务。基于最优传输的一种自然差异度量是地球搬运工距离（EMD），也称为 Kantorovich 度量或 Wasserstein-1 度量。我们将 X 上配备地球搬运工距离的概率测度度量空间记为 EMD(X)，称为地球搬运工空间。分析这一度量的一项关键技术——由 Charikar [Cha02] 以及 Indyk 和 Thaper [IT03] 开创 —— 是将 EMD(X) 低畸变嵌入 Lebesgue 空间 L_1。对于带有 $|X| = n$ 、嵌入到L_1 中的 EMD(X)，畸变的最佳上界为 $O(\log n)$。这一结果综合了 Charikar 的工作（其基于 [KT02]）以及 Fakcharoenphol、Rao 和 Talwar 的开创性成果 [FRT04]。此外，众所周知，扩展图给出了 $\Omega(\log n)$ 的匹配下界，即 L_1-畸变的下界，表明该上界是紧的。

一个关键问题是：对于已知可低畸变嵌入到 L_1 中的重要度量空间类别，能否改进 $O(\log n)$ 的上界。在计算机视觉领域，网格图——尤其是平面网格——是最基本的对象之一。Indyk 在 [MN11, Problem 2.17] 中提出了相关问题，即估计均匀分布在 n 点子集上的空间的 L_1-畸变，其中这些子集取自 $\mathbb{R}^2$。[MN11], 中的进展报告（最近更新于 2011年8月）强调了两个关键结果：首先是 Khot 和 Naor[KN06] 关于汉明立方体的工作，该工作表明 EMD($\{0,1\}^n$) 的 L_1-畸变为 n 阶；其次是 Naor 和 Schechtman [NS07] 关于平面网格的结果，该结果证明 EMD($\{0,\dots,n\}^2$) 的 L_1-畸变为 $\Omega(\sqrt{\log\ n})$。

我们的首个结果将 EMD($\{0,\dots,n\}^2$) 的 L_1-畸变下界提升至 Ω ($\log\ n$)，与普适上界仅相差乘法常数。使我们得以获得这些精确估计的关键，是一个针对网格图上标量值函数的新 Sobolev 型不等式。我们的方法也适用于许多递归图族，例如菱形图和 Laakso 图。在这些情形下，我们同样得到了精确的 $\log n$ 畸变估计。

Contents

1. 引言 2 1.1. 主要结果陈述 4 1.2. 组织结构与证明概述 5 1.3. 证明的基本思路 5 2. 为运输成本空间的 L_1-畸变提供下界的条件 6 2.1. 由$(\mathbf{C1})$-$(\mathbf{C2})$ 推出的 L_1-畸变估计 7 2.2. 化归到单连通集合 8 3. 平面网格 9 3.1. 构造测度 9 3.2. 条件$(\mathbf{C2})$ 的证明 10 3.3. 条件$(\mathbf{C1})$ 的证明 11 3.4. TC(Gr_n) 的L_1-畸变 15 4. 边替换与 $\oslash$ 积 16

2020 *Mathematics Subject Classification.* 51F30 (05C76, 30L05, 46B03, 49Q22, 68R12, 68W25).

Key words and phrases. 菱形图、地球搬运工距离、网格图、度量嵌入、斜积、索伯列夫不等式、瓦瑟斯坦度量。[1]第一位署名作者获美国国家科学基金会资助，资助编号为 DMS-2546184。

4.1. 定义与基本概念 16 4.2. 初等发展 19 4.3. 周长测度 20 4.4. st-图上的索伯列夫不等式 21 4.5. 带符号和的运输成本范数 24 4.6. TC($G^{(n)}$) 的 L_1-畸变 24 4.7. 带把手的圈的斜积幂 25 5. 化归到线性映射 27 6. 致谢 28 参考文献

1. 引言

设 (X, d) 是一个有限度量空间，$\mathcal{M}_0(X)$ 是 X 上总质量为 0 的有符号测度集合，也就是说，对于 $\mu \in \mathcal{M}_0(X)$，$\mu(X) = 0$。对此类测度的一种自然且重要的诠释，是将其视为一个运输问题：需要将某种商品从满足 $\mu(\{x\}) > 0$ 的地点 $x \in X$ 运送到满足 $\mu(\{y\}) < 0$ 的地点 $y \in X$。很容易看出，运输问题 μ 可以表示为

$$\mu = a_1(\delta_{x_1} - \delta_{y_1}) + a_2(\delta_{x_2} - \delta_{y_2}) + \cdots + a_n(\delta_{x_n} - \delta_{y_n}), \tag{1.1}$$

其中 $a_i \geq 0$, $x_i, y_i \in X$，且 δ_x 是位于 $x \in X$ 的单位点质量测度。我们将每个这样的表示称为 μ 的**运输方案**；它可以理解为一项计划，将 a_i 单位的商品从 x_i 运送到 y_i。运输方案 (1.1) 的成本定义为 $\sum_{i=1}^n a_i d(x_i, y_i)$。线性空间 $\mathcal{M}_0(X)$ 上的运输成本范数 $\|\mu\|_{\mathrm{TC}}$，是满足 (1.1) 的 μ 的运输方案成本的下确界。相应的赋范空间 $(\mathcal{M}_0(X)\ \|\cdot\|_{\mathrm{TC}})$ 称为 X 的**运输成本空间**，记作 TC(X)。（文献中常用的其他名称有***Lipschitz* 自由空间**、***Kantorovich-Rubinstein* 空间**或***Arens-Eells* 空间**。）Kantorovich 对偶性 [Vil09, 特例 5.16] 给出了范数 $\|\mu\|_{\mathrm{TC}} = \sup\{|\int_X f d\mu| : f\colon X \to \mathbb{R}$ 为 1-Lipschitz 函数的对偶形式。Kantorovich 和 Gavurin [Kan42, KG49], 引入运输成本空间理论，最初是为了研究与有限度量空间上的函数空间相关的特殊范数。

X 上的概率测度 μ 与 ν 之间的**地球搬运工距离** 是量EMD(μ, ν) $= \|\mu - \nu\|_{\mathrm{TC}}$。我们将配备该度量的概率测度空间记为EMD($X$)。该术语的根源在于Monge（1781）的工作。它由Rubner、Tomasi和Guibas [RTG98, RTG00], 引入计算机科学，他们使用地球搬运工距离这一名称在计算机视觉中描述该度量。EMD在计算机视觉中的重要性在于：当图像被表示为概率分布时，地球搬运工距离提供了一种自然的不相似性概念。在此背景下，最相关的底层度量空间X是二维平面网格 $\{0, \ldots n\}^2$，因为其上的分布可对二维图像进行建模。

Charikar [Cha02] 和Indyk-Thaper [IT03] 注意到，研究有限度量空间上的EMD(X)的一种有用方法，是利用EMD(X)到 L_1的低畸变嵌入。

回顾一下，度量空间 (X, d) 的 L_p-**畸变** 是满足以下条件的最小 $D \geq 1$：存在一个测度空间 $(\Omega\ \mathcal{A}, M)$ 和一个映射 $f\colon X \to L_p(M)$，其畸变为 D，也就是说，对于每个 $x, y \in X$，都有 $d(x, y) \leq \|f(x) - f(y)\|_p \leq Dd(x, y)$。这个量记作 $c_p(X)$。

Charikar-Indyk-Thaper 结果的一个重要出发点是：存在一个绝对常数 $C < \infty$，使得对于任意 n 元度量空间 X，不等式

$$c_1(\mathrm{EMD}(X)) \leq C \log n \tag{1.2}$$

成立。该结果分两步证明：

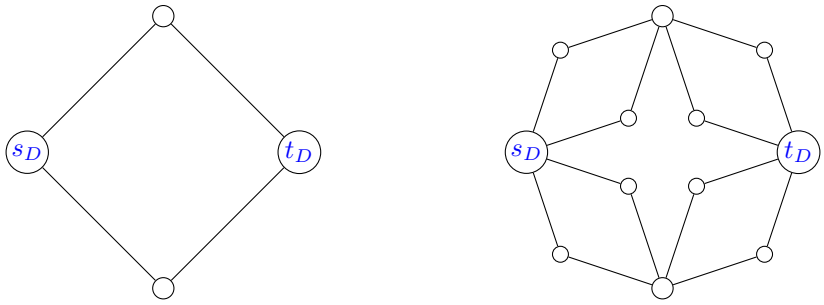

FIGURE 1. 前两个菱形图

(1) Charikar [Cha02] （隐式地）证明了 c_1(EMD(X))受 X 到支配树度量的随机失真的上界约束。这一点由Indyk-Thaper [IT03第 3]页指出。用支配树进行随机逼近的理论由Bartal [Bar96]开创。

(2) Fakcharoenphol-Rao-Talwar [FRT04，定理 2]: 存在一个绝对常数 $C<\infty$，使得对于每个含 n 个元素的度量空间 X，随机支配树畸变为 $\leq C\log n$。

确定标准有限度量空间族的普适估计 $O(\log n)$ 是否能够改进，变得非常重要。显然，对于畸变阶数达到最大值的空间，例如扩展图，这一估计无法改进。因此，研究重点在于畸变一致有界的空间族，尤其是与计算机视觉最相关的空间族，例如平面网格 $\{0,\dots n\}^2$。

此后，这一方向的主要成果如下:

(1) Khot-Naor 在 [KN06，第 831]页的推论 2 中，得出了汉明立方体 c_1(EMD($\{0,1\}^n$)) $=\Omega(n)=\Omega(\log|\{0,1\}^n|)$ 的一个紧下界。[1]

(2) 对于平面网格，下界 c_1(EMD($\{0,\dots,n\}^2$)) $=\Omega(\sqrt{\log n})$ 由 Naor-Schechtman 在 [NS07 的定理 1.1] 中证明。

(3) Baudier-Gartland-Schlumprecht 在 [BGS23 的定理 A]中为菱形图 $D_n=(V(D_n)\ E(D_n))$ 得到了类似的估计c_1(EMD($\overline{D}_n$)) $=\Omega(\sqrt{n})=\Omega(\sqrt{\log|V(D_n)|})$。

我们的目标是大幅推进结果 (2) 和 (3)。参见下文的定理 1.1 和 1.2。具体而言，(i) 我们得到了最优阶的畸变；(ii) 与 [NS07] 和 [BGS23]，中的结果相比，我们的证明所用的技术工具更少；(iii) 除菱形图外，我们还证明了该估计适用于更多递归图族。

归约到线性映射： Naor-Schechtman 证明中的一个重要部分，是将问题归约为映射到有限维 ℓ_1^m 空间 [NS07，引理 3.1] 中的线性映射。也就是说，若令 $c_{1,\ \mathrm{lin}}$(TC(X)) 表示所有 $m\in\mathbb{N}$ 以及所有线性映射 $f:$ TC(X) $\to\ell_1^m$ 的最小畸变，其中 X 为有限度量空间，则

$$c_1(\mathrm{EMD}(X))=c_1(\mathrm{TC}(X))=c_{1,\mathrm{lin}}(\mathrm{TC}(X)). \tag{1.3}$$

Naor-Schechtman 在 X 为平面网格时陈述了这一归约，但他们的证明实际上适用于任意有限度量空间。我们将在 §5 中给出证明。我们将利用这一归约，因而下文将使用 TC(X) 代替 EMD(X)。

注意，结合 (1.2) 和 (1.3)，我们得到

$$c_1(\mathrm{TC}(X))=O(\log|X|). \tag{1.4}$$

关于 $\oslash$ 幂（斜积幂）： 菱形图构成一个递归图族，在包括物理学 [BO79、KG81], 分析学 [JS09、OR17],以及计算机科学 [IW91、GNRS04、NR03、BC05、LN04]在内的多个科学领域中发挥着重要作用。见图1。它们属于一类我们称为 $\oslash$ 幂的图（采用源自 [LR10]的记号）。 $\oslash$ 积是

[1]此处及全文中，当 A 为集合时，我们用 $|A|$ 表示 A 的基数。

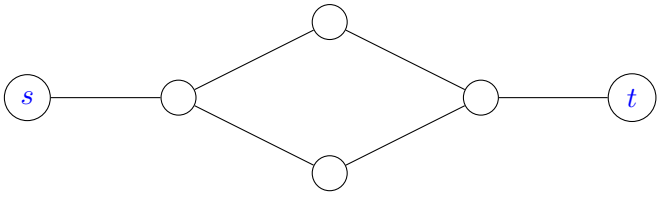

FIGURE 2. 第一个 Laakso 图 La_1。

一种作用于图的二元运算，以两个 s-t 图作为输入，并返回另一个 s-t 图，其中 s-t 图是一个有向图 H，配备两个称为 s_H 和t_H的特殊顶点。具体而言，对于两个 s-t 图 G 和 H，图 $G \oslash H$ 是通过将 G 的每条边e 替换为 H的一个副本而得到的，其中 e 的起始顶点被替换为 s_H， e 的终止顶点被替换为 t_H。若 G 是一个 s-t 图，则 G 的第 n次 $\oslash$ 幂由递归公式 $G^{\oslash 1}$ 定义：$= G$ 以及 $G^{\oslash n} = G^{\oslash(n-1)} \oslash G$。在本文中，我们仅在如下受限情形下考虑 $\oslash$ 幂：基图 G 中的每条边都属于从 s 到 t的一条有向测地线，且 G 包含一个圈。我们所使用概念的详细定义见定义4.2和4.6。最著名的 $\oslash$ 幂序列是上文提到的菱形图以及Laakso 图 $\{La_n\}_{n=1}^{\infty} = \{La_1^{\oslash n}\}_{n=1}^{\infty}$，后者由 Lang-Plaut [LP01首次定义，图 2]，他们受到Laakso [Laa02]较早构造的启发。第一个Laakso 图 La_1的图示见图2。Lang与Plaut对Laakso 图的构造源于分析学中的一个嵌入问题，而它们目前在该领域以及计算机科学中都发挥着重要作用[LN04、JS09、CK13、NPS20、DKO21、纽约州22]。

Dilworth、Kutzarova 和 Ostrovskii [DKO20] 开启了对 $\oslash$ 次幂上的运输成本空间的研究。对于这类族中的一大类 $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$，他们证明了关于 Banach-Mazur 距离的下估计，其形式为$d_{\mathrm{BM}}(\mathrm{TC}(G_n)$ $\ell_1^{m(n)}) = \Omega\left(\log m(n) \log \log m(n)\right)$。这里，$m(n) = \dim(\mathrm{TC}(G_n))$，而两个维数相同的有限维赋范空间 V、W之间的 Banach-Mazur 距离 $d_{\mathrm{BM}}(V, W)$，是它们之间所有线性同构的畸变下确界。对于菱形图 $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$， [DKO20] 给出的估计在一个常数因子范围内是精确的，即 $d_{\mathrm{BM}}(\mathrm{TC}(D_n)$ $\ell_1^{m(n)}) = \Theta(\log m(n))$。在同一篇文章中，Dilworth、Kutzarova 和 Ostrovskii 还提出了一个问题：求 $c_1(\mathrm{TC}(D_n))$ [DKO20, 问题 6.6] 的下界。此后，关于该问题唯一的结果是前文提到的工作 [BGS23]，其给出了 $c_1(\mathrm{TC}(D_n)) = \Omega(\sqrt{\log |V(D_n)|})$。

1.1. 主要结果陈述。 我们的第一个主要结果是对 Naor-Schechtman 关于平面网格的下界作出最优改进：我们证明，$\mathrm{TC}(\{0, \dots n\}^2)$ 的 L_1-畸变达到了普适上界。

定理 1.1. $c_1(\mathrm{TC}(\{0, \dots, n\}^2)) = \Theta(\log n)$。

令 M_d^n 表示 $\mathrm{EMD}(\mathbb{R}^d)$ 中由 n 点子集上的均匀分布构成的子集。在 [MN11 的问题 2.17], 中，Indyk 提出了求 $c_1(M_2^n)$ 渐近行为的问题。文献 [AIK08、BI14] 给出了与 $c_1(M_d^n)$ 上界相关的结果；而在 M_d^n 中近似计算距离这一算法问题，则由 [CJLW22、JWZ24] 研究。定理 1.1，或其证明中使用的方法，或许能够通过给出畸变下界，帮助解决 Indyk 提出的问题。事实上，借助 Bourgain 离散化定理，Gi-ladi、Naor 和 Schechtman [GNS12 的推论 1.5]直接应用了 Naor-Schechtman 的下界 $c_1(\mathrm{EMD}(\{0, \dots n\}^2)) = \Omega(\sqrt{\log n})$，从而得到 $c_1(M_2^n)$ 的非平凡下界（另见 [NS07，第 §4] 节）。在定理 5.2 中，我们利用 [NS07] 和 [GNS12] 的结果证明 $c_1(M_2^s) = \Omega(\log s)$。

我们的第二个主要结果是定理 1.1 对一大类 $\oslash$幂的类似结论。

定理 1.2. 设 G 为任意一个不是 st路径、且至少有三个顶点的 st图。则存在常数 $C < \infty$（依赖于 G，但不依赖于 n），使得对每一个 $n \geq 0$，均有 $c_1(\mathrm{TC}(G^{\oslash n})) \geq C^{-1} \log |V(G^{\oslash n})|$。

定理 1.2 表明，与平面网格一样，这一类图中的每个序列渐近地都呈现出可能的最大 L_1-畸变。

这一结果对菱形图而言是新的，因为此前已知的 $c_1(\mathrm{TC}(D_n))$ 下界最佳结果为 $\Omega(\sqrt{n})$。更进一步，对于许多 $\oslash$ 次幂 $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$，包括 Laakso 图，此前甚至尚不清楚 $\sup_n c_1(\mathrm{TC}(G_n)) = \infty$ 是否成立。我们在推论 4.21 中给出了定理 1.2 中常数 C 的良好估计，适用于菱形图和 Laakso 图。

1.2. **证明的组织与说明。** 我们对定理 1.1 和定理 1.2 采用相同的证明方法：我们证明，若某组运输问题 $\{\mu_t\}_{t\in\mathcal{M}} \subseteq \mathrm{TC}(G_n)$ 满足一对条件 **(C1)**-**(C2)**（定义见 §2），那么 $\mathrm{TC}(G_n)$ 线性嵌入到一个 ℓ_1^m空间时，必然会产生一定程度的畸变。这就是定理 2.1 的内容，其证明见 §2.1。这种通用方法是新的，并且很可能在今后估计其他运输成本空间的 L_1-畸变时派上用场。

在 §3 中，我们证明，对于某种选择的测度 $\{\mu_t\}_{t\in\mathcal{M}}$，平面网格 $\{0,\dots n\}^2$ 满足条件 **(C1)**-**(C2)**，这些测度的支撑呈“十字形”（见图 3）。这就是定理 3.3 和定理 3.7 的内容。定理 1.1 可由此及定理 2.1 推出（见定理 3.9）。特别是，在 §3.3 的定理 3.7 中证明的**(C1)**成立，表明函数 $f\colon \{0,\dots n\}^2 \to \mathbb{R}$ 满足一种新定义的 Sobolev 型不等式。这个定理本身或许也有独立的研究价值。经典的端点 Sobolev 不等式指出，f 的 L_2-方差由 $W^{1,1}$-范数控制；这一不等式是 Naor-Schechtman 的 [NS07] 证明 $c_1(\mathrm{TC}(\{0,\dots n\}^2)) \asymp \Omega(\sqrt{\log\, n})$ 的关键要素（事实上，他们将 Kislyakov [Kis75 的较早论证改编到了离散情形，该论证运用了 Sobolev 不等式）。这些论证启发我们寻找另一种 Sobolev 型不等式，以期得到更好的畸变下界。

在 §4 中，我们介绍边替换（定义 4.2）和斜积（定义 4.6）这两种操作。接着，我们介绍测度 $\{\mu_t\}_{t\in\mathcal{M}}$ 的选取，并说明在相当一般的情形下，它们满足条件 **(C1)**-**(C2)**。最后，我们运用 §2 和 §4 中建立的理论，得到关于钻石图和 Laakso 图的 L_1- 畸变估计（推论 4.21 ），并给出定理 1.2 的证明，见第 26 页。

在 §5 中，我们给出将问题归约到线性映射的证明，该归约在等式 (1.3) 中有所描述。

1.3. **证明的基本思路。** 主要步骤定理 2.1 的证明中所用的技巧，与许多畸变下界证明中所用的技巧相似。我们指的是基于 Poincar´e 不等式的著名方法（见 [Ost13，第 4] 章）。下面简要回顾其基本思路。

设 $(X,\ d_X)$ 和 $(Y,\ d_Y)$ 为度量空间。假设我们的目标是从下方估计将 X 嵌入到 Y 的嵌入的下确界畸变。为此，我们找到 X 的一个子集 U、实数数组 $\{a_{uv}\}_{u,\ v\in U}$ 和 $\{b_{uv}\}_{u,\ v\in U}$，以及 $p \in [1,\infty)$，使得一方面，

$$\sum_{u,v\in U} a_{u,v}(d_X(u,v))^p \leq \sum_{u,v\in U} b_{u,v}(d_X(u,v))^p, \tag{1.5}$$

另一方面，对于任意映射 $f\colon X \to Y$

$$\sum_{u,v\in U} a_{u,v}(d_Y(f(u),f(v)))^p \geq D \sum_{u,v\in U} b_{u,v}(d_Y(f(u),f(v)))^p. \tag{1.6}$$

上述不等式称为庞加莱 ´不等式。不难得出，不等式 (1.5) 和 (1.6) 意味着从 X 到 Y 的任意映射的畸变至少为 $D^{1/p}$。

我们采用类似的方法。我们还注意到，由于线性化等式 (1.3)，可以假设 f 是线性的。因此，我们还可以假设 f 是非收缩的，且 $\|f\| \leq$ 的畸变为 $+\varepsilon$。

为达到最优畸变率，在我们给出的不等式 (1.5) 和 (1.6) 版本中，不得不在一侧混用指数 1 和 2。因此，我们将得到的不等式称为“索伯列夫不等式”（请回想一下，在经典的庞加莱不等式中，两侧的指数相同；而在经典的索伯列夫不等式中，指数则是混用的）。

我们研究度量空间 G 为加权图 $G=(V,\ E,\ w)$ 的情形，该图具有正权重 w，且最短路径距离 d_G 满足：对每条边 uv，都有 $d_G(u,\ v)\ = w(uv)$。此外，我们假设在 E 上还存在另一个正函数 th，称为厚度，并满足

$$\sum_{uv\in E(G)} th(uv)d_{G_n}(uv) = 1.$$

我们对庞加莱不等式的类比结果如下。对于某些图 G，我们找到指标集 $\mathcal{M} = \sqcup_{k=1}^{m}\mathcal{M}_k$ 和运输问题系统 $\{\mu_t\}_{t\in\mathcal{M}} \subseteq \mathrm{TC}(G)$，使得对于某些矩阵 $\{\theta_s(t)\}_{s,\ t\in\mathcal{M}_k}$，$\theta_s(t)\ = \pm 1$，以及与 m 无关的数 α 和 C，有（此处 e^+ 和 e^- 是有向边 e 的端点顶点）

$$\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{|\mathcal{M}_k|}\sum_{s\in\mathcal{M}_k}\left\|\sum_{t\in\mathcal{M}_k}\theta_s(t)\mu_t\right\|_{\mathrm{TC}}^2\right)^{1/2} \geq m\cdot\alpha\sum_{e\in E}\|\delta_{e^+}-\delta_{e^-}\|_{\mathrm{TC}}th(e), \tag{1.7}$$

另一方面，对于任意线性非收缩映射 $f:\mathrm{TC}(X)\ \to \ell_1^d$，我们有

$$\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{|\mathcal{M}_k|}\sum_{s\in\mathcal{M}_k}\left\|f\left(\sum_{t\in\mathcal{M}_k}\theta_s(t)\mu_t\right)\right\|_{\ell_1^d}^2\right)^{1/2} \leq C\sum_{e\in E}\|f(\delta_{e^+}-\delta_{e^-})\|_{\ell_1^d}th(e). \tag{1.8}$$

对于上述 Poincar´e 不等式，很容易看出，畸变估计 $c_1(\mathrm{TC}(G))\ \geq \frac{m\alpha}{C}$ 由此得出。请注意，在下面的论证中，使用略有不同的记号会比较方便。不等式 (1.7) 最终由 (2.3) 得出，而不等式 (1.8) 可在 (2.7) 中找到。

为了证明本文的主要结果，只需注意，对于某些这类图的族 $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$，参数 $m = m(n)$ 会按所需方式增长，而商 $\frac{\alpha_{(n)}}{C(n)}$ 则有一个正的下界。

2. Conditions Giving Lower Estimates for the L_1-Distortion of TransportationCost Spaces

本节的目标是找出一些条件，用于对带有加权测地度量的图族 $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的 $\{c_1(\mathrm{TC}(G_n))\}_{n=1}^{\infty}$ 增长率给出非平凡（通常是紧的）下界估计。我们用 $V(G)$ 表示图 G 的顶点集，用 $E(G)$ 表示边集，用 $d_G(u,v)$ 表示 $u,v\in V(G)$ 之间的距离。我们假设已为 $E(G)$ 选定一种定向（有时我们会明确指定定向；若未指定，则选择无关紧要，因为对我们的论证至关重要的参数并不依赖于定向），并用 uv or (u,v) 表示起始顶点为 u、终止顶点为 v 的有向边。我们用 $d_G(uv)\ = d_G(u,v)$ 表示边 $uv\in E(G)$ 的长度。在第 4 节中，我们还需要一些关于有向图的记号，届时会予以介绍。

我们首先给出满足下文所述条件 **(C1)**-**(C2)** 且参数“良好”的族中 $\{c_1(\mathrm{TC}(G_n))\}_{n=1}^{\infty}$ 增长率的估计。随后，我们列举一些重要示例，其中条件 **(C1)**-**(C2)** 均以“良好”的参数得到满足。条件 **(C1)**-**(C2)** 针对运输问题 $\{\mu_t\}_{t\in\mathcal{M}}\subseteq\mathrm{TC}(G_n)$，其中 $\mathcal{M}$ 是一个带有划分 $\mathcal{M}=\sqcup_{k=0}^{n'}\mathcal{M}_k$ 的指标集。

(C1) 存在 $C < \infty$，使得对所有 $n \geq 0$，均存在 $th: E(G_n) \to (0, \infty)$，称为厚度函数，使得

$$\sum_{uv \in E(G_n)} th(uv) d_{G_n}(uv) = 1 \tag{2.1}$$

且所有标量值函数 $f: V(G_n) \to \mathbb{R}$ 都满足 Sobolev 型不等式

$$\sum_{k=0}^{n'} \Big(\sum_{t \in \mathcal{M}_k} \Big| \int f d\mu_t \Big|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \leq C \sum_{uv \in E(G_n)} |f(u) - f(v)| th(uv). \tag{2.2}$$

(C2) 对于每个 $k \in \{0, \dots n'\}$，存在 $\alpha_k \geq 0$ 以及一个标量值函数正交系统 $\{\theta_i : \mathcal{M}_k \to \mathbb{R}\}_{i \in \mathcal{M}_k}$，使得对于每个 $i,\ t \in \mathcal{M}_k$，都有 $|\theta_i(t)| \leq 1$，并且满足一致下界

$$\min_{i \in \mathcal{M}_k} \Big\| \sum_{t \in \mathcal{M}_k} \theta_i(t) \mu_t \Big\|_{\mathrm{TC}} \geq \alpha_k. \tag{2.3}$$

2.1. 由 (C1)-(C2) 推出的 L_1-畸变估计。

定理 2.1 。设 $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ 是一列满足条件 **(C1)-(C2)** 的图。该 n

$$c_1(\mathrm{TC}(G_n)) \geq C^{-1} \sum_{k=0}^{n'} \alpha_k.$$

证明。令 $k \in \{0, \dots n'\}$。首先，令 $\nu_i = \sum_{t \in \mathcal{M}_k} \frac{\theta_i(t)}{\sqrt{|\mathcal{M}_k|}} \mu_t$，并注意到 $\left\{ \frac{\theta_i}{\sqrt{|\mathcal{M}_k|}} \right\}_{i \in \mathcal{M}_k}$ 是函数的正交集 $\mathcal{M}_k \to \mathbb{R}$，且每个函数的 $\ell_2(\mathcal{M}_k)$-范数至多为 1，因此有

$$\sum_{i \in \mathcal{M}_k} \Big| \int f d\nu_i \Big|^2 \leq \sum_{t \in \mathcal{M}_k} \Big| \int f d\mu_t \Big|^2, \tag{2.4}$$

而 (2.3) 蕴含如下估计

$$\min_{i \in \mathcal{M}_k} \|\nu_i\|_{\mathrm{TC}} \geq \alpha_k |\mathcal{M}_k|^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.5}$$

结合 (2.4) 和 (2.2)，得到

$$\sum_{k=0}^{n'} \Big(\sum_{i \in \mathcal{M}_k} \Big| \int f d\nu_i \Big|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \leq C \sum_{uv \in E(G_n)} |f(u) - f(v)| th(uv). \tag{2.6}$$

由于 (2.6) 的右端是一个 L_1-范数，我们只需将各项相加，就能推导出一个相应的不等式，适用于取值于 ℓ_1-空间的线性映射。事实上，设 $L : \mathrm{TC}(G_n) \to \ell_1^d$ be 是一个线性映射。固定一个基点 $x_0 \in V(G_n)$，并定义函数 $\{f_j : G_n \to \mathbb{R}\}_{j=1}^d$ by $f_j(x) := L(\delta_x - \delta_{x_0})j$，使得对于每个 $\nu \in \mathrm{TC}(G_n)$，都有 $L(\nu) = (\int f_j d\nu)_{j=1}^d$ （该恒等式可通过以下事实证明

即 $\{\delta_x - \delta_{x_0}\}_{x\in V(G_n)}$ 张成 TC(G_n））。于是我们有

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n'}\Big(\frac{1}{|\mathcal{M}_k|}\sum_{i\in\mathcal{M}_k}\Big\|L\Big(\sum_{t\in\mathcal{M}_k}\theta_i(t)\mu_t\Big)\Big\|_1^2\Big)^{\frac12} &= \sum_{k=0}^{n'}\Big(\sum_{i\in\mathcal{M}_k}\|L(\nu_i)\|_1^2\Big)^{\frac12}\\
&= \sum_{k=0}^{n'}\Big(\sum_{i\in\mathcal{M}_k}\Big(\sum_{j=1}^{d}\Big|\int f_j d\nu_i\Big|\Big)^2\Big)^{\frac12}\\
&\overset{\text{triangle}}{\leq} \sum_{j=1}^{d}\sum_{k=0}^{n'}\Big(\sum_{i\in\mathcal{M}_k}\Big|\int f_j d\nu_i\Big|^2\Big)^{\frac12}\\
&\overset{(2.6)}{\leq} \sum_{j=1}^{d} C\sum_{uv\in E(G_n)}|f_j(u)-f_j(v)|th(uv)\\
&= C\sum_{uv\in E(G_n)}\|L(\delta_u-\delta_v)\|_1 th(uv)\\
&\leq C\sum_{uv\in E(G_n)}\|L\|d_{G_n}(uv)th(uv)\\
&\overset{(2.1)}{=} C\|L\|.
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

有了这个取值于 ℓ_1 的索博列夫不等式，借助 (2.5) 立即可以得到 c_1(TC(G_n)) 的下界：令 D 为任意一个大于 $\{c_1(\mathrm{TC}(G_n))\}_{n=1}^{\infty}$ 的数，并设 $L:\mathrm{TC}(G_n)\to\ell_1^d$ 是一个非压缩线性映射，且满足 $\|L\|\leq D$。根据第 1 节中的等式 (1.3)，我们可以找到这样一个映射 L。然后，利用上述不等式，我们得到估计

$$
\sum_{k=0}^{n'}\alpha_k \overset{(2.5)}{\leq} \sum_{k=0}^{n'}\Big(\sum_{i\in\mathcal{M}_k}\|\nu_i\|_{\mathrm{TC}}^2\Big)^{\frac12} \leq \sum_{k=0}^{n'}\Big(\sum_{i\in\mathcal{M}_k}\|L(\nu_i)\|_1^2\Big)^{\frac12} \leq C\|L\| \leq CD.
$$

由于 $D > c_1$(TC(G_n)) 是任意的，我们得到 c_1(TC(G_n)) $\geq C^{-1}\sum_{k=0}^{n'}\alpha_k$。 □

2.2. 化归到单连通集。在本小节中，我们给出一种非常有用的化归方法，使我们只需对连通且具有连通补集的集合的示性函数验证索博列夫型不等式。

设 $G=(V,\ E)$ 是一个连通的有限有向图，且 $A\subseteq V$。A 的边界边集记为 $\partial_E A$，它由所有一端点位于 A、另一端点位于 A^c 的边组成。显然，$\partial_E A=\partial_E A^c$。设 ν 是 E 上支撑为全体的正测度。对于 $f:\ V\to\mathbb{R}$，我们将梯度 $\nabla f:\ E\to\mathbb{R}$ 定义为 $\nabla(f)(uv):=f(v)-f(u)$。我们将 f 的 (1，1)-Sobole夫（半）范数定义为

$$
\|f\|_{W^{1,1}(\nu)} := \|\nabla f\|_{L_1(\nu)} = \sum_{uv\in E}|f(v)-f(u)|\nu(uv).
$$

注意，当 $f=1_A$ 对某个 $A\subseteq V$ 成立时，$\|1_A\|_{W^{1,\ 1}(\nu)}=\nu(\partial_E A)$。

由于 G 是连通的且 ν 的支撑为全体，$\|f\|_{W^{1,\ 1}(\nu)}=0$ 当且仅当 f 是常函数。因此，函数 $V\to\mathbb{R}$ 对常函数取模后，配备 Sobole夫范数便构成一个赋范空间。我们将此赋范空间记为 $W^{1,\ 1}(\nu)$。

为证明所需的约化，我们使用了 $B_{W^{1,1}(\nu)}$ 极端点的一个刻画，该刻画见 [Ost05], , 其中 B_W 表示赋范空间 W的闭单位球。若顶点集$A\subseteq V$中的 A 与 A^c 连通，我们就称该顶点集为单连通。我们还采用了 [Ost05 第 501] 页页末的说明（其中指出，边加权图的证明思路相同）。

定理 2.2 ([Ost05，定理 7])。设 ν 是 E上的一个正测度。那么，函数 $f\colon V\to\mathbb{R}$ 的等价类是 $B_{W^{1,1}(\nu)}$ 的极点，当且仅当 $\|f\|_{W^{1,1}(\nu)}=1$，且存在一个单连通子集 $A\subseteq V$，使得 f 在 A 上的限制是常函数，并且 f 在 A^c 上的限制是常函数。

定理 2.3 (化归到单连通集**)**。设 ν 是 E 上的一个正测度。设 $|||\cdot|||$ 是 $\mathbb{R}^V$ 上满足 $|||1_V|||=0$ 的半范数，并设 $C\in[0,\infty)$ 是一个常数。若对所有单连通集 $A\subseteq V$，均有 $|||1_A|||\le C\|1_A\|_{W^{1,1}(\nu)}$，则对所有 $f:V\to\mathbb{R}$，均有 $|||f|||\le C\|f\|_{W^{1,1}(\nu)}$。

证明。假设对所有单连通集 $A\subseteq V$，均有 $|||1_A|||\le C\|1_A\|_{W^{1,1}(\nu)}$。设 $f\colon V\to\mathbb{R}$ 是一个函数。若 f 是常函数，则根据假设，$|||f|||=0$，因此结论显然成立。于是，假设 f 不是常数。由不等式两侧半范数的齐次性，不妨设 $\|f\|_{W^{1,1}(\nu)}=1$。根据 Carath´eodory 凸包定理，存在有限个极点 $\{g_i\}_{i=1}^m\subseteq B_{W^{1,1}(\nu)}$ 以及正标量 $\{c_i\}_{i=1}^m\subseteq[0,1]$，使得 $\sum_{i=1}^m c_i=1$ 且 $f\equiv\sum_{i=1}^m c_ig_i$（模去常函数）。由定理 2.2，存在 V 的单连通子集 $\{A_i\}_{i=1}^m$ 和标量 $\{a_i\}_{i=1}^m\subseteq\mathbb{R}$，使得对每个 $i\in\{1,\dots m\}$，均有 $g_i\equiv a_i1_{A_i}$（模去常函数）。于是 $f\equiv\sum_{i=1}^m c_ia_i1_{A_i}$（模去常函数）。由于半范数 $|||\cdot|||$ 和 Sobole夫范数在常函数上均为零，因此有

$$\begin{aligned}|||f|||&=|||\sum_{i=1}^m c_ia_i1_{A_i}|||\le\sum_{i=1}^m c_i|a_i|\,|||1_{A_i}|||\\&\le C\sum_{i=1}^m c_i|a_i|\,\|1_{A_i}\|_{W^{1,1}(\nu)}=C\sum_{i=1}^m c_i\|g_i\|_{W^{1,1}(\nu)}=C=C\|f\|_{W^{1,1}(\nu)}.\end{aligned}$$ □

3. Planar Grids

设 $n\in\mathbb{N}$，其中 $n\ge2$。二进平面网格是图 Gr_n，其顶点集为 $V(Gr_n):=\{0,\dots2^n\}^2$，有向边集为 $E(Gr_n):=\{uv\in V(Gr_n)^2\colon v\in\{u+(1,0)\ u+(0,1)\}\}$。注意，$|E(Gr_n)|=2^{n+1}(2^n+1)\le\frac{5}{2}4^n$。我们在 $V(Gr_n)$ 上赋予单位边长最短路径度量，该度量与 $\mathbb{R}^2$ 上的 ℓ_1-度量一致。在度量空间的非空子集上定义的直径函数 diam，以及在度量空间的非空子集对上定义的距离函数 dist，均按通常方式定义。

3.1. 构造测度。对于这些网格，我们取 $n'=n-2$，并令指标集 $\mathcal{M}$ 为 $T=\cup_{k=0}^{n-2}T_k$，其中 T_k 是 $\{1,2,3,4\}^k$ 的笛卡尔幂，约定 $\{1,2,3,4\}^0=\{\emptyset\}$。我们将 T 视为深度为 $n'=n-2$ 、分支数为 4 的正则有根树。当 $t\in T$ 时，我们将 t 的代定义为满足 $t\in T_{|t|}$ 的唯一整数 $|t|$。令 $\{\mu_t\}_{t\in T}$ 为任意一族总质量为 0 的有符号测度，它们属于 TC(Gr_n)，并满足以下五个性质 (P1)-(P5)，其中某些 $\frac12\le C_1$、C_2、C_3、$C_4<\infty$ 以及任意 $t\in T$。回顾一下，有限集 V 上函数 $f\colon V\to\mathbb{R}$ 的支撑是子集 supp(f) $:=\{v\in V\colon f(v)\neq0\}$；$V$ 上有符号测度 μ 的支撑是函数 $v\mapsto\mu(\{v\})$ 的支撑；而 $a\vee b$ 表示 a、$b\in\mathbb{R}$ 的最大值。

(P1) 直径(supp(μ_t)) $\le C_12^{n-|t|}$.**(P2)** 若 $t'\in T\setminus\{t\}$，则 dist(supp(μ_t),supp($\mu_{t'}$)) $\ge C_2^{-1}2^{n-|t|\vee|t'|}$.**(P3)** $\|\mu_t\|_{\mathrm{TC}}\ge C_3^{-1}4^{-|t|}$.**(P4)** 对于任意 $A\subseteq V(Gr_n)$，均有 $|\mu_t(A)|\le C_4\min\{2^{-n-1-|t|},4^{-n}(\mathrm{diam}(A)+1)\}$.**(P5)** 存在 $u\in V(Gr_n)$，使得 supp(μ_t) $\cup\{u\}$ 是连通的。

构造满足这五个性质的 TC(Gr_n) 中的测度有许多种方法。我们在下一个定理中概述一种特定的方法，其中测度的支撑集呈“十字形”。

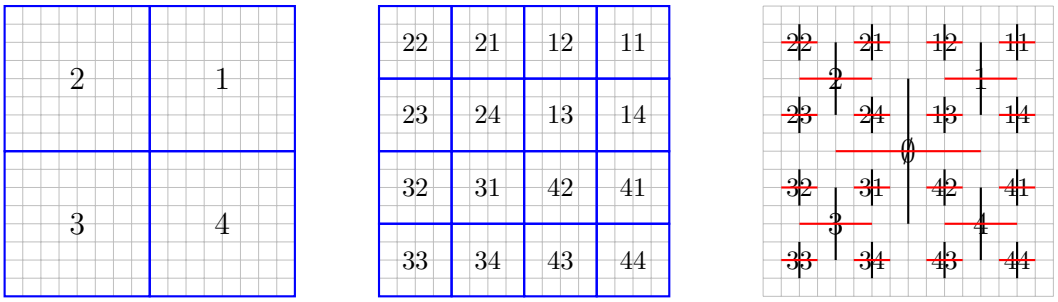

FIGURE 3. 左：将 Gr_4 分解为以 $T_1 = \{1, 2, 3, 4\}$为索引的二进子网格 $\{Q_t\}_{t\in T_1}$。中：将 Gr_4 分解为以 $T_2 = \{1, 2, 3, 4\}^2$为索引的二进子网格 $\{Q_t\}_{t\in T_2}$。右：测度 μ_t 关于 $|t| \le 2$的正（黑色）与负（红色）支撑。

定理 3.1。存在测度 $\{\mu_t\}_{t\in T} \subseteq \mathrm{TC}(Gr_n)$ 满足 **(P1)-(P5)**，且具有 $C_1 = \frac{1}{2}$、$C_2 = 4$、$C_3 = 16$ 和 $C_4 = 1$。

证明。设 $k \in \{0, \dots n-2\}$。我们可以将 Gr_n 分解为 4^k 个二进子网格，子网格的集合以 T_k为索引。对于 $n = 4$ 与 $k = 1$，2，这一点如图 3 所示。设 $t \in T_k$。考虑 Gr_n 中对应于 t、大小为 $2^{n-k} \times 2^{n-k}$ 的二进子网格 Q_t。我们画一条竖直黑线，其长度为 Q_t边长的一半，穿过 Q_t的中心，使其成为具有 $2^{n-k-1} + 1$ 个顶点和 2^{n-k-1} 条边的路径子图。然后我们画一条水平红线，长度与竖直黑线相同，穿过 Q_t的中心。这两条线恰好相交于 Q_t的中心。我们在 $V(Gr_n)$ 上定义正测度 μ_t^+、μ_t^-如下：若 u 属于竖直黑线，则 $\mu_t^+(\{u\}) = 4^{-n}$，否则 $\mu_t^+(\{u\}) = 0$；若 u 属于水平红线，则 $\mu_t^-(\{u\}) = 4^{-n}$，否则 $\mu_t^-(\{u\}) = 0$。我们定义 $\mu_t := \mu_t^+ - \mu_t^-$。因此，$\mu_t$ 是总质量为0且具有十字形支撑的符号测度。该支撑几乎是黑线与红线的并，只是它们相交的中心点不属于该支撑。因此，测度 μ_t 满足(P5)。当 $n = 4$时，μ_t 关于 $|t| \le 2$ 的支撑图示见图 3。

现在我们考虑其他性质 **(P1)-(P4)**。令 $t \in T$ 并设 $k := |t|$。显然，**(P1)** 在 $C_1 = \frac{1}{2}$ 下成立。

为说明 **(P2)** 在 $C_2 = 4$ 下成立，令 $t' \in T \setminus \{t\}$，并且不妨设 $|t'| \le |t|$。于是，μ_t 支撑于一个大小为 $2^{n-k} \times 2^{n-k}$ 的二进制子网格 Q_t 的中心，而 $\mathrm{supp}(\mu_t)$ 到 Q_t 边界的距离为 2^{n-k-2}。$\mu_{t'}$ 的支撑与 Q_t 的内部不相交。因此，$\mathrm{supp}(\mu_t)$ 与 $\mathrm{supp}(\mu_{t'})$ 之间的距离至少为 2^{n-k-2}。

对于**(P3)**，为得到 $\|\mu_t\|_{\mathrm{TC}}$ 的下界，我们注意到，在 μ_t^- 之间从 μ_t^+ 出发的任何运输方案中，μ_t^+ 支撑中的每个点 u 都必须至少移动从 u 到支撑 μ_t^- 的水平红线的距离。这为 $\|\mu_t\|_{\mathrm{TC}}$ 给出了 $(4^{-n})2\sum_{i=1}^{2^{n-k-2}} i = 4^{-n}(4^{n-k-2} + 2^{n-k-2}) > 4^{-k-2}$ 的下界。这表明 $C_3 \le 16$。

最后，对于 **(P4)**，令 $A \subseteq V(Gr_n)$。不失一般性，假设 $\mu_t^+(A) \ge \mu_t^-(A)$，于是我们有 $|\mu_t(A)| \le \mu_t^+(A)$。显然有界 $\mu_t^+(A) \le \mu_t^+(V(Gr_n)) = 4^{-n}2^{n-k-1} = 2^{-n-k-1}$。令 y^- 表示 $\mathrm{supp}(\mu_t^+) \cap A$ 中所有点的 y 坐标的最小值，并令 y^+ 表示 y 坐标的最大值。于是容易看出 $\mu_t^+(A) \le 4^{-n}(y^+ - y^- + 1) \le 4^{-n}(\mathrm{diam}(A) + 1)$。因此 $C_4 \le 1$。□

3.2. **条件（C2）的证明**。我们先给出一个简单的引理：当相关测度的支撑集充分分离时，运输成本范数近似具有可加性。这一点直观上显而易见，而且在运输成本文献中经常会遇到与此密切相关的估计。

我们将在建立该引理后很快推出条件。 **(C2)**

引理 3.2。 设$(X、d)$ 是一个有限度量空间， M 是 X上有限个非零有符号测度的集合，且每个测度的总质量均为 *0*，满足

- $\sup_{\mu\in M} \operatorname{diam}(\operatorname{supp}(\mu)) \le A$ 且
- $\inf_{\mu',\ \mu\in M,\ \mu'\neq\mu} \operatorname{dist}(\operatorname{supp}(\mu),\ \operatorname{supp}(\mu')) \ge B^{-1}$

对于某些 $A、B<\infty$成立。则对于任意函数 $g:\ M\to\mathbb{R}$,

$$\Big\|\sum_{\mu\in M} g(\mu)\mu\Big\|_{\mathrm{TC}} \ge (AB)^{-1}\sum_{\mu\in M}|g(\mu)|\|\mu\|_{\mathrm{TC}}.$$

证明。 将 $g(\mu)\mu$ 记为 τ，我们可以将所需的不等式写成

$$(AB)\left\|\sum_{\tau\in M'}\tau\right\|_{\mathrm{TC}} \ge \sum_{\tau\in M'}\|\tau\|_{\mathrm{TC}} \tag{3.1}$$

Let

$$\sum_{\tau\in M'}\tau = a_1(\delta_{x_1}-\delta_{y_1})+a_2(\delta_{x_2}-\delta_{y_2})+\cdots+a_n(\delta_{x_n}-\delta_{y_n})$$

是一个最优运输方案（回想一下，我们的空间是有限的）。容易看出，我们可以假设 $\{x_i,y_i\}_{i=1}^n$包含在 $\cup_{\tau\in M'}$ $\operatorname{supp}(\tau)$中。如果每一对$(x_i,y_i)$都位于某个 $\tau\in M'$的支撑内，则将 AB 替换为1时，不等式(3.1)立即成立。

如果某些对(x_i,y_i)被拆分，且其元素属于不同 τ的支撑，我们按如下方式修改运输方案。对每个 τ，令 $P_\tau=\{i:\ \ x_i\in\operatorname{supp}(\tau)\ y_i\notin\operatorname{supp}(\tau)\}$以及 $N_\tau=\{i:\ \ y_i\in\operatorname{supp}(\tau)\ x_i\notin\operatorname{supp}(\tau)\}$。由于 $\tau(X)=0$，我们得到 $\sum_{i\in P_\tau}a_i=\sum_{i\in N_\tau}a_i$。因此，我们可以匹配相应的供给量与需求量，并得到一个修改后的方案，使得对每个 τ，其供给量与其需求量相匹配。所得方案的费用至多为原方案费用的 AB 倍，因为来自不同 τ 的支撑的每个距离 $d(x_i,y_i)$至少为 B^{-1}，而来自同一个 τ 的支撑的距离至多为 A。另一方面，所得方案的费用不能小于各 τ的最优方案之和。不等式(3.1)由此得出。□

定理 3.3。 对于任意的 $k\in\{0,\dots n-2\}$ 以及满足 **(P1)-(P3)** 的测度 $\{\mu_t\}_{t\in T_k}\subseteq \mathrm{TC}(Gr_n)$，存在一个函数正交系统 $\{\theta_i:\ T_k\to\{-1,1\}\}_{i\in T_k}$，使得不等式 (2.3)在 $\alpha_k=(C_1C_2C_3)^{-1}$ 下成立。

证明。 由于 $|T_k|=4^k$ 是 2 的幂，我们可以通过西尔维斯特构造阿达马矩阵 [Hor07, § 2.1.1]（也称为沃尔什矩阵），找到一个函数正交系统 $\{\theta_i:T_k\to\{-1,1\}\}_{i\in T_k}$。由该系统的性质 **(P1)-(P3)**、引理 3.2 以及事实 $|T_k|=4^k$，不等式 (2.3) 在 $\alpha_k=(C_1C_2C_3)^{-1}$ 下立即成立。□

3.3. **条件（C1）的证明**。 我们在 $E(Gr_n)$上取的厚度函数是均匀概率测度； $th(uv)=\frac{1}{|E(Gr_n)|}$ 对所有 $uv\in E(Gr_n)$均成立。定理 2.3 意味着，要证明一般函数 $f:\ V(Gr_n)\to\mathbb{R}$满足索伯列夫不等式 (2.2)，只需证明在 $f=1_A$ 的情形下该不等式成立，其中 $A\subseteq V(Gr_n)$是某个连通集合，且其补集连通；这类集合也称为单连通集合。为了证明这类示性函数满足索伯列夫不等式，我们需要先对图和平面网格作一些观察。

3.3.1. 图与平面拓扑。 现在我们汇集一些关于一般图的基本事实，以及一些平面网格拓扑所特有的事实。由于后者在树和圈等图中可能会严重失效（它们的运输成本空间确实可以嵌入 L_1，且畸变一致有界），因此可以将其视为导致畸变$c_1(\mathrm{TC}(Gr_n))$较大的重要度量拓扑原因。我们从适用于任何图的基本事实开始。

命题 3.4。 设 $G = (V, E)$ 是任意有限无权图， d 是 G中相应的最短路径度量，直径 是相应的直径；若 G不连通，则允许其取值为 ∞ 。设 $A \subseteq V$ 连通。则以下结论成立。

(1) $\operatorname{diam}(A) + 1 \leq |A|$,(2) 若存在 $r > 0$ 以及一个 r-分离子集 $S \subseteq A$ （即对于所有 $u, v \in S, u \neq v$, 都有 $d(u, v) \geq r$），且满足 $|S| \geq 2$，则 $r|S| \leq 3|A|$。

我们并未声称上述第二项中的常数 3 是最优的。通过 (3.3)，该命题在定理 3.7 的证明中起着关键作用。

命题 *3.4* 的证明。 第一项甚至比第二项更显然：A 的基数上界为 A 中任意选定路径的基数（该路径存在，因为 A 是连通的），并且可以选取一条路径，使其基数上界为 $\operatorname{diam}(A) + 1$。

现在证明第二项。对于每个 $s \in S$，令 $B_{r/3}(s)$ 表示 A 的子集，其中包含所有能够通过一条完全包含在 A 中且长度至多为 $r/3$ 的路径与 s 相连的 $a \in A$ 。由于 S 是 r-分离的，三角不等式意味着集合 $\{B_{r/3}(s)\}_{s \in S}$两两不相交。此外，我们有基数上界 $|B_{r/3}(s)| \geq r/3$。这是由以下事实得出的：由于 $|S| \geq 2$ 且 A 是连通的，对于任意 $s \in S$，我们可以选取 $s_0 \in S \setminus \{s\}$ 和一条连接 s 与 s_0 的路径 $P \subseteq A$ 。必有 $|P| \geq r$，因此 $|P \cap B_{r/3}(s)| \geq r/3$。这个基数上界与两两不相交性共同推出 $r/3 \cdot |S| \leq |A|$。 □

对于图 $G = (V, E)$，我们将 A 的对称顶点边界 定义为 $\partial_V A := \bigcup_{uv \in \partial_E A} \{u, v\}$。显然，$\partial_V A = \partial_V A^c$ 和

$$|\partial_V A| \leq 2|\partial_E A|. \tag{3.2}$$

现在我们给出关于平面网格拓扑的两个基本引理，并简述其证明。第一个是经典平面拓扑结果的图论版本：二维球面的单连通子集具有连通边界。回顾一下，当A 是某个图的顶点集的子集时，我们将 A 定义为单连通，当且仅当 A 和 A^c 都是连通的。

引理 3.5。 如果 $A \subseteq V$（Gr_n）是单连通的，那么 $\partial_V A$ 是连通的。

证明。 对于每个 $x = (x_1, x_2) \in V(Gr_n)$，令 $\bar{x} := [x_1 - \frac{1}{2}, x_1 + \frac{1}{2}] \times [x_2 - \frac{1}{2}, x_2 + \frac{1}{2}] \subseteq \mathbb{R}^2$，即，$\bar{x}$是以 x 为中心的闭 1×1 方形。对于 $A \subseteq V(Gr_n)$，令 $\tilde{A} := \operatorname{int}\left(\bigcup_{x \in A} \bar{x}\right) \subseteq \mathbb{R}^2$，其中 $\operatorname{int}(U)$ 表示作为拓扑空间 $\mathbb{R}^2$ 的子集时 U 的内部。我们还引入 $\tilde{A^c} := \operatorname{int}\left(\bigcup_{x \in A^c} \bar{x}\right) \subseteq \mathbb{R}^2$。

我们得到正方形 $S := [-\frac{1}{2}, 2^n + \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, 2^n + \frac{1}{2}]$的两个不相交子集。显然，正方形 S 中不属于 $A^c \cup A$ 的部分只有：(1) S 的边界；(2) 属于不同区域 A^c 和 A 的正方形之间的闭线段 $\tilde{\quad}$ $\tilde{\quad}$。

我们构造图 B，其中属于不同区域 A^c 和 A 的正方形之间的闭线段 $\tilde{\quad}$ $\tilde{\quad}$ 为边，其端点为顶点。需要注意的是，该图中顶点的度可以是 1、2 或 4，且顶点的度为 1 当且仅当该顶点位于 S 的边界上。关于 S 边界上顶点的说法显然成立。我们来考虑一个不在 S 边界上的顶点。从该顶点引出的边垂直于连接网格中属于不同集合 A^c 和 A 的顶点的线段 $\tilde{\quad}$ $\tilde{\quad}$。因此， B 中不在 S 边界上的顶点，其度可以是 2 或 4。

根据欧拉定理的一个版本（关于欧拉回路和迹，参见 [BM08，第 3.3 节和练习 3.3.5]），图 B 是由路径和圈组成的边不交并，且路径只能连接边界上的不同顶点。

现在我们考虑图 B，我们还加入了 S 边界上的所有线段。这样便得到一个平面图。根据欧拉公式，$n - m + \ell = c + 1$，其中 n 是

顶点数， m 是边数， ℓ 是面数，而 c 是连通分支的数量~ ~。由于该图有三个面，即 A^c、 A 和外部面，因此得到$n-m=c-2$。

考虑两种情况：（a）路径和圈中至少有一条路径；（b）只有圈。

在这两种情况下，分别在（a）中选取一条路径、在（b）中选取一个圈，并省略其余路径和圈，由此得到的平面图已经有三个面。因此，要证明没有其他路径和圈，只需证明添加其中任意一个都会增加面的数量。

情况（a）。添加一条长度为 k 的路径，最多会增加 $k-1$ 个顶点和 k 条边，且不会改变 B 的连通分支数；因此，面的数量会增加。添加一个圈。有两种子情况，其中一种是该圈在 B 中构成一个新的连通分支。在这种情况下，我们增加 k 个顶点、k 条边和 1 个连通分支，因此面的数量必定增加 1。在第二种子情况下，增加的边数多于顶点数，而连通分支数不变，因此面的数量应当增加。

情形 (b)。我们只需考虑添加一个环，这可以完全按照上一段中的方法完成。

最后一步：设 e_1、.....、e_n 是上述 B 划分中唯一一条路径/环上的边，并按自然顺序排列。那么， Gr_n 中与 e_k 和 e_{k+1} 相交的边，要么有一个公共顶点（若 e_k 和 e_{k+1} 垂直），要么它们的顶点是一个网格方格的顶点（若这些边在同一直线上）。所有这些顶点都在 $\partial_V A$ 中。无论哪种情况，我们都能得到连通性。□

引理 3.6。对于一个 y $A\subseteq V(Gr_n)$ 满足 A， $A^c\neq\emptyset$，有 $\min\{\mathrm{diam}(A),\ \mathrm{diam}(A^c)\}\leq 2\mathrm{diam}(\partial_V A)$。

证明。 *</style}*将 的顶点染成蓝色，将 的顶点染成黄色。如果网格中有两条相对的多色边，则结论显然成立。事实上，在这种情况下，*diam()* 。另一方面，显然 *maxdiam()*，$\mathrm{diam}(A^c)\}\leq 2^{n+1}$。

因此，假设每对相对边中各有一条单色边，例如一对中的 S_1 ，另一对中的 S_2。由于 S_1 和 S_2 有一个公共顶点， S_1 和 S_2 的颜色应当相同。不失一般性，假设 S_1 和 S_2 都是蓝色。

现在，考虑包含所有黄色顶点的最小矩形。令 m 为其最长边。考虑该矩形中两条相对的最短边。它们包含黄色顶点，而它们的直线延长线必然包含蓝色顶点。因此，$\mathrm{diam}(\partial_V A)\geq m$。另一方面，由于 A^c 包含在该矩形中，我们有$\mathrm{diam}(A^c)\leq 2m$。□

3.3.2. 单连通集的索伯列夫不等式证明。 现在，我们利用引理 3.5 和 3.6 来证明索伯列夫不等式

$$|||1_A|||\leq C\|1_A\|_{W^{1,1}(th)} \tag{3.3}$$

对于所有单连通集 $A\subseteq V(Gr_n)$，其中 th 为厚度；在 Gr_n 的情形下，它是 $E(Gr_n)$上的均匀概率测度，常数 C 由 $C_4(20+40C_2)$控制（其中C_2， C_4 是 **(P2)**、**(P4)** 中的数据，且半范数定义为

$$|||f|||:=\sum_{k=0}^{n-2}\|f\|_k$$

with

$$\|f\|_k:=\Big(\sum_{t\in T_k}\Big|\int f d\mu_t\Big|^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

其中，$\{\mu_t\}_{t\in T}$ 是满足性质 **（P2）**、**（P4）**和 **（P5）**且总质量为 0 的有符号测度。证明了（3.3）后，应用定理 2.3，即可立即得到以下定理，从而确立条件 **（C1）**。

定理 3.7。对于所有满足 **（P2）**、**（P4）**和 **（P5）**的 $\{\mu_t\}_{t\in T}\subseteq \mathrm{TC}(Gr_n)$ ，以及所有函数 $f\colon V(Gr_n)\to\mathbb{R}$，

$$\sum_{k=0}^{n-2}\Big(\sum_{t\in T_k}\Big|\int f d\mu_t\Big|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\le C\sum_{uv\in E(G_n)}|f(u)-f(v)|th(uv),$$

其中 $C\le C_4(20+40C_2)$。

首先，我们需要一个简短的引理，它是性质 (**P5** 的一个重要推论).

引理 3.8. 对于每个 $A\subseteq V(Gr_n)$ 以及 $t\in T$，若 $\mu_t(A)\neq 0$，则 $\partial_V A\cap\mathrm{supp}(\mu_t)\neq\emptyset$。

证明。令 $A\subseteq V(Gr_n)$ 且 $t\in T$。假设 $\mu_t(A)\neq 0$。由于 μ_t 的总质量为 0，因此 $\mathrm{supp}(\mu_t)\subseteq A$ 或 $\mathrm{supp}(\mu_t)\subseteq A^c$ 不可能成立。因此，$\mathrm{supp}(\mu_t)\cap A\neq\emptyset$ 且 $\mathrm{supp}(\mu_t)\cap A^c\neq\emptyset$。由 (P5) 可知，对于某个 $u\in V(Gr_n)$，$\mathrm{supp}(\mu_t)\cup\{u\}$ 是连通的。容易看出，前一句意味着存在 $x,y\in\mathrm{supp}(\mu_t)\cup\{u\}$，使得 $(x,y)\in\partial_E A$。根据定义，这意味着 $x,y\in\partial_V A$。由于 x 和 y 不可能同时等于 u，因此 x,y 中至少有一个属于 $\mathrm{supp}(\mu_t)$，这表明 $\partial_V A\cap\mathrm{supp}(\mu_t)\neq\emptyset$。□

现在我们证明单连通集的索伯列夫不等式。

证明 (3.3)。设 $A\subseteq V(Gr_n)$ 为单连通集。注意，(3.3) 左侧求和中的各项为

$$\|1_A\|_k=\Big(\sum_{t\in T_k}|\mu_t(A)|^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

而右侧的范数为

$$\|1_A\|_{W^{1,1}(th)}=\frac{|\partial_E A|}{|E(Gr_n)|}\ge\frac{2}{5}4^{-n}|\partial_E A|. \tag{3.4}$$

显然，若将 A 替换为 A^c，(3.3) 两边均保持不变，因此只需假设A，$A^c\neq\emptyset$ 且 $\mathrm{diam}(A)\le\mathrm{diam}(A^c)$。

选取 $m\in\mathbb{N}$ 使得

$$2^{m-1}\le|\partial_V A|<2^m, \tag{3.5}$$

由此根据 (3.2) 可得

$$2^{m-2}\le|\partial_E A|. \tag{3.6}$$

因此由 (3.4) 和 (3.6),

$$4^{-n}2^m\le 10\|1_A\|_{W^{1,1}(th)}. \tag{3.7}$$

由引理 3.6、引理 3.5 和命题 3.4(1)，我们有

$$\mathrm{diam}(A)+1\le 2\mathrm{diam}(\partial_V A)+1<2|\partial_V A|\overset{(3.5)}{\le}2^{m+1}\overset{(3.6)}{\le}8|\partial_E A|. \tag{3.8}$$

当然，为了证明所需的不等式，我们只需考虑满足 $t\in T$ with$\mu_t(A)\neq 0$ 的那些元素。接下来我们考察可能出现这种情况的那些元素 $t\in T$。

考虑性质 (**P2**) 中的常数 C_2。令 $m_2\in\mathbb{Z}$ 使得

$$2^{m_2-1}\le C_2<2^{m_2}. \tag{3.9}$$

我们断言，至多存在一个元素 $t\in\cup_{k=0}^{n-m-m_2}T_k$ 使得 $\mu_t(A)\neq 0$。事实上，反设存在 $t,t'\in T$，满足 $|t|,|t'|\le n-m-m_2, t\neq t'$，且 $\mu_t(A)\ \mu_{t'}(A)\neq 0$。根据引理 3.8，交集 $\partial_V A\cap\mathrm{supp}(\mu_t)$ 和 $\partial_V A\cap\mathrm{supp}(\mu_{t'})$ 均非空。于是由 (3.8)、(**P2**) 和 (3.9)，可得

$$2^m\ge\mathrm{diam}(\partial_V A)\ge C_2^{-1}2^{n-(n-m-m_2)}>2^{-m_2}2^{m+m_2},$$

矛盾。由此得证。

该断言结合**(P4)** 显然推出

$$\sum_{k=0}^{n-m-m_2} \|1_A\|_k \le C_4 4^{-n}(\mathrm{diam}(A)+1),$$

然后由 (3.8) 和 (3.4)，可得

$$\sum_{k=0}^{n-m-m_2} \|1_A\|_k \le C_4 4^{-n} 8|\partial_E A| \le 20 C_4 \|1_A\|_{W^{1,1}(th)}. \tag{3.10}$$

现在我们要为项 $\|1_A\|_k$ 给出一个上界，该上界对于较大的 k也足够。固定$k \in \{0,\dots n-2\}$。我们首先估计集合 $\{t \in T_k : \ \mu_t(A) \neq 0\}$ 的基数。由引理 3.8 可知，这是 $\{t \in T_k : \ \partial_V A \cap \mathrm{supp}(\mu_t) \neq \emptyset\}$ 的子集。有两种情况需要考虑：(i) 该集合的基数至多为 1；(ii) 该集合的基数至少为 2。在情况 (i) 中，根据假设，我们得到了所需的基数界。在情况 (ii) 中，命题 3.4(2) 的假设成立，因此由**(P2)**、引理 3.5、命题 3.4(2) 和 (3.5)，可得

$$|\{t \in T_k : \partial_V A \cap \mathrm{supp}(\mu_t) \neq \emptyset\}| \le 3C_2 2^{k-n}|\partial_V A| \le 3C_2 2^{m+k-n}.$$

因此，在这两种情况下，我们都有

$$|\{t \in T_k : \mu_t(A) \neq 0\}| \le 1 + 3C_2 2^{m+k-n}.$$

将此与**(P4)**结合起来，我们得到

$$\begin{aligned}\|1_A\|_k^2 &\le (1+3C_2 2^{m+k-n})(C_4 2^{-n-1-k})^2 \\ &= (C_4 2^{-n-1-k})^2 + 3C_2 C_4^2 2^{m-3n-k-2},\end{aligned}$$

接着，这个估计给出

$$\begin{aligned}\sum_{k=n-m-m_2+1}^{n-2} \|1_A\|_k &< C_4 2^{-n-1} \sum_{k=n-m-m_2+1}^{\infty} 2^{-k} + \sqrt{3C_2} C_4 2^{\frac{m}{2}-\frac{3n}{2}-1} \sum_{k=n-m-m_2+1}^{\infty} 2^{-\frac{k}{2}} \\ &= C_4 2^{-n-1} 2^{m+m_2-n} + \sqrt{3C_2} C_4 2^{\frac{m}{2}-\frac{3n}{2}-1} 2^{\frac{m+m_2-n}{2}} (\sqrt{2}-1)^{-1} \\ &= 4^{-n} 2^{m-1} C_4 (2^{m_2} + \sqrt{3C_2} 2^{\frac{m_2}{2}} (\sqrt{2}-1)^{-1}) \\ &\overset{(3.9)}{\le} 4^{-n} 2^{m-1} C_4 C_2 (2 + \sqrt{6}(\sqrt{2}-1)^{-1}) \\ &\overset{(3.7)}{\le} 5\|1_A\|_{W^{1,1}(th)} C_4 C_2 (2+\sqrt{6}(\sqrt{2}-1)^{-1}) < 40 C_4 C_2 \|1_A\|_{W^{1,1}(th)}.\end{aligned}$$

结合 (3.10)，我们得出

$$\sum_{k=0}^{n-2} \|1_A\|_k \le C_4(20+40C_2)\|1_A\|_{W^{1,1}(th)}. \qquad \square$$

3.4. **L_1-畸变TC(Gr_n)。** 现在，我们应用前面各小节的结果，来获得定理3.9中关于 $c_1(\mathrm{TC}(Gr_n))$ 的下界，从而证明定理1.1。

定理 3.9。 $c_1(\mathrm{TC}(Gr_n)) \ge 5760^{-1}(n-1)$。

证明。 由定理 2.1、3.3 和 3.7，我们得到

$$c_1(\mathrm{TC}(Gr_n)) \ge (n-1)(C_1C_2C_3C_4)^{-1}(20+40C_2)^{-1},$$

其中 C_1、C_2、C_3、C_4为常数，存在满足性质**(P1)-(P5)**的测度 $\{\mu_t\}_{t\in T}$。根据定理 3.1，项 $C_1C_2C_3C_4(20+40C_2)$ 可取上界 5760。$\square$

将定理 3.9 与估计式 (1.4) 结合，我们便可推论得到两个主要结果中的第一个。

定理 1.1。 $c_1(\mathrm{TC}(\{0,\dots,n\}^2)) = \Theta(\log n)$。

4. Edge Replacement and ⊘ products

4.1. 定义与基本概念。在本文剩余部分中，沿用 Serre [Ser03, §2] 引入的图论术语将很方便。具体而言，图 G 具有有限顶点集 $V(G)$ 和有向边集 $Y(G) \subseteq (V(G) \times V(G)) \setminus \{(u,u)\colon\ u \in V(G)\}$。集合 $Y(G)$ 包含每条边的两个方向，这意味着 $uv \in Y(G) \iff vu \in Y(G)$。当我们需要为每条边选定一个方向时，称之为定向的选择，所得子集 $Y(G)$ 记为 $E(G)$。

当 $e = (u,v) \in Y(G)$ 时，我们将 u 记为 e^+，将 v 记为 e^-，并将 (v,u) 记为 $\bar{e}$。顶点序列 $\{u_i\}_{i=0}^k \subseteq V(G)$ 对于定向 $E(G)$ 而言是一个有向路径，如果对每个 $i \in \{1,\dots k\}$ 都有 $(u_{i-1},u_i) \in E(G)$；如果对每个 $i \in \{1,\dots k\}$ 都有 $(u_{i-1},u_i) \in Y(G)$，则它是一个路径。边序列 $\{e_i\}_{i=0}^k \subseteq E(G)$ 如果对所有 $i \in \{1,\dots k\}$ 都有 $e_{i-1}^+ = e_i^-$，则称为有向边路径；如果它是某个有向边路径 $\{f_i\}_{i=0}^k$，则称为边路径。

我们考虑一类特殊的图，称为 st-图。与我们所考虑的图类似的图类以前也曾以同一名称进行研究，但确切定义因作者而异。对我们而言，st-图是一个图 G（定义如上），它有两个不同的顶点，一个源顶点 s_G 和一个汇顶点 t_G，并配备了加权测地度量 $d_G : V(G) \times V(G) \to [0,1]$、定向 $E(G)$ 以及厚度函数 $th_G\colon E(G) \to (0,1]$，且满足下文的公理 **(a)-(c)**。注意，假设 th_G 取正值意味着每条边 $e \in E(G)$ 都属于下文所引入的 γ_i，且至少对应一个 $i \in I$。

(a) $d_G(s_G,t_G) = 1$，**(b)** 定向 $E(G)$中的每条有向路径都是测地线，**(c)** 存在有限指标集 I 以及 $E(G)$中从 s_G 到 t_G 的一组（不必互异的）有向边路径 $\{\gamma_i\}_{i\in I}$，使得对所有 $e \in E(G)$都有 $th_G(e) = \frac{|\{i\in I,\ e\in\gamma_i\}|}{|I|}$。

我们重载记号，并记 $d_G\colon\ Y(G) \to [0,1]$ 来表示长度函数 $d_G(e) := d_G(e^-,e^+)$。作为测地度量，d_G 在 $V(G) \times V(G)$上的取值完全由其在 $E(G)$上的取值决定。

对于 $A \subseteq V(G)$，我们令 $\partial_G A$ 表示 A的边界边集，即所有满足 $|\{e^-,e^+\} \cap A| = 1$的边 $e \in E(G)$所成的集合。下一个命题包含关于 st-图的两个基本结构结果。

命题 4.1. 设 G 为一个 st-图。则以下结论成立。
(1) $\sum_{e\in E(G)} th_G(e)d_G(e) = 1$。(2) 若 $A \subseteq V(G)$ 且 $|\{s_G,t_G\} \cap A| = 1$，则 $\sum_{e\in\partial_G A} th_G(e) \geq 1$。

证明。 对于 (1)，我们有

$$\sum_{e\in E(G)} th_G(e)d_G(e) = \sum_{e\in E(G)} \frac{|\{i\in I : e\in\gamma_i\}|}{|I|} d_G(e) = \frac{1}{|I|}\sum_{i\in I}\sum_{e\in\gamma_i} d_G(e) = 1.$$

对于 (2)，设 $A \subseteq V(G)$ 且 $|\{s_G,t_G\} \cap A| = 1$。对于每条有向边路径 γ_i，必定存在至少一条边 $\gamma_i \cap \partial_G A$。因此，我们有

$$\sum_{e\in\partial_G A} th_G(e) = \sum_{e\in\partial_G A} \frac{|\{i\in I : e\in\gamma_i\}|}{|I|} = \frac{1}{|I|}\sum_{i\in I}\sum_{e\in\partial_G A\cap\gamma_i} 1 \geq 1. \qquad \square$$

边替换是 st-图这一类中的一项基本操作。

定义 4.2（边替换）。设 G, H 是 st-图，且 $e \in E(G)$。我们按以下方式用 H 替换 e，从而构造出边替换 st-图 $G \cup_e H$：

- 顶点集为 $V(G \cup_e H) := V(G) \sqcup V(H)/\sim$，其中 $\sim$是由 $e^- \sim s_H$ 和 $e^+ \sim t_H$生成的等价关系。包含映射与商映射的复合，给出了从 $V(G)$ 和 $V(H)$ 各自到 $V(G \cup_e H)$ 的单射。通过这种方式，我们将$V(G)$视为 $V(G \cup_e H)$ 的子集，而不再提及包含映射和商映射。另一方面，我们将用特殊记号表示从 $V(H)$ 到 $V(G \cup_e H)$ 的单射； $v \in V(H)$ 的像记作 $e \oslash v$。

- 采用这种识别后，源点和汇点定义为 $s_{G \cup_e H} = s_G$ 和 $t_{G \cup_e H} = t_G$。

- 当 $e' = (u, v) \in E(H)$ 时，我们用 $e \oslash e'$ 表示有序对 $(e \oslash u, e \oslash v) \in V(G \cup_e H) \times V(G \cup_e H)$，并用 $e \oslash E(H)$ 表示 $\{e \oslash e'\}_{e' \in E(H)}$。有向边集$E(G \cup_e H)$ 定义为 $(E(G) \setminus \{e\}) \cup (e \oslash E(H)) \subseteq V(G \cup_e H) \times V(G \cup_e H)$。注意，映射 $E(H) \ni e' \mapsto e \oslash e' \in e \oslash E(H)$ 是双射，并且两个子集$E(G) \setminus \{e\}$ 和 $e \oslash E(H)$ 不相交。
- 测地度量在边上的定义为：若 $e' \in E(G) \setminus \{e\}$ 且 $d_{G \cup_e H}(e \oslash e') = d_G(e)$，则 $d_{G \cup_e H}(e') = d_G(e')$；若 $e' \in E(H)$，则 $d_H(e')$。
- 厚度函数定义为：若 $e' \in E(G) \setminus \{e\}$，则为 $th_{G \cup_e H}(e') = th_G(e')$；若 $e' \in E(H)$，则为 $th_{G \cup_e H}(e \oslash e') = th_G(e) th_H(e')$。

备注 4.3。这一构造的非正式雏形隐含在许多论文中；据我们所知，最早的一篇是 [BO79]。其形式化的初步工作见于 [LR10]。

W本节中我们将不加引用地使用以下命题 n.

命题 4.4。对于所有 st-图 G, H 以及边 $e \in E(G)$，边替换图 $G \cup_e H$ 满足 st-图的公理**(a)-(c)**。

证明。设 G, H 为 st-图，且 $e \in E(G)$。公理 **(a)**（即 $d_{G \cup_e H}(s_{G \cup_e H}, t_{G \cup_e H}) = 1$）和 **(b)**（即 $G \cup_e H$ 中的每条有向路径都是测地线）显然成立，细节从略。对于公理 **(c)**，我们将描述在 $G \cup_e H$ 中构造有向边路径 $\{\gamma_i\}_{i \in I}$ 的方法。

$\{\gamma_i\}_{i \in I_G}$ 和 $\{\gamma_j\}_{j \in I_H}$ 分别是 G 和 H中的有向边路径，证明了 st-图的公理 **(c)** 。$G \cup_e H$的指标集为 $I_G \times I_H$，对于每个 $i \in I_G$和 $j \in I_H$，我们构造从 $s_{G \cup_e H}$ 到 $t_{G \cup_e H}$ 的有向边路径$\gamma_{i,j}$，方法如下：

$$\gamma_{i,j} = \begin{cases} \gamma_i & \text{if } e \notin \gamma_i, \\ (\gamma_i \setminus \{e\}) \cup (e \oslash \gamma_j) & \text{if } e \in \gamma_i. \end{cases}$$

现在令 $e' \in E(G \cup_e H)$。分为两种情况：**(i)** $e' \in E(G) \setminus \{e\}$ 或 **(ii)** 对某个$e'' \in E(H)$，有 $e' = e \oslash e''$。假设属于情况 **(i)**。那么我们有

$$\begin{aligned} th_{G \cup_e H}(e') &= th_G(e') \\ &= \frac{|i \in I_G : e' \in \gamma_i|}{|I_G|} \\ &= \frac{|(i,j) \in I_G \times I_H : e' \in \gamma_i|}{|I_G||I_H|} \\ &= \frac{|(i,j) \in I_G \times I_H : e' \in \gamma_{i,j}|}{|I_G \times I_H|}, \end{aligned}$$

est在这种情况下验证公理 (c) 。现在假设情况 (ii) 成立。那么我们有 e

$$\begin{aligned} th_{G\cup_e H}(e') &= th_G(e)th_H(e'') \\ &= \frac{|i \in I_G : e \in \gamma_i|}{|I_G|}\frac{|j \in I_H : e'' \in \gamma_j|}{|I_H|} \\ &= \frac{|(i,j) \in I_G \times I_H : e \oslash e'' \in \gamma_{i,j}|}{|I_G||I_H|} \\ &= \frac{|(i,j) \in I_G \times I_H : e' \in \gamma_{i,j}|}{|I_G \times I_H|}, \end{aligned}$$

从而完成证明。 □

以下事实是边替换图的主要几何性质，本节中将显式或隐式地用到它们。其证明很直接，留给读者完成。对我们而言，有向图的图态射是一个映射 $f\colon V(H) \to V(H')$，它在图的顶点集之间建立对应，并且对于所有 $u, v \in V(H)$，都有 $(f(u)\ f(v)) \in E(H') \iff (u, v) \in E(H)$。

命题 4.5 (边替换的几何)。设 G, H 是 st-图，且 $e \in E(G)$。则以下事实成立。

(1) 对任意顶点 $v \in e \oslash V(H) \subseteq V(G \cup_e H)$ 和 $u \in V(G) \subseteq V(G \cup_e H)$，从 u 到v 的任意路径都必须与 $\{e^-, e^+\}$有非空交集。*(2)* $(V(G)\ d_G)$ 到 $(V(G \cup_e H)\ d_{G\cup_E H})$ 的包含映射是度量空间之间的等距嵌入。*(3)* 映射 $V(H) \ni v \mapsto e \oslash v \in V(G \cup_e H)$ 是有向图之间的单射图态射。

接下来，我们定义边替换的组合，它们在数学中发挥着非常重要的作用，也是本文后续内容的核心概念。

定义 4.6 ($\oslash$ 积与受限 $\oslash$ 积)。设 G 和 H 是两个 st-图。设$E' \subseteq E(G)$，并令 $E' = \{e_i\}_{i=1}^N$ 为 E'的任意一种枚举。我们递归地构造 G 和 H 的受限 $\oslash$ 积$G \oslash_{E'} H$ 如下：

- $S_{(0)} := G$,
- $S_{(i)} := S_{(i-1)} \cup_{e_i} H$ 对于 $1 \le i \le N$，并且
- $G \oslash_{E'} H := S_{(N)}$.

当 $E' = E(G)$ 时，结果记作 $G \oslash H$，而不是 $G \oslash_{E(G)} H$。 st-图 $G \oslash H$ 称为 G 和 H的积 或斜积 。

直观上，图 $G \oslash_{E'} H$ 是通过将 E' 中的每条边替换为 H的一个副本而得到的。该构造在同构意义下与 E'的枚举无关。我们有如下关于 $\oslash$ 积的基本性质。

Pr命题 4.7 （ $\oslash$ 积的基本性质）。设 G， H 为 st-图。则

- $V(G \oslash H) = \{e \oslash v\}_{e\in E(G)\ v\in V(H)}$ 和 $|V(G \oslash H)| = |V(G)| + |E(G)|(|V(H)| - 2)$,
- $s_{G\oslash H} = s_G$ 且 $t_{G\oslash H} = t_G$,
- $E(G \oslash H) = \{e \oslash e'\}_{e\in E(G)\ e'\in E(H)}$ 和 $|E(G \oslash H)| = |E(G)||E(H)|$,
- $d_{G\oslash H}(e \oslash e') = d_G(e)d_H(e')$ 对所有 $e \in E(G)$、 $e' \in E(H)$，以及
- $th_{G\oslash H}(e \oslash e') = th_G(e)th_H(e')$ 对所有 $e \in E(G)$、 $e' \in E(H)$。

4.2. 初等发展。 现在，我们将注意力转向 st-图，它们可以通过一系列迭代的边替换，由“初等” st-图得到。具体而言，如果一个 st-图 H 由一条从 s_H 到 t_H 的有向路径构成，且所有边的厚度均为 1；或者由两条从 s_H 到 t_H的有向路径构成，每条路径都至少包含三个顶点，且两条路径仅共享端点顶点 $\{s_H, t_H\}$，并且所有边的厚度均为1_2，那么我们称该图为初等图。注意，初等 st-图的边可以具有不同的长度。上述第一类初等图称为 st-路径，第二类称为 st-圈。如果一个 st-图是仅含两个顶点的 st-路径，则称其为平凡图。我们称一列 st-图 $(G^{(n)})_{n=0}^{\infty} = (V_{(n)}E^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ 为初等发展，如果

- $G_{(0)}$ 是一个平凡的 st-路径，具有 $E_{(0)} = \{(s,t)\}$ 和
- 对每个 $n \geq 0$，都存在一条边 $e \in E_{(n)}$ 和一个初等 st-图 H（依赖于n, e），使得 $G_{(n+1)} = G_{(n)} \cup_e H$。

请注意，尽管初等发展在形式上涉及图的无限序列，但我们允许该序列稳定的情况，即对所有充分大的 n，$G^{(n+1)} = G^{(n)}$，当带有 $G^{(n+1)} = G^{(n)} \cup_e H$ 的 st-图 H 是平凡的时，就会出现这种情况。这样，我们给出的初等发展定义可以涵盖有限序列。

固定一个初等发展 $(G^{(n)})_{n=0}^{\infty} = (V_{(n)}E^{(n)})_{n=0}^{\infty}$。我们用 $(\mathrm{V}\ d)$ 表示度量空间序列 $(V_{(n)}d_{G^{(n)}})$ 的直极限。也就是说，V 是递增的无限并集$\bigcup_{n\geq 0} V_{(n)}$，而 d 表示 V 上的度量，其在每个 $V_{(n)}$ 上的限制为 $d_{G^{(n)}}$。根据命题 4.5(2)，这个度量定义良好。这里强调，V 是一个可数集（因为它是有限集的可数并），而 $(\mathrm{V}\ d)$ 通常并不完备。

设 $n \geq 0$。若 $G^{(n+1)} \neq G^{(n)}$，则边 $e \in E^{(n)}$和 st-图 H（其中 $G^{(n+1)} = G^{(n)} \cup_e H$）由 $G^{(n)}$ 和 $G^{(n+1)}$ 唯一确定（若涉及 H，则唯一性是指相差一个同构），因为 e 是 $E^{(n)} \setminus E^{(n+1)}$的唯一元素，而 H 同构于子图 G_e；该子图由 $G^{(n+1)}$ 中从 e^- 到 e^+的所有有向路径的并所诱导，其中 s_H 与 e^-等同，t_H 与 e^+等同，并且d_H 与 $d_{e}^{d}()$ 在 G_e上的限制等同。

定义 $\mathcal{E} := \bigcup_{n\geq 0} E^{(n)}$。注意，这些并一般既不互不相交，也不构成递增序列，因为对每个满足 $G^{(n+1)} \neq G^{(n)}$的 $n \geq 0$，都存在一条边 $e \in E^{(n)}$，使得 $E^{(n)} \setminus \{e\} \subseteq E^{(n+1)}$ 和$e \notin E^{(n+1)}$。令 $th : \mathcal{E} \to (0,1]$ 表示在每个 $E^{(n)}$上限制为 $th_{G^{(n)}}$ 的函数）。这是良定义的，因为若 $e \in E^{(n)} \cap E^{(n+1)}$，则 $th_{G^{(n+1)}}(e) = th_{G^{(n)}}(e)$。对于每个 $e \in \mathcal{E}$，令n_e 表示满足 $e \in E^{(n-1)}$ 的最大 $n \geq 1$（也允许 $n_e = \infty$的情况）。令$m \geq 0$，其中 $G^{(m+1)} \neq G^{(m)}$。如前所述，存在唯一的边 $e^{(m)} \in E^{(m)}$，使得存在一个 st-图 $H^{(m)}$ 满足 $G^{(m+1)} = G^{(m)} \cup_e H^{(m)}$。令 $\prec$ 为由关系 $e^{(m)} \oslash e \prec e^{(m)}$ 生成的 $\mathcal{E}$上的严格偏序，其中关系对所有这样的 $m \geq 0$ 及所有 $e \in E(H^{(m)})$ 成立。令 $\preceq$ 表示 $\mathcal{E}$ 上相应的偏序（若 $e \prec e'$ 或 $e = e'$，则为 $e \preceq e'$）。于是 $(\mathcal{E}, \preceq)$ 具有有根树的结构。根为 (s,t)，因为对所有 $e \in \mathcal{E}$，它都满足 $(s,t) \succeq e$；树结构则源于这样一个事实：对每个 $e \in \mathcal{E}$，祖先集合 $\mathcal{E}_{\succ e} := \{e' \in \mathcal{E} : e' \succ e\}$ 是全序的（也就是说，其中任意两个不同元素 e' 和 e'' 满足 $e' \prec e''$ 或 $e'' \prec e$）。若 $e_1 \not\preceq e_2$ 且 $e_2 \not\preceq e_1$，则称 $e_1, e_2 \in \mathcal{E}$ 不可比较。请注意，我们所说的根是树中的极大元素（许多资料要求它是极小元素）。

引理 4.8 (瓶颈)。 假设 f_1、$f_2 \in \mathcal{E}$ 不可比较。假设 x_1、$x_2 \in \mathrm{V}$ 分别是 f_1、f_2 的后代顶点，也就是说，它们分别具有 $x_1 \in \{e_1^-, e_1^+\}$ 和 $x_2 \in \{e_2^-, e_2^+\}$ 的形式，其中 e_1、$e_2 \in \mathcal{E}$ 满足 $e_1 \preceq f_1$ 和 $e_2 \preceq f_2$。那么，对于任意满足 x_1、$x_2 \in V_{(n)}$ 的 $n \geq 0$，$G^{(n)}$ 中每条从 x_1 出发并以 x_2 结束的路径，都必定先与 $\{f_1^-, f_1^+\}$ 有非空交集，随后再与 $\{f_2^-, f_2^+\}$ 有非空交集。

证明。要看出这一点，只需利用以下观察：f_1 的后代顶点中，作为不满足 $e \preceq f_1$的边 e的端点的只有 $\{f_1^-, f_1^+\}$（对 f_2也是如此）。□

对于 $e \in \mathcal{E}$，我们将后代集 $\mathcal{E}_{\preceq e}$ 定义为 $\{e' \in \mathcal{E} : \ e' \preceq e\}$。对于 $n \geq 0$，我们将 n阶后代边集 $e \in \mathcal{E}$ 定义为子集 $E^{(n)}_{\preceq e} : = E^{(n)} \cap \mathcal{E}_{\preceq e}$。

引理 4.9 (不可比较性蕴含不相交)。 若 $E' \subseteq \mathcal{E}$ 是一个两两不可比较子集，那么对于每个 $n \geq 0$，由 $E^{(n)}$ 的子集构成的集合 $\{E^{(n)}_{\preceq e}\}_{e \in E'}$ 两两不相交。

证明。 例如，通过归纳法很容易看出，不可比较的边的后代仍不可比较。□

我们需要特别指出 $\mathcal{E}$ 中在发展过程的某个阶段被一个 st-环替换的那些边。具体来说，我们将 $\mathcal{E}_{cyc}$ 定义为所有满足以下条件的 $e \in \mathcal{E}$ 构成的集合：存在一个$n \geq 0$ st-环 H，使得 $G^{(n+1)} = G^{(n)} \cup_e H$。根据定义可立即得出$\mathcal{E}_{cyc} \subseteq \{e \in \mathcal{E} : \ n_e < \infty\}$。

引理 4.10 (不相交的后代)。 对于所有 n、 $k \geq 0$，集合 $\{E^{(n)}_{\preceq e}\}_{e \in \mathcal{E}_{cyc}(\,)=2^{-k}}$ 两两 $th\ e$

不相交。

证明。 注意，对于所有 $e, e' \in \mathcal{E}_{cyc}$满足 $e \neq e'$ 的情况，如果 $th(e) = th(e')$，那么 e, e' 不可比较。这是因为，如果 $e, e' \in \mathcal{E}_{cyc}$且 $e' \prec e$，那么根据厚度函数的定义， $th(e') \leq \frac{1}{2} th(e) < th(e)$。由此，结论可由不可比较性蕴含不相交引理（4.9）得出。□

4.3. **周长测度**。 设 $A \subseteq \mathrm{V}$ 为任意子集（允许 A 为无限集）。边界边集 是子集 $\partial A = \{e \in \mathcal{E} : |\{e^-, e^+\} \cap A| = 1\}$。 A 的周长测度 定义在每个子集 $E' \subseteq \mathcal{E}$ 上，形式如下：

$$\mathrm{Per}_A(E') := \sum_{e \in E' \cap \partial A} th(e) \in [0, \infty].$$

连同引理 4.12，下面的引理是关于发展过程的几何的两项最重要结果之一。这两个引理应被视为构成集合的 Sobolev 不等式（引理 4.14）的两个基本要素。

引理 4.11 (Mo notonicityofPerimeter)。 对于所有 $A \subseteq \mathrm{V}$、 $e \in \mathcal{E}$ 和 $n \geq 0$，我们有如下不等式 y

$$\mathrm{Per}_A(E^{(n+1)}_{\preceq e}) \geq \mathrm{Per}_A(E^{(n)}_{\preceq e}).$$

证明。 设 $A \subseteq \mathrm{V}$、 $e \in \mathcal{E}$ 和 $n \geq 0$。若 $E^{(n)}_{\preceq e} = \emptyset$ （当且仅当 e 直到发展过程的第 n 阶段之后才出现时，这种情况才会发生），则该不等式显然成立，因此我们可以假设 $E^{(n)}_{\preceq e} \neq \emptyset$。

我们将证明，对于所有的边 $e_{des} \in E^{(n)}_{\preceq e}$ （其中 des 表示“后代”），

$$\mathrm{Per}_A(E^{(n+1)}_{\preceq e_{des}}) \geq \mathrm{Per}_A(\{e_{des}\}). \tag{4.1}$$

在证明 (4.1) 之前，我们先来看它如何推出结论。假设 (4.1) 对每个$e_{des} \in E^{(n)}_{\preceq e}$ 都成立。由于集合 $E^{(n+1)}_{\preceq e}$ 是由集合族 $\{E^{(n+1)}_{\preceq e_{des}}\}_{e_{des} \in E^{(n)}_{\preceq e}}$ 构成的不交并（这可由定义直接看出），因此我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Per}_A(E^{(n+1)}_{\preceq e}) &= \sum_{e_{des} \in E^{(n)}_{\preceq e}} \mathrm{Per}_A(E^{(n+1)}_{\preceq e_{des}}) \\
&\overset{(4.1)}{\geq} \sum_{e_{des} \in E^{(n)}_{\preceq e}} \mathrm{Per}_A(\{e_{des}\}) \\
&= \mathrm{Per}_A(E^{(n)}_{\preceq e}),
\end{aligned}$$

这就是所需的不等式。现在我们来证明 (4.1)。

设 $e_{des} \in E^{(n)}_{\preceq e}$。有两种情况：(a) e_{des} 在阶段 $n+1$ 未被替换，即 $e_{des} \in E^{(n+1)}$；(b) e_{des} 在阶段 $n+1$ 被替换，即 $e_{des} \notin E^{(n+1)}$。在情况 (a) 中，我们有 $E^{(n+1)}_{\preceq e_{des}} = E^{(n)}_{\preceq e_{des}}$，因此 (4.1) 显然成立。

现在假设我们处于情况 (b)。那么，对于某个 st-图 H，有 $G^{(n+1)} = G^{(n)} \cup_{e_{des}} H$，并且

$$E^{(n+1)}_{\preceq e_{des}} = e_{des} \oslash E(H) \tag{4.2}$$

根据定义。需要考虑两种子情况：(i) $e_{des} \notin \partial A$；(ii) $e_{des} \in \partial A$。在情况 (i) 中，(4.1) 的右侧为 0，因此该不等式显然成立。

现在假设 (ii) $e_{des} \in \partial A$。那么，根据定义，

$$\mathrm{Per}_A(\{e_{des}\}) = th(e_{des}). \tag{4.3}$$

由命题 4.5(3)，由 $e_{des} \oslash V$（H）诱导的 $G^{(n+1)}$ 子图可自然地（作为有向图）与 H 等同。在此等同下，e^-_{des} 对应于 s_H，而 e^+_{des} 对应于 t_H。令 A_H 表示 V（H）中与 $A \cap$（$e_{des} \oslash V$（H））等同的子集。由于 $e_{des} \in \partial A$，因此 $|\{s_H, t_H\} \cap A_H| = 1$。于是，由命题 4.1(2)，

$$\sum_{e'' \in \partial_H A_H} th_H(e'') \geq 1. \tag{4.4}$$

于是我们得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{Per}_A(E^{(n+1)}_{\preceq e_{des}}) &\overset{(4.2)}{=} \mathrm{Per}_A(e_{des} \oslash E(H)) \\
&= \sum_{e' \in (e_{des} \oslash E(H)) \cap \partial A} th(e') \\
&\overset{\text{Prop 4.5(3)}}{=} \sum_{e'' \in \partial_H A_H} th(e_{des} \oslash e'') \\
&= \sum_{e'' \in \partial_H A_H} th(e_{des}) th_H(e'') \\
&\overset{(4.4)}{\geq} th(e_{des}) \\
&\overset{(4.3)}{=} \mathrm{Per}_A(\{e_{des}\}),
\end{aligned}$$

从而证明了 (4.1)。 □

对于任意子集 $A \subseteq \mathbb{V}$，我们将 A 的总周长 定义为以下数值：

$$\mathrm{Per}(A) := \sup_{n \geq 0} \mathrm{Per}_A(E^{(n)}) \in [0, \infty]. \tag{4.5}$$

4.4. 关于 st-图的索伯列夫不等式。 现在我们引入出现在索伯列夫不等式 (2.2) 左侧的测度。固定 $e \in \mathcal{E}_{cyc}$，并取满足以下条件的 $n \geq 0$：对于某个 st-环 H，有 $G^{(n+1)} = G^{(n)} \cup_e H$。那么，根据定义，存在两条从 s_H 到 t_H 的测地线 $\gamma_1, \gamma_2 \subseteq V$（$H$），使得 V（H）$= \gamma_1 \cup \gamma_2$，且 $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \{s_H, t_H\}$。对于每个 $i \in \{1, 2\}$，定义

$$ht_i(e) := \max_{u \in \gamma_i} \mathrm{dist}_H(u, \{s_H, t_H\}),$$

选择一个顶点 $u_i \in \gamma_i$，使得

$$\mathrm{dist}_H(u_i, \{s_H, t_H\}) = ht_i(e),$$

然后令

$$x_i(e) := e \oslash u_i \in V^{(n+1)}.$$

§4.2 中 st-圈的定义蕴含 $ht_i(e) > 0$ 对于 $i \in \{1, 2\}$。我们将 $\mu_e \in \mathrm{TC}(G^{(n+1)})$ 定义为符号测度

$$\mu_e := th(e)(\delta_{x_1(e)} - \delta_{x_2(e)}).$$

注意到 $|\mu_e(A)|$ 的唯一可能取值是 $th(e)$ 和 0，且当且仅当 $|\{x_1(e)\ x_2(e)\} \cap A| = 1$ 时，前一个值能够取到。

为今后使用，注意

$$d(e)ht_i(e) = \mathrm{dist}_H(x_i(e), \{e^-, e^+\}), \tag{4.6}$$

因此，定义 $ht(e) := ht_1(e) + ht_2(e)$，我们有

$$d(x_1(e), x_2(e)) \geq d(e)ht(e). \tag{4.7}$$

与引理 4.11 一起，下一个引理是导出集合的 Sobolev 不等式（引理 4.14）的另一个基本要素，而所借助的是同厚度 Sobolev 不等式（引理 4.13）。

引理 4.12. 对于每个 $A \subseteq \mathrm{V}$、每个 $e \in \mathcal{E}_{cyc}$ 和每个 $n \geq n_e$，都有如下不等式

$$|\mu_e(A)| \leq \mathrm{Per}_A(E^{(n)}_{\preceq e}).$$

证明。设 $A \subseteq \mathrm{V}$ 和 $e \in \mathcal{E}_{cyc}$。如果 $\mu_e(A) = 0$，那么该不等式显然成立。因此，我们可以假设 $\mu_e(A) \neq 0$，此时必有 $|\mu_e(A)| = th(e)$。对 n 使用归纳法。基例为 $n = n_e$。在此情形下，根据 n_e的定义，存在一个 st-圈H，使得 $G^{(n)} = G^{(n-1)} \cup_e H$ 且 $E^{(n)}_{\preceq e} = e \oslash E(H)$，并且 $\mu_e = th(e)(\delta_{x_1(e)} - \delta_{x_2(e)})$，其中$|\{x_1(e)\ x_2(e)\} \cap A| = 1$（因为 $\mu_e(A) \neq 0$）。st-圈 $e \oslash V(H)$ 是两条从$x_1(e)$到 $x_2(e)$ 的路径之并，它们的交集为 $\{x_1(e)\ x_2(e)\}$。其中一条路径沿着圈的一侧绕行并经过 e^-，另一条路径沿着圈的另一侧绕行并经过 e^+。由于 $|\{x_1(e)\ x_2(e)\} \cap A| = 1$，这两条边路径各自至少包含一条边属于 ∂A，分别记为 e_1 和 e_2。根据定义，$th(e_1) = th(e_2) = \frac{1}{2}th(e)$。因此，我们有

$$|\mu_e(A)| = th(e) = th(e_1) + th(e_2) \leq \mathrm{Per}_A(e \oslash E(H)) = \mathrm{Per}_A(E^{(n)}_{\preceq e}).$$

归纳步骤由周长单调性（引理 4.11）得出。 □

引理 4.13（同厚度 Sobolev 不等式）。对于所有 $k \geq 0$ 以及所有 $A \subseteq \mathrm{V}$，

$$\sum_{\substack{e \in \mathcal{E}_{cyc} \\ th(e) = 2^{-k}}} |\mu_e(A)| \leq \mathrm{Per}(A).$$

证明。由不相交后代引理 4.10、引理 4.12 及（4.5）得出。 □

引理 4.14（集合的 Sobolev 不等式）。对于所有 $A \subseteq \mathrm{V}$，

$$\sum_{k \geq 0} \left(\sum_{\substack{e \in \mathcal{E}_{cyc} \\ th(e) = 2^{-k}}} |\mu_e(A)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq (1 - 2^{-\frac{1}{2}})^{-1} \mathrm{Per}(A).$$

证明。令 $A \subseteq \mathrm{V}$。令 k_* 为 k 的最小值，使得存在 $e \in \mathcal{E}_{cyc}$ 满足 $th(e) = 2^{-k}$且 $\mu_e(A) \neq 0$。容易看出，对于任意 $e \in \mathcal{E}_{cyc}$，$|\mu_e(A)|$ 唯一可能的取值为 $th(e)$ 和 0。因此，根据同厚度 Sobolev 不等式（引理 4.13），必有

$$\mathrm{Per}(A) \geq 2^{-k_*}. \tag{4.8}$$

于是我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geq 0}\left(\sum_{\substack{e\in\mathcal{E}_{cyc}\\ th(e)=2^{-k}}}|\mu_e(A)|^2\right)^{\frac{1}{2}} &= \sum_{k\geq k_*}\left(\sum_{\substack{e\in\mathcal{E}_{cyc}\\ th(e)=2^{-k}}}|\mu_e(A)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \sum_{k\geq k_*}\left(\max_{\substack{e\in\mathcal{E}_{cyc}\\ th(e)=2^{-k}}}|\mu_e(A)|\sum_{\substack{e\in\mathcal{E}_{cyc}\\ th(e)=2^{-k}}}|\mu_e(A)|\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \sum_{k\geq k_*}2^{-k/2}\left(\sum_{\substack{e\in\mathcal{E}_{cyc}\\ th(e)=2^{-k}}}|\mu_e(A)|\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\overset{\text{Lem 4.13}}{\leq} \sum_{k\geq k_*}2^{-k/2}\operatorname{Per}(A)^{\frac{1}{2}}\\
&= (1-2^{-\frac{1}{2}})^{-1}2^{-k_*/2}\operatorname{Per}(A)^{\frac{1}{2}}\\
&\overset{(4.8)}{\leq} (1-2^{-\frac{1}{2}})^{-1}\operatorname{Per}(A).
\end{aligned}$$

□

对于 $n\geq 0$ 和 $f\colon\ V^{(n)}\to\mathbb{R}$，我们将 ∇f 定义为：$E^{(n)}\to\mathbb{R}$

$$\nabla f(e)=\frac{f(e^+)-f(e^-)}{d(e)}.$$

定理 4.15（索伯列夫不等式）。设 $E'\subseteq\mathcal{E}_{cyc}$ 是一个有限子集，且 $n\geq\max_{e\in E'}n_e$。那么对于所有 $f\colon\ V^{(n)}\to\mathbb{R}$,

$$\sum_{k\geq 0}\left(\sum_{\substack{e\in E'\\ th(e)=2^{-k}}}\left|\int f d\mu_e\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq(1-2^{-\frac{1}{2}})^{-1}\sum_{e\in E^{(n)}}th(e)d(e)|\nabla f(e)|.$$

证明。设 $A\subseteq V^{(n)}$。由定理 2.3，只需在假设 $f=1_A$的条件下证明该定理。显然，所需不等式中的所有量仅取决于图 $G^{(m)}$（其中 $m\leq n$）。因此，我们可以假设发展 $(G^{(m)})_{m\geq 0}$ 在第 n阶段后稳定，即对于所有 $m\geq n$，都有 $G^{(m)}=G^{(n)}$。在这种情况下，周长单调性（引理 4.11）和（4.5）推出

$$\operatorname{Per}(A)=\operatorname{Per}_A(E^{(n)}),$$

很容易看出

$$\operatorname{Per}_A(E^{(n)})=\sum_{e\in E^{(n)}}th(e)d(e)|\nabla 1_A(e)|.$$

考虑到这两点观察，我们看到该定理的结论正是集合的索伯列夫不等式（引理 4.14）。□

4.5. **带符号和的运输成本范数。**

定理 4.16. 设 $k \geq 0$、 E' 为 $\mathcal{E}_{cyc}$ 的有限子集，且对所有 $e \in E'$ 有 $th(e) = 2^{-k}$，并且 $n \geq \max_{e\in E'} n_e$。则对符号 $\{\varepsilon_e\}_{e\in E'} \subseteq \{-1, 1\}$ 的所有选取，我们有

$$\Big\| \sum_{e\in E'} \varepsilon_e \mu_e \Big\|_{\mathrm{TC}(G^{(n)})} \geq \sum_{e\in E'} th(e)d(e)ht(e).$$

证明. 设 $\{\varepsilon_e\}_{e\in E'} \subseteq \{-1, 1\}$。定义 $f\colon \{x_1(e)\ x_2(e)\}_{e\in E'} \to \mathbb{R}$ 为

$$f(x_1(e)) := \varepsilon_e d(e)ht_1(e),$$
$$f(x_2(e)) := -\varepsilon_e d(e)ht_2(e).$$

我们将看到 f 是 1-利普希茨的。设 $e, e' \in E'$ 满足 $e \neq e'$。设 $i, j \in \{1, 2\}$。由同厚度不可比性（引理 4.13）， e, e' 不可比。再由瓶颈引理（4.8）， $G^{(n)}$ 中每一条始于 $x_i(e)$、终于 $x_j(e')$ 的路径，必须先与 $\{e^-, e^+\}$ 有非空交集，然后再与 $\{(e')^-, (e')^+\}$ 有非空交集。这表明

$$\begin{aligned} d(x_i(e), x_j(e')) &\geq \mathrm{dist}(x_i(e), \{e^-, e^+\}) + \mathrm{dist}(x_j(e'), \{(e')^-, (e')^+\}) \\ &\overset{(4.6)}{=} d(e)ht_i(e) + d(e')ht_j(e') \\ &= |f(x_i(e))| + |f(x_j(e'))| \\ &\geq |f(x_i(e)) - f(x_j(e'))|. \end{aligned}$$

为断定 f 是 1-利普希茨的，只需注意到，由 (4.7)，有 $|f(x_1(e)) - f(x_2(e))| \leq d(x_1(e)\ x_2(e))$。我们利用著名的 McShane-Whitney 延拓定理，将 f 作为 1-利普希茨映射延拓到 $V^{(n)}$。延拓的选取并不重要，因为 f 绝不会作用于 $\{x_1(e)\ x_2(e)\}_{e\in E'}$ 之外的点。

利用 Kantorovich 对偶，我们通过以下估计完成证明

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{e\in E'} \varepsilon_e \mu_e \Big\|_{\mathrm{TC}(G^{(n)})} &\geq \sum_{e\in E'} \varepsilon_e \int f d\mu_e \\ &= \sum_{e\in E'} \varepsilon_e (\varepsilon_e d(e)ht_1(e)th(e) + \varepsilon_e d(e)ht_2(e)th(e)) \\ &= \sum_{e\in E'} th(e)d(e)(ht_1(e) + ht_2(e)) \\ &= \sum_{e\in E'} th(e)d(e)ht(e). \end{aligned}$$

□

4.6. $\mathrm{TC}(G^{(n)})$ **的** L_1**-畸变。**

定理 4.17 (L_1-畸变)。 设 $E' \subseteq \mathcal{E}_{cyc}$ 是一个有限子集，且 $n \geq \max_{e\in E'} n_e$。那么

$$c_1(\mathrm{TC}(G^{(n)})) \geq \frac{2-\sqrt{2}}{4} \sum_{e\in E'} th(e)d(e)ht(e).$$

证明。 与平面网格的证明类似，我们将验证对于适当的测度，**(C1)**-**(C2)** 成立，然后应用定理 2.1。对于 $k \in \{0, \dots n-1\}$，令 $E'(k)$ 表示由满足 $th(e) = 2^{-k}$ 的 $e \in E'$ 构成的 E' 的子集。对于满足 $E'(k) \neq \emptyset$ 的 $k \in \{0, \dots n-1\}$，选取一个子集 $E''(k) \subseteq E'(k)$，使得

(i) $|E''(k)|$ 是 2 的幂，且 (ii) $\sum_{e\in E''(k)} th(e)d(e)ht(e)$ $\geq \frac{1}{2}\sum_{e\in E'(k)} th(e)d(e)ht(e)$。 –

我们将验证测度 $\{\{\mu_e\}_{e\in E''(k)}\}_{k=0}^{n-1}$ 满足 **(C1)-(C2)** 。

由于 $|E''(k)|$ 是 2 的幂，我们可以通过西尔维斯特构造阿达马矩阵 [Hor07, § 2.1.1] （也称为沃尔什矩阵），找到一个函数正交系统 $\{\theta_i : E''(k) \to\{-1,1\}\}_{i\in E''(k)}$ 。由定理 4.16 和上文的 (ii)，该系统满足条件 **（C2）** 的不等式 (2.3)，其中 $\alpha_k = \frac{1}{2}\sum_{e\in E'(k)} th(e)d(e)ht(e)$。根据命题 4.1(1)，条件 **（C1）** 的等式 (2.1) 成立；根据定理 4.15，条件 **（C1）** 的不等式 (2.2) 在常数 $C \le (1-2^{-\frac{1}{2}})^{-1}$ 下成立。因此，由定理 2.1 可得

$$c_1(\mathrm{TC}(G^{(n)})) \ge (1-2^{-\frac{1}{2}})\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}\sum_{e\in E'(k)} th(e)d(e)ht(e) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}\sum_{e\in E'} th(e)d(e)ht(e). \qquad \square$$

4.7. 带手柄环的斜积幂。 对于 $n \ge 0$，斜积幂 $G^{\oslash n}$ 递归定义如下：

- $G^{\oslash 0}$ 是一个平凡的 st-路径。
- $G^{\oslash n+1} = G^{\oslash n} \oslash G$。

通过归纳法容易看出，

- $|E(G^{\oslash n})| = |E(G)|^n$ and
- $|V(G^{\oslash n})| = 2 + (|V(G)|-2)\frac{|E(G)|^n-1}{|E(G)|-1}$.

注意，存在一个常数 $C<\infty$ （取决于 G，但与 n 无关），使得对每个 $n\ge 0$，都有 $|V(G^{\oslash n})| \le C^n$ 。

每当 Pa 是一条 st-路径、$e_{rep}\in E(Pa)$ 是一条被替换的边，且 Cy 是一个 st-圈时，我们就称图 $H = Pa\cup_{e_{rep}} Cy$ 为 st-图的一个带手柄环。在本节余下部分，固定一个带手柄环 $H = Pa\cup_{e_{rep}} Cy$。设 G 为一个 st-图。我们称 $G\oslash Pa$ 为 G 的细分，并记作 G_{sub}。注意，若定义 $E_{rep}(G_{sub}) := \{e\oslash e_{rep}\}_{e\in E(G)} \subseteq E(G_{sub})$，则 $G\oslash H$ 等于受限的 $\oslash$ 乘积 $G_{sub}\oslash_{E_{rep}(G_{sub})} Cy$。此后，我们省略记号，写作 $G_{sub}\oslash_{rep} Cy$，而不写 $G_{sub}\oslash_{E_{rep}(G_{sub})} Cy$。显然，对每个 $n\ge 0$，都有 $G^{\oslash n+1} = (G^{\oslash n})_{sub}\oslash_{rep} Cy$。

例 4.18 （菱形图）。第一个菱形图 $D = Pa_D\cup_{e_{rep}} Cy_D$ 是一个带把手的环，其中 st-路径 Pa_D 是平凡的，而 st-环 Cy_D 是两条有向 st-路径的并集，每条路径都包含两条长度为 $\frac{1}{2}$ 的边。菱形图是序列 $\oslash$ 次幂 $\{D^{\oslash n}\}_{n\ge 0}$ 中的图。

例 4.19 （Laakso 图）。第一个 ***Laakso*** 图 $La = Pa_{La}\cup_{e_{rep}} Cy_{La}$ 是一个带把手的环，其中 st-路径 Pa_{La} 包含三条边——两条外侧边——一条包含 s_{La}，另一条包含 t_{La}；两者的长度均为 $\frac{1}{4}$，中间的边是 e_{rep}，长度为 $\frac{1}{2}$。st-环 Cy_{La} 等于 $\overline{Cy_D}$。***Laakso*** 图是序列 $\oslash$ 次幂 $\{La^{\oslash n}\}_{n\ge 0}$ 中的图。

设 γ_1，$\gamma_2 \subseteq V(Cy)$ 是从 s_{Cy} 到 t_{Cy} 的有向路径，且满足 $\gamma_1\cap\gamma_2 = \{s_{Cy}, t_{Cy}\}$。定义参数

$$d_{rep} := d_{Pa}(e_{rep}),$$
$$ht_{cyc} := \max_{u_1\in\gamma_1}\mathrm{dist}_{Cy}(u_1,\{s_{Cy},t_{Cy}\}) + \max_{u_2\in\gamma_2}\mathrm{dist}_{Cy}(u_2,\{s_{Cy},t_{Cy}\}).$$

定理 4.20 （L_1-畸变 TC(带柄环)。设 $H = Pa\cup_{e_{rep}} Cy$ 是一个带手柄环。使用上一段中的记号，我们有

$$c_1(\mathrm{TC}(H^{\oslash n})) \ge \frac{2-\sqrt{2}}{4} d_{rep} ht_{cyc}\cdot n$$

对于每个 $n\ge 0$。

证明。 由于受限的 $\oslash$ 积根据定义是通过迭代边替换构造的，而带把手的环根据定义是通过对初等图进行边替换构造的，因此存在一个初等发展 $(G^{(n)})_{n\geq 0}$ 以及两列递增且交错的整数序列 $0 = n_0 < n_0' < n_1 < n_1' < n_2 < n_2' < \dots$，使得对于所有 $m \geq 0$,

- $H^{\oslash m} = G^{(n_m)}$ 和
- $(H^{\oslash m})_{sub} = G_{(n'_{m+1})}$.

在本节前文已定义的基础上，我们在此处使用记号 $\mathcal{E}, \mathcal{E}_{cyc}$ 和 $th\colon \mathcal{E} \to [0,1]$, $d\colon \mathcal{E} \to [0,1]$, 以及 $ht\colon \mathcal{E}_{cyc} \to [0,1]$。回想一下， $E_{rep}((H^{\oslash m})_{sub}) = \{e \oslash e_{rep}\}_{e \in E(H^{\oslash m})} \subseteq E(H^{\oslash m} \oslash Pa)$。根据定义，以下事实可立即得出：

- $ht(e) = ht_{cyc}$ 对所有 $e \in \mathcal{E}_{cyc}$ 均成立。
- $E_{rep}((H^{\oslash m})_{sub}) \subseteq \mathcal{E}_{cyc}$ 对每个 $m \geq 0$ 均成立。
- $E_{rep}((H^{\oslash m_1})_{sub}) \cap E_{rep}((H^{\oslash m_2})_{sub}) = \emptyset$ 每当 $m_1 \neq m_2$。
- 对所有 $n - 1 \geq m \geq 0$ 和 $e' \in E_{rep}((H^{\oslash m})_{sub})$，成立 $\{x_1(e'), x_2(e')\} \subseteq V(H^{\oslash n})$。

因此，对任意 $n \geq 0$，这四项与定理 4.17 蕴含下界

$$\begin{aligned}
c_1(\mathrm{TC}(H^{\oslash n})) &\overset{\text{Thm 4.17}}{\geq} \frac{2-\sqrt{2}}{4} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{e' \in E_{rep}((H^{\oslash m})_{sub})} th(e') d(e') ht_{cyc} \\
&= \frac{2-\sqrt{2}}{4} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{e \in E(H^{\oslash m})} th(e \oslash e_{rep}) d(e \oslash e_{rep}) ht_{cyc} \\
&= \frac{2-\sqrt{2}}{4} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{e \in E(H^{\oslash m})} th(e) th_{Pa}(e_{rep}) d(e) d_{Pa}(e_{rep}) ht_{cyc} \\
&= \frac{2-\sqrt{2}}{4} d_{rep} ht_{cyc} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{e \in E(H^{\oslash m})} th(e) d(e) \\
&\overset{\text{Prop 4.1(1)}}{=} \frac{2-\sqrt{2}}{4} d_{rep} ht_{cyc} \sum_{m=0}^{n-1} 1 \\
&= \frac{2-\sqrt{2}}{4} d_{rep} ht_{cyc} \cdot n.
\end{aligned}$$

□

对于菱形图 D，我们有 $d_{rep} = ht_{cyc} = 1$，而对于 Laakso 图 La，我们有 $d_{rep} = \frac{1}{2}$ 和 $ht_{cyc} = 1$。因此，我们得到定理 4.20 的如下推论。

推论 4.21 （TC（菱形图）与 TC（Laakso 图）的 L_1-畸变）。 对每一个 $n \geq 0$,

$$c_1(\mathrm{TC}(D^{\oslash n})) \geq \frac{2-\sqrt{2}}{4} n,$$
$$c_1(\mathrm{TC}(La^{\oslash n})) \geq \frac{2-\sqrt{2}}{8} n.$$

现在我们来介绍第二个主要结果：

定理 1.2 (L_1-畸变的运输成本 $\mathrm{TC}(G^{\oslash n})$). 设 G 是任意一个非 st-路径的 st-图，且至少有三个顶点。那么存在一个常数 $C < \infty$ （取决于 G 但不取决于 n），使得 $c_1(\mathrm{TC}(G^{\oslash n})) \geq C^{-1}$ 对数 $|V(G^{\oslash n})|$ 对每个 $n \geq 0$ 都成立。

证明。 如果 G 等距包含一个 st-图 H，且该图是带手柄环，那么这个结果便是定理 4.20 的直接推论，因为此时包含关系 $V(H^{\oslash n}) \subseteq V(G^{\oslash n})$

对每个 $n \geq 0$ 都是等距的。通过在 G 中选取一个最短环并在其上连接两个把手，可以找到这样的子图 H。这并未解决问题，除非该环的一“侧”是一条边。在这种情况下，我们考虑 $G^{\oslash 2}$。它包含子图 H 的一个细分，该子图可等距嵌入 $G^{\oslash 2}$。□

5. Reduction to Linear Maps

本节旨在为有限度量空间 X 证明引言 §1 中所述的等式。回顾一下，(1.3) 表明 (1.3)

$$c_1(\mathrm{EMD}(X)) = c_1(\mathrm{TC}(X)) = c_{1,\mathrm{lin}}(\mathrm{TC}(X)),$$

其中$c_{1,\ \mathrm{lin}}$(TC(X)) 表示在所有 $m \in \mathbb{N}$ 以及所有 线性 嵌入f : TC(X) $\to \ell_1^m$ 中的最小畸变。

该证明本质上源自 Naor 和 Schechtman [NS07, 引理3。1], 不过，他们只针对一个特殊情形给出了该结论。

首先，我们注意到以下不等式

$$c_1(\mathrm{EMD}(X)) \leq c_1(\mathrm{TC}(X)) \leq c_{1,\mathrm{lin}}(\mathrm{TC}(X))$$

是显然的。只需证明对每个 $\varepsilon > 0$ 我们有

$$c_{1,\mathrm{lin}}(\mathrm{TC}(X)) \leq c_1(\mathrm{EMD}(X)) + \varepsilon$$

我们用 B_V表示Banach空间 V 的单位球。

设 $\varepsilon > 0$，并设 F : EMD(X) $\to L_1$ 是到某个 L_1-空间的非收缩嵌入，满足 $||F(\mu) - F(\nu)||_{L_1} \leq D\,$EMD($\mu, \nu$), 其中 $D < c_1$(EMD(X)) $+ \frac{\varepsilon}{3}$。我们利用该嵌入构造 $B_{\mathrm{TC}(X)}$ 到该 L_1-空间的具有相同畸变的线性嵌入。

用 r 表示 X 中元素之间的最小距离，并设 $n = |X|$。则公式

$$g(\mu) = \frac{r}{n}\mu + u_X \tag{5.1}$$

定义了一个映射 g： $B_{\mathrm{TC}(X)} \to$ EMD(X)，其中 u_X 是 X上的均匀概率测度。注意，任何范数为 ≤ 1 的测度 $\mu \in$ TC(X)都不能给任何点质量赋予超过 r^{-1}的质量，因为在任何运输方案中，该点处的质量必须被运输至少 r 的距离。另一方面， u_X 给每个点赋予质量 $\frac{1}{n}$。因此， $g(\mu)$确实是 X上的概率测度。

此外，很容易看出

$$\mathrm{EMD}(g(\mu), g(\nu)) = \frac{r}{n}\|\mu - \nu\|_{\mathrm{TC}}.$$

因此， H： $B_{\mathrm{TC}(X)} \to L_1$ 定义为 $H = \frac{n}{r} \cdot F \circ g$ 是一个非压缩映射，且 $\|H\tau - H\sigma\|_{L_1} \leq D\|\tau - \sigma\|_{\mathrm{TC}}$。

我们现在使用 Bourgain 离散化定理的以下特殊情形（完整陈述和证明见 [Bou87], [GNS12], 和 [Ost13, 第 9] 章）。

定理 5.1 ([GNS12, 定理 1。3]). 对于每个 $\beta > 0$ 以及每个有限维巴拿赫空间 V，都存在 $\delta > 0$，使得对于 B_V中的所有 δ-网 N_δ，都存在一个将 V 线性同构嵌入到某个 L_1-空间中的映射，其畸变至多为 $c_1(N_\delta) + \beta$。

对映射 H 的估计表明，对于每个 $\delta > 0$ 和 δ-网 $N_\delta \subseteq B_{\mathrm{TC}(X)}$， c_1(N_δ) $\leq D$。因此，应用定理 5.1，我们得到 TC(X) 线性同构嵌入到一个畸变为 $\leq D + \frac{\varepsilon}{3}$的 L_1空间中。接着， [BL00，定理 F.2(i)] 表明，存在某个 $m \in \mathbb{N}$，使得 TC(X) 线性同构嵌入到 ℓ_1^m中，畸变为 $\leq D + \frac{2\varepsilon}{3}$。由此我们得出$c_{1,\ \mathrm{lin}}$(TC($X$)) $\leq D + \frac{2\varepsilon}{3} < c_1$(EMD($X$)) $+ \varepsilon$，证明完毕。

回顾一下， M_2^s 是 EMD($\mathbb{R}^2$) 的子集，由 $\mathbb{R}^2$的 s点子集上的均匀分布组成。

定理 5.2. $c_1(M_2^s) = \Omega(\log\ s)$.

证明. 令 G_n 表示具有单位边长的 $n \times n$ 网格图。我们将 G_n 视为具有 ℓ_1-度量的 $\mathbb{Z}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ 的子集。令 $\tilde{M}_2^s$ 表示 EMD(G_n) $\subseteq$ EMD($\mathbb{R}^2$) 的子集，其中包含满足 $\mu(\{x\}) \in (\frac{1}{s}\mathbb{Z}) \cap [0,1]$（对所有 $x \in G_n$均成立）的概率测度 μ。容易看出，$\bar{M}_2^s$在 EMD($\mathbb{R}^2$) 中的闭包包含 $\tilde{M}_2^s$，因此 $c_1(M_2^s) \geq c_1(\tilde{M}_2^s)$。事实上，令 $\mu \in \tilde{M}_2^s$并令 $\varepsilon > 0$。假设 μ支撑在点 $x_1 \dots x_k \in G_n$上。对于每个 $x_i \in \{x_1 \dots x_k\}$，令 $m_i \in \mathbb{Z} \cap [1,s]$满足$\mu(\{x_i\}) = \frac{m_i}{s}$。对于每个 $x_i \in \{x_1 \dots x_k\}$，选择 x_i 的"卫星"点$y_i^1, \dots y_i^{m_i} \in \mathbb{R}^2$，使得

- the collection $\{y_i^j\}_{i=1,j=1}^{k,m_i}$ is distinct and
- $\|x_i - y_i^j\| < \varepsilon$ for all $i \leq k$ and all $j \leq m_i$.

那么不难看出，集合 $\{y_i^j\}_{i=1,j=1}^{k,m_i}$ 的基数为 s，且该集合上的均匀分布与 μ的EMD距离至多为 ε。

同样不难看出， $\tilde{M}_2^s$ 在 EMD(G_n) 中是 $\frac{2n^3}{s}$-稠密的。事实上，给定 $\mu \in$ EMD(G_n)，将每个值 $\mu(\{x\})$ 向上取整为 $(\frac{1}{s}\mathbb{Z}) \cap [0,1]$ 中距离最近的数 $\mu_1(\{x\})$，即可得到 μ_1。在 n^2 个点中的任一点处， μ的值变化至多为 $\frac{1}{s}$。然而，通常我们向上取整得过多，以至于 μ_1 不是概率测度。我们知道 $\mu_1(G_n) \in (\frac{1}{s}\mathbb{Z}) \cap [1, 1 + \frac{n^2}{s}]$，因此余项 $R = \mu_1(G_n) - 1$属于 $(\frac{1}{s}\mathbb{Z}) \cap [0, \frac{n^2}{s}]$，这意味着 $sR \in \mathbb{Z} \cap [0, n^2]$。任取 sR个点的集合 $x_1 \dots x_{sR} \in G_n$，并定义 μ_2，使得对于$x \in \{x_1, \dots x_{sR}\}$ 有 $\mu_2(\{x\}) = \mu_1(\{x\}) - \frac{1}{s}$，而对于 $x \notin \{x_1, \dots x_{sR}\}$有 $\mu_2(\{x\}) = \mu_1(\{x\})$。于是我们得到

- μ_2取值于 $(\frac{1}{s}\mathbb{Z}) \cap [0,1]$,
- μ_2 是一个概率测度，并且
- $|\mu(\{x\}) - \mu_2(\{x\})| \leq \frac{1}{s}$对任意 $x \in G_n$。

这意味着 $\mu_2 \in \tilde{M}_2^s$ 和 $\|\mu - \mu_2\|_{\mathrm{TV}} \leq \frac{n^2}{s}$。接着，我们利用估计 $\|\mu - \mu_2\|_{\mathrm{TC}} \leq \mathrm{diam}(G_n)\|\mu - \mu_s\|_{\mathrm{TV}} \leq 2n\frac{n^2}{s}$，得出 $\frac{2n^3}{s}$-稠密度。

令 N_δ 为$B_{\mathrm{TC}(G_n)}$ 的一个极大 δ-分离子集，其中 $\delta > 0$ 稍后选定。根据公式 (5.1)，存在一个缩放等距嵌入 $g : B_{\mathrm{TC}(G_n)} \hookrightarrow$ EMD(G_n)，其缩放因子为 $\frac{1}{n^2}$。因此， $g(N_\delta)$ 是 $g(B_{\mathrm{TC}(G_n)})$ 的一个极天 $\frac{\delta}{n^2}$-分离子集。令 $\pi\colon g(N_\delta) \to \tilde{M}_2^s$为一个最近邻投影。由于 $\tilde{M}_2^s$在 EMD(G_n) 中是 $\frac{2n^3}{s}$-稠密的，且 $g(N_\delta)$ 是 $\frac{\delta}{n^2}$-分离的，若假设 $\frac{2n^3}{s} \leq \frac{1}{3}\frac{\delta}{n^2}$，那么 π 将是一个 6-双 Lipschitz 嵌入。为此，我们取 $\delta = \frac{6n^5}{s}$，从而得到 $c_1(\tilde{M}_2^s) \geq \frac{1}{6}c_1(g(N_\delta)) = \frac{1}{6}c_1(N_\delta)$。根据 [GNS12 的推论 1.4]，若$\frac{6n^5}{s} = \delta = O(\frac{1}{n^5})$，则有 $c_1(N_\delta) \geq \frac{1}{2}c_1(\mathrm{TC}(G_n))$，根据定理 1.1，该值等于 $\Omega(\log\ n)$。换言之，若 $s = \Omega(n^{10})$，则 $c_1(N_\delta) = \Omega(\log n)$。总之，若 $s = \Omega(n^{10})$，则

$$c_1(M_2^s) \geq c_1(\tilde{M}_2^s) \geq \frac{1}{6}c_1(g(N_\delta)) = \frac{1}{6}c_1(N_\delta) = \Omega(\log n).$$

这意味着 $c_1(M_2^s) = \Omega(\log\ s)$。 □

6. Acknowledgments

本次合作始于2024年7月在德克萨斯农工大学举办的分析与概率研讨会。我们谨向研讨会组织者致谢，并感谢美国国家科学基金会通过资助项目 DMS-1900844 提供支持。

References

[AIK08] A. Andoni, P. Indyk, R. Krauthgamer. 高维空间中的地球移动距离。载于第19届 ACM-SIAM 离散算法研讨会论文集，第343–352页，2008年。[BI14] A. Baˇckurs, P. Indyk，稀疏集上平面地球移动距离的更优嵌入。计算几何（SoCG'14），280–289页，ACM，纽约，2014年。[Bar96] Y. Bartal，度量空间的概率近似及其算法应用，载于：第37届计算机科学基础年会（佛蒙特州伯灵顿，1996年），184–193页，IEEE 计算机学会出版社，加利福尼亚州洛斯阿拉米托斯，1996年。[BGS23] F. Baudier, C. Gartland, Th. Schlumprecht. Wasserstein 度量嵌入 L_1 的 L_1-畸变：两个维度的故事。《美国数学会汇刊》B辑 10（2023），1077–1118页。[BL00] Y. Benyamini, J. Lindenstrauss，《几何非线性泛函分析》。第1卷。美国数学会学术丛书第48卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2000年。[BO79] A. N. Berker, S. Ostlund，有限系统的重整化群计算：外延有序的序参量与比热，《物理学杂志 C：固体物理学》，12（1979），4961–4976页。[BM08] J. A. Bondy, U. S. R. Murty，《图论》。数学研究生教材第244卷。Springer，纽约，2008年。[Bou87] J. Bourgain，关于定义在离散集上的 Lipschitz 映射的延拓及一致同胚的评述。载于：《泛函分析的几何方面》（1985/86），157–167页，数学讲义第1267卷，Springer，柏林，1987年。[BC05] B. Brinkman, M. Charikar，关于在 ℓ_1 中无法实现降维的问题，《ACM 会刊》，52（2005），第5期，766–788页。[Cha02] M. Charikar. 舍入算法中的相似度估计技术。载于第34届 ACM 计算理论研讨会论文集，第380–388页，2002年。[CJLW22] X. Chen, R. Jayaram, A. Levi, E. Waingarten. 面向高维 EMD 和最小生成树的新型流式算法。载于第54届 ACM 计算理论研讨会论文集，第222–233页，2022年。[CK13] J. Cheeger, B. Kleiner，度量空间作为逆极限的实现及在 L_1 中的双 Lipschitz 嵌入，《几何与泛函分析》，23（2013），96–133页。[DKO20] S. J. Dilworth, D. Kutzarova, M. I. Ostrovskii，有限度量空间上的 Lipschitz 自由空间，《加拿大数学杂志》，72（2020），774–804页。[DKO21] S. J. Dilworth, D. Kutzarova, M. I. Ostrovskii，Laakso 图上的分析及其在运输成本空间结构研究中的应用。《Positivity》25（2021），第4期，1403–1435页。[FRT04] J. Fakcharoenphol, S. Rao, K. Talwar，用树度量逼近任意度量的紧界，《计算机与系统科学杂志》，69（2004），第3期，485–497页。[GNS12] O. Giladi, A. Naor, G. Schechtman，Bourgain 离散化定理，《图卢兹数学系年刊》，第XXI卷（2012），第4期，817–837页。[GNRS04]A. Gupta, I. Newman, Y. Rabinovich, A. Sinclair，图的割、树与 ℓ_1-嵌入，《Combinatorica》，24（2004），233–269页。[Hor07] K. J. Horadam，《阿达马矩阵及其应用》。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，2007年。[IW91] M. Imase, B. M. Waxman，动态 Steiner 树问题。《SIAM 离散数学杂志》4（1991），第3期，369–384页。[IT03] P. Indyk, N. Thaper，通过嵌入实现快速图像检索，载于：ICCV 03：第三届视觉统计与计算理论国际研讨会论文集，2003年。[JWZ24] R. Jayaram, E. Waingarten, T. Zhang. 针对地球搬运工距离的数据依赖型 LSH。载于第56届 ACM 计算理论研讨会论文集，第800–811页，2024年。[JS09] W. B. Johnson, G. Schechtman，菱形图与超自反性，《拓扑分析杂志》，1（2009），第2期，177–189页。[Kan42] L. V. Kantorovich，论质量运输（俄文），《苏联科学院通报》，（新辑）37（1942），199–201页。

[KG49] L. V. Kantorovich, M. K. Gavurin, 《数学方法在货物流分析中的应用》（俄文），载于：《提高运输效率问题》，苏联科学院出版社，莫斯科，1949年，第110–138页。[KG81] M. Kaufman, R. B. Griffiths, 《分层格上的可精确求解伊辛模型》，Phys. Rev. B 24, 496-498[KN06] S. Khot, A. Naor, 《通过傅里叶分析证明不可嵌入定理》，Math. Ann., 334 (2006), 821–852.[Kis75] S. V. Kislyakov, 《索伯列夫嵌入算子与某些巴拿赫空间的非同构性》，Funct. Anal. Appl. 9 (1975), 290–294.[KT02] J. Kleinberg, ´E. Tardos, 《具有成对关系的分类问题的近似算法：度量标记与马尔可夫随机场》，J. ACM 49 (2002), no. 5, 616–639.[Laa02] T. J. Laakso, 《具有 A_∞ 加权度量的平面不可双 Lipschitz 嵌入到 $\mathbb{R}^N$》，《伦敦数学会通报》34 (2002), no. 6, 667–676.[LP01] U. Lang, C. Plaut, 《度量空间到空间形式中的双 Lipschitz 嵌入》，Geom. Dedicata, 87 (2001), 285–307.[LN04] J. R. Lee, A. Naor, 《将菱形图嵌入 L_p 以及 L_1 中的降维》，Geom. Funct. Anal. 14 (2004), no. 4, 745–747.[LR10] J. R. Lee, P. Raghavendra, 《平面图中的粗微分与多重流》，Discrete Com- put. Geom. 43 (2010), no. 2, 346–362.[MN11] J. Matou˘sek（编者），自2010年6月起与 A. Naor 共同维护，《有限度量空间嵌入的未解问题》，最后更新于2011年8月，网址：http://kam.mff. cuni.cz/~matousek/.[NPS20] A. Naor, G. Pisier, G. Schechtman, 《核范数中的降维不可能性》，Discrete Comput. Geom. 63 (2020), no. 2, 319–345.[NS07] A. Naor, G. Schechtman, 《平面地球搬运者距离不属于 L_1》，SIAM J. Computing, 37 (2007), 804–826.[NY22] A. Naor, R. Young, 《叶状电晕分解》，Acta Math. 229 (2022), no. 1, 55–200.[NR03] I. Newman, Y. Rabinovich, 《将平面度量嵌入欧几里得空间的畸变下界》，Discrete Comput. Geom. 29 (2003), no. 1, 77–81.[Ost05] M. I. Ostrovskii, 《图上的索伯列夫空间》，Quaestiones Mathematicae, 28 (2005), 501–523.[Ost13] M. I. Ostrovskii, 《度量嵌入：到巴拿赫空间中的双 Lipschitz 嵌入与粗嵌入》，德格鲁伊特数学研究丛书，第49卷。Walter de Gruyter & Co.，柏林，2013年。[OR17] M. I. Ostrovskii, B. Randrianantoanina, 《将有限度量空间低畸变嵌入非超反射巴拿赫空间的新方法》，J. Funct. Anal. 273 (2017), no. 2, 598–651.[RTG98] Y. Rubner, C. Tomasi, L. J. Guibas, 《一种用于分布的度量及其在图像数据库中的应用》，载于第六届国际计算机视觉会议论文集，第59–66页，1998年。[RTG00] Y. Rubner, C. Tomasi, L. J. Guibas, 《作为图像检索度量的地球搬运工距离》，International journal of computer vision, 40:99–121, 2000.[Ser03] Jean-Pierre Serre, 《树》。John Stillwell 从法文原版译出。1980年英文译本的修订版第2次印刷。施普林格数学专著。Springer-Verlag，柏林，2003年。[Vil09] C. Villani, 《最优传输：旧与新》。Grundlehren der mathematischen Wissenschaften，第338卷，Springer，2008年。

Department of Mathematics and Statistics, University of North Carolina at Charlotte, University City Blvd, Charlotte, NC 28223, U.S.A.

Department of Mathematics, St. John's University, New York, NY, USA