arXiv:2602.14902v1 [math.RT] 16 Feb 2026

伽罗瓦自同构与覆盖幺正块的块

L. RUHSTORFER 和 A. A. SCHAEFFER FRY

Abstract. 本文证明了 Lyons–Martínez–Navarro–Tiep 最近提出的一项条件。该条件涉及主块中特征标扩张的值域。我们证明这项条件对所有有限单群都成立；结合他们的结果，便得到有限群具有关于素数 ℓ 的正规 ℓ 补群的一种新刻画。这促使我们研究不连通约化群的幺正块中特征标的分布，并证明在 d-Harish-Chandra 理论的一种推广下，这种分布表现良好。随后，我们研究几乎（拟）单群中覆盖幺正块的块所满足的逐块伽罗瓦–McKay（亦称 Alperin–McKay–Navarro）猜想。

关键词与短语： 伽罗瓦作用、特征扩张、主块、李型群、幺正块、不连通群

1. Introduction

有限群表示论中的许多有趣问题，旨在将群结构的信息与可从特征标表中获得的信息联系起来。尤其是，该领域近来的若干问题要求深入理解几乎单群的特征标值域。

在 [NT10], 中，Navarro and Tiep 用 G的有理值不可约特征标给出了群具有正规 2-补群的充要条件。他们还针对奇素数给出了相应的充分条件。在 [LMNT], 中，Lyons–Martínez–Navarro–Tiep 最近研究了这些结果在主块中的类似结论。事实上，他们发现，若将讨论限定于主块，那么关于奇素数的结论应当可以改进为充要条件。本文的第一个主要目标就是完成这一结论的证明。

记 $\mathbb{Q}_n$ 为分圆域 $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/n})$；给定素数 ℓ，记 $B_0(G)$为 G的主 ℓ-块。我们完成了对 [LMNT]中所讨论的下述问题的证明：

定理 A. 设 ℓ 为任意奇素数， G 为阶可被 ℓ整除的有限群。那么，对于所有非线性 $\mathbb{Q}_\ell$值 $\chi \in$ 不可约特征标$(B_0(G))$ ， ℓ 整除 $\chi(1)$ 当且仅当 G 有正规 ℓ补群。

正如 [LMNT], 引言最后一段所述，这也对主块给出了 [LMNT, Conj. F] 。回顾一下，如果一个块 B 的所有高度零特征标具有相同的次数，则称该块为幂零块；对于主块而言，这等价于 G

第二位作者获得了美国国家科学基金会 CAREER 资助（项目编号 DMS-2439897）的部分支持。本研究的部分内容是在德国研究基金会资助的研究生培训组 GRK 2240“代数、算术与拓扑中的代数几何方法”框架下完成的。

具有正规 ℓ-补。我们还回顾一下，几乎 ℓ-有理特征标是指其取值属于 $\mathbb{Q}_{\ell m}$，其中某个 m 与 ℓ 互素。于是定理 A 给出：

推论 B. 主 ℓ块 $B_0(G)$ 是幂零的，当且仅当其所有高度为零的几乎ℓ有理特征标都是线性特征标。（也就是说，*[LMNT, 猜想 F]* 对主块成立。）

我们指出，定理 A 的陈述对 $\ell = 2$也成立，且见 [LMNT, 定理 D]。此外，定理 A 可归约为关于单群的问题，见 [LMNT, 定理 E]。因此，我们对定理 A 的证明需要研究 [LMNT] 中关于单群的一个可扩张性条件（见下文定义 2.1），这是 [NT10]中某个条件的主块版本。也就是说，我们研究 [LMNT]引言中提到的“向上”问题。在 [LMNT], 中，已对非阿贝尔单群证明了这一条件：这些群不是李型群，或者是定义特征为 $p = \ell$的李型群。因此，本文聚焦于非定义特征下的李型群 $p \neq \ell$。

在处理下文定义 2.1 时，一个关键要求是能够确定同时保持所需有理性性质并位于指定块（此处为主块）中的特征扩张，这是一个看似简单实则困难的问题。虽然李型群 G 主块中特征标的有理性及其在 ℓ-块中的分布已有一定程度的了解，但对于以 G 为正规子群的几乎（拟）单群$\hat{}G$，情况则并非如此。在此我们发展新的工具（并改造已有工具）来处理这一问题。我们指出，尽管（截至本文撰写之时）Alperin–McKay–Navarro 猜想 [Na04, Conj. B]尚未被归结为关于单群的条件，但这一问题对于今后处理任何此类条件也将至关重要。

我们首先研究位于 G的主 ℓ-块中的半单特征标。我们证明这些特征标具有再次位于主块中的扩张。朝向这一目标的关键一步如下，它加强了 Digne–Michel 在 [DM94] 中引入的广义 Alvis–Curtis 对偶（相关记号请读者参见第 3 节）：

定理 C。 设 E 是 *BN*-对 (G, B, N, S) 的一群自同构。那么，G-G-双模的复形 $D_{(G)}$ 可扩张为 $(G \times G^{\mathrm{opp}})\Delta E$-模的复形。特别地，若$\ell \nmid |E|$，则诱导复形 诱导$^{GE\times(GE)^{\mathrm{opp}}}_{(G\times G^{\mathrm{opp}})\Delta E}(D_{(G)})$ 在 ΛGE 与其自身之间诱导一个辉煌导出等价。

然而，在少数情况下，平凡特征可能是唯一满足定义 2.1 条件的半单特征标。在这些剩余情况下，我们转而考虑该块中的幺幂特征标。最近，G 中覆盖 G 的幺幂特征标的值域已由 [RSST25], 确定，但尚不清楚这些覆盖特征标属于哪些块。我们在此研究这个问题，并借此证明，在剩余情况下，$(\mathbb{Q}_\ell, \ell)$ 满足定义 2.1 的条件 $(\star)$。（还值得注意的是，在某些情况下，不能使用预期的幺幂特征标，见例 8.11；在这些情况下，如上所述，必须使用半单特征标。）

事实上，这使我们得以得到一个更强的结论，也引出了本文的第二个主要目标。由 [CE94], 可知，若 ℓ 是满足某些额外合理假设的奇素数，则有限约化群 G的幺幂特征标属于同一个 ℓ-块b，当且仅当它们属于同一个 d-Harish-Chandra 级数，其中 d 是 q 模ℓ的阶。我们证明，在非连通约化群的背景下也能得到类似的结论（相关记号请参见第 7 节）：

定理 *D.* 假设 ℓ 是满足定义 *7.7* 中关于 *G* 的条件的素数，$[G, G]$ 是单连通的，且$\hat{}G/G$是阶为 $\{p, \ell\}'$的循环群。若$(L\ \lambda)$是$(G\ F)$的一个 d-尖点幺幂对，它定义了G^F的一个 ℓ-块 $b = b_G(L\ \lambda)$，并且$\hat{}G^F[b] = \hat{}G^F$，那么存在$\hat{}G$的一个 *Levi* 子群$\hat{}L$，使得$C\ \hat{}G^F(Z(L)^F_\ell) = \hat{}L^F$。此外，存在一个双射

$$\mathrm{Irr}(\hat{\mathbf{L}}^F \mid \lambda) \to \mathrm{Bl}(\hat{\mathbf{G}}^F \mid b)$$

由.....给出

$$\hat{\lambda} \mapsto b_{\hat{\mathbf{G}}^F}(\hat{\mathbf{L}}, \hat{\lambda})$$

使得

(1) $\mathcal{E}(\hat{\mathbf{G}}^F, 1) \cap \mathrm{Irr}(\hat{\mathbf{G}}^F, b_{\hat{\mathbf{G}}^F}(\hat{\mathbf{L}}, \hat{\lambda})) = \{\hat{\chi} \in \mathrm{Irr}(\hat{G}) \mid \langle R^{\hat{\mathbf{G}}}_{\hat{\mathbf{L}} \subset \hat{\mathbf{P}}}(\hat{\lambda}), \hat{\chi}\rangle \neq 0\}$ *and*

(2) $(1, b_{\hat{\mathbf{G}}^F}(\hat{\mathbf{L}}, \hat{\lambda})) \leq (\mathrm{Z}(\mathbf{L})^F_\ell, b_{\hat{\mathbf{L}}^F}(\hat{\lambda}))$.

我们预计定理 D 本身也可能具有独立的研究价值。尤其是，它可能对归纳 Alperin–McKay 条件，或最终对 Alperin–McKay–Navarro 猜想的类似条件产生影响。回顾一下，Alperin–McKay 猜想断言，存在 ℓ-块 b of G 中的高度零特征标与其在 $\mathrm{N}_G(D)$ 中对应的 Brauer 块中的高度零特征标之间的一个双射，其中 D 是 b的一个亏群。Alperin–McKay–Navarro 猜想进一步断言，可以选择这样的双射使其具有 $\mathcal{H}$-等变性，其中$\mathcal{H} \leq \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}/\mathbb{Q}) =: \mathcal{G}$ 是由满足以下条件的那些 $\sigma \in \mathcal{G}$ 构成的子群：存在某个 $e \geq 0$，使得 σ 在所有 ℓ'次单位根上都作用为 ℓ^e-次幂映射。

我们在第 8 节初步探讨定理 D 在 Alperin–McKay–Navarro 猜想中的应用，并证明如下结果：

定理 E. 设$\mathbf{G}$ 为经典型的单连通单群，但不属于D_4, 型；设ℓ 为不整除 $|\mathrm{Z}(G)|$的奇素数，其中 $G = \mathbf{G}^F$，且 F 是一个 *Frobenius* 映射，它在 $\mathbb{F}_q$上定义 G。设$(\mathbf{L}\ \lambda)$ 是 G的一个幺正 d-尖点对，其中 d 是 q 模 ℓ的阶。那么存在一个保块的、 $\mathcal{H}$-等变双射

$$\mathrm{Irr}_0(GE \mid \mathcal{E}(G, (\mathbf{L}, \lambda))) \to \mathrm{Irr}_0(N_{GE}(\mathbf{L}) \mid \lambda),$$

where $E := E(\mathbf{G}^F)$ 是 *[CS25,* 第 *2.C* 节中所述的域自同构与图自同构群 *].*

定理 E 是 [RSST25, 定理 8.8], 的分块类似。我们预计它将引出 [RSST25, 定理 D] 的类似结果，从而证明 Alperin–McKay–Navarro 猜想可能的未来归纳条件中幺正块所需的扩张结论。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍 [LMNT] 中的条件，并讨论有关主块和扩张的一些预备知识。第 3 节证明定理 C，并讨论广义 Alvis–Curtis 对偶；我们在第 4 节中利用它研究主块中的正则特征标和半单特征标，并引入广义斯坦伯格特征标，随后在第 5 节进一步研究该特征标。定理 A 的证明见第 6 节。第 7 节研究非连通约化群的块，并证明定理 D。最后，第 8 节探讨对 Alperin–McKay–Navarro 猜想的推论，并证明定理 E。

2. Preliminaries

我们对块和特征标所用的大部分记号是标准的。我们请读者参阅[Isa76,Na18] 以了解普通特征标理论的相关背景，并参阅 [Na98] 以了解块理论的相关记号与背景。对于一个群 X 作用于特征标

有限群 G 的不可约特征标(G)，我们将用 X_θ 表示 $\theta \in$不可约特征标(G) 在 X 中的稳定子。若 $X \leq G$，我们将分别用限制$\mathrm{Res}_X^G(\theta)$ 和诱导$\mathrm{Ind}_X^G(\chi)$ 表示特征标 $\theta \in$ 不可约特征标(G) 到X 的限制，以及 $\chi \in$ 不可约特征标(X) 到 G 的诱导特征标。

2.1. **Lyons–Martínez–Navarro–Tiep 的条件**。 此处回顾 [LMNT] 中定理 A 的归约陈述。它要求单群满足以下条件。

定义 2.1 （ [LMNT] 的定义 3.1）。 设 $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K}$ 为一个域。假设 S 是一个阶可被 ℓ整除的非阿贝尔单群。那么，如果存在一个 Aut(S)-轨道 $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Irr}(B_0(S))$，使得.....，我们称 S 满足关于 $(\mathbb{K}, \ell)$ 的条件（$\star$）。

(1) $|\mathcal{X}|$ 不能被 ℓ整除；(2) $\mathcal{X}$ 中的特征标均为非线性，次数不能被 ℓ整除，且取值于 $\mathbb{K}$；ˆ (3) 每个 $\theta \in \mathcal{X}$ 都可扩张为 $B_0(\mathrm{Aut}(S)_\theta)$ 中一个取值于 $\mathbb{K}$ 的特征标 θ 。

由此，下述结果将定理 A 归结为关于单群的问题。

定理 2.2 （定理 E，出自 [LMNT]）。 设 ℓ 为任意奇素数，并假设每一个阶可被 ℓ整除的有限非阿贝尔单群，对于$(\mathbb{Q}_\ell, \ell)$，都满足定义 *2.1* 的条件($\star$)。则对给定的有限群 G， ℓ 整除所有非线性的、取 $\mathbb{Q}_\ell$ 值的 $\chi \in \mathrm{Irr}(B_0(G))$的 $\chi(1)$ ，当且仅当 G 具有正规 ℓ-补。

我们在下面的定理 6.1 中证明定义 2.1 的条件 ($\star$) 的剩余情形（即在特征 $p \neq \ell$ 中定义的李型群的情形）。

2.2. **关于扩张的初步观察**。 全文中，我们将如引言中那样令 $\mathcal{G} :=$Gal($\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}/\mathbb{Q}$)。我们将经常使用下述关于粘合扩张的陈述。（关于块的相应版本，亦见下面的引理 7.6。）

引理 2.3. 设 Y 为有限群，并假设 $X_1 \lhd Y$和 $X_2 \leq Y$满足 $Y = X_1X_2$。假设 $\vartheta_1 \in \mathrm{Irr}(X_1)$ 是 Y- 不变的，且 $\vartheta_2 \in \mathrm{Irr}(X_2)$ 满足：$\mathrm{Res}^{X_2}_{X_1\cap X_2}(\vartheta_2)$ 不可约，并且与 $\mathrm{Res}^{X_1}_{X_1\cap X_2}(\vartheta_1)$ 相同。那么存在唯一的特征标 $\vartheta \in \mathrm{Irr}(Y)$ ，它同时扩张 ϑ_1 和 ϑ_2。特别地， $\mathcal{G}_{\vartheta_1} \cap \mathcal{G}_{\vartheta_2} \leq \mathcal{G}_\vartheta$。

证明。 关于第一个结论，参见例如 [Sp10b，引理 4.1]。（这也是 Isaacs 给出的更一般结论的一个特例——参见 [Na18，引理 6.8]。）最后一个结论由公共扩张 ϑ的唯一性得出。□

引理 2.4. 设 ℓ 为素数， G 为有限群，且 $N \lhd G$ 满足 $|G/N|$ 与 ℓ互素。设 $M := N\,\mathrm{C}_G(P)$，其中 $P \in \mathrm{Syl}_\ell(G)$。假设 $M \lhd G$。那么

- 限制在主 ℓ-块之间定义了一个双射$\mathrm{Irr}(B_0(M)) \to \mathrm{Irr}(B_0(N))$; 并且
- $B_0(G)$ 是 G 中覆盖 $B_0(M)$ 的唯一块。
- 若进一步有 $G \lhd H$，其中 H/G 是一个 ℓ-群，且 $M \lhd H$，则 $B_0(H)$ 是 H 中覆盖 $B_0(M)$ 的唯一块。

证明。 第一部分即所谓的 Alperin–Dade 对应（见 [Da77]）；第二部分由 Brauer 第三主定理以及 [Na98, 9.26, 9.20, 9.19] 得出。第三部分成立是因为 H/G 是一个 ℓ-群，所以 $B_0(H)$ 是覆盖 $B_0(G)$ 的唯一块。□

在引理 2.4 的情形下， M 是 $B_0(N)$ 在G（或 H）中的所谓 ***Dade*** 分歧群。特别地，我们将把它应用于有限约化群 $\mathbf{G}^F$ 及其图-域自同构群 E ，以及一个 Hall ℓ'-子群的情形，其中 $(N,\ G,\ H) = (\mathbf{G}^F,\ \mathbf{G}^F E_{\ell'},\ \mathbf{G}^F E)$

$E_{\ell'} \leq E$。（在第 7 节中，我们还将在更一般的背景下研究 Dade 分歧群。）

引理 2.5. 沿用引理 *2.4* 中的情形，并进一步假设 $|M/N|$ 为奇数。假设$\chi \in$ 不可约特征标$(B_0(N))$是有理值的，并且可扩张到 G。那么， χ 在 不可约特征标 $(B_0(M))$ 中存在一个有理值扩张。

证明。 注意，根据引理 2.4，存在某个 $\widetilde{\chi} \in$ 不可约特征标$(B_0(M))$ 扩张 χ ，且这是 Irr$(B_0(M))$ 中位于 χ 之上的唯一特征标。于是，由于 Irr$(B_0(M))$ 是 $\mathcal{G}$-稳定的，且 χ 是$\mathcal{G}$-不变的，可知 $\widetilde{\chi}$ 也 $\mathcal{G}$-不变，因此是有理值的。□

我们还将使用 [Na18 的推论 6.6] 中的以下观察:

引理 2.6. 设 $N \lhd G$ ，且 G/N 为奇数。若 ϑ 是一个 G-不变的实值特征标，则存在唯一的实值特征标 $\chi \in$ 不可约特征标$(G \mid \vartheta)$扩张 ϑ。这里 $\mathbb{Q}(\chi) = \mathbb{Q}(\vartheta)$。

给定一个块 B，我们将 $\overline{B}$ 记作包含 Irr(B) 中特征标的复共轭的块。如果 $B = \overline{B}$，则称 B 是一个实块。在引理 2.6 的情形下，我们看到，如果 G/N 是阿贝尔的，则包含 χ 的块 $b_G(\chi)$ 是覆盖 $b_N(\vartheta)$ 的唯一实块。众所周知，典型型群的所有幺幂特征标都是实的（甚至是有理的）。然而，由于这一结论对局部特征标不一定成立，下面的内容将在第 8 节中用于处理这些特征标。

引理 2.7。 *(1)* 假设 $H \leq G$ 和 B 是 H 的一个块，使得诱导块 B^G 有定义。那么 $\overline{B}^G$ 有定义且 $\overline{B}^G = \overline{B^G}$。*(2)* 假设 $\overline{N} \lhd G$，使得 $G/\overline{N}$ 是奇数阶的阿贝尔群。如果 B 是 N 的一个实块，则存在唯一一个覆盖 B 的 G 的实块。

证明。 我们采用 [Na98 定理 4.12]及其后续评注中的记号。设 $\lambda_B : \mathsf{Z}(FH) \to F$为与 B相关联的 F-代数同态。根据假设，将 $\sum_{x\in G} c_x x \in \mathsf{Z}(FG)$ 映至 $\sum_{x\in H} c_x \lambda_B(x)$ 的映射 λ_{B^G}: $\mathsf{Z}(FG) \to F$是一个 F-代数同态。现在，B 是包含满足 $\chi(g) := \chi(g^{-1})$ 且 $\chi \in$ Irr(B) 的特征标 χ的块。由此可得 $\lambda_B(\sum_{y\in H} c_y y) = \lambda_B(\sum_{y\in H} c_{y^{-1}} y)$。另一方面，

$$\lambda_{\overline{B^G}}(\sum_{x\in G} c_x x) = \lambda_{B^G}(\sum_{x\in G} c_{x^{-1}} x) = \lambda_B(\sum_{x\in H} c_{x^{-1}} x).$$

这表明 $\lambda_{\overline{B}^G}$ 与 $\lambda_{\overline{B^G}}$一致。因此， $\overline{B}^G$有定义且与 B一致 $\overline{G}$.

对于第二部分，注意到由于 G/N 是阿贝尔的，Irr(G/N) 在覆盖 B的 G 的块集合上传递作用。由于复共轭的作用与 Irr(G/N) 的阶互素，因此至少存在一个覆盖 B 且在共轭作用下不变的块 b。若 b' 是另一个具有此性质的块，则有 $b' = b \otimes \lambda$，其中 $\lambda \in$ Irr(G/N)。注意，此时 $\lambda\bar{\lambda}^{-1} = \lambda^2$ 稳定 b。由于 λ 的阶为奇数，这意味着 λ 也稳定 b，因此 $b' = b \otimes \lambda = b$。□

3. The Alvis–Curtis duality and automorphisms

3.1. 提升 Cabanes–Rickard 等价。设 p为素数， Λ为任意一个使得 p可逆的整环。假设 G 是一个具有特征为 p的强分裂BN-对的群。则存在一种 Alvis-Curtis 对偶，记作 $D_{(G)}$，它在 ΛG 与其自身之间诱导出辉煌导出等价。（关于 $D_{(G)}$ 的构造，参见例如 [CE04，第 4] 节；关于导出等价，参见 [CE04，推论 4.19]。）

在此我们研究 $D_{(G)}$ 的一个广义版本，并证明定理 C（在此重述），从而推广上述结果。下文用 ΔE 表示 $E \times E^{\mathrm{opp}}$中的对角群。

定理 3.1. 设 E 是 *BN*-对(G, B, N, S)的一个自同构群。则 G-G-双模的复形 $D_{(G)}$ 可延拓为$(G \times G^{\mathrm{opp}})\Delta E$-模的复形。特别地，若 $\ell \nmid |E|$，则诱导复形诱导$^{GE\times(GE)^{\mathrm{opp}}}_{(G\times G^{\mathrm{opp}})\Delta E}(D_{(G)})$诱导 ΛGE 与其自身之间的一个辉煌导出等价。

证明。设 $\sigma \in E$。我们回顾 [CE04 第 4]节中复形 $D_{(G)}$ 的构造。复形 $D_{(G)}$ 仅在度 $[0, n]$处有非零项，其中 $n = |S|$。其第 i项由下式给出

$$D^{(i)}_{(G)} := \bigoplus_{I\subset S;|I|=i} \Lambda G \otimes_{\Lambda P_I} e(U_I)\Lambda G,$$

其中 $e(U_I) = \frac{1}{|U_I|}\sum_{u\in U_I} u$。在我们的假设下，$\sigma(I)$仍是 S 的一个具有相同基数的子集。因此，σ 具有自然作用于

$$\bigoplus_{J\in\langle\sigma\rangle I} \Lambda G \otimes_{\Lambda P_J} e(U_J)\Lambda G$$

其中 $\langle\sigma\rangle I$ 表示 I的 σ-轨道。因此，我们可以将 $D_{(G)}$ 的每一项视为一个 $(G \times G^{\mathrm{opp}})\langle\sigma, \sigma^{-1}\rangle$-模。我们必须检查转移映射 $\delta^i\colon D^{(i)}{}_{(G)} \to D^{(i+1)}{}_{(G)}$相对于这一作用也是等变的。为此，回想一下，若 $I' \subset I$，则我们有一个态射

$$f^I_{I'} : \Lambda G \otimes_{\Lambda P_I} e(U_I)\Lambda G \to \Lambda G \otimes_{\Lambda P_{I'}} e(U_{I'})\Lambda G$$

给定为

$$x \otimes_{\Lambda P_I} y \mapsto x \otimes_{\Lambda P_{I'}} y,$$

的 G-G-双模。为定义转移映射，我们在 S上固定一个全序“ $\leq$ ”。特别地，任意 $I \subset S$都可以写成 $I = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i\}$，使得 $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_i$。因此，对于 $j \leq i$，我们可以定义 $I_j := I \setminus \{\alpha_j\}$。根据这些数据，转移映射定义为

$$\delta^i(m) := \sum_{j=0}^{i} (-1)^j f^I_{I_j}(m)$$

对于 $m \in \Lambda G \otimes_{\Lambda P_I} e(U_I)\Lambda G$。

一般而言，映射 δ^i 关于上述 σ 的作用并不等变。为此，对于给定的函数 $\varepsilon\colon \mathcal{P}(S) \to \{\pm 1\}$，我们通过如下方式定义 σ 在 $D^i_{(G)}$ 上的一个新作用“ $*_\varepsilon$ ”：

$$\sigma *_\varepsilon m := \varepsilon(I)\sigma(m)$$

对于 $m \in \Lambda G \otimes_{\Lambda P_I} e(U_I)\Lambda G$。为了使映射 δ^i 关于 σ的“ $*_\varepsilon$ ”作用等变，我们必须找出符号 $\varepsilon(I) \in \{\pm 1\}$，使得

$$f^I_{I_j}(\varepsilon(I)\sigma(m)) = \varepsilon(I \setminus \{\alpha_j\})\sigma(f^I_{I_j}(m))$$

对于所有 $0 \leq j \leq i$，为此，我们令 $\delta_I(\alpha_j) := (-1)^{k-j}$，其中 k 满足 $\sigma(\alpha_j) = \beta_k$且 $\sigma(I) = \{\beta_1, \ldots, \beta_i\}$。换言之，当且仅当 α_j 在 I 中的位置与 $\sigma(\alpha_j)$在 $\sigma(I)$中的位置之间的奇偶性为偶时，$\delta_I(\alpha_j) = 1$。

根据这个定义，我们的论断归结为证明

$$\varepsilon(I) = \delta_I(\alpha_j)\varepsilon(I \setminus \{\alpha_j\}).$$

对所有 $a \in S$，我们令 $\varepsilon(\emptyset) = 1$ 和 $\varepsilon(\{a\}) = 1$。这唯一确定了函数 ε（前提是它存在）。为证明它存在，我们必须证明定义$\varepsilon(I) = \delta_I(\alpha_j)\varepsilon(I \setminus \{\alpha_j\})$与 j的选取无关。这归结为证明，对于 $k \neq j$，我们有

$$\delta_I(\alpha_k)\delta_{I\setminus\{\alpha_k\}}(\alpha_j) = \delta_I(\alpha_j)\delta_{I\setminus\{\alpha_j\}}(\alpha_k).$$

然而，从 I 中去掉α_j，分别从 $\sigma(I)$中去掉 $\sigma(\alpha_j)$，会使 α_k的模 2 位置恰好改变 1。这意味着 $\delta_I(\alpha_k) = \delta_{I\setminus\{\alpha_k\}}(\alpha_k)$（当然，根据对称性，$\delta_I(\alpha_j) = \delta_{I\setminus\{\alpha_j\}}(\alpha_j)$）。因此，上述符号相等关系总是成立。

注意到函数 ε 由 σ唯一确定，因此我们可以将复形 $D_{(G)}$ 扩展为$(G \times G^{\mathrm{opp}})\Delta E$-模的复形。（我们注意到，上述作用可扩展为 E上的作用。为此，我们需要验证，对于每个τ，当所有 I取值时，$\varepsilon_\tau(\sigma(I))\varepsilon_\sigma(I) = \varepsilon_{\tau\sigma}(I)$。对 I作归纳可知，只需验证相应的 δ 函数相同。分别记与 σ、τ相对应的函数为δ_σ、$_I$和δ_τ、$_I$。采用上述记号，我们有$\delta_{\sigma,I}(\alpha_j) = (-1)^{k-j}$，并且当 $\tau\sigma(\alpha_j) = \gamma_l$时，$\delta_{\tau,\sigma(I)}(\sigma(\alpha_j)) = (-1)^{k-l}$，其中 $\tau(\sigma(I)) = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_i\}$。然而，$\delta_{\tau\sigma,I}(\alpha_j) = (-1)^{j-k}$，这表明相应的 ε 函数相等。）根据 Marcus 的结果 [Mar96], ，诱导复形 $\mathrm{Ind}_{GE\times(GE)^{\mathrm{opp}}}^{(G\times G^{\mathrm{opp}})\Delta E}(D_G)$按所需方式诱导出一个导出自等价。□

注 3.2. 注意，若“ $\leq_1$ ”和“ $\leq_2$ ”是 S上的两个全序，则在集合 S 上存在唯一的置换 π，使得 $a \leq_1 b$ 当且仅当 $\pi(a) \leq_2 \pi(b)$。特别地，$\varepsilon_{\leq_1}(I) = \varepsilon_{\leq_2}(\pi(I))$。因此，若 I 是一个 σ-稳定集，则有 $\varepsilon_{\leq_1}(I) = \varepsilon_{\leq_2}(I)$（因为 ε 在 I 上的取值只取决于 I中元素的顺序）。

在定理 3.1 的情形下，我们将 $D_{GE}\colon \mathbb{Z}\mathrm{Irr}(GE) \to \mathbb{Z}\mathrm{Irr}(GE)$ 记作由提升后的复形诱导的等距同构。注意，根据构造，$\mathrm{Res}_G^{GE} \circ D_{GE} = D_G \circ \mathrm{Res}_G^{GE}$。此外，若 $E' \leq E$，则有 $\mathrm{Res}_{GE'}^{GE} \circ D_{GE} = D_{GE'} \circ \mathrm{Res}_{GE'}^{GE}$。

回顾一下，G 的斯坦伯格特征标定义为 $\mathrm{St}_G := D_G(1_G) \in \mathrm{Irr}(G)$。我们将经常使用这个特征标及其广义形式:

定义 3.3。沿用上述记号，GE 广义斯坦伯格特征标定义为 $\mathrm{St}_{GE} := D_{GE}(1_{GE}) \in$不可约特征标$(GE)$。

注 3.4。当 $E' \leq E$ 时，关于 $\mathrm{Res}_{GE'}^{GE}$ 的上述观察表明 $\mathrm{St}_{GE'} = \mathrm{Res}_{GE'}^{GE}\mathrm{St}_{GE}$。此外，请注意，定理 3.1 的扩张复形是一个各项均为 Λ-模的复形。因此，D_{GE} 与所有伽罗瓦自同构交换。特别地，St_{GE} 是一个有理特征标，因为它是一个有理特征标的对偶。

3.2. **与 Digne–Michel 提升的比较**。本文所称的李型群或有限约化群，是指群 $G := \mathbf{G}^F$，即连通约化代数群 $\mathbf{G}$在 Steinberg 端同态 $F\colon \mathbf{G} \to \mathbf{G}$下的不动点群。在此情形下，我们将定理 3.1 所得到的提升，与 Digne–Michel [DM94]在有限（非连通）约化群背景下构造的 Alvis–Curtis 对偶提升进行比较。

推论 3.5. 如果 $G = \mathbf{G}^F$ 是李型群，且 σ 是与 F 的作用相交换的拟中心自同构，则上文定义的双射 $D_{G\langle\sigma\rangle}\colon \mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(G\langle\sigma\rangle) \to \mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(G\langle\sigma\rangle)$与 *Digne–Michel* 在 *[DM94,* 命题 *3.13]* 中引入的广义 *Alvis–Curtis* 对偶一致。

证明. 根据 [DM94, 推论 3.12]，后的观察，陪集 $G\sigma$ 上的 Alvis–Curtis 对偶由下式给出

$$D_{G\sigma} := \sum_I (-1)^{|I/\sigma|_*} R^{G\sigma}_{L_I\sigma} R^{G\sigma}_{L_I\sigma}$$

其中 I 遍历 S 的所有 σ-稳定子集。注意，$R^{G\sigma}_{L_I\sigma}\colon CF(L_I\sigma, K) \to CF(G\sigma, K)$ 按定义是由 G-L_I-双模诱导的函子 $R^{G\langle\sigma\rangle}_{L_I\langle\sigma\rangle}$ 的限制

$$\mathbb{C}[G\langle\sigma\rangle/U_I] \cong \mathrm{Ind}^{G\langle\sigma\rangle\times L_I\langle\sigma\rangle}_{(G\times(L_I)^{\mathrm{opp}})\langle\sigma,\sigma^{-1}\rangle}(\mathbb{C}[G/U_I]).$$

Now 若子集 I 不是 σ-稳定的，我们用 $\langle\sigma\rangle_I$ 表示它在 $\langle\sigma\rangle$ 中的稳定子。于是我们有 e

$$\mathrm{Ind}^{G\langle\sigma\rangle\times(L_I\langle\sigma\rangle)^{\mathrm{opp}}}_{(G\times(L_I)^{\mathrm{opp}})\Delta(\langle\sigma\rangle_I)}(\mathbb{C}[G/U_I]) = \bigoplus_{J\in\langle\sigma\rangle I} (\mathbb{C}[G\langle\sigma\rangle_I/U_J])$$

作为 $G\langle\sigma\rangle\times(L_I\langle\sigma\rangle)^{\mathrm{opp}}$-模。因此，该模在特征标上诱导函子 $R^{G\langle\sigma\rangle_I}_{L_I\langle\sigma\rangle_I}\circ\mathrm{Res}^{L_I\langle\sigma\rangle}_{L_I\langle\sigma\rangle_I}$。于是，对于 $L_I\langle\sigma\rangle$ 的任意类函数 f，其在 $G\sigma$ 中的像为零。这意味着只有 σ-稳定轨道对 $\mathrm{Res}^{G\langle\sigma\rangle}_{G\sigma}\circ D_{(G)}$ 有贡献。

剩下需要检验的是，[DM94] 中的符号与我们构造中的符号相匹配。为此，我们需要证明，对所有 σ-稳定集合 $I\subset S$，都有 $\varepsilon(I)(-1)^{|I|} = (-1)^{|I/\sigma|}$。首先假设$I$ 是一个 σ-轨道。在这种情况下，我们需要证明 $\varepsilon(I) = (-1)^{|I|+1}$。现在根据构造，若$|I| = r$，则对任意 $x\in I$，有

$$\varepsilon(I) = \prod_{i=0}^{r-1} \delta_{I\setminus\{x,\sigma(x),\ldots,\sigma^{i-1}(x)\}}(\sigma^i(x)).$$

根据注 3.2，我们可以假设 $x\le\sigma(x)\le\sigma^2(x)\le\ldots\ldots\le\sigma^{r-1}(x)$，这意味着对所有满足 $\varepsilon(I) = (-1)^{r+1}$ 的 i，都有$\delta_{I\setminus\{x,\sigma(x),\ldots,\sigma^{i-1}(x)\}}(\sigma^i(x)) = -1$，如所述。

现在令 $I_1,\ldots,I_k$为 σ 在 I上的轨道。再次根据注 3.2，我们可以选择一种排序，使得当 $x\in I_i$ 且 $y\in I_j$ 满足 $i<j$时，$x\le y$。由此我们推得

$$\varepsilon(I) = \prod_{i=1}^{k}\varepsilon(I_i) = \prod_{i=1}^{k}(-1)^{|I_i|+1}$$

使得 $\varepsilon(I)(-1)^{|I|} = (-1)^k = (-1)^{|I/\sigma|}$。 □

例 3.6. 假设 G 是 A 型，并考虑 A 型单根的典范排序。此处，图自同构 σ 将这些单根的排序反转。特别地，对于所有 j，$\varepsilon(I) = \varepsilon(I\setminus\{\alpha_j\})(-1)^{|I|}$。这意味着公式 $\varepsilon(I) = 1$ 成立，当且仅当 $|I|\equiv 0$，模 4 同余于 1。现在，$|I/\sigma| = 1$ 成立，当且仅当 $|I|\equiv 1$，模 4 同余于 2。这证明了此例中所声称的公式 $\varepsilon(I)(-1)^{|I|} = (-1)^{|I/\sigma|}$。

注 3.7. 设 $d^1\colon CF(G\langle\sigma\rangle, K)\to CF(G\langle\sigma\rangle, K)$ 为分解映射。由 [DM94, 命题 2.11] 可知 $d^1\circ D_{G\langle\sigma\rangle} = D_{G\langle\sigma\rangle}\circ d^1$。特别地，由此可见，Digne–Michel 定义的 Alvis–Curtis 对偶与 ℓ-块相容。

4. Regular characters in the principal block

4.1. 李型群。 本节中，设 $\mathbf{G}$ 是一个单连通型的单代数群，且 $F\colon \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ 是一个在 $\mathbf{G}$ 上定义 $\mathbb{F}_q$-结构的 Frobenius 端同态。我们用 $B_0(G) = B_0(\mathbf{G}^F)$ 表示 $G := \mathbf{G}^F$ 的主块。设 $\ell \nmid q$ 是一个整除 $|G|$ 的素数。

设 $(\mathbf{G}^*, F)$ 与 $(\mathbf{G}, F)$ 对偶，并记 $G^* := (\mathbf{G}^*)^F$。那么，$\mathrm{Irr}(G)$ 可分为由半单元 $s \in G^*$（模 G^*-共轭）标记的有理 Lusztig 级数 $\mathcal{E}(G, s)$。此外，Brou´e–Michel 的一个结果表明，对于 $s \in G^*$ 阶为半单的 ℓ' 元素，并集 $\mathcal{E}_\ell(G, s) := \cup_{t \in C_{G^*}(s)_\ell} \mathcal{E}(G, st)$ 是若干 ℓ-块的并集。对于该并集中的每个块 B，我们有 $\mathrm{Irr}(B) \cap \mathcal{E}(G, s) \neq \emptyset$。（见 [CE04，定理 9.12]。）

4.2. 正则嵌入与正则特征标。设 $\mathbf{G}$ 是单连通型的单代数群，其最大 F-稳定环面 $\mathbf{T}$ 包含于 $\mathbf{G}$ 的一个 F-稳定 Borel 子群 $\mathbf{B}$ 中。设 $\mathbf{U}$ 为 $\mathbf{B}$ 的幂单根，并记 $U := \mathbf{U}^F$。考虑一个正则嵌入 $\iota\colon \mathbf{G} \hookrightarrow \tilde{\mathbf{G}}$，其对偶映射 $\iota^*\colon \mathbf{G}^* \to \mathbf{G}^*$ 如 [CE04，第 15] 章所定义。令 $E := E(\mathbf{G}^F)$ 表示如 [CS25], 中所述作用于 $\tilde{G} := \tilde{\mathbf{G}}^F$ 上的域自同构与图自同构群。对于 p 的幂 q_0，我们将诱导相应标准Frobenius映射的域自同构记为 $F_{q_0} \in E$。下文中，我们将 E_ℓ 记为 E 中的 Sylow ℓ-子群，并将 $E_{\ell'}$ 记为 E中的 Hall ℓ'-子群。此外，按照 [CS25], 中的约定，令 E^* 表示 $\tilde{G}^* := (\tilde{\mathbf{G}}^*)^F$中的图自同构与域自同构群。

我们用 $\mathrm{Irr}(\tilde{G}\mid 1_G)$ 表示 $\tilde{G}$ 的唯一常 Gelfand–Graev 特征标；根据 [GM20，注 3.4.18]，它是无重数的。我们回顾一下，G 的正则特征标是指作为 Γ 的组成成分出现的特征标，而半单特征标是 $D_{\tilde{G}}(\Gamma)$ 的组成成分。特别地，每个级数 $\mathcal{E}(G, \tilde{s})$ 恰好包含一个半单特征标和一个正则特征标。

现在回顾一下，由于 $\ell \nmid |U|$，可知 Γ 是 G 的投射特征标。对于 $\tilde{s} \in \tilde{G}^*$ 对于 ℓ' 阶的半单元，我们用 $\Gamma_{\tilde{s}}$ 表示 Γ 在 $\mathcal{E}_\ell(G, \tilde{s})$ 上的投影，因此 Γ 按构造就是 $\Gamma_{\tilde{s}}$之和。G. Hiss 在 [Hi90，定理 3.2] 中证明了，$\Gamma_{\tilde{s}}$实际上是一个不可分解投射模。此外，我们可以选取线性特征标 ϕ，使其为 $E_{\ell'}$-稳定（见 [Sp12，定义 3.3], ；另见 [Joh22b，第 3] 节，其中讨论了例外的 $\hat{}$ 图自同构情形），并将其到 $UE_{\ell'}$ 的平凡扩张记为 ϕ。再记 $\Gamma := \mathrm{Ind}_{UE_{\ell'}}^{GE_{\ell'}}(\hat{\phi})$，它同样是一个投射 $\hat{G} := \tilde{G}E_{\ell'}$-模；并令 $\hat{\Gamma}_{\tilde{s}}$ 表示 $\hat{\Gamma}$ 在 $\hat{\tilde{G}}$ 上的投影，即 G 中覆盖 $\mathcal{E}_\ell(G, \tilde{s})$ 中各块的块之和。

以下推广了 [Hi90，推论 3.3、3.4]。

引理 4.1. 特征标 $\hat{\Gamma}_{\tilde{s}}$ 是 $\hat{\tilde{G}}$ 的一个投射不可分解特征标，因此它的所有不可约成分都属于同一个块。特别地，$D_{\tilde{G}E_{\ell'}}(\hat{\Gamma}_{\tilde{s}})$ 的不可约成分都属于 $GE_{\ell'}$的同一个 ℓ-块。

证明。 注意到根据 Frobenius 互反律，$\mathrm{Res}^{\hat{\tilde{G}}}_{\tilde{G}}(\hat{\Gamma}) = \Gamma$，这意味着 $\mathrm{Res}^{\hat{\tilde{G}}}_{\tilde{G}}(\hat{\Gamma}_{\tilde{s}}) = \hat{\Gamma}_{\tilde{s}}$。由于 $\Gamma_{\tilde{s}}$ 是一个射影不可分解模，而 $\Gamma_{\tilde{s}}$ 是一个射影模（因为它是将一个射影模投影到若干块之和上的 $\hat{}$ 投影），因此 $\Gamma_{\tilde{s}}$ 也是不可分解的。于是，它的所有不可约成分都属于同一个 ℓ-块。由定理 3.1 可知，$D_{\tilde{G}E_{\ell'}}(\Gamma_{\tilde{s}})$ 的所有组成成分也属于同一个 ℓ-块。□

有限约化群的自同构可以在如下意义下实现为约化群的自同构，这是一个有用的事实：

引理 4.2。存在一个带有 *Frobenius* 端同态 F、定义一个 $\mathbb{F}_p$-结构的连通约化群 $\mathbf{G}$，以及一个态射 $\mathrm{pr}\colon \mathbf{G} \to \mathbf{G}$，使得通过该态射有 $\mathbf{G}^F \cong \mathbf{G}^F$。此外，存在一个 F-等变拟中心自同构的集合 E，其作用于 $\mathbf{G}$并且通过 pr满足 $E \cong E$。另外，如果 $\mathbf{H}$ 是 $\mathbf{G}$的 F-稳定子群，那么存在 $\mathbf{G}$ 的一个 F-稳定子群 $\mathbf{H}$，使得 $\mathrm{pr}(\mathbf{H}) = \mathbf{H}$。

证明。这由 [RSF22，第 2 节1]中的讨论得出。 □

引理 4.3。$D_{\tilde{G}E_{\ell'}}(\Gamma_1)$ 的所有不可约成分都属于 $GE_{\ell'}$的主块。

证明。根据引理 4.1，Γ_1 的所有不可约成分都属于同一个 ℓ-块，而 $D_{\tilde{G}E_{\ell'}}(\Gamma_1)$ 的不可约成分也是如此。因此，为了证明其所有不可约成分都属于主块，只需证明其中一个属于主块即可。因此，我们的目标是证明平凡特征是 $D_{\tilde{G}E_{\ell'}}(\Gamma_1)$ 的一个不可约成分。为此，只需检验广义斯坦伯格特征标 $\hat{}\,\mathrm{St}_{\widetilde{G}E_{\ell'}} := D_{\widetilde{G}E_{\ell'}}(1_{\widetilde{G}E_{\ell'}})$ 出现在广义盖尔范德–格拉耶夫特征 Γ_1 中。

令 $\widetilde{T} = \widetilde{\mathbf{T}}^F$ 和 $\widetilde{B} = \widetilde{\mathbf{B}}^F$ 分别为 $\widetilde{G}$ 中包含 T 和 B 的最大分裂环面与 Borel 子群。由推论 3.5 和引理 4.2，我们可以使用 [DM94, 命题 3.17]，，该命题表明，给定 $\sigma \in E_{\ell'}$，在陪集 $\widetilde{B}^F\sigma$ 上，斯坦伯格特征标等于诱导 $\mathrm{诱导}_{\widetilde{T}\sigma}^{B\sigma}(1_{\widetilde{T}\sigma})$。因此，限制$_{\widetilde{B}E_{\ell'}}^{GE_{\ell'}}$(St$_{\widetilde{G}E_{\ell'}}$) =诱导$_{\widetilde{T}E_{\ell'}}^{BE_{\ell'}}(1_{\widetilde{T}E_{\ell'}})$。因此，内积

$$\langle \mathrm{St}_{\widetilde{G}E_{\ell'}}, \hat{\Gamma}_1\rangle = \langle \mathrm{Ind}_{\widetilde{T}E_{\ell'}}^{\widetilde{B}E_{\ell'}}(1_{\widetilde{T}E_{\ell'}}), \mathrm{Ind}_{UE_{\ell'}}^{\widetilde{B}E_{\ell'}}(\hat{\phi})\rangle.$$

现在，根据 Mackey 公式，限制$_{\widetilde{T}E_{\ell'}}^{BE_{\ell'}}$诱导$_{UE_{\ell'}}^{BE_{\ell'}}$($\hat{}\,\phi$) =诱导$_{E_{\ell'}}^{TE_{\ell'}}$限制$_{E_{\ell'}}^{UE_{\ell'}}$($\hat{}\,\phi$) =诱导$_{E_{\ell'}}^{TE_{\ell'}}(1_{E_{\ell'}})$，于是

$$\langle \mathrm{Ind}_{\widetilde{T}E_{\ell'}}^{\widetilde{B}E_{\ell'}}(1_{\widetilde{T}E_{\ell'}}), \mathrm{Ind}_{UE_{\ell'}}^{\widetilde{B}E_{\ell'}}(\hat{\phi})\rangle = \langle 1_{\widetilde{T}E_{\ell'}}, \mathrm{Ind}_{E_{\ell'}}^{\widetilde{T}E_{\ell'}}(1_{E_{\ell'}})\rangle = 1$$

通过两次应用 Frobenius 互反律。因此，广义斯坦伯格特征标作为 Γ_1 的一个组成成分出现，证毕。□

在全文中，我们将使用如下事实：伽罗瓦群 $\mathcal{G}$ 作用于级数集合 $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, s)$（例如参见 [GM20，命题 3.3.15]）。也就是说，如果 $\gamma \in \mathcal{G}$ 将 $e^{2\pi i/|s|}$ 映射到其 r次幂，那么 γ就将 $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, s)$ 映射到 $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, s^r)$。给定一个半单元 $s \in \mathbf{G}^*$，我们便可如 [SFT23] 中那样定义 $\mathbb{Q}_s$。也就是说，$\mathbb{Q}_s = (\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}})^{\mathcal{G}_s} \subseteq \mathbb{Q}(e^{2\pi i/|s|})$ 是级数 $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, s)$ 的稳定子 $\mathcal{G}_s \leq \mathcal{G}$ 的不动域。

引理 *4.4.* 设 $\chi \in Irr(B_0(G))$，其中 $\langle \chi, D_{\tilde{G}}(\Gamma)\rangle = \pm 1$，且 $Z(G) \subset ker(\chi)$。记 $E' := E_\chi \cap E_{\ell'}$。那么存在 χ 的唯一扩张 $\hat{}\,\chi \in Irr(\tilde{G}E')$，使得 $\langle \hat{}\,\chi, D_{\tilde{G}E'}(\hat{}\,\Gamma)\rangle = \pm 1$。此外，$\mathbb{Q}(\hat{}\,\chi) = \mathbb{Q}(\chi) = \mathbb{Q}_{\tilde{s}}$。

证明。首先，根据 [Sp12 命题 3.4] 的证明可知，扩张存在。由 Frobenius 互反律以及 Alvis–Curtis 对偶在虚特征标集上是等距同构这一事实，扩张的唯一性显然。再结合按构造 $D_{\tilde{G}E_{\ell'}}$与所有伽罗瓦自同构交换这一事实可知，若 $\sigma \in \mathcal{G}$ 固定 χ 和 $\hat{}\,\Gamma$，则它也固定 $\hat{}\,\chi$。

~现在，由于 U 的所有非退化特征都彼此 T-共轭，可知对每个 $\sigma\in\mathcal{G}$，都存在某个 $\tilde{t}\in\tilde{T}$ 使得 $\sigma\tilde{t}$ 固定 ϕ。因此 $\Gamma^\sigma=\Gamma$。此外，$[E_{\ell'},\tilde{t}]\subset \mathbf{Z}(\tilde{G})$，因为特征标 ϕ 在 $\tilde{B}$ 中的稳定子为 $U\,\mathbf{Z}(\tilde{G})$，且它是 $E_{\ell'}$-稳定的，所以 $[E_{\ell'},\tilde{t}]\in\tilde{T}\cap U\,\mathbf{Z}(\tilde{G})=\mathbf{Z}(\tilde{G})$。~现在，由于 χ 在 $\mathbf{Z}(G)$ 上平凡，且 Alvis-Curtis 对偶保持底层中心特征，~我们推得 $\mathbb{Q}(\chi)=\mathbb{Q}(\hat{\chi})$。（事实上，对于 $\theta\in\mathrm{Irr}(\mathbf{Z}(\tilde{G}))$，我们可以写成 $\Gamma_\theta=\mathrm{Ind}_U^G\mathbf{Z}(\tilde{G})(\hat{\phi}\theta)$，使得 $\Gamma=\sum_{\theta\in\mathrm{Irr}(\mathbf{Z}(\tilde{G}))}\Gamma_\theta$，并注意到 $D_{\tilde{G}}(\chi)$ 出现在带有 $\theta=1_{\mathbf{Z}(\tilde{G})}$ 的直和项中。）~这个直和项 Γ_1 有一个扩张 $\hat{}\,\Gamma_1:=\mathrm{Ind}_U^{GE_{\ell'}}\mathbf{Z}(\tilde{G})_{E_{\ell'}}(\hat{}\,\phi 1_{\mathbf{Z}(\tilde{G})})$，其中包含 $D_{\tilde{G}E_{\ell'}}(\hat{}\,\chi)$。只需验证特征标 $\hat{}\,\phi':=\hat{}\,\phi 1_{\mathbf{Z}(\tilde{G})}$ 是 $\sigma\tilde{t}$-稳定的。然而，对于 $e\in E_{\ell'}$，我们有 $\hat{}\,\phi'^{\sigma\tilde{t}}(e)=\hat{}\,\phi(e)\,\hat{}\,\phi'([e,\tilde{t}])^\sigma=\hat{}\,\phi(e)$，因为 $\hat{}\,\phi'$ 在 $[e,\tilde{t}]\in\mathbf{Z}(\tilde{G})$ 上平凡。）

其余结论由以下事实推出：在中心连通的情形下，Jordan 分解与伽罗瓦自同构相容，这由 [SV20] 的主定理给出。□

4.3. **主块中的高度零特征**。我们沿用上一节的设定，并进一步假设 $S=G/\mathbf{Z}(G)$是一个非阿贝尔单群。

引理 4.5。假设 $\ell\nmid|\mathbf{Z}(G)|$。那么限制给出以下两者之间的一个双射

$$\mathrm{Irr}(B_0(\tilde{G}/\,\mathbf{Z}(\tilde{G}))\to\mathrm{Irr}(B_0(G/\,\mathbf{Z}(G))).$$

~~在此情形下，每个特征标 $\chi\in\mathrm{Irr}(B_0(S))$ 都有唯一的扩张 $\tilde{\chi}\in\mathrm{Irr}(B_0(G/\mathbf{Z}(G))$，~~且满足$(GE)\tilde{\chi}=(GE)\chi$。

证明。这由 [CE04，定理 17.7]推出。为说明陈述的最后一部分，我们指出，若 $\sigma\in E_\chi\setminus E_{\tilde{\chi}}$，则 $\tilde{\chi}^\sigma=\tilde{\chi}\beta$ 对于某个线性特征标 β成立，其阶与 ℓ 互素，这是由~~我们的假设 $\ell\nmid|\mathbf{Z}(G)|$所致，因此 $\ell\nmid|G/G\,\mathbf{Z}(G)|$。但这将与以下事实矛盾：$\tilde{\chi}$，因而 $\tilde{\chi}^\sigma$必须属于由一个半单 ℓ-元标记的级数，这由 [CE04，定理 9.12]给出。□

~回顾一下，若 $\mathcal{E}(G,\tilde{s})$ 是一个 Lusztig 级数，则其中所有特征标限制到 $\mathbf{Z}(G)$ 后，都是同一个特征标的倍数。（见 [Ma07，引理 2.2]。）特别地，当且仅当 $\tilde{s}\in[G^*,G^*]$ 时，这些特征标在 $\mathbf{Z}(G)$ 上的限制是平凡的。（见 [NT13，引理 4.4，注 4.6]。）现在，根据 Jordan 分解的次数性质，Lusztig 级数 ~$\mathcal{E}(G,\tilde{s})$ 中的半单特征标是 ℓ'-次数的，当且仅当 $C_{\tilde{G}^*}(\tilde{s})$ 包含 G^* 的一个 Sylow ℓ-子群。

特别地，若 $\tilde{s}$ 的阶是 ℓ 的幂，这意味着该半单特征标是 ℓ'-次数的，当且仅当对某个 G^* 的 Sylow ℓ-子群 P^*，有 $\tilde{s}\in\mathbf{Z}(P^*)$。注意，$P_0^*:=P^*\cap[G^*,G^*]$ 是 $[G^*,G^*]$的一个 Sylow ℓ-子群。

引理 4.6. 沿用上述记号，设 $\tilde{s}\in P_0^*\cap\mathbf{Z}(P^*)$。则半单~~特征标 $\tilde{\chi}\in\mathcal{E}(G,\tilde{s})$ 属于 不可约特征标$_0(B_0(G/\,\mathbf{Z}(G)))$。此外，若 $\tilde{s}$ 的阶为 ℓ，则 $\mathbb{Q}(\tilde{\chi})\subseteq\mathbb{Q}_\ell$；若 ℓ 不整除 E中任一图自同构的阶，则 $[E:E_{\tilde{\chi}}]$ 不被 ℓ整除。

~~证明。 $\tilde{\chi}$ 属于 $\mathrm{Irr}_\ell(G/\mathbf{Z}(G))$，由上述讨论可知。此外，根据 [Hi90, Cor. 3.4]，它属于主块。

尚需证明“此外”这一结论。由于 $\tilde{s}$ 的阶为 ℓ，我们可推出 $\mathbb{Q}_{\tilde{s}}\subseteq\mathbb{Q}_{o(\tilde{s})}=\mathbb{Q}_\ell$。另一方面，当且仅当 σ^* 稳定 $\tilde{s}$的几何共轭类时，$\sigma\in E$ 才稳定 $\tilde{\chi}$；其中 $\sigma^*\in E((\mathbf{G}^*)^F)$与 σ 对偶（见 [NTT08，推论 2.5]）。现在，$\tilde{s}$ 与最大分裂环面 $\mathbf{T}^*$中的某个元素 t 是$\mathbf{G}^*$-共轭的。因此，我们有 $F_p^*(t)=t^p$。特别地，F_p 在群 $\langle t\rangle\cong C_\ell$上作用为自同构。由于 $\mathrm{Aut}(C_\ell)\cong C_{\ell-1}$，可得

任何 ℓ-次幂阶的自同构在 $\langle t\rangle$上都平凡作用。因此， $[\langle F_p\rangle : \langle F_p\rangle_{\tilde{\chi}}]$ 不能被 ℓ整除。最后注意，如果 ℓ不整除任何图自同构的阶，那么 $|E : \langle F_p\rangle|$ 也与 ℓ互素。□

~ ~ ~在我们的假设下，注意到 $|[G^*,G^*]|_\ell = |G|_\ell$且 $|[\mathbf{Z}(G^*,G^*])|_\ell = |\mathbf{Z}(G)|_{\ell'}$。特别地，若 $\ell \mid |S|$ 则由此可得 Sylow ℓ-子群 P_0^*是非中心的，因此在这种情形下，$\mathbf{Z}(P_0^*)$ 中总存在一个阶为 ℓ 的非平凡元素。鉴于引理 4.6，我们感兴趣~ ~于确定 $\mathbf{Z}(P^*) \cap P_0^*$ 的方便元素。注意到若 $\ell \nmid |\mathbf{Z}(G)| = |\mathbf{Z}([G^*,G^*])|$，我们~有 $P^* = P_0^*\mathbf{Z}(G^*)_\ell$，从而在此情形下给出 $\mathbf{Z}(P^*) \cap P_0^* = \mathbf{Z}(P_0^*)$。

4.4. 一些例外情形。 全文中，我们采用常见记号 $\mathrm{SL}_n(\epsilon q)$，其中$\epsilon \in \{\pm 1\}$表示当 $\epsilon = 1$ 时的 $\mathrm{SL}_n(q)$，当 $\epsilon = -1$时的 $\mathrm{SU}_n(q)$，相关群 $\mathrm{GL}_n(\epsilon q)$ 等也作类似理解。同样，$\mathrm{E}_6(\epsilon q)$表示当 $\epsilon = 1$ 时的 $\mathrm{E}_6(q)$，当$\epsilon = -1$时则表示其扭曲版本 ${}^2\mathrm{E}_6(q$.

我们沿用前面的记号。以下内容也见于 [GSV18，定理 3.5]。

L引理 4.7。 设 $G = \mathrm{SL}_n(\epsilon q)$ 且 $2 \neq \ell \mid |\mathbf{Z}(G)|$。则 $\mathbf{Z}(P^*) \cap P_0^* = \mathbf{Z}(P_0^*)$.

证明。 注意此处 $\ell \mid (q-\epsilon)$。只要 P_0^*是 Cabanes 群（也就是说， P_0^*包含唯一的极大阿贝尔正规子群 D_0^*），我们就知道 $\mathbf{Z}(P_0^*)$ 包含于 P_0^*的 Cabanes 子群 D_0^*中；在此情形下，该子群是 $[G^*,G^*] \cong G$ 的对角环面 T^*~ ~的 Sylow ℓ-子群 T_ℓ^*。现在 $P^*/D^* \cong P_0^*/D_0^*$，其中 D^*是 P^*的 Cabanes 群，因此 Cabanes 子群 D_0^*中的元素在 P_0^*中是中心元素，当且仅当它在 P^*中是中心元素。我们知道，除非 $n = 3 = \ell \mid\mid (q-\epsilon)$，否则$P_0^*$是 Cabanes 群（参见 [KM15，引理 3.12] 及其证明）。下面立即处理例外情形。□

遗憾的是，正如下例所示，$\mathbf{Z}(P_0^*)$ 有时可能太小。

例4.8。 设 $\ell = 3$和 $G = \mathrm{SL}_3(q)$，且 $\ell = 3 \mid (q-1)$。那么 $\mathbf{Z}(P_0^*)$ =~ ~$\mathbf{Z}([G^*,G^*])$。特别地，$\mathbf{Z}(P_0^*)$ 中某个半单元素所关联的 Lusztig 级数中的任意半单特征标，都会覆盖 G 的平凡特征。

然而，只要 n 不是 ℓ的幂，我们就能避免这种情况：

引理 4.9。 设 $G = SL_n(\epsilon q)$。假设 ℓ 是一个奇素数，整除 $|Z(G)|$，但~ ~ n 不是 ℓ的幂。那么 $Z(P_0^*) \neq Z([G^*,G^*])_\ell$。此外，存在 $\tilde{s} \in Z(P_0^*)$，其~阶为 ℓ，使得半单特征标 $\tilde{\chi} \in \mathcal{E}(G,\tilde{s})$ 限制到 $= Res_G^{\widetilde{G}}(\tilde{\chi})$ 后，不可约地成为一个非平凡的 ~特征标 χ，且 $(\tilde{G}E)_{\tilde{\chi}} = (\tilde{G}E)_\chi$。

证明。这里我们有 $\widetilde{G} = \mathrm{GL}_n(\epsilon q) = \widetilde{G}^*$。令 $n = \sum_k \ell^k a_k$ 为 ℓ-进表示，并设 i 是使得 $a_i \neq 0$成立的最小值。注意，由于 $\ell \mid n$， $a_i > 0$。令 $\lambda \in \mathbb{F}_{q^2}^\times$ 的阶为 ℓ。若 $n = \ell^i a_i$ （因此，根据我们的假设，即 n 不是 ℓ的幂，有 $a_i > 1$），则考虑矩阵 $\tilde{s}_0 := \mathrm{diag}(1,\dots,1,\lambda,\dots,\lambda) \in \widetilde{G}^*$，其中前 $n - \ell^i = \ell^i(a_i - 1)$ 个元素为 1，后 ℓ^i 个元素为 λ。若 n 的 ℓ- 进展开至少有两项，则考虑矩阵 $\tilde{s}_0 := \mathrm{diag}(1,\dots,1,\lambda,\dots,\lambda)$，此时前 $n - \ell^i a_i$ 个元素为 1，后 $\ell^i a_i$ 个元素为 λ。注意，在这两种情况下， $\tilde{s}_0$ 都属于 $\mathbf{Z}(P_0^*)$，但不是 ~ ~$[G^*,G^*]$ 中的中心元素。

现在注意到， $s_0 := \iota^*(\tilde{s}_0)$ 的像仍是一个 ℓ-元素。先假设$n \neq 2\ell^i$。在这种情况下，Levi 子群 $\mathbf{C}_{\mathbf{G}^*}(s_0)$ 在 $\mathbf{G}^*$ 中是自正规化的。注意，~ s_0 的中心化子是连通的，因此半单特征标 $\tilde{\chi} \in \mathcal{E}(G, \tilde{s}_0)$ 限制

为 G 的一个不可约特征标。此外， $\tilde{\chi}$ 是其 Lusztig 级数中覆盖 χ 的唯一特征标。因此，要证明最后一个断言，只需说明：若 $\sigma \in E$ 满足 s_0 ，且 $\sigma^*(s_0)$ 与 G^*-共轭，则 $\tilde{s}_0$ 与 $\sigma^*(\tilde{s_0})$ 也 G^*-共轭。为此，可以假设 σ^* 稳定包含 $\tilde{s}_0$ 的对角环面 $\tilde{T}^*$ ，并且当 σ 是图自同构时，其作用为 $\sigma^*(t) = t^{-1}$ ；若 σ^* 是域自同构，则其作用为 $\sigma^*(t) = t^{p_0}$，其中 p_0 是 p 的某个幂。由此可知，对于某个 $z \in$，有 $\sigma^*(s_0) = {}^n s_0 z \mathrm{Z}(\mathrm{G}^*)$，且 $n \in \mathrm{G}^*$。因此， $n \in \mathrm{N}\tilde{\mathrm{G}}^*(\mathrm{C}\tilde{\ }\mathrm{G}^*(\tilde{s}_0)) = \mathrm{C}\tilde{\ }\mathrm{G}^*(\tilde{s}_0)$；考虑 $\tilde{s}_0$ 的结构，即可推出 $\sigma^*(\tilde{s}_0) = \tilde{s}_0$ 。

因此，只需考虑 $n = 2\ell^i$ 的情形。在这种情况下，我们考虑元素 $\tilde{s} := \mathrm{diag}(\lambda, \ldots\ldots, \lambda, \lambda^{-1}, \ldots\ldots, \lambda^{-1})$，其中 ℓ^i 个项分别等于 λ 和 λ^{-1}。注意，$\tilde{\mathbf{G}}^*$ 中 $\tilde{s}$ 的共轭类在非平凡图自同构 γ^* 下保持稳定，因此 $\tilde{\chi}$ 是 γ-稳定的。注意，如果 $\sigma \in E$ 稳定 χ，那么 $\tilde{\chi}^\sigma$ 就被 γ 稳定。然而，由于 $\tilde{\gamma}$ 在 G/G 上的作用是取逆，因此 $\tilde{\chi}$ 是覆盖 χ 且属于对应于阶为 ℓ 的半单元的 Lusztig 级数的唯一 γ-稳定特征标。由此可知， χ 和 $\tilde{\chi}$ 在 E 中再次具有相同的稳定子。□

接下来讨论 $G = \mathrm{D}_4(q)$ 的情形。

引理 *4.10.* 假设 $G = D_4(q)$，且假设 ℓ 为奇数。那么存在某个 $\tilde{s} \in \tilde{P}_0^* \cap Z(P^*)$，它在 G^* 中不是中心的，使得半单特征标 $\tilde{\chi} \in \mathcal{E}(G, \tilde{s})$ 属于 $\tilde{Irr}_0(B_0(\tilde{G}/Z(\tilde{G})))$， $\mathbb{Q}(\tilde{\chi}) \subseteq \mathbb{Q}_\ell$，且 $\ell \nmid [E: E_{\tilde{\chi}}]$。此外，我们有 $1_G \neq Res_G^{\tilde{G}} \tilde{\chi} \in Irr(B_0(G/Z(G)))$。

证明。由于 $\ell \neq 2$，我们有 $\ell \nmid |\mathrm{Z}(G)|$ ，而最后一个结论由第一个结论、引理 4.5 以及 $\tilde{s}$ 在 G^* 中不是中心的这一事实共同推出。此外，根据引理 4.6，我们不妨假设 ℓ 整除某个图自同构的阶，因此 $\ell = 3$。特别地， $\ell \nmid |\mathrm{Z}([G^*, G^*])|$。

在此情形下，令 σ 为一个阶为 3 且对偶为 σ^* 的图自同构。根据引理 4.6 中的论证，只需找到某个 $\tilde{s} \in \mathrm{Z}(P_0^*)$，使得 $\tilde{s}$ 是 σ^*-稳定的。为此，令 $\hat{\ }\tilde{\ }\ \tilde{\ }\ \hat{\ }\tilde{\ }\ \tilde{P}$ 为 $[G^*, G^*]\langle\sigma^*\rangle$ 的一个西罗 3-子群。如果存在 $1 \neq \tilde{s} \in \mathrm{Z}(P) \cap [G^*, G^*]$，则相应的 Lusztig 级数是 σ^*-稳定的。否则，$\mathrm{Z}(P)$ 与 $\tilde{\ }\ \tilde{\ }\ \hat{\ }$ 陪集 $[G^*, G^*]\sigma^*$ 有非平凡交，这意味着 $\mathrm{Z}(P_0^*) \leq \mathrm{Z}(P)$。在这种情况下，任意 $1 \neq \tilde{s} \in \mathrm{Z}(P_0^*)$ 都是σ^*-稳定的。□

5. The generalized Steinberg character and the principal block

5.1. 关于扭曲群的 Dade 群的若干观察。 注意，若 $G = \mathbf{G}^F$ 是拟单的，且 $\ell \mid |Z(G)|$，则要么 $\ell = 2$，要么 G 分别为 $\mathrm{A}_{n-1}(\varepsilon q)$ 型与 $\mathrm{E}_6(\varepsilon q)$ 型，其中$\ell \mid (n, q - \varepsilon)$ 与 $\ell \mid (3, q - \varepsilon)$。结合上一节以及我们对 ℓ 为奇数的强调，我们特别关注后一种情形。

这里我们考虑当 $\tilde{G}$是这些群之一时， $B_0(G)$（相应地， $B_0(G)$）在 GE （相应地， GE）中的 Dade 分歧群。注意，若 q 不是平方，则 $|G\langle F_p\rangle/G|$ 为奇数。在此情形下，斯坦伯格特征标 St_G 满足引理 2.5。再结合下文，我们将特别关注 q 为平方且 $\epsilon = 1$的情形。在下文中，我们暂时放宽 $\mathbf{G}$ 为单且单连通的假设，以便同时处理 $\mathrm{SL}_n(\epsilon q)$ 与 $\mathrm{GL}_n(\epsilon q)$。

引理 *5.1.* 设 $G = \mathbf{G}^F \in \{SL_n(\varepsilon q), GL_n(\varepsilon q)\}$ ，并假设 $2 \neq \ell \mid (q - \varepsilon)$ 与$n = \ell^k$。若 $\sigma \in E_{\ell'}$ 属于 GE 中 $B_0(G)$ 的 *Dade* 群（见引理 *2.4*），则 σ 是一个域自同构，满足 $C_{G\langle\sigma\rangle}(T_\ell) = C_G(T_\ell)\langle\sigma\rangle$，其中 T_ℓ 是 T^F 的一个 *Sylow* ℓ-子群，且 $T \leq G$ 是对角环面。特别地，若 σ 具有偶数阶，则 $\varepsilon = 1$。

证明。我们令 $\mathbf{T}$ 为 $\mathbf{G}$ 的对角环面，F 在其上的作用为 $x \mapsto x^q$（相应地，若 F 为扭的，则为 $x \mapsto x^{-q}$）。设 $T := \mathbf{T}^F$。此处可选取一个域自同构，使其在 T 上的作用为 $x \mapsto x^{p_0}$，而图自同构在 T 上的作用为 $x \mapsto x^{-1}$。特别地，T 被σ正规化。

根据 Dade 群的定义，回忆可知，存在某个 $n \in G$，使得 σn中心化一个包含 T_ℓ的 G 的 Sylow ℓ-子群，其中 $T_\ell \in \mathrm{Syl}_\ell(T)$。然而，根据 [CE04，命题 22.6]，$\mathrm{C}_G(T_\ell) = T$。因此，$n$ 正规化 T。仔细考察 T_ℓ 的元素（例如，对所有 i，j 以及阶为（$q-\varepsilon$）$_\ell$的 ζ，元素 $h_{e_i - e_j}(\zeta)$），并考虑 $\mathrm{N}_{G^F}(\mathbf{T})/\mathbf{T}^F \cong S_n$ 对 T_ℓ的作用，可知 $n \in T$必然成立，且 σ 必须是一个中心化 T_ℓ的域自同构。

现在，最后一个陈述也可由我们的假设 $\ell \mid (q-\epsilon)$推出，因为如果 σ 有偶数阶，那么对某个偶数 f，有 $p_0^f = q$。但由于 σ 中心化 T_ℓ，我们有 ℓ 整除$p_0 - 1$，因此也整除 $q-1$。□

引理 5.2. 若 $G =$ 有理数值特征标集$_6(-q)$ 连同 $\ell = 3 \mid (q+1)$，且 $\sigma \in E$ 属于 $B_0(G)$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ 在 GE 中的 ***Dade*** 群，或属于 $B_0(G)$ 在 GE 中的 ***Dade*** 群，那么 σ 具有奇数阶。

证明。反设存在这样一个 σ，它在$B_0(G)$ 的 Dade 群中且具有偶数阶。又由于 E 是循环的，这就意味着 Dade 群尤其包含唯一的二阶 $\tau \in E$。

考虑 3-中心元素 s，其中心化子在 G^*中具有 $\mathrm{A}_2(-q)^3.3$ 型。注意，相应 Lusztig 级数中的三个半单特征标不可能全都是 σ-稳定的，因为任何偶数阶的$\sim$ $\sim\sigma$ 都会在 $G/G\mathrm{Z}(G)$ 上非平凡作用。不过，注意这些特征标的次数都与 3 互素，而且 $B_0(G)$ 是唯一的最大缺陷幺幂块，因此这些特征标都属于 $B_0(G)$。因此，σ 不可能属于 $B_0(G)$ 的 Dade 群，因为它必须稳定 $B_0(G)$ 的特征标。

$\widetilde{\ }$现在假设 $B_0(G)$ 的 Dade 群包含某个 $\sigma \in E$ 偶数阶的元素，因此$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$它包含 τ。设 $P \in \mathrm{Syl}_\ell(G)$ 是 E-不变的。由于 τ 属于 Dade 群，我们有它 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$作用于 P，因而也作用于 $P := P \cap G \in \mathrm{Syl}_\ell(G)$，其作用与某个 $x \in G$相同。但注意，由于 τ的阶为二，x^3 也以 τ的方式作用于 P。由于 $x^3 \in G\,\mathrm{Z}(\widetilde{G})$，这意味着 τ也属于 $B_0(G)$ 的 Dade 群，这与上文关于 G 的结果矛盾。□

根据前两个引理和上文的讨论，我们可以将注意力集中在以下情形：q 是平方，且 $G = \mathrm{SL}_n(q)$ 或 $G = \mathrm{E}_6(q)$，其中 $\ell \mid (q-1)$。

引理 5.3。设 $G \in \{\mathrm{SL}_n(q)、\mathrm{GL}_n(q)\}$，其中 $n = \ell^k$ 对于某个整数 k 成立，且 $2 \neq \ell \mid (q-1)$。设 $\sigma \in E$ 使得 $G\langle\sigma\rangle$ 是 $B_0(G)$ 在 GE中的 ***Dade*** 分歧群。那么存在一个正则 ℓ-元素 $x \in G$，其在 σ 下不变。

证明。设 ζ是 $n = \ell^k$次单位根，并令 x 为正则元素 $\mathrm{diag}(1, \zeta, \ldots\ldots, \zeta^{n-1})$。根据引理 5.1 的证明，元素 x是 σ-稳定的。□

5.2. 主块与广义 Harish-Chandra 归纳。

这里我们放宽对 $\mathbf{G}$ 的假设，因此 $\mathbf{G}$ 可以是任意连通约化代数群（不一定是单群或单连通群）。

对于有限群 H，用 H_ℓ 表示 ℓ幂阶元素的集合，并用 $H_{\ell'}$ 表示阶与 ℓ 互素的元素的集合（我们也称之为 ℓ'阶），将是有用的。若 K 是 H 的特征 0 分裂域，我们用 $CF(H, K)$表示从

H 到 K的类函数集。对于 $x \in H_\ell$，我们回顾 [CE04 定义 5.7] 中的映射

$$d^x : CF(H,K) \to CF(\mathrm{C}_H(x), K),$$

其定义使得，对于 $\chi \in CF(H,K)$ 与 $y \in \mathrm{C}_H(x)$，若 y具有ℓ'-阶，则有 $d^x(\chi)(y) = \chi(xy)$，否则有 $d^x(\chi)(y) = 0$。（注意，我们对任意群H使用相同的记号 d^x，后者应从上下文中清楚看出。）

我们需要如下对 [CE04 定理 21.4] 的推广。

引理 5.4. 设 $\mathbf{G}$ 为任意约化群，满足 $\mathbf{G} = \mathbf{G}\langle\sigma\rangle$，其中 $\mathbf{G}:= \mathbf{G}^\circ$。设 $\mathbf{P}$ 为 $\mathbf{G}$ 的一个抛物子群，包含一个 F-稳定的 *Levi* 子群 $\mathbf{L}$，并假设 $(\mathbf{L}, \mathbf{P})$ 是σ-稳定的。则对任意 σ-稳定的、具有 ℓ-幂阶的 $x \in \mathbf{L}^F$，我们有

$$d^x \circ {}^*R_{\mathbf{L}\langle\sigma\rangle\subset\mathbf{P}\langle\sigma\rangle}^{\mathbf{G}\langle\sigma\rangle} = {}^*R_{\mathrm{C}^\circ_{\mathbf{L}}(x)\langle\sigma\rangle\subset\mathrm{C}^\circ_{\mathbf{P}}(x)\langle\sigma\rangle}^{\mathrm{C}^\circ_{\mathbf{G}}(x)\langle\sigma\rangle} \circ d^x.$$

证明。记 $G := \mathbf{G}^F$。我们的第一个观察是：对于 G 的类函数 χ，我们有$d^1(\chi) = \delta \cdot \chi$，其中 δ 是 $(G\langle\sigma\rangle)_{\ell'}$ 的特征函数。由此，由应用于函数 δ 的[DM94 命题 2.11] 可得 $d^1 \circ {}^*R^{\mathbf{G}\langle\sigma\rangle}{}_{\mathbf{L}\langle\sigma\rangle\subset\mathbf{P}\langle\sigma\rangle} = {}^*R^{\mathbf{G}\langle\sigma\rangle}_{\langle\sigma\rangle\subset\mathbf{LP}\langle\sigma\rangle} \circ d^1$。利用这一观察，并结合 $d^x = d^1 \circ d^x$ 这一事实，可知对所有类函数，方程两边在阶可被 ℓ 整除的元素上为零。因此只需考虑 ℓ'-阶的元素。

我们也注意到，由于（$\mathbf{L}$,$\mathbf{P}$）和 x 是 σ-稳定的，因此$\mathrm{C}^\circ_{\mathbf{G}}(x)\langle\sigma\rangle$ 是一个约化群，其抛物子群为$\mathrm{C}^\circ_{\mathbf{P}}(x)\langle\sigma\rangle$，Levi补为$\mathrm{C}^\circ_{\mathbf{L}}(x)\langle\sigma\rangle$，这是在[DM94]的意义下。

现设 $\psi \in$不可约特征标$(\mathbf{G}^F)$且 $l \in \mathrm{C}^{\mathbf{L}^F\langle\sigma\rangle}(x)_{\ell'}$。注意$\mathrm{C}^{\mathbf{L}^F\langle\sigma\rangle}(x)_{\ell'} \subset \mathrm{C}^\circ_{\mathbf{L}}(x)^F\langle\sigma\rangle$。设 $l = tv$为 l的 Jordan 分解。由于 x 与 l交换，我们有$(xl)_{p'} = xt$和$(xl)_p = v$。因此，由 [DM94，推论2.9]

$$d^x({}^*R^{\mathbf{G}\langle\sigma\rangle}_{\mathbf{L}\langle\sigma\rangle\subset\mathbf{P}\langle\sigma\rangle}(\psi))(l) = {}^*R^{\mathbf{G}\langle\sigma\rangle}_{\mathbf{L}\langle\sigma\rangle\subset\mathbf{P}\langle\sigma\rangle}(\psi)(xl) = {}^*R^{\mathrm{C}^\circ_{\mathbf{G}}(xt)\langle xl\rangle}_{\mathrm{C}^\circ_{\mathbf{L}}(xt)\langle xl\rangle}(\mathrm{Res}^{G\langle\sigma\rangle}_{\mathrm{C}^\circ_G(xt)\langle xl\rangle}(\psi))(xl)$$

而 [DM94，推论2.9] 也给出

$${}^*R^{\mathrm{C}^\circ_{\mathbf{G}}(x)\langle\sigma\rangle}_{\mathrm{C}^\circ_{\mathbf{L}}(x)\langle\sigma\rangle}(d^x(\psi))(l) = {}^*R^{\mathrm{C}^\circ_{\mathbf{G}}(xt)\langle l\rangle}_{\mathrm{C}^\circ_{\mathbf{L}}(xt)\langle l\rangle}(\mathrm{Res}^{\mathrm{C}^\circ_G(x)\langle\sigma\rangle}_{\mathrm{C}^\circ_G(xt)\langle l\rangle}(d^x(\psi)))(l)$$

注意到 $\mathrm{C}_{\mathbf{G}}(xt) \subset \mathrm{C}_{\mathbf{G}}(x)$，因为 l 的阶为 ℓ'，所以 $(xt)_\ell = x$。现在

$$\mathrm{Res}^{\mathrm{C}_G(x)\langle\sigma\rangle}_{\mathrm{C}^\circ_G(xt)\langle l\rangle}(d^x(\psi)) = d^1(t_x(\mathrm{Res}^{\mathrm{C}_G(x)\langle\sigma\rangle}_{\mathrm{C}^\circ_G(xt)\langle l\rangle}(\psi))),$$

其中，对于中心元 $x \in \mathrm{Z}(\mathrm{C}^\circ_{\mathbf{G}}(xt)\langle l\rangle)$，$t_x(f)(y) := f(xy)$。现在，根据 DM94 命题 2.6]，$t_x$ 和 d^1 与 ${}^*R^{\mathrm{C}^\circ_{\mathbf{G}}(xt)\langle l\rangle}{}_{\mathrm{C}^\circ_{\mathbf{L}}(xt)\langle l\rangle}$ 交换；或者根据证明开头的第一个观察，这意味着

$${}^*R^{\mathrm{C}^\circ_{\mathbf{G}}(xt)\langle l\rangle}_{\mathrm{C}^\circ_{\mathbf{L}}(xt)\langle l\rangle}(\mathrm{Res}^{\mathrm{C}^\circ_G(x)}_{\mathrm{C}^\circ_G(xt)}(d^x(\psi)))(l) = {}^*R^{\mathrm{C}^\circ_{\mathbf{G}}(xt)\langle l\rangle}_{\mathrm{C}^\circ_{\mathbf{L}}(xt)\langle l\rangle}(\mathrm{Res}^{\mathrm{C}^\circ_G(x)}_{\mathrm{C}^\circ_G(xt)}(\psi))(xl).$$

因此，如所述，两边相等。 □

接下来的两个引理将确立一种情形，在这种情形下，广义斯坦伯格特征标必定属于主块。

引理 5.5。设 $\mathbf{G}$ 是一个约化群，且 $\mathbf{G} = \mathbf{G}\langle\sigma\rangle$，其中 $\mathbf{G} := \mathbf{G}^\circ$。设 $\mathbf{T}$ 是一个F-稳定的极大环面，包含于 $\mathbf{G}$ 的一个 F-稳定的 *Borel* 子群 $\mathbf{B}$ 中，使得 $(\mathbf{T}, \mathbf{B})$ 是

σ-稳定。令 $\hat{\chi} := \mathrm{St}_{G\langle\sigma\rangle}$ 为广义斯坦伯格特征标（见定义 *3.3*）。那么我们有 ${}^*R^{\mathbf{G}\langle\sigma\rangle}_{\mathbf{T}\langle\sigma\rangle}(\hat{\chi}) = 1_{\mathbf{T}^F\langle\sigma\rangle}$。

证明。记 $B := \mathbf{B}^F$ 和 $T := \mathbf{T}^F$。回顾引理 4.3 的证明，$\hat{\chi}$ 满足 $\mathrm{Res}^{G\langle\sigma\rangle}_{B\langle\sigma\rangle}(\hat{\chi}) = \mathrm{Res}^{G\langle\sigma\rangle}_{B\langle\sigma\rangle}(\mathrm{St}_{G\langle\sigma\rangle}) = \text{诱导}^{B\langle\sigma\rangle}_{T\langle\sigma\rangle}(1_{T\langle\sigma\rangle})$。因此，

$$\langle R^{\mathbf{G}\langle\sigma\rangle}_{\mathbf{T}\langle\sigma\rangle}(1_{T\langle\sigma\rangle}), \mathrm{St}_{G\langle\sigma\rangle}\rangle = \langle \text{诱导}^{G\langle\sigma\rangle}_{B\langle\sigma\rangle}(1_{B\langle\sigma\rangle}), \mathrm{St}_{G\langle\sigma\rangle}\rangle = \langle 1_{B\langle\sigma\rangle}, \text{诱导}^{B\langle\sigma\rangle}_{T\langle\sigma\rangle}(1_{T\langle\sigma\rangle})\rangle = \langle 1_{T\langle\sigma\rangle}, 1_{T\langle\sigma\rangle}\rangle = 1$$

连续应用两次 Frobenius 互反律。

现在令 ρ 为 $\mathbf{T}^F$ 的正则特征标，因此 $\hat{\rho} := \text{诱导}^{T\langle\sigma\rangle}_{T}(\rho)$ 是 $T\langle\sigma\rangle$ 的正则特征标。根据经典 Harish-Chandra 理论（例如应用 [CE04，命题 19.6]），我们有 $\langle R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{T}}(\rho), \mathrm{St}_G\rangle = \langle R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{T}}(1_T), \mathrm{St}_G\rangle = 1$。我们还有

$$R^{\mathbf{G}\langle\sigma\rangle}_{\mathbf{T}\langle\sigma\rangle} \circ \mathrm{Ind}^{T\langle\sigma\rangle}_{T} = \mathrm{Ind}^{G\langle\sigma\rangle}_{G} \circ R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{T}} \tag{1}$$

由 [DM94，推论 2.4(ii)] 根据伴随性可得。因此，

$$\langle R^{\mathbf{G}\langle\sigma\rangle}_{\mathbf{T}\langle\sigma\rangle} \mathrm{Ind}^{T\langle\sigma\rangle}_{T}(\rho), \hat{\chi}\rangle = \langle \mathrm{Ind}^{G\langle\sigma\rangle}_{G} R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{T}}(\rho), \hat{\chi}\rangle = \langle R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{T}}(\rho), \chi\rangle = 1,$$

由 Harish-Chandra 诱导的正性可知，对于任意非平凡的 $\hat{\theta} \in \mathrm{Irr}(T\langle\sigma\rangle)$，都有 $\langle R^{\mathbf{G}\langle\sigma\rangle}_{\mathbf{T}\langle\sigma\rangle}\hat{\theta}, \hat{\chi}\rangle = 0$。□

引理 5.6。沿用引理 *5.5* 的记号。假设存在某个 σ-稳定元素 $x \in \mathbf{T}^F_\ell$，它是正则的（即满足 $\mathrm{C}^\circ_{\mathbf{G}}(x) = \mathbf{T}$），其中 $\mathbf{T}$ 是 $\mathbf{G}$ 的最大分裂环面。那么 $R^{\mathbf{G}\langle\sigma\rangle}_{\mathbf{T}\langle\sigma\rangle}(1_{T\langle\sigma\rangle})$ 的每个不可约成分都属于主块。

证明。我们仿照 CE04 定理 21 的证明，[以引理 5.4 代替 [CE04 定理 21]。设 $\hat{\chi} \in \mathrm{Irr}(G\langle\sigma\rangle)$ 是 $R^{\mathbf{G}\langle\sigma\rangle}_{\mathbf{T}\langle\sigma\rangle}(1_{T\langle\sigma\rangle})$ 的一个不可约成分。注意到

$${}^*R^{\mathbf{G}\langle\sigma\rangle}_{\mathbf{T}\langle\sigma\rangle}(\hat{\chi}) = \sum_{\hat{\theta}\in\mathrm{Irr}(T\langle\sigma\rangle|1_T)} n_{\hat{\theta}}\hat{\theta}$$

由 Harish-Chandra 归纳的正性，并再次应用 [DM94 推论 2.4]，可得。注意，对求和中的每个 $\hat{\theta}$，都有 $d^x(\hat{\theta}) = d^1(\hat{\theta})$，因为 $x \in T$ 以及求和中的每个（线性）$\hat{\theta}$ 在 T 上均为平凡的。因此，

$$f := B_0(T\langle\sigma\rangle)d^x({}^*R^{\mathbf{G}\langle\sigma\rangle}_{\mathbf{T}\langle\sigma\rangle}(\hat{\chi})) = \sum_{\hat{\theta}\in\mathrm{Irr}(T\langle\sigma\rangle|1_T)\cap\mathrm{Irr}(B_0(T\langle\sigma\rangle))} n_{\hat{\theta}}d^1(\hat{\theta}),$$

其中（滥用记号），左边表示乘以对应于 $B_0(T\langle\sigma\rangle)$ 的幂等元。

注意，每个 $n_{\hat{\theta}}$ 都是非负整数，每个 $d^1(\hat{\theta})$ 都是不可约 Brauer 特征，且 $n_{1_{T\langle\sigma\rangle}} \neq 0$。这意味着 $f \neq 0$，因而 $\langle f, f\rangle \neq 0$。因此，存在某个 $\theta \in \mathrm{Irr}(T\langle\sigma\rangle \mid 1_T) \cap \mathrm{Irr}(B_0(T\langle\sigma\rangle))$，使得 $\langle f, d^1(\hat{\theta})\rangle \neq 0$。

根据 Brauer 第一主定理，只需证明 $d^x(\hat{\chi}) \in CF(\mathrm{C}^{G\langle\sigma\rangle}(x)\ K)$ 在 $\mathrm{C}^{G\langle\sigma\rangle}(x)$ 的主块上有非零投影。注意，由于 $\mathrm{C}^\circ_{\mathbf{G}}(x) = \mathbf{T}$，我们有 $d^x(\hat{\chi}) = {}^*R^{\mathrm{C}^\circ_{\mathbf{G}}(x)\langle\sigma\rangle\,\mathrm{C}^\circ_{\mathbf{T}}(x)\langle\sigma\rangle}(d^x(\hat{\chi}))$，且 $\hat{\theta} = R^{\mathrm{C}^\circ_{\mathbf{G}}(x)\langle\sigma\rangle\,\mathrm{C}^\circ_{\mathbf{T}}(x)\langle\sigma\rangle}(\hat{\theta})$。于是我们有

$$\langle B_0(T\langle\sigma\rangle)d^x(\hat{\chi}), \hat{\theta}\rangle_{T\langle\sigma\rangle} = \langle B_0(T\langle\sigma\rangle)d^x(\hat{\chi}), R^{\mathrm{C}^\circ_{\mathbf{G}}(x)\langle\sigma\rangle}_{\mathrm{C}^\circ_{\mathbf{T}}(x)\langle\sigma\rangle}(\hat{\theta})\rangle_{\mathrm{C}^\circ_{\mathbf{G}}(x)^F\langle\sigma\rangle}$$

根据引理 5.4，这也等同于 $\langle B_0(T\langle\sigma\rangle)d^x(*R^{\mathbf{G}\langle\sigma\rangle}_{\mathbf{T}\langle\sigma\rangle}(\hat{\chi})),\hat{\theta}\rangle_{T\langle\sigma\rangle}$，由上文可知其非零。这表明 $d^x\hat{\chi}$ 在 $\mathrm{C}^\circ_{\mathbf{G}}(x)^F\langle\sigma\rangle$ 的主块上有非零投影。按照 CE04 定理 21. 的证明最后七行，14] 即可得出所述结论。□

5.3. **关于主块的推论**。现在我们证明，在某些对本文目的而言所需的情形中，若 St_G 属于主块，则扩张后的斯坦伯格特征标也属于主块。（不过，请读者参见下文例 8.11，看看这一点或许出乎意料地并非总是成立！）

推论 5.7。假设 $G=\mathrm{SL}_n(q)$，其中 $n=\ell^k$，对某个整数 k 成立，且 $2\neq\ell\mid(q-1)$。

那么斯坦伯格特征标 St_G 有一个到 GE 的有理值扩张，且该扩张属于 $B_0(GE)$。

证明。首先指出，$\mathrm{St}_{\tilde{G}}$（它扩张了 St_G）可扩张为 GE的一个有理特征标 $\mathrm{St}_{\tilde{G}E}$，由注 3.4 可知。（另见 [S92]。）此外，回忆一下，E 是阿贝尔群，因此每个位于 $\mathrm{St}_{\tilde{G}}$ 之上的特征标都是一个扩张。

令 $\sigma\in E$ 满足：$G\langle\sigma\rangle$ 是 GE 中 $B_0(G)$的 Dade 分歧群，并令 $\hat{\chi}:=\mathrm{St}_{\tilde{G}\langle\sigma\rangle}$。回忆注 3.4，$\hat{\chi}$ 是 St_G的有理扩张。由引理 5.3，存在一个如引理 5.6 中所述的 x，因此结合引理 5.5，可得 $\hat{\chi}$ 属于$B_0(G\langle\sigma\rangle)$。

注意，$B_0(GE)$是位于 $B_0(G\langle\sigma\rangle)$之上的唯一块（见引理 2.4）。特别地，注意有理特征标 $\mathrm{St}_{\tilde{G}E}$扩张了 $\hat{\chi}$，因此必定位于主块中。□

注意，像引理 5.6 中那样的正则元素 x 并非在所有情况下都必然存在。在某些此类情况下，我们可以像下面这样进行归纳。

引理 5.8. 假设 $G=$有理数值特征标集$_6(q)$，其中 $\ell=3$且 $\ell\mid(q-1)$。那么，斯坦伯格特征标 St_G 有一个到 GE 的有理值扩张，且该扩张属于 $B_0(GE)$。

证明。与前面一样，注意到 St_G 有一个到 GE 的有理扩张，且 E 是阿贝尔群。令$\sigma\in E$ 满足：$G\langle\sigma\rangle$ 是 $G\langle F_p\rangle$中 $B_0(G)$ 对应的 Dade 分歧群。我们首先断言，$\hat{\chi}:=\mathrm{St}_{G\langle\sigma\rangle}$ 属于 $B_0(G\langle\sigma\rangle)$。

注意到，最大分裂环面 $T=\mathbf{T}^F$ 中存在一个元素 x，满足 x 是 σ-稳定的，且其中心化子 $\mathbf{H}:=\mathrm{C}_{\mathbf{G}}(x)$ 的类型为 $\mathrm{A}_2(q)^3$。此外，存在一个 σ-稳定的元素 $y\in H:=\mathbf{H}^F$，其阶为 3，并满足 $\mathrm{C}^\circ_{\mathbf{H}}(y)^F=T$。将引理 5.6 应用于视为 H的自同构的 σ，可知 $R^{\mathbf{H}\langle\sigma\rangle}_{\mathbf{T}\langle\sigma\rangle}(1_{T\langle\sigma\rangle})$ 的所有不可约成分都属于主块。

考虑

$$\langle d^x\hat{\chi},R^{\mathrm{C}^\circ_{\mathbf{G}}(x)\langle\sigma\rangle}_{\mathrm{C}^\circ_{\mathbf{T}}(x)\langle\sigma\rangle}(1)\rangle_{\mathrm{C}^\circ_{\mathbf{G}}(x)^F\langle\sigma\rangle}.$$

根据引理 5.4 和引理 5.5，这等同于

$$\langle d^{x*}R^{\mathbf{G}\langle\sigma\rangle}_{\mathbf{T}\langle\sigma\rangle}(\hat{\chi}),d^1(1_{T\langle\sigma\rangle})\rangle_{T\langle\sigma\rangle}=\langle d^x(1_{T\langle\sigma\rangle}),d^1(1_{T\langle\sigma\rangle})\rangle_{T\langle\sigma\rangle}=1/|T_\ell|\neq0,$$

由此可知，正如引理 5.6 证明的结尾所示，$R^{\mathrm{C}^\circ_{\mathbf{G}}(x)\langle\sigma\rangle}_{\mathrm{C}^\circ_{\mathbf{T}}(x)\langle\sigma\rangle}(1)=R^{\mathbf{H}\langle\sigma\rangle}_{\mathbf{T}\langle\sigma\rangle}(1)$ 的所有不可约成分都属于 $H\langle\sigma\rangle$ 的主块。相同的证明表明，$\mathrm{St}_{\tilde{G}\langle\sigma\rangle}$ 属于主块，其中取 $G\langle\sigma\rangle$ 为 $G\langle F_p\rangle$ 中 $B_0(G)$ 的 Dade 群。

若 σ的阶为奇数，则由引理 2.6，$\mathrm{St}_{\tilde{G}\langle\sigma\rangle}$是 $\mathrm{St}_{\tilde{G}}$到$\sim G\langle\sigma\rangle$的唯一有理扩张，因此必定位于到 GE的某个有理扩张之下。若 σ 的阶

~的阶为偶数，则 St$_{\tilde{G}}$ 到 $G\langle F_p\rangle$ 的两个有理扩张必定位于 St$_{\tilde{G}}$ 到 $G\langle\sigma\rangle$的两个有理扩张之上。特别地，在两种情况下，St$_{\tilde{G}\langle\sigma\rangle}$ 到 $G\langle F_p\rangle$ 都有一个有理扩张，记作 χ_1,~ ~，它位于主块中，因为这是 $G\langle\sigma\rangle$之上的唯一块。

~现在注意到，St$_{\tilde{G}}$到 $G\langle\tau\rangle$的两个扩张（其中 τ是非平凡图自~态射）必定是有理值的，因为存在到 GE的有理扩张。然后将~ ~引理 2.3 应用于 χ_1 及到 $G\langle\tau\rangle$ 的这两个扩张，可得 GE 中位于 χ_1 之上的两个特征标必定是有理值的。特别地，其中至少有一个属于主块，证明完毕。□

本节最后考察铃木群和里群。

引理 5.9. 设 S 是单铃木群或里群 ${}^2\mathrm{F}_4(q^2)'$、 ${}^2\mathrm{G}_2(q^2)'$，或 ${}^2\mathrm{B}_2(q^2)$ ，并设ℓ 是整除 $|S|$ 但不整除 q^2的任意素数。则 S 满足定义 *2.1* 中关于$(\mathbb{Q},\ell)$的条件 *(⋆)*。

证明。注意到，蒂茨群 ${}^2\mathrm{F}_4(2)'$ 或 $S = {}^2\mathrm{G}_2(3)' \cong \mathrm{PSL}_2(8)$ 的情形可在 GAP 中直接验证，因此我们可以假设 $S \in \{{}^2\mathrm{F}_4(q^2), {}^2\mathrm{G}_2(q^2), {}^2\mathrm{B}_2(q^2)\}$ 分别满足 $q^2 = 2^{2n+1}$， 3^{2n+1}， 2^{2n+1}，且 $n \geq 1$。

这里，斯坦伯格特征标 St_S 是有理值的，属于 $\mathrm{Irr}_0(B_0(S))$，并可扩张到 $\mathrm{Aut}(S)$。此外，$\mathrm{Aut}(S)/S$ 是奇数阶循环群。令 $SE_{\ell'} \lhd \mathrm{Aut}(S)$，其中 $SE_{\ell'}/S$ 是 $\mathrm{Aut}(S)/S$中的 ℓ-补群。由引理 2.6，St_S 存在唯一的有理扩张 $\widetilde{\chi}$ 到 $SE_{\ell'}$ 。此外，由引理 2.5，St_S 可扩张为 $B_0(M)$ 上的有理值特征标 $\hat{}\chi$，其中 $M \leq SE_{\ell'}$ 是 Dade 分歧群。还要注意，$\hat{}\chi$ 是 χ 到 M的唯一有理扩张。因此，$\mathrm{Res}_M^{SE_{\ell'}}(\widetilde{\chi}) = \hat{}\chi$。由引理 2.4 可知，必有 $\widetilde{\chi} \in \mathrm{Irr}_0(B_0(SE_{\ell'}))$。还要注意，$\ell \nmid o(\widetilde{\chi})$，因为 $S \leq [SE_{\ell'}, SE_{\ell'}]$，所以 $SE_{\ell'}$ 的线性特征标的阶为 ℓ'。

现在，$\mathrm{Aut}(S)/SE_{\ell'}$ 是一个 ℓ-群，因此 $B_0(\mathrm{Aut}(S))$ 是覆盖 $B_0(SE_{\ell'})$ 的唯一块。于是，由于 $\ell \nmid o(\widetilde{\chi})\widetilde{\chi}(1)$，根据 [Na18，推论 6.4]，，存在 $\widetilde{\chi}$ 到 $\mathrm{Aut}(S)$ 的典范扩张，它必为有理数值，且必然属于 $B_0(\mathrm{Aut}(S))$。证明完毕。□

6. Proof of Theorem A

最后，我们在此运用前几节的结果证明以下定理，由此得到定理 A。

定理 6.1. 设 S 是定义在特征 p 上的李型单群，且 $\ell \neq p$ 是整除 $|S|$ 的素数。则存在一个非平凡特征 $\chi \in \mathit{Irr}_0(B_0(S))$，其中 $B_0(S)$ 是 S 的主 ℓ-块，并且 χ 可扩张为一个特征标 $\hat{}\chi \in \mathit{Irr}_0(B_0(\mathrm{Aut}(S)\chi))$，满足$\mathbb{Q}(\hat{}\chi) \subseteq \mathbb{Q}_\ell$，且 $\ell \nmid |\mathrm{Aut}(S) : \mathrm{Aut}(S)_\chi|$。特别地，$S$ 对 $(\mathbb{Q}_\ell, \ell)$ 满足定义 *2.1* 中的条件 *(⋆)*。

证明。我们可以写成 $S := G/\mathrm{Z}(G)$，其中 $G := \mathbf{G}^F$，这里 F是一个 Steinberg 端同态，而 $\mathbf{G}$ 是一个单连通简单代数群。由引理 5.9，我们还可以假设 F 是一个 Frobenius 端同态。我们有 $\mathrm{Aut}(S) = \widetilde{S} \rtimes E$，其中 $E = E(\mathbf{G}^F)$ 如前所述，而 $\widetilde{S} = \widetilde{G}/\mathrm{Z}(\widetilde{G})$，其中 $\widetilde{G} = \tilde{}\mathbf{G}^F$ 如前所述。

我们可以假设 ℓ 是奇数，因为若 $\ell = 2$，则根据 [G，推论 1.3]，每个奇数次数的有理值特征标都属于主块。特别地，在这种情况下，斯坦伯格特征标 $\chi = \mathrm{St}_G$ 符合条件，因为我们知道，定义 3.3 中的扩张特征标 $\mathrm{St}_{\tilde{G}E}$ 是有理值的（见注 3.4）。（ [LMNT]，也利用 [NT10]中的结果声称了这种情况。）

接下来，假设 $G = \mathrm{SL}_n(\epsilon q)$，其中 $\ell \mid (q-\epsilon)$ 且 $n = \ell^k$；或者假设 $G = \mathrm{E}_6(\epsilon q)$，其中$\ell = 3 \mid (q-\epsilon)$。那么根据推论 5.7 和引理 5.8，我们可以假设 $\epsilon = -1$。但在~这种情况下，由引理 5.1 和 5.2 可知，~ ~GE 中 $B_0(G)$ 的 Dade 分歧群 M 为 $G\langle\sigma\rangle$，其中 σ 的阶为奇数。根据引理 2.5，主块 $B_0(M)$ 包含 St $\tilde{G}$ 到 M 的唯一有理值扩张。接着应用引理 2.4（并回想~注 3.4），定义 3.3 中的扩张斯坦伯格特征标 St$_{\tilde{GE}}$ 属于 $B_0(GE)$，且为有理值。

因此，我们可以假设 $\ell \nmid |\mathrm{Z}(G)|$ 或 $G = \mathrm{SL}_n(\epsilon q)$，且满足 $\ell \mid (n, q-\epsilon)$，但 n 不是 ℓ 的幂。由引理 4.6、4.7、引理 4.9 和引理 4.10，存在某个非平凡的~ ~ ~ ~半单 $\tilde{\chi} \in$ 不可约特征标$_0(B_0(S))$，其中 $S := G/\mathrm{Z}(G)$，且 $\mathbb{Q}(\tilde{\chi}) \subseteq \mathbb{Q}_\ell$，以及 $\ell \nmid [E : E_{\tilde{\chi}}]$。

~注意，$\mathrm{Aut}(S)_{\tilde{\chi}} = SE_{\tilde{\chi}}$ 包含 Aut(S) 的 Sylow ℓ-子群。若 $\ell \nmid |Z(G)|$，根据引理 4.5，$\tilde{\chi}$ 限制为某个非平凡的 $\chi \in$ 不可约特征标$_0(B_0(S))$。若情况是 $G = \mathrm{SL}_n(\epsilon q)$ 且$\ell \mid (n, q-\epsilon)$，则根据引理 4.9，同样成立。此外，在这些情形下，同样的引理~ ~给出 $E_\chi = E_{\tilde{\chi}}$，因此 $\ell \nmid |\mathrm{Aut}(S):\mathrm{Aut}(S)_\chi|$，因为 $\mathrm{Aut}(S)_\chi = SE_\chi = SE_{\tilde{\chi}}$；并且显然$\mathbb{Q}(\chi) \subseteq \mathbb{Q}(\tilde{\chi}) \subseteq \mathbb{Q}_\ell$。

注意，根据 [GM20, 2.6.10(d), Rem. 3.4，$\langle\tilde{\chi}, D_{\tilde{G}}(\Gamma)\rangle = \pm 1$。其中 Γ 是 G 的 Gelfand~ Graev 特征标。记作 $E' = E_{\tilde{\chi}} \cap E_{\ell'} = E_\chi \cap E_{\ell'}$。根据引理 4.4，存在唯一的 $\bar{\chi} \in$Irr($\widetilde{G}E'$)，满足 $\langle\bar{\chi}$, $D_{\widetilde{G}E'}(\hat{}\Gamma)\rangle = \pm 1$，并扩张 $\tilde{\chi}$，且满足 $\mathbb{Q}(\bar{\chi}) = \mathbb{Q}(\tilde{\chi}) \subseteq \mathbb{Q}_\ell$。由 Hiss 的结果 [Hi90],，我们有 $\langle\tilde{\chi}, D_{\widetilde{G}}$ (Γ_1)$\rangle \neq 0$，因此实际上 $\langle\bar{\chi}, D_{\widetilde{GE'}}(\Gamma_1)\rangle = \pm 1$；根据引理 4.3，我们有 $\bar{\chi} \in$ Irr($B_0(GE')$)。（也就是说，$\bar{\chi}$ 是 χ 到 $B_0(S(E_\chi \cap E_{\ell'}))$ 的一个扩张。）

现在，注意到 $E_\ell \lhd E$。暂且假设 $\ell \nmid |\mathrm{Z}(G)|$。那么 $\ell \nmid o(\tilde{\chi})$，因为~ ~ ~ ~$\ell \nmid |$ Z(G)|，所以 $\ell \nmid [S\colon S] = |S|/[S, S]$。接着，我们可以像 Na18，推论 6.4] 中那样，令 θ 为~$\tilde{\chi}$ 到 SE_ℓ 的典范扩张。于是 $\mathbb{Q}(\theta) = \mathbb{Q}(\tilde{\chi})$，且 θ 是 E'-不变的。因此，根据引理 2.3，存在唯一的 $\tilde{\chi}$到 SE_χ 的扩张 $\hat{}\chi$，同时扩张 θ 和 $\bar{\chi}$，并且我们有$\mathbb{Q}(\hat{}\chi) = \mathbb{Q}(\theta) = \mathbb{Q}(\bar{\chi}) = \mathbb{Q}(\tilde{\chi}) \subseteq \mathbb{Q}_\ell$。

若进一步假设 $\ell \neq 3$ 或 $G \neq \mathrm{D}_4(q)$，则 $E' \lhd E_\chi$；又由于 E_χ/E' 是一个 ℓ-群，~$\hat{}\chi$ 属于主块（即 $B_0(SE')$ 上方的唯一块）。

现在假设 $\ell = 3$ 且 $G = \mathrm{D}_4(q)$。令 E'' 为 E' 与 E中域自同构群的交；回顾一下，这些自同构在 E中是中心的。于是我们有 $E'' \lhd E_\chi$、$E_\ell \lhd E_\chi$，且~ ~ ~ $GE_\ell E'' \lhd GE_\ell E' = GE_\chi$的指数至多为 2。如上所述，存在 θ 与 Res$^{GE'}_{GE''}(\tilde{\chi})$ 到 $\widetilde{G}E_\ell E''$的唯一公共扩张~$\hat{}\theta$；它的取值必在 $\mathbb{Q}(\tilde{\chi})$ 中，且为 E'-不变，并属于主块（因为 $\widetilde{G}E_\ell E''/\widetilde{G}E''$ 是一个 ℓ-群）。于是，由于 $\hat{}\chi$ 位于 $\hat{}\theta$之上，我们看到~ ~ ~

最后，我们可以取 θ 和 $\bar{\chi}$ 到 $SE_{\widetilde{\chi}} = SE_{\chi}$的唯一公共扩张 $\hat{\chi}$，再次应用引理 2.3，并得到 $\mathbb{Q}(\hat{\chi}) \subseteq \mathbb{Q}_\ell$；由于 $SE_{\widetilde{\chi}}/SE'$ 是一个 ℓ-群，$\hat{\chi}$ 属于主块。□

定理 *A* 的证明。根据 [LMNT] 中证明的约化定理（见定理 2.2），只需知道每个阶可被 ℓ 整除的有限非阿贝尔单群都满足定义 2.1 中关于（$\star$，ℓ）的条件（$\mathbb{Q}_\ell$）。对于特征 $p = \ell$ 下定义的李型单群，这由 [LMNT，命题 3.6] 得出。此外，对于所有素数 ℓ，关于（$\mathbb{Q}$，ℓ）的条件以及交错单群的情形，均由 [LMNT，命题 3.7] 得出。在 [LMNT], 中，还使用 GAP 检验了散在群满足该条件的情形。因此，剩下的情形是 S 为特征 $p \neq \ell$下定义的李型单群。这个最后的情形即为定理 6.1，由此完成证明。□

7. Block theory for disconnected reductive groups

本节的结果推广了前几节中的许多思想，也可能具有独立的研究价值。更确切地说，我们旨在为非连通约化群的块发展一套块理论。

为此，设 $\hat{\mathbf{G}}$ 是一个配备 Frobenius 端同态 F的约化群，并令$\mathbf{G}$ 为其单位元的连通分支。回顾一下，$\hat{\mathbf{G}}$ 的闭子群$\mathbf{P}'$ 称为抛物子群，当且仅当$\mathbf{P} := \mathbf{P}'^{\circ}$是$\mathbf{G}$的抛物子群。于是，若$\mathbf{L}$ 是$\mathbf{G}$ 中 $\mathbf{P}$ 的 Levi 子群，则$\mathbf{L}' := \mathrm{N}_{\hat{\mathbf{G}}}(\mathbf{P}', \mathbf{L})$ 称为$\mathbf{P}$的 Levi 子群。

特别地，抛物子群 $\mathbf{P}'$ 的 Levi 子群为 $\mathrm{N}_{\mathbf{P}'}(\mathbf{L})$，其中 $\mathbf{L}$ 是 $\mathbf{P}$ 的 Levi 子群。此外，$\mathrm{N}_{\hat{\mathbf{G}}}(\mathbf{L}, \mathbf{P})$。（注意，这就是 [DM94] 中所谓的“抛物子群”及“Levi 子群”。）显然，$\mathbf{P} \leq \mathbf{P}' \leq \hat{\mathbf{P}}$ 且 $\mathbf{L} \leq \mathbf{L}' \leq \hat{\mathbf{L}}$。不过请注意，若 $\mathbf{L}, \mathbf{L}', \hat{\mathbf{L}}$ 是 F-稳定的，则有

$$\mathrm{Res}^{\hat{\mathbf{L}}^F}_{\mathbf{L}'^F} \circ {}^*R^{\hat{\mathbf{G}}}_{\hat{\mathbf{L}} \subset \hat{\mathbf{P}}} = {}^*R^{\hat{\mathbf{G}}}_{\mathbf{L}' \subset \mathbf{P}'} = {}^*R^{\mathbf{G}\mathbf{L}'}_{\mathbf{L}' \subset \mathbf{P}'} \circ \mathrm{Res}^{\hat{\mathbf{G}}^F}_{(\mathbf{G}\mathbf{L}')^F}, \tag{2}$$

正如 DM94 命题 2.3] 的证明所示。

注释 7.1. 注意，对于任意 $x \in \mathbf{G}$，中心化子 $\mathrm{C}_{\hat{\mathbf{G}}}(x)$ 仍是一个约化群，其抛物子群为 $\mathrm{C}_{\hat{\mathbf{P}}}(x)$，而该抛物子群的 Levi 子群为 $\mathrm{C}_{\hat{\mathbf{L}}}(x)$。注意，与上述情形不同，我们未必有 $\mathrm{C}_{\hat{\mathbf{P}}}(x)$ 是 $\mathrm{C}_{\hat{\mathbf{G}}}(x)$ 中 $\mathrm{C}_{\hat{\mathbf{P}}}(x)$ 的完整正规化子，即便在 $\mathbf{G}$ 中 $(\mathbf{L}, \mathbf{P})$ 具有这一性质。

在全文中，我们仍将 ℓ 设为一个不同于$\mathbf{G}$的定义特征的素数。我们首先推广引理 5.4。

引理 7.2. 设 $\mathbf{G}$ 是一个约化群，其连通分支为 $\mathbf{G}$。设$\mathbf{L}$ 是包含于抛物子群$\hat{\mathbf{P}}$ 中的 $\hat{\mathbf{G}}$ 的 *Levi* 子群，并且 $x \in \mathbf{L}^F = (\hat{\mathbf{L}}^\circ)^F$ 的阶为 ℓ 的幂。于是

$$d^x \circ {}^*R^{\hat{\mathbf{G}}}_{\hat{\mathbf{L}} \subset \hat{\mathbf{P}}} = {}^*R^{\mathrm{C}_{\hat{\mathbf{G}}}(x)}_{\mathrm{C}_{\hat{\mathbf{L}}}(x) \subset \mathrm{C}_{\hat{\mathbf{P}}}(x)} \circ d^x.$$

证明。 为了证明等式两边相等，注意只需证明对于每个 $\sigma \in \mathrm{C}_{\hat{\mathbf{L}}}(x)^F$，它们在 $\mathrm{C}^\circ_{\mathbf{L}}(x)^F\langle\sigma\rangle$ 上的限制相等。

现在，如果 $\sigma \in \mathrm{C}_{\hat{\mathbf{L}}}(x)^F$，那么我们有

$$\mathrm{Res}^{\mathrm{C}_{\hat{\mathbf{L}}}(x)^F}_{\mathrm{C}^\circ_{\mathbf{L}}(x)^F\langle\sigma\rangle}(d^x \circ {}^*R^{\hat{\mathbf{G}}}_{\hat{\mathbf{L}} \subset \hat{\mathbf{P}}}) = d^x \circ \mathrm{Res}^{\hat{\mathbf{L}}^F}_{\mathbf{L}^F\langle\sigma\rangle} \circ {}^*R^{\hat{\mathbf{G}}}_{\hat{\mathbf{L}} \subset \hat{\mathbf{P}}} = d^x \circ {}^*R^{\mathbf{G}\langle\sigma\rangle}_{\mathbf{L}\langle\sigma\rangle \subset \mathbf{P}\langle\sigma\rangle} \circ \mathrm{Res}^{\hat{\mathbf{G}}^F}_{\mathbf{G}^F\langle\sigma\rangle},$$

根据 d^x 的定义以及上文广义 Lusztig 限制的公式 (2)。由引理 5.4，我们有

$$d^x \circ {}^*R^{\mathbf{G}\langle\sigma\rangle}_{\mathbf{L}\langle\sigma\rangle\subset\mathbf{P}} \circ \mathrm{Res}^{\hat{\mathbf{G}}^F}_{\mathbf{G}^F\langle\sigma\rangle} = {}^*R^{\mathrm{C}^\circ_{\mathbf{G}}(x)\langle\sigma\rangle}_{\mathrm{C}^\circ_{\mathbf{L}}(x)\langle\sigma\rangle} \circ d^x \circ \mathrm{Res}^{\hat{\mathbf{G}}^F}_{\mathbf{G}^F\langle\sigma\rangle} = \mathrm{Res}^{\mathrm{C}_{\hat{\mathbf{L}}}(x)^F}_{\mathrm{C}^\circ_{\hat{\mathbf{L}}}(x)^F\langle\sigma\rangle}({}^*R^{\mathrm{C}_{\hat{\mathbf{G}}}(x)}_{\mathrm{C}_{\hat{\mathbf{L}}}(x)} \circ d^x),$$

其中第二个等式同样由 (2) 及 d^x 的定义得出，从而完成证明。□

用 $\mathcal{E}(\hat{}G,1)$ 表示覆盖 G 的某个幺幂特征标的特征标集，其中 $\hat{}G := \hat{}\mathbf{G}^F$且 $G := \mathbf{G}^F$。我们需要如下引理（其中我们也记 $\hat{}L := \hat{}\mathbf{L}^F$）：

引理 7.3. 广义 *Lusztig* 诱导 $R\hat{}G\hat{}L\subset\hat{}P$ 限制为一个函子 $R\hat{}G\hat{}L\subset\hat{}P : \mathbb{Z}\mathcal{E}(\hat{}L, 1) \to \mathbb{Z}\mathcal{E}(\hat{}G, 1)$，且其伴随函子限制为一个函子 ${}^*R\hat{}G\hat{}L\subset\hat{}P : \mathbb{Z}\mathcal{E}(\hat{}G, 1) \to \mathbb{Z}\mathcal{E}(\hat{}L, 1)$。

证明。设 $\hat{}\chi \in$ 不可约特征标$(\hat{}G)$，使得对某个 $\hat{}\lambda \in \mathcal{E}(\hat{}L, 1)$ 有 $\langle R\hat{}\mathrm{G}\hat{}\mathrm{L}\subset\hat{}\mathrm{P}(\hat{}\lambda), \hat{}\chi\rangle \neq 0$。则存在某个 i，使得 $\hat{}\chi$ 作为 $H^i_c(Y\hat{}\mathrm{GU}) \otimes_{\hat{\mathbf{L}}^F} \hat{}\lambda$ 的一个直和项出现，其中 U 是 $\hat{}$P 的幂单根。由于 $\mathrm{Res}^{\hat{L}}_L(\hat{}\lambda)$ 是幺幂特征标之和，由 [GM20，例 2.2.26b]可知，存在 L 的某个 F-稳定环面 T，使得 $\langle R^{\mathbf{L}}_{\mathbf{T}}(1_T), \mathrm{Res}^{\hat{L}}_L(\hat{}\lambda)\rangle = \langle R^{\hat{\mathbf{L}}}_{\mathbf{T}}(1_T), \hat{}\lambda\rangle \neq 0$。因此，存在某个 j，使得 $\hat{}\lambda$ 是 $H^j_c(\mathrm{Y}^{\hat{\mathbf{L}}}_{\mathbf{V}})$ 的一个直和项，其中 V 是 L 的某个包含极大环面 T 的 Borel 子群的幂单根。由 K¨unneth 公式，存在某个 k，使得 $H^i_c(Y\hat{}\mathrm{GU}) \otimes_{\hat{\mathbf{L}}^F} H^j_c(\mathrm{Y}^{\hat{\mathbf{L}}}_{\mathbf{V}})$ 是 $H^k_c(Y\hat{}\mathrm{GUV})$ 的一个直和项。因此，$\hat{}\chi$ 是 $H^k_c(Y\hat{}\mathrm{GUV})$ 的一个直和项，从而 $\mathrm{Res}^G_{\hat{}G}(\hat{}\chi)$ 是 $H^k_c(Y\mathrm{GUV})$ 的一个直和项。由此，据 [Bon06，定理 11.8]即得所述结论。

关于广义 Lusztig 限制的第二个陈述也以同样的方式得到。 □

7.1. 关于 Dade 群的更多内容。 在第 2.2 节中，我们介绍了主块的 Dade 群。现在我们考虑推广到任意块的情形，参见 [Da73、Mur13]。给定 $X \lhd Y$，我们将 Y中块 b 的 Dade 群记为 $Y[b] \leq Y$。我们经常使用以下事实，这是 [Mur13]的一个推论：

定理 7.4。 设 $X \lhd Y$，使得 Y/X 是一个 ℓ'-群。设 B 是 Y的一个块，覆盖 X的一个块 b。则以下各条件等价：

(1) $Y[b] = Y$，并且 $\mathrm{Irr}(B)$ 中的某个特征标对 X的限制是无重的。*(2)* 对于 $\lambda \in$，块 $B \otimes \lambda$ 均各不相同。

此外，当上述条件成立时，我们有 $Y = X\,\mathrm{C}_Y(D)$，其中 D 是 b的一个亏群，并且 $\mathrm{Irr}(b)$ 中的每个特征标都可延拓为 $\mathrm{Irr}(B)$中的一个特征标。

证明。 在情形 (1) 中，假设 $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ 限制到 X 时无重数，并令 $\vartheta \in \mathrm{Irr}(X \mid \chi)$。那么对于 $y \in Y$，我们有 $\langle X,\ y\rangle[b] = \langle X,\ y\rangle$ 因此 [Mur13, Thm. 3.9] 表明 ϑ 是 y- 稳定的。因此，χ 不可约地限制到 X，所以 (1) 等价于 [Mur13, Thm. 4.1(i)]。特别地， [Mur13, Thm. 4.1(i)] 与 [Mur13, Thm. 4.1(v)]的等价性现在推出了 (1) 与 (2) 的等价性。此外的陈述分别是 [Mur13, Thms. 3.13 和 4.1], 的推论。□

推论 7.5. 设 $X \lhd Y$，使得 Y/X 是一个 ℓ'-群。设 B 是 Y的一个块，覆盖 X的一个块 b。假设 $\mathrm{Irr}(B)$ 中的某个特征标限制到 X后不可约。那么，对于$\lambda \in \mathrm{Lin}(Y/X)$，有 $B \otimes \lambda = B$ 当且仅当 $Y[b] \leq \ker(\lambda)$。

证明。设 $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ 是一个限制到 X 后不可约的特征标，并设 B' 是 $Y[b]$ 中包含 χ的限制的块。注意，块诱导给出一个满射 $\mathrm{Bl}(Y[b] \mid b) \to \mathrm{Bl}(Y \mid b)$（应用 Fong–Reynolds定理 [Na98, 定理 9.14] 和[Mur13, 引理 2.1(iii) 和定理 3.5(i)]），进而诱导出一个双射 $\mathrm{Bl}(Y[b] \mid b)/Y \to \mathrm{Bl}(Y \mid b)$，其中 $\mathrm{Bl}(Y[b] \mid b)/Y$表示在 Y的作用下的轨道。

在此映射下，B' 映至 B，且对每个 $\lambda \in \mathrm{Lin}(Y/X)$，$Y$-稳定块 $B' \otimes \mathrm{Res}^{Y}_{Y[b]}(\lambda)$映至 $B \otimes \lambda$。因此，$B = B \otimes \lambda$ 当且仅当 $\mathrm{Res}^{Y}_{Y[b]}(\lambda) = 1_{Y[b]}$。由此得证。□

我们还希望在引理 2.3 的情形下控制各块。下文中，给定群 X的一个特征标 χ，我们用 $b_X(\chi)$表示包含 χ的 X 块。

引理 *7.6.* 在引理 *2.3* 的情形下，进一步假设 $X_2 \lhd X$，且商 Y/X是阶为 ℓ'的阿贝尔群，其中 $X := X_1 \cap X_2$。再假设 $Y[b_X(\vartheta_0)] = X_1[b_X(\vartheta_0)]X_2[b_X(\vartheta_0)]$，，其中 $\vartheta_0 := \mathrm{Res}^{X_1}_{X}(\vartheta_1) = \mathrm{Res}^{X_2}_{X}(\vartheta_2)$。那么，$b_Y(\vartheta)$是覆盖 $b_{X_1}(\vartheta_1)$的唯一块，且 $b_{X_2}(\vartheta_2)$

证明。将 $b = b_Y(\vartheta)$、$b_0 = b_X(\vartheta_0)$ 和 $b_i = b_{X_i}(\vartheta_i)$ 分别记为 $i = 1$、2。特征标的限制定义了一个双射 $\mathrm{Irr}(Y/X) \to \mathrm{Irr}(X_1/X) \times \mathrm{Irr}(X_2/X)$。由于 Y/X 是阿贝尔群，X_i（分别为 Y）中覆盖 b_0 的每个块都包含 ϑ_0 的一个扩张。由于这些扩张相差一个 $\mathrm{Irr}(X_i/X)$（分别为 $\mathrm{Irr}(Y/X)$）中的特征标的乘积，该映射诱导出一个满射 $\mathrm{Bl}(Y \mid b_0) \to \mathrm{Bl}(X_1 \mid b_0) \times \mathrm{Bl}(X_2 \mid b_0)$。注意这是良定义的，因为如果对于某个 $\lambda \in \mathrm{Irr}(Y/X)$ 有 $b_Y(\vartheta) = b_Y(\vartheta\lambda)$，那么 $b_{X_i}(\vartheta_i \,\mathrm{Res}^{Y}_{X_i}(\lambda))$ 和 $b_{X_i}(\vartheta_i)$ 都是 Y-不变的，并且分别位于 $b_Y(\vartheta)$ 之下，因而必定相等。为证明其为双射，只需证明这两个集合具有相同的基数。根据推论 7.5，对于 $H \in \{X_1, X_2, Y\}$，有 $|\mathrm{Bl}(H \mid b_0)| = |H[b_0] : X|$。由于 $Y[b_0] = X_1[b_0]X_2[b_0]$，这立即表明这两个集合具有相同的基数，从而引理得证。□

7.2. 幺幂块与非连通群。 现在我们回到 ^ 非连通约化群 $\mathbf{G}$ 的情形，其中有 $\mathbf{G}^\circ = \mathbf{G}$，并沿用前面的记号。有时我们需要研究满足某些更强条件的好素数。

定义 7.7。 设 ℓ 为奇素数，$\mathbf{G}$ 为连通约化群。若 ℓ是 $(\mathbf{G}, F)$ 的好素数，且不同于 $\mathbf{G}$ 的定义特征，$\ell \nmid |\mathrm{Z}(\mathbf{G})/\mathrm{Z}(\mathbf{G})^\circ)^F|$，并且当 $\mathbf{G}^F$具有类型为 ${}^3\mathrm{D}_4$ 的分支时满足 $\ell \neq 3$，则称 ℓ 满足关于 $\mathbf{G}$ 的定义 7.7。

注意，若 $t \in (\mathbf{G}^*)^F_\ell$，则 $\mathrm{C}^\circ_{\mathbf{G}^*}(t)$ 是 $\mathbf{G}^*$ 的一个 F-稳定 Levi 子群；我们将与之对偶的 $\mathbf{G}^F$ 的一个 F-稳定 Levi 子群记作 $\mathbf{G}(t)$。根据 [CE94]（另见 [CE04，第 21, 23] 节），G 的幺幂块具有 $b_G(\mathbf{L}, \lambda)$ 的形式，其中 $(\mathbf{L}, \lambda)$ 是一个幺幂d-尖点对。（这里回忆一下，幺幂 d-尖点对 $(\mathbf{L}, \lambda)$ 由一个相对于 $(\mathbf{G}, F)$ 的 d-分裂 Levi 子群 $\mathbf{L}$和一个尖点幺幂特征标 $\lambda \in \mathrm{Irr}(\mathbf{L}^F)$ 构成。）此外，对于一个 ℓ-元 $t \in (\mathbf{G}^*)^F_\ell$，我们有

$$\mathrm{Irr}(b_G(\mathbf{L}, \lambda)) \cap \mathcal{E}(G, t) = \{R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{G}(t)}(\hat{t}\chi_t) \mid \chi_t \in \mathcal{E}(\mathbf{G}(t), (\mathbf{L}_t, \lambda_t)) \text{ with } (\mathbf{L}, \lambda) \sim (\mathbf{L}_t, \lambda_t)\}.$$

以下内容有助于计算这种情况下的戴德群。

^ 引理 *7.8.* 假设素数 ℓ对 G 满足定义 *7.7*。设 $G \lhd G$使得 G/G是阿贝尔的 ℓ'-阶群。假设 $b = b_G(\mathbf{L}, \lambda)$是 G 的一个幺正 ℓ-块，且 $\hat{}L_G = \hat{}G$，其中 $\hat{}L := \mathbf{C}_{\hat{}G}(\mathrm{Z}(\mathbf{L})^F_\ell)$。若 λ是 $\hat{}L$-稳定的，并且可延拓为 $N_{\hat{G}}(\mathbf{L})_\lambda$的一个特征标，则 $\hat{}G[b] = \hat{}G$。

证明。我们首先注意到，b 存在一个亏群 D，使得 $\mathrm{N}_G(D) \le N := \mathrm{N}_G(\mathbf{L})$。事实上，根据 [CE99，引理 4.16]（另见 [CE99，第 5.2] 节，其中 $\ell = 3$的情形），我们有 $Z := \mathrm{Z}(\mathbf{L})^F_\ell \lhd D$ 是唯一的极大阿贝尔子群，因此 $\mathrm{N}_G(D) \le \mathrm{N}_G(Z) \le \mathrm{N}_G(\mathrm{C}^\circ_{\mathbf{G}}(Z)) = N$。

^^^^ 根据定理 7.4，只需证明 $|\mathrm{Bl}(G \mid b)| = |G : G|$。令 $N := NL$。回顾 [CE04，命题 13.16、13.19]，可知 $\mathbf{L} = \mathrm{C}_{\mathbf{G}}(\mathrm{Z}(\mathbf{L})^F_\ell)$。特别地，根据 [Na98，推论 9.21]，存在唯一的块 $B = b_L(\lambda)^N$，它属于 $N = \mathrm{N}_G(\mathbf{L})$，且覆盖 $b_L(\lambda)$。由 Harris–Kn¨orr 对应（见 [Na98，定理 9.28]）分别应用于 $G \lhd G$ 和 $N \lhd N$，只需证明 ^^ $|\mathrm{Bl}(N \mid B)| = |L : L|$。（事实上，请注意，此处 B 和 b的 Brauer 对应块必定相同，因为 $b_L(\lambda)^G = b$ 和 $b_L(\lambda)^N = B$。）

Fo^r ^$\hat{\lambda} \in$ 不可约特征标$(L \mid \lambda)$，我们注意到，由于按构造有 $L = \mathrm{C}_{\hat{G}}(\mathrm{Z}(L)_\ell)$，根据 [Na98，推论 9.21]，存在唯一的块 $B(\lambda)$，其覆盖 $b_{\hat{L}}(\lambda)$。因此，我们有一个由 $\lambda \mapsto B(\lambda)$ 定义的映射 $\mathrm{Irr}(L \mid \lambda) \to \mathrm{Bl}(N \mid B)$。只需证明所得映射是单射（因而也是双射）。为此，设对于某个 ^λ，^$\lambda' \in$Irr(^$L \mid \lambda$)，有 ^B(^λ') = ^B(^λ)。于是，$b_{\hat{L}}$(^λ) 与 $b_{\hat{L}}$(^λ') ^N-共轭。由于根据 [CE04，命题 22.16], ，λ是 ^^ ^$b_L(\lambda)$ 的典范特征标，因此可知 λ 是 $b_{\hat{L}}(\lambda)$ 的典范特征标。于是，λ和 ^λ' 由某个 ^$n \in$ ^N中的元素共轭。由于二者都是同一个 ^^ 特征标 λ 的扩张，因此可得 ^$n \in N_\lambda$。由我们的假设 λ 可扩张到 N_λ，我们有 ^$n \in$ ^$N_{\hat{\lambda}}$，从而 ^$\lambda =$ ^λ'。□

^**引理 7.9.** 设 $\mathbf{G}$ 是一个连通约化群，且与前文一样，$\mathbf{G} \lhd \mathbf{G}$。假设 $(\mathbf{L}\ \lambda)$是一个幺正 d-尖点对。那么 λ 可扩张至其在 $\mathrm{N}_{\hat{\mathbf{G}}^F}(\mathbf{L})$中的惯性群。

证明。这基本上可由 [GM20，定理 4.5.11、4.5.12], ，结合类似于 ^ [RSST25 引理 7.5] 证明中的论证得出。具体而言，令 $\mathrm{L}_0 := \mathrm{L}/\mathrm{Z(L)}$ 且 $N := \mathrm{N}_{\hat{\mathbf{G}}^F}(\mathrm{L})$，我们注意到 $\mathrm{L}_0^F \lhd$ ^N_λ/C ^$_N$(L) $\le \mathrm{Aut}_F(\mathrm{L}_0^F)_\lambda$。只需证明 λ_0（即 λ 在 L_0^F中的像）可扩张至 $\mathrm{Aut}_F(\mathrm{L}_0^F)_\lambda$。（这里，$\mathrm{Aut}_F(\mathrm{L}_0^F)$ 的定义见 [CS13，第 2.4] 节，它是包含所有 F-等变同源映射 $\sigma : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ 的限制的集合，这些同源映射保持 L_0的某个极大环面不变。）

现在，$\mathbf{L}_0$ 是单代数群的乘积，而群 $\mathrm{Aut}_F(\mathbf{L}_0)$ 是在 F-单因子上的缠绕积的乘积。根据 [GM20, Thm. 4.5.12], ，我们知道，若 $\mathbf{H}$ 是F-单的，则 $\mathbf{H}^F$ 的幺幂特征标可扩张到它们在 $\mathrm{Aut}_F(\mathbf{H}^F)$ 中的惯性群。对于被缠绕积置换的因子，选取相同的扩张后，这些特征标便可按要求扩张到缠绕积。□

注记 7.10. 保持引理 7.8 的情形。若 $\sigma_0 \in GE[b_G(\mathrm{L}\ \lambda)]$, ，则根据定理 7.4，$\sigma_0 g$ 中心化某个 $b := b_G(\mathrm{L}\ \lambda)$ 的亏群，其中 $g \in G$。由于根据 [Na98, Lem. 4.13], ，$\mathrm{Z(L)}^F_\ell$ 包含在这样的亏群中，因为它包含在 $b_L(\lambda)$ 和 $b_L(\lambda)^G = b$ 的任意亏群中，故存在 $g \in G$ 使得 $\sigma := \sigma_0 g$ 中心化 $\mathrm{Z(L)}^F_\ell$。由于 $\mathrm{L} = \mathrm{C}_{\mathbf{G}}(\mathrm{Z}(\mathbf{L})^F_\ell)$，因此我们得到 $\sigma \in \mathrm{N}_{GE}(\mathrm{L})$。对于 ^$G := G\langle\sigma\rangle$、^$L := \mathrm{C}_{\hat{G}}(\mathrm{Z(L)}^F_\ell)$ 以及 W^$_G$(L) :=$\mathrm{N}_{\hat{G}}(\mathrm{L})/L$，我们进而得到

$$W_{\hat{G}}(\mathbf{L}) = W_G(\mathbf{L}) \times \hat{L}/L.$$

事实上，对于 $z \in \mathrm{Z(L)}^F_\ell$与 $n \in \mathrm{N}_G(\mathbf{L})$，我们有 ${}^n z \in \mathrm{Z(L)}^F_\ell$，从而 ${}^{\sigma n} z = {}^n z = {}^{n\sigma} z$。因此，交换子 $[\sigma, n]$ 落在^ $L \cap G = \mathrm{C}_G(\mathrm{Z(L)}^F_\ell) = L$中。

以下内容可与 [CE04, 定理 21.7]进行比较。

命题 *7.11.* 假设素数 ℓ 满足 G 的定义 *7.7*，$[G, G]$ 是单连通的，且 $\hat{}G/G$ 是 ℓ'-阶阿贝尔群。设 $\hat{}P$ 是 $\hat{}G$ 的一个抛物子群，其 *Levi* 子群为 $\hat{}L$。假设 $L = C_{\mathbf{G}}(Z^\circ(L)_\ell^F)$，并令 $\lambda \in \mathcal{E}(L^F, 1)$，其中 $\hat{}L^F[b_{\mathbf{L}^F}(\lambda)]G^F = \hat{}G^F$。令 $\hat{}\lambda \in Irr(\hat{}L^F \mid \lambda)$，并令 $b_{\hat{L}} := b_{\hat{\mathbf{L}}^F}(\hat{}\lambda)$ 为其块。那么，对于所有 $\hat{}\lambda' \in Irr(b_{\hat{L}}) \cap \mathcal{E}(\hat{}L^F, 1)$，$R\hat{}G\hat{}L_{\subset}\hat{}P(\hat{}\lambda')$ 的所有不可约成分都属于 $\hat{}G^F$ 的同一个 ℓ-块 $\hat{}b$。此外，$(1, \hat{}b) \leq (Z(L)_\ell^F, b_{\hat{L}})$。

证明。令 $L := \mathbf{L}^F$，$\hat{}L := \hat{}\mathbf{L}^F$，$b_L := b_L(\lambda)$，$b_{\hat{L}} := b_{\hat{L}}(\hat{}\lambda)$，$G := \mathbf{G}^F$，以及 $\hat{}G := \hat{}\mathbf{G}^F$。注意，$\hat{}\hat{}$ $\hat{}\hat{}$我们的假设 $L[b_L]G = G$ 意味着 $L = L[b_L]$。此外，b_L的每个亏群都包含中心子群 $Z(\mathbf{L})_\ell^F$。由于 $\hat{}\mathbf{L}^F/\mathbf{L}^F$ 是一个 ℓ' 阶的阿贝尔群，并且 $\mathbf{L}^F$ 的每个幺幂特征标都可延拓到其在 $\hat{}\mathbf{L}^F$ 中的惯性群（见 [GM20，定理 4.5.12]），由 Clifford 对应可知，$b_{\hat{L}}$ 中存在一个特征标，其对L 的限制无重。因此，由定理 7.4 和推论 7.5，可得 $|\mathrm{Bl}(\hat{}L \mid b_L)| = |\hat{}L[b_L]/L| = |\hat{}L/L|$。特别地，通过限制，块 $b_{\hat{L}}$ 与 b_L 同构。由此，结合定理 7.4 以及 $\hat{}LG = \hat{}G$ 这一事实，我们推得 $\hat{}L = C_{\hat{\mathbf{G}}^F}(Z(\mathbf{L})_\ell^F)$。

因此，当$\mathbf{G} = \mathbf{L}$ 时，该断言显然成立。

因此，我们可以假设 $\mathbf{L} \neq \mathbf{G}$。令 $\hat{}\chi \in \mathrm{Irr}(\hat{}G)$，其中 $\langle \hat{}\chi, R\hat{}G\hat{}L_{\subset}\hat{}P(\hat{}\lambda')\rangle \neq 0$，对某个 $\hat{}\lambda' \in \mathrm{Irr}(b_{\hat{L}}) \cap \mathcal{E}(\hat{}\mathbf{L}^F, 1)$ 成立。根据假设，存在 $x \in Z(\mathbf{L})_\ell^F \setminus Z(\mathbf{G})_\ell^F$。注意，我们的假设还意味着 $C_{\hat{\mathbf{L}}^F}(x) = \hat{}\mathbf{L}^F$。特别地，$\mathbf{L} = C_{\mathbf{L}}(x)$ 是 $C := C_{\mathbf{G}}(x)$ 在抛物子群 $C_{\mathbf{P}}(x)$ 中的一个 d-分裂 Levi $\hat{}$ 子群。考虑 $f := b_{\hat{L}} d^1({}^*R^{\mathbf{G}}_{\hat{\mathbf{L}}\subset\hat{\mathbf{P}}}(\hat{}\chi))$。由引理 7.3，${}^*R\hat{}G\hat{}L_{\subset}\hat{}P(\hat{}\chi) \in \mathbb{Z}\mathcal{E}(\hat{}L, 1)$ 是 $\mathbb{Z}$-线性组合，其中各项为 $\hat{}L$ 的特征标，并覆盖 L 的幺幂特征标。因此，我们有 $f = \sum_{\mu\in\mathcal{E}(\hat{}L,1)\cap\mathrm{Irr}(b_{\hat{L}})} m_\mu d^1(\mu)$，其中 $m_{\hat{\lambda}'} \neq 0$。注意，根据 CE04，命题 13.12]，$\ell \nmid |(Z(\mathbf{L})/Z^\circ(\mathbf{L}))^F|$；因此，依据 CE04，定理 14.4]，$\mathcal{E}(L, 1)$ 是 L 的幺幂块的特征标基本集。如上所述，块 $b_{\hat{L}}$ 通过限制与 b_L 同构。于是，集合 $\mathcal{E}(L, 1)\cap\mathrm{Irr}(c)$ 为每个覆盖 b_L 的块 c 定义了一个基本集。因此，集合 $d^1(\mathcal{E}(\hat{}L, 1) \cap \mathrm{Irr}(b_{\hat{L}}))$ 线性无关，这意味着 $f \neq 0$。特别地，存在某个 $\mu \in \mathcal{E}(\hat{}L, 1) \cap \mathrm{Irr}(b_{\hat{L}})$，使得 $\langle d^1(\mu)\ f\rangle \neq 0$；否则，$\langle f, f\rangle = 0$。

我们对$\mathbf{G}$ 的秩减去$\mathbf{L}$的秩作归纳。由归纳假设，存在唯一的块 $b\hat{}_C$，其在 $\hat{}C = C_{\hat{}G}(x)$ 中对应的 Brauer 对为 $(Z(\mathbf{L})_\ell^F, b_{\hat{L}})$，并且该块包含 $R^{\hat{}\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{L}}\subset\hat{}\mathbf{P}\cap\hat{}\mathbf{C}}(\hat{}\lambda')$ 中 $b_{\hat{L}}$ 的所有不可约成分。

$\hat{}\hat{}$ 由引理 7.2 以及 $R^{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{L}}\subset}\hat{}P\cap\hat{}C(\mu)$ 中的所有特征标都覆盖 C 的幺幂特征标（同样由引理 7.3），且这些特征标的核中包含 $Z(C^\circ)^F$（因此也包含 x）这一事实，得 $\langle d^x\hat{}\chi, R^{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{L}}\subset}\hat{}P\cap\hat{}C(\mu)\rangle = \langle d^1{}^*R^{\mathbf{G}}_{\hat{\mathbf{L}}\subset}\hat{}P(\hat{}\chi)\ \mu\rangle$。由前文可知 $0 \neq \langle f, d^1(\mu)\rangle = \langle f, \mu\rangle$。因此，$\hat{}\hat{}\langle d^x\hat{}\chi, R^{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{L}}\subset}\hat{}P\cap\hat{}C(\mu)\rangle \neq 0$。根据假设，$R^{\mathbf{C}}_{\hat{\mathbf{L}}\subset}\hat{}P\cap\hat{}C(\mu)$ 的所有组成成分都属于 $b\hat{}_C$，这意味着 $b\hat{}_C d^x(\hat{}\chi) \neq 0$。由 Brauer 第二主定理可知，$(1, b\hat{}_G(\hat{}\chi)) \leq (\langle x\rangle, b\hat{}_C)$。由归纳假设，$(Z(\mathbf{L})_\ell^F, b_{\hat{L}})$ 是一个 $b\hat{}_C$-Brauer 对。因此，由 Brauer对的传递性可知，$(Z(\mathbf{L})_\ell^F, b_{\hat{L}})$ 是一个 $b\hat{}_G(\hat{}\chi)$-Brauer 对。□

与连通约化群的情形一样，我们定义

$$\mathcal{E}(\hat{G}, (\hat{\mathbf{L}}, \hat{\lambda})) = \{\hat{\chi} \in \mathrm{Irr}(\hat{G}) \mid \langle R^{\hat{\mathbf{G}}}_{\hat{\mathbf{L}}\subset\hat{\mathbf{P}}}(\hat{\lambda}), \hat{\chi}\rangle \neq 0\}.$$

我们指出本定理的一些推论。

推论 7.12。 在命题 *7.11* 的情形下，我们有如下结论：

(1) 块 b 与包含 $\mathbf{L}$ 的抛物子群 $\mathbf{P}$ 的选择无关。*(2)* 我们有一个不交并

$$\mathrm{Irr}(\hat{G} \mid \mathcal{E}(G,(\mathbf{L},\lambda)) = \bigcup_{\hat{\lambda}\in \mathrm{Irr}(\hat{L}|\lambda)} \mathcal{E}(\hat{G},(\hat{\mathbf{L}},\hat{\lambda})).$$

证明。 第一个陈述可按 [CE04，注 21.12] 中的方法得到。对于第二个陈述，我们首先注意到，右侧是不交并，因为 $\mathcal{E}(G,(\mathbf{L}\ \lambda))$ 中的特征标由命题 7.11 可知属于不同的 ℓ-块。

令 $\chi \in \mathcal{E}(G,(\mathrm{L}\ \lambda))$。回顾一下，对于每个 $\lambda \in$ 不可约特征标(L $\mid \lambda$)，我们有 $\mathrm{Res}_L^{\hat{L}}(\hat{\lambda}) = \lambda$。于是由 Frobenius 互反律，以及限制与广义 Lusztig 诱导相容这一事实（见 [DM94，推论 2.4],），可得 $\langle \chi, R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda)\rangle = \langle$诱导 $\hat{}_G^G(\chi) R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\hat{}\lambda)\rangle \neq 0$。由引理 7.8 和 7.9，我们有 $G[b_G(\mathrm{L}\ \lambda)] = G$，因此由定理 7.4，覆盖 χ 的 G 的所有特征标都属于不同的 ℓ-块。但由于 $R_{\mathbf{L}}^{\hat{\mathbf{G}}}(\hat{}\lambda)$ 的每个组成成分都由命题 7.11 可知属于同一个 ℓ- 块，因此对于某个延拓 χ 的唯一特征标 $\hat{}\chi$，必有 $\langle$诱导 $\hat{}_G^G(\chi)\ R\hat{}\mathrm{G}\hat{}\mathrm{L}\ (\hat{}\lambda)\rangle = \langle \hat{}\chi, R\hat{}\mathrm{G}\hat{}\mathrm{L}\ (\hat{}\lambda)\rangle$。也就是说，$\hat{}\lambda$ 决定了 $\hat{}\chi$。那么，给定满足 $\langle \chi, R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda)\rangle \neq 0$ 的 $\hat{}\chi' \in$ 不可约特征标($\hat{}G \mid \chi$)，我们有 $\hat{}\chi' = \hat{}\chi\beta$，其中某个 $\beta \in$ 不可约特征标 ($\hat{}G/G$) 满足 $\langle \hat{}\chi', R\hat{}\mathrm{G}\hat{}\mathrm{L}\ (\hat{}\lambda\beta)\rangle \neq 0$。

反过来，对于覆盖 $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ 的 $\hat{}\chi \in \mathcal{E}(\hat{}G, (\hat{}\mathrm{L}, \hat{}\lambda))$，我们类似地有 $\langle \mathrm{Ind}\ \hat{}_G^G(\chi)\ R\hat{}\mathrm{G}\hat{}\mathrm{L}\ (\hat{}\lambda)\rangle = \langle \hat{}\chi, R\hat{}\mathrm{G}\hat{}\mathrm{L}\ (\hat{}\lambda)\rangle \neq 0$，因此 $\langle \chi, R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda)\rangle \neq 0$。故 $\hat{}\chi \in \mathrm{Irr}(\hat{}G \mid \mathcal{E}(G,(\mathrm{L}\ \lambda))$。□

应用命题 7.11 的一个障碍是条件 $\mathrm{C}_{\hat{\mathbf{G}}^F}(\mathrm{Z}(\mathbf{L})_\ell^F) \leq \hat{}\mathbf{L}^F$。虽然这一条件似乎是控制相关块分解所必需的，但另一方面，我们并不清楚它何时实际成立。下面的引理 7.15 将对这个问题给出部分解答。首先，我们需要以下内容：

引理 *7.13.* 设 σ 是 *G* 的一个拟半单自同构。此外，设 *L* 是 *G* 的一个 *Levi* 子群，满足 $L = C_{\mathbf{G}}^\circ(S)$，其中 S 是包含于 $(G^\sigma)^\circ$ 的某个环面中的子群，并且每个整除 $|S/S^\circ|$ 的素数都是 G^x 的好素数，且与 $|Z(G^x)/Z^\circ(G^x)|$ 互素，其中 $x \in$ 是任意拟中心的 σ*G*。（此处，按照惯例，G^σ 表示 σ 下的不动点集合。）那么 *L* 包含于 *G* 的一个 σ-稳定抛物子群中。

证明。 固定一个极大环面$\mathbf{T}$，使其包含于$\mathbf{G}$ 的一个 Borel 子群$\mathbf{B}$ 中，并且 ($\mathbf{T}$,$\mathbf{B}$) 是σ-稳定的。由 [DM94 定理 1.8] 可知，$(\mathbf{T}^\sigma)^\circ$ 是 $(\mathbf{G}^\sigma)^\circ$ 的一个极大环面。

由于 S 包含于 $(\mathbf{G}^\sigma)^\circ$ 的一个极大环面中，因此存在某个 $g \in (\mathbf{G}^\sigma)^\circ$，使得 ${}^gS \leq (\mathbf{T}^\sigma)^\circ$。

因此，由于 $\mathrm{L}_0 := {}^g\mathrm{L} = \mathrm{C}_{\mathbf{G}}({}^gS)$ 是 σ-稳定的，L σ也是 $\leq$ -稳定的。这里注意，T $_0$ L$^gS \leq$，因为 [T。根据 16], DM94, 命题 1. $t \in$，存在某个元素 σ' T，使得 $= t\sigma$:$\mathbf{L}_0 =$ 对 G 是拟中心的。因此，B $\cap$ B$_0$ L σ' 是 L$_0$ 的一个 σ' -稳定 Borel 子群。此外，由于 $n \in$ 对 G 是拟中心的，对于每个满足 $\mathbf{L}_0$N $\subset$ (T) $_{\mathbf{G}}$N σ'(T) 且 $n(n^{-1} \in)\ t' \in$ T 的元素，都存在某个 σ'T，使得 $nt'(= nt')$ [；参见 15]DM94，定理—定义 1. [。再由 15] DM94，定理—定义 1. σ' 可知，自同构 $_0$ 对 L σ_0 也是拟中心的。因此，$= {}^{g^{-1}}\sigma'$: 对 L 和 G 都是拟中心的（因为拟中心元素的共轭仍是拟中心的）。

因此，$(\mathbf{G}^{\sigma_0})^\circ$ 是一个连通约化群，参见 [DM94, Thm. 1.8]。我们声称，$(\mathbf{L}^{\sigma_0})^\circ$ 是 $(\mathbf{G}^{\sigma_0})^\circ$的一个 Levi 子群。事实上，回顾 $\mathbf{L} = \mathrm{C}_{\mathbf{G}}^\circ(S)$，于是 $(\mathbf{L}^{\sigma_0})^\circ = \mathrm{C}^\circ_{(\mathbf{G}^{\sigma_0})^\circ}(S)$。由此，根据 [CE04, Prop. 13.16], $(\mathbf{L}^{\sigma_0})^\circ$ 是 $(\mathbf{G}^{\sigma_0})^\circ$ 的一个 Levi 子群。

令 $\mathbf{M} := \mathrm{C}_{\mathbf{G}}(\mathrm{Z}^\circ(\mathbf{L}^{\sigma_0}))$，并注意 $\mathbf{M} \leq \mathbf{L}$，因为 $S \leq \mathrm{Z}(\mathbf{L})^{\sigma_0} \leq \mathrm{Z}(\mathbf{L}^{\sigma_0})$，由此根据我们关于 S 的假设可得$S \leq \mathrm{Z}^\circ(\mathbf{L}^{\sigma_0})$。于是，$\mathbf{M}$ 是 $\mathbf{G}$ 的一个 σ_0-稳定 Levi 子群，且包含于一个 σ_0-稳定抛物子群$\mathbf{P}$ 中，参见 [DM94, Cor. 1.25]。

注意，$\mathbf{L}$ 是 σ_0-稳定的，且$\mathbf{M}$ 是 σ_0-稳定抛物子群$\mathbf{P} \cap \mathbf{L}$中的$\mathbf{L}$ 的一个 Levi 子群。然而，$\mathbf{M}^{\sigma_0} = \mathbf{L}^{\sigma_0}$，这意味着根据 DM94 命题 1.23之后的引理，$\mathbf{L} = \mathbf{M}$。特别地，$\mathbf{L}$包含于一个 σ_0-稳定抛物子群$\mathbf{P}$中。回顾一下，$g \in \mathbf{G}^\sigma$，因此 $\sigma_0 = {}^{g^{-1}}t \cdot \sigma$。此外，${}^{g^{-1}}t \in \mathbf{L}$，故 $(\mathbf{L},\mathbf{P})$ 也为 σ-稳定。□

回顾一下，对于 d一个与 p 互素的正整数，$(\mathbf{G}, F)$ 的 d-环面是$\mathbf{G}$ 中的一个 F-稳定环面，其阶多项式是第 d 个分圆多项式 Φ_d 的幂；Sylow d-环面是秩尽可能大的 d-环面；而 d-分裂 Levi 子群是一个 d-环面的中心化子。（参见 [GM20，第 3.5] 节。）

在$\mathbf{G}$ 的一个 Sylow d-环面包含于$(\mathbf{G}^\sigma)^\circ$的情形下，引理 7.13 给出如下结论：

引理 *7.14.* 设 σ 是连通约化群 G 的一个 p' 阶拟中心自同构，且与 F 的作用可交换。若 $(G^\sigma)^\circ$ 包含 (G, F) 的一个 *Sylow* d 环面，则 G^F-共轭的 d-分裂 *Levi* 子群共轭类与 $((G^\sigma)^\circ)^F$-共轭的 $(G^\sigma)^\circ$ 的 d-分裂 *Levi* 子群共轭类之间存在如下双射：G 的每个 d-分裂 *Levi* 子群都与一个包含于 σ-稳定抛物子群中的 *Levi* 子群 L_1 G^F-共轭，而该映射将 L_1 的共轭类映到 $(L_1^\sigma)^\circ$ 的共轭类。

证明。令 S 为 $(\mathbf{G}, F)$ 的一个 Sylow d-环面，且 S 包含于 $(\mathbf{G}^\sigma)^\circ$。令 L 为 G 的一个 d-分裂 Levi 子群。则 L 与某个 Levi 子群 L_1 在 $\mathbf{G}^F$ 下共轭，且 $\mathrm{Z}^\circ(\mathrm{L}_1)_{\Phi_d} \leq \mathrm{S}$。由于 L_1 是 d-分裂的，我们有 $\mathrm{L}_1 = \mathrm{C}_{\mathbf{G}}(\mathrm{Z}^\circ(\mathrm{L}_1)_{\Phi_d})$（见 [GM20，命题 3.5.5]），因此根据引理 7.13，L_1 包含于一个 σ-稳定的抛物子群中。我们还得到，$(\mathrm{L}_1^\sigma)^\circ$ 是 $(\mathbf{G}^\sigma)^\circ$ 的一个 d-分裂 Levi 子群。

若 L_1' 与 L_1 在 $\mathbf{G}^F$下共轭，且包含于一个 σ-稳定的抛物子群中，则可如 [DM94, 命题 1.40] 的证明所示，证明 $\mathrm{L}_1'^\sigma$与 L_1^σ 在 $((\mathbf{G}^\sigma)^\circ)^F$ 下共轭。因此，映射 $\mathrm{L}_1 \mapsto (\mathrm{L}_1^\sigma)^\circ$ 在共轭类上定义良好。另一方面，$(\mathbf{G}^\sigma)^\circ$ 的任意 d-分裂 Levi 子群，在 $((\mathbf{G}^\sigma)^\circ)^F$ 共轭意义下，都是 S 的某个 F-稳定子环面的中心化子。因此，该映射是满射；根据 [DM94, 命题 1.23]，它也是单射，因为 $\mathrm{L}_1 = \mathrm{C}_{\mathbf{G}}(\mathrm{Z}^\circ((\mathrm{L}_1^\sigma)^\circ))$。□

现在，我们给出命题 7.11 中条件成立与否的部分答案。

引理 *7.15.* 假设素数 ℓ 对 G 满足定义 *7.7*，$[G, G]$ 是单连通的，并且 $\hat{}G/G$ 是 $\{p, \ell\}'$ 阶循环群。设 L 是 G 的一个 *Levi* 子群，使得 $L = C_{\mathbf{G}}(Z^\circ(L)_\ell^F)$，并设 $(Z(L)_\ell^F, b_L)$ 是 $G := \mathbf{G}^F$ 的一个块 b_G 的 *Brauer* 对，其中 $\hat{}G[b_G] = \hat{}G$，且 $\hat{}_G = \hat{}\mathbf{G}^F$。那么存在一个 *Levi* 子群 $\hat{}L$，其连通分支为 L，并且 $\hat{}L^F[b_L]\mathbf{G}^F = \hat{}\mathbf{G}^F$。

证明。由假设并结合定理 7.4，我们找到某个阶为 $\{\ell, p\}'$ 的 $\sigma \in \hat{}\mathrm{G}^F$，使得 σ 生成商 $\hat{}\mathrm{G}^F/\mathrm{G}^F$，并且中心化 b_G 的一个亏群。特别地，由 [Na98，引理 4.13], $\mathrm{Z}(\mathrm{L})_\ell^F$ 包含在这样一个亏群中，因为它包含在 b_L 的任意亏群中，并且 $(\mathrm{Z}(\mathrm{L})_\ell^F, b_L)$ 是一个 b_G-Brauer 对。因此我们可以（通过可能将σ 替换为一个 $\mathbf{G}^F$-共轭）假设 σ 中心化 $\mathrm{Z}(\mathrm{L})_\ell^F$。此外，由于 σ 的阶为 p'，特别地是半单的，由 [DM94，命题 1.3]可知 σ 是拟半单的。回忆 $\mathrm{L} = \mathrm{C}_{\mathbf{G}}(Z)$，其中 $Z := \mathrm{Z}^\circ(\mathrm{L})_\ell^F$是 $\mathbf{G}^\sigma$ 的一个 ℓ-子群。另一方面，$Z \leq \mathrm{T} := \mathrm{Z}^\circ(\mathrm{L})$，后者是 σ-稳定的，并且由 [DM94，命题 1.28]，$\mathrm{T}^\sigma/(\mathrm{T}^\sigma)^\circ$ 是一个 ℓ'-群。因此 $Z \leq (\mathrm{T}^\sigma)^\circ \leq (\mathbf{G}^\sigma)^\circ$。由引理 7.13，我们推出 L 包含在一个 σ-稳定的抛物子群 P 中。

因此，我们可以令 ˆP := P⟨σ⟩ 以及 ˆL = L⟨σ⟩。注意 Z(L)$^F_\ell$ 被 σ 中心化，从而 ˆL^F = Cˆ G^F(Z(L)$^F_\ell$)。这意味着 N ˆG(L^F)[b_L] ≤ ˆL^F，利用 [Mur13，定理 3.13]，，因为 b_L 的任意亏群都包含 Z(L)$^F_\ell$。另一方面 ˆ $G[b_G] = \hat{G}$ ，并且 (Z(L)$^F_\ell$, b_L) 是 ˆ ˆ 一个 b_G-子对。由此，根据定理 7.4，我们有 |Bl($G \mid b_G$)| = $|G/G|$ 。然后对中心幂等元应用 Brauer同态，并利用 [Na98，定理 4.14]，，可知对于 ˆ$L = C_{\hat{G}}$(Z(L)$^F_\ell$) 中位于 b_L 之上的块，同样的结论成立。再一次应用定理 7.4，ˆ ˆ ˆ ˆ ˆ 我们有 $L[b_L] = L$。由于 $\sigma \in L$，我们也知道 $LG = G$，至此证明完成。□

我们在以下定理中总结研究结果。该定理重述了定理 D，旨在为不连通群给出 [CE94] 部分内容的类似结果。这里回顾记号 $d_\ell(q)$，表示当 ℓ 为奇数时， q 模 ℓ 的阶。

定理 *7.16*。假设素数 ℓ 满足关于 *G* 的定义 *7.7*， [*G*,*G*] 单连通，且 ˆ*G*/*G* 为循环的 $\{p, \ell\}'$-阶群。令 $d = d_\ell(q)$。若 *(L λ)* 是 *(G F)* 的一个幺正 d-尖点对，定义了 G^F 的一个 ℓ-块 $b = b_G(L\ \lambda)$，且 ˆ*G*^{F}[b] = ˆ*G*^{F}，则存在一个 F-稳定的 *Levi* 子群 *L*，包含于 *G* 的一个抛物子群 *P* 中，使得 *C* ˆ*G*^{F}*(Z(L)*$^F_\ell$*)* = ˆ*L*^{F}。此外，存在一个双射

$$\mathrm{Irr}(\hat{\mathbf{L}}^F \mid \lambda) \to \mathrm{Bl}(\hat{\mathbf{G}}^F \mid b), \hat{\lambda} \mapsto b_{\hat{\mathbf{G}}^F}(\hat{\mathbf{L}}, \hat{\lambda})$$

使得

(1) $\mathcal{E}(\hat{\mathbf{G}}^F, 1) \cap \mathrm{Irr}(b_{\hat{\mathbf{G}}^F}(\hat{\mathbf{L}}, \hat{\lambda})) = \{\hat{\chi} \in \mathrm{Irr}(\hat{\mathbf{G}}^F) \mid \langle R^{\hat{\mathbf{G}}}_{\hat{\mathbf{L}} \subset \hat{\mathbf{P}}}(\hat{\lambda}), \hat{\chi}\rangle \neq 0\}$

(2) $(1, b_{\hat{\mathbf{G}}^F}(\hat{\mathbf{L}}, \hat{\lambda})) \leq (\mathrm{Z}(\mathbf{L})^F_\ell, b_{\hat{\mathbf{L}}^F}(\hat{\lambda}))$.

证明。根据 [CE99，命题 3.2]，，假设 **L** 是 d-分裂的，便有 C$_{\mathbf{G}}$(Z°(**L**)$^F_\ell$) = **L**。于是，我们的假设以及 [CE99，定理 2.5] 的结果表明，引理 7.15 的条件成立，因此存在 ˆ**L**，使得 ˆ**L**° = **L**，且 ˆ**L**^{F}[b_L(λ)]**G**^{F} = ˆ**G**^{F}。因此，命题 7.11 适用。特别地，命题 7.11 的证明给出 C ˆ$_{\mathbf{G}^F}$(Z(**L**)$^F_\ell$) = ˆ**L**^{F}。

其余部分最终可由命题 7.11 和推论 7.12 得出。注意，映射 ˆmap $\lambda \mapsto b\hat{}_G$(**L** λ) 由命题 7.11 良定义，由引理 7.3 满射，并由推论 7.12 与 (1) 单射。因此，现在只需证明 (1)。

为证明 (1)，注意，对于 ˆ λ ∈Irr(ˆL^F | λ) 中的任意元素，若 ˆχ ∈Irr(ˆG^F) 满足 $\langle R$ˆGˆL⊂ˆP(ˆλ)，则由引理 7.3 可知，ˆ$\langle\chi\rangle \neq 0$属于 $\mathcal{E}$(ˆG^F, 1)，且由命题 7.11 可知，它属于 Irr(bˆG^F(ˆL, ˆλ))。另一方面，任何属于 $\chi \in \mathcal{E}$(ˆG^F, 1) 且属于 ∩Irr(bˆG^F(ˆL, ˆλ)) 的特征标，都必须覆盖一个属于 $\chi \in \mathcal{E}$(G^F, 1) 且属于 ∩$\mathcal{E}$(G^F, (L λ)) 的特征标，因为 CE94, Thm.] 给出的 b_G(L λ) 的类似结论成立。因此， $\langle\chi, R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}}(\lambda)\rangle \neq 0$，且由 [DM94, Cor. 2.4] 和 Frobenius 互反律， $\langle$Ind ˆ^G_G(χ) RˆGˆL⊂ˆP(ˆλ)$\rangle \neq 0$。根据定理 ˆ 7.4， Ind^G_G(χ) 的不可约成分属于不同的块。但由命题 7.11，任何满足 $\langle\psi, R$ˆGˆL⊂ˆP(ˆλ)$\rangle \neq 0$ 的 $\psi \in$Irr(ˆG)，都必须属于 bˆ$_G$(ˆL, ˆλ) = bˆ$_G$(ˆχ)。特别地，必有 $\langle R$ˆGˆL⊂ˆP(ˆλ)， ˆχ$\rangle \neq 0$，证毕。□

7.3. 幺幂块与 Alvis–Curtis 对偶。回顾一下，若 $\chi \in$Irr(G)，则存在唯一的符号 $\varepsilon_\chi \in \{\pm 1\}$和 $\chi^* \in$ Irr(G)，使得 D$_{\mathbf{G}}$(χ) = $\varepsilon_\chi\chi^*$。特别地，若 ˆ$\chi \in$ Irr(G) ˆ 是 χ 的一个扩张，则 D ˆ$_{\mathbf{G}}$(ˆχ) = ε_χ ˆχ^*，其中某个 ˆ$\chi^* \in$Irr(G) 扩张了 χ^*。（回顾第 3 节中 D$_{\hat{\mathbf{G}}}$ 的构造。）由于 Mackey 公式对幺幂特征标成立，我们

由 [GM20，定理 3.44] 得到

$$\varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{\mathbf{L}}\,\mathrm{D}_{\mathbf{G}}\,R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda)=R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}\,\mathrm{D}_{\mathbf{L}}(\lambda).$$

特别地，$(\mathbf{L}\ \lambda^*)$ 又是一个 d-尖点对，并标记块 $\mathrm{D}_{\mathbf{G}}(b_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}\ \lambda))$。令 $\hat{\mathbf{G}}=\mathbf{G}\langle\sigma\rangle$，其中 σ 满足 σ 的每个幂都是有理拟中心自同构。若 $\hat{\mathbf{L}}$ 是 σ- 稳定的，且 $\mathbf{L}=\mathbf{L}\langle\sigma\rangle$ 是 $\mathbf{G}$ 的 Levi 子群，那么在适当假设下，[DM94，定理 3.11] 表明这一等式可推广为

$$\varepsilon\,\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{G}}}\,R_{\hat{\mathbf{L}}}^{\hat{\mathbf{G}}}(\hat{\lambda})=R_{\hat{\mathbf{L}}}^{\hat{\mathbf{G}}}\,\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{L}}}(\hat{\lambda}),$$

其中 ε 是由 $\varepsilon(G\sigma^i):=\varepsilon_{\mathbf{G}^{\sigma^i}}\varepsilon_{\mathbf{L}^{\sigma^i}}\cdot$ 定义的类函数。我们希望在定理 7.16 的情形下，计算 $b_{\hat{\mathbf{G}}}(\mathbf{L}\ \lambda)$ 在 D_{G} 下的像。在一些合理的假设下，我们计算这个像，并将在下文描述满足这些假设的两个有趣情形，展示这些情形下可能出现的情况。

上面的公式表明，$\langle\chi,R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda)\rangle\neq 0$ 当且仅当 $\langle\varepsilon\,\mathrm{D}_{G}(\chi)\ R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\mathrm{D}_{\mathbf{L}}(\lambda))\rangle\neq 0$. 另一方面，由于 $\mathrm{D}_{\mathbf{G}}$ 固定了 $b_{\mathbf{G}}(\mathbf{L}\ \lambda)$，存在一个线性特征标 ε_0，使得 $\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{G}}}$ 将块 $b_{G}(\mathbf{L},\lambda)$ 映射为其与 ε_0 的张量积。利用如下事实：对于位于块 $b_{\hat{\mathbf{G}}}(\mathbf{L}\ \lambda)$ 中的唯一特征标 $\chi\in\mathrm{Irr}(G\mid\chi)$，$\langle\chi,R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda)\rangle=\langle\chi,R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda)\rangle$，我们推得

$$\varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{\mathbf{L}}\varepsilon_0\,\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{G}}}\,R_{\hat{\mathbf{L}}}^{\hat{\mathbf{G}}}(\hat{\lambda})=R_{\hat{\mathbf{L}}}^{\hat{\mathbf{G}}}\,\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{L}}}(\hat{\lambda}).$$

如果我们进一步假设 $R_{\hat{\mathbf{L}}}^{\hat{\mathbf{G}}}\,\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{L}}}(\lambda)$ 在 G 中的 G 的任何陪集上都不为零，那么有

$$\varepsilon=\varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{\mathbf{L}}\varepsilon_0$$

这尤其表明 $\varepsilon\in\varepsilon_{\mathbf{G}}\varepsilon_{\mathbf{L}}$ 线性特征标(G)。由于 $\varepsilon\in\pm$线性特征标(G)，因此我们有

$$\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{G}}}(b_{\hat{G}}(\hat{\mathbf{L}},\hat{\lambda}))=\varepsilon b_{\hat{G}}(\hat{\mathbf{L}},\hat{\lambda}^*)$$

处于定理 7.16 的情形。

假设$\mathbf{L}$ 是一个环面，因此 [DM94, 定理 3.11] 中的公式成立。那么我们有$\lambda^*=\lambda=1_{\mathbf{L}^F}$。此外，根据 [DM94, 定理 4.13]，我们有 $R_{\hat{\mathbf{L}}}^{\hat{\mathbf{G}}}(\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{L}}}(\lambda))(\sigma^i)=R^{\mathbf{G}^{\sigma^i}}{}_{\mathbf{L}^{\sigma^i}}(1)\,\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{L}}}(\lambda)(\sigma^i)\neq 0$。特别地，若 $\varepsilon\neq\pm 1_G$，则 $\mathrm{D}_{\mathbf{G}}$ 固定块 $b_G(\mathbf{L}\ \lambda)$，而 $\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{G}}}$ 将 $b_G(\mathbf{L}\ \lambda)$ 映射为 $\varepsilon b_G(\mathbf{L}\ \lambda)$。例 8.11 给出了一个具体情形，说明了这一现象。

现在假设（$\mathbf{L}\ \lambda$）是一个尖点对，并且$\mathbf{L}$ 包含于$\mathbf{G}$的一个 F稳定抛物子群中。在这种情况下，[DM94，定理 3.11] 的结论仍然成立。于是 λ 是一个尖点特征，而（广义）Alvis–Curtis 对偶的公式表明，$\mathrm{D}_{\mathbf{L}}(\lambda)=(-1)^{\mathrm{rk}(\mathbf{L})}\lambda$，且 $\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{L}}}(\lambda)=(-1)^{\mathrm{rk}(\mathbf{L})}\lambda$。此外，$\varepsilon=1$ 这表明 $\mathrm{D}_{\mathbf{G}}(b_G(\mathbf{L}\ \lambda))=b_G(\mathbf{L}\ \lambda)$，并且 $\mathrm{D}_{\hat{\mathbf{G}}}(b_G(\mathbf{L}\ \lambda))=b_G(\mathbf{L}\ \lambda)$。

7.4. 覆盖幺正块的块中的高度零特征。 本节最后描述幺正块中的非幺幂高度零特征。

引理 7.17. *在定理 7.16 的情形下，*

$$\mathrm{Irr}_0(b_{\hat{G}}(\hat{\mathbf{L}},\hat{\lambda}))=\{\hat{\chi}\in\mathrm{Irr}(\hat{G}\mid\mathrm{Irr}_0(b_G(\mathbf{L},\lambda)))\mid\langle\hat{\chi},R_{\hat{\mathbf{L}}\subset\hat{\mathbf{P}}}^{\hat{\mathbf{G}}}(\hat{\zeta})\rangle\neq 0\ \textit{for some}\ \hat{\zeta}\in\mathrm{Irr}(b_{\hat{L}}(\hat{\lambda}))\}.$$

ˆ ˆ证明. 令 $b_G := b_G(\mathbf{L}\ \lambda)$ 和 $b\hat{}_G := b\hat{}_G(\mathbf{L}\ \lambda)$。注意到，根据定理 7.16 和定理 7.4，并假设 G/G isℓ'，限制给出了 ˆ $\mathrm{Irr}_0(b_{\hat{G}})$ 与 $\mathrm{Irr}_0(b_G)$ 之间的一个双射。

设 $t \in G^*$ 的阶是 ℓ的幂。设 $\chi \in \mathcal{E}(G,t) \cap \mathrm{Irr}_0(b_G)$，并设 $\mathrm{H} := G(t)$ 是 G 的一个 Levi 子群，与 $\mathrm{C}^\circ_{\mathbf{G}^*}(t)$ 对偶。记 ˆt 为 $H = \mathbf{H}^F$ 的线性特征标，它与 $t \in \mathrm{Z}(H^*)$ 对偶。因此，存在唯一特征标 $\chi_t \in \mathcal{E}(H,1)$，使得 $\chi = R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{H}}(\chi_t\hat{}t)$。由 [CE04，定理 21.13], , $R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{H}}(\chi_t)$ 的所有不可约成分都属于 $b_G(\mathrm{L}\ \lambda)$。因此，由 [CE04，定理 21.7]„ $(\mathrm{Z}(H)_\ell, b_H(\chi_t))$ 是一个 b_G-Brauer 对。由 [CE04，定理 23.2], , 特征标 χ_t属于 $(\mathrm{L}_H, \lambda_H)$ 的 d-Harish-Chandra 级数，其中 $(\mathrm{L}_H, \lambda_H) \sim (\mathrm{L}\ \lambda)$，其意义见 [CE04，定义 23.1]。

我们看到，$(\mathrm{Z}(\mathrm{L}_H)^F_\ell, b_{L_H})$ 是一个 b_H-Brauer 对，其中记 $b_{L_H} := b_{\mathbf{L}^F_H}(\lambda_H)$ 和$b_H := b_H(\chi_t)$，并且 $(\mathrm{Z}(\mathrm{L})^F_\ell, b_L(\lambda))$ 是一个 b_G-Brauer 对。记 $L_H := \mathrm{L}^F_H$和 $L = \mathrm{L}^F$。令 D 为 $\mathrm{C}^\circ_{\mathbf{G}}([\mathrm{L}, \mathrm{L}])^F$ 的一个 Sylow ℓ-子群，令 $D_H \le D$ 为 $\mathrm{C}^\circ_{\mathbf{H}}([\mathrm{L_H}, \mathrm{L_H}])^F$ 的一个 Sylow ℓ-子群（这是可行的，因为 $[\mathrm{L}, \mathrm{L}] = [\mathrm{L_H}, \mathrm{L_H}]$），使得 $(\mathrm{Z}(\mathrm{L}_H)^F_\ell, b_{L_H}) \lhd (D_H, b_{\mathrm{C}_H(D_H)}(\mathrm{Res}^{L_H}_{\mathrm{C}_H(D_H)}(\lambda_H))$，且 $(\mathrm{Z}(\mathrm{L})^F_\ell, b_L(\lambda)) \lhd (D, b_{\mathrm{C}_G(D)}(\mathrm{Res}^{L}_{\mathrm{C}_G(D)}(\lambda))$（参见 [CE04，引理 22.18]；根据 [CE04，定理 22.9]，它们分别是 b_G 和 b_H 的缺陷群）。

根据假设，χ 是一个零高度特征，且 $\chi(1)_\ell = |G\colon H|_\ell \chi_t(1)_\ell$，其中 $\chi_t(1)_\ell \ge |H : D_H|_\ell$，因此我们必然有 $D = D_H$。由于 $\mathrm{Z}(\mathrm{L}_H)^F_\ell$和 $\mathrm{Z}(\mathrm{L})^F_\ell$分别是 D_H 和 D 的唯一极大阿贝尔正规子群（见 [CE99，命题 4.16]），可知 $\mathrm{Z}(\mathrm{L}_H)^F_\ell = \mathrm{Z}(\mathrm{L})^F_\ell$，从而 $\mathrm{L} \cap \mathrm{H} = \mathrm{L_H}$；这里用到了 $\mathrm{L} = \mathrm{C_G}(\mathrm{Z}(\mathrm{L})^F_\ell)$，而 L_H也有类似结论。由于 $[\mathrm{L}, \mathrm{L}] = [\mathrm{L_H}, \mathrm{L_H}]$，因此可知 $\mathrm{L} = \mathrm{L_H}$，例如可用 [CE04，命题 22.8]。现在注意到，λ 和 λ_H 是幺幂特征标，它们限制到$[\mathrm{L}, \mathrm{L}]^F$上的同一个幺幂特征标。因此，它们必定相等。

注意，Levi 子群 $\mathbf{H}^F$ 的块 b_H 满足引理 7.15 的假设。因此，存在 $\mathbf{G}$ 的一个抛物子群，其 Levi 子群为 $\mathbf{H}$，且 $\mathbf{H}^\circ = \mathbf{H}$，并且满足 ˆ $H[b_H]G = \hat{}G$，其中 ˆ$H = \hat{}\mathbf{H}^F$。特别地，我们知道 $\mathrm{Irr}(b_H)$中的每个特征标都是 ˆ ˆH-稳定的。令 σ 为一个自同构，其在 H/H 中的像生成该商。于是，它在$\mathbf{H}^*$ 上的对偶自同构 σ^* 满足 $\sigma(\mathcal{E}(H,\ t)) = \mathcal{E}(H,\ \sigma^*(t))$。因此，$\sigma^*(t)$和 t 必为H^*-共轭。

由于 $\mathrm{H}^* = \mathrm{C}_{\mathbf{G}^*}(t)$，从而有 $t = \sigma^*(t)$。换言之，线性特征标 ˆt 是 σ-稳定的。由于 ˆt 具有 ℓ-幂阶，且 ˆ H/H 是一个 ℓ'-群，该特征标有到 ˆHˆ ˆ 的唯一 ℓ-幂阶扩张 ˆt'。我们应用命题 7.11，它表明：对任意 $\zeta \in \mathcal{E}(H,1) \cap \mathrm{Irr}(b\hat{}_H)$，其中 $b\hat{}_H := b\hat{}_H(\hat{}\mathrm{L}, \hat{}\lambda)$，$R\hat{}\mathrm{G}\hat{}\mathrm{H}(\hat{}\zeta)$ 的所有不可约成分都落在 $b\hat{}_G$ 中。另一方面，再由命题 7.11，$R^{\hat{\mathbf{H}}}_{\hat{\mathbf{L}}}(\hat{}\lambda)$ 的所有不可约成分都落在 $b\hat{}_H$ 中。我们有 $R\hat{}\mathrm{G}\hat{}\mathrm{H}(\hat{}t' R\hat{}\mathrm{H}\hat{}\mathrm{L}\ (\hat{}\lambda)) = R\hat{}\mathrm{G}\hat{}\mathrm{L}\ (\hat{}\lambda\hat{}t')$。由于$_{d^1} R\hat{}\mathrm{G}\hat{}\mathrm{L}\ (\hat{}\lambda\hat{}t') = d^1(R^{\hat{\mathbf{G}}}_{\hat{\mathbf{L}}}(\hat{}\lambda))$，这些特征标落在 $b\hat{}_G$ 中。由于 ˆ$t' R\hat{}\mathrm{G}\hat{}\mathrm{H}$: $\mathcal{E}(\hat{}H, 1) \to \mathcal{E}(\hat{}G, t)$ 是一个带符号双射，并且由定理 7.16，$\mathcal{E}(\hat{}H, 1) \cap \mathrm{Irr}(b\hat{}_H)$ 中的特征标恰好是 $R\hat{}\mathrm{H}\hat{}\mathrm{L}\ (\hat{}\lambda)$ 的不可约成分，因此 $b_{\hat{G}}$ 的每一个零高度特征都以这种方式出现。（事实上，ˆ 给定 ˆ$\chi \in \mathrm{Irr}_0(b\hat{}_G)$，我们如上取 $\chi := \mathrm{Res}^G_G(\hat{}\chi) \in \mathrm{Irr}_0(b_G) \cap \mathcal{E}(G,t)$。回想$\chi = R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{H}}(\hat{}t\chi_t)$ 属于 $R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{H}}(\hat{}tR^{\mathbf{H}}_{\mathbf{L}}(\lambda))$，因为 $\mathcal{E}(H,1) \cap \mathrm{Irr}(b_H)$ 恰好是$R^{\mathbf{H}}_{\mathbf{L}}(\lambda)$ 的不可约成分集。由于 $R\hat{}\mathrm{G}\hat{}\mathrm{H}(\hat{}t' R^{\hat{\mathbf{H}}}_{\hat{\mathbf{L}}}(\hat{}\lambda))$ 的不可约成分落在 $\mathrm{Irr}(b\hat{}_G)$ 中，与定理 7.16 的证明最后几行相同的论证给出 $\langle \hat{}\chi, R\hat{}\mathrm{G}\hat{}\mathrm{H}(\hat{}t' R\hat{}\mathrm{H}\hat{}\mathrm{L}\ (\hat{}\lambda))\rangle \neq 0$。因此 ˆ$\chi$ 以所期望的方式得到，注意到 ˆ$t'\hat{}\lambda$ 落在 $b_{\hat{L}}(\hat{}\lambda)$ 中，因为 $d^1(\hat{}t') = 1$。）

反之，只需看到每一个满足 $\langle \hat{\chi}, R\hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{L}}(\hat{\zeta})\rangle \neq 0$ 的 $\hat{\chi} \in \mathrm{Irr}(b_{\hat{L}}(\lambda))$）的 $\hat{\chi} \in \mathrm{Irr}(\hat{G} \mid \mathrm{Irr}_0(b_G))$ 都落在 $b_{\hat{G}}$ 中，因为任意 $\hat{\chi} \in \mathrm{Irr}(b\hat{}_G \mid \mathrm{Irr}_0(b_G))$ 必然具有零高度。我们断言，每一个这样的 $\hat{}\zeta$ 都具有如上的形式 $\hat{t'}\lambda$，因而由上述讨论，$R_{\hat{\mathbf{L}}}^{\hat{\mathbf{G}}}(\hat{\zeta})$ 的不可约成分落在 $b_{\hat{G}}$ 中。事实上，首先由命题 7.11 $\hat{}$ 的证明回想，块 $b_{\hat{L}}(\lambda)$ 经由限制同构于 $b_L(\lambda)$。现在，由 [CE04，命题 22.16]，块 $b_L(\lambda)$ 具有中心缺陷。于是映射 $\mathrm{Z}(\mathrm{L}^*)_\ell^F \to \mathrm{Irr}(b_L(\lambda))$ $t \mapsto \hat{}t\lambda$，是单射，因为对于不同的 $t \in \mathrm{Z}(\mathrm{L}^*)_\ell^F$，像落在不同的 Lusztig 级数中；并且是满射，因为由中心缺陷块的性质以及 $|\mathrm{Z}(\mathrm{L}^*)_\ell^F| = |\mathrm{Z}(\mathbf{L})_\ell^F|$（由我们对 ℓ 的假设）这一事实，有 $|\mathrm{Irr}(b_L(\lambda))| = |\mathrm{Z}(\mathrm{L})_\ell^F|$。□

8. Application to the Galois version of the Alperin–McKay conjecture

在本节中，我们假设$\mathbf{G}$ 是一个单连通群，其根系为经典型，但不属于 D 型。$_4$, 记作 $G := \mathbf{G}^F$，其中 F 是一个 Frobenius 态射，使$\mathbf{G}$ 具有某个素数 p的幂 q 所对应的 $\mathbb{F}_q$-有理结构；并令 $\ell \neq p$为一个不整除 $|\mathrm{Z}(\mathbf{G}^F)|$的奇素数。（注意，此时 ℓ满足$\mathbf{G}$的定义 7.7。）进一步，令 $d := d_\ell(q)$，并令 $(\mathbf{L}\ \lambda)$为 $(\mathbf{G}\ F)$的一个幺幂 d-尖点对，记$E := E(\mathbf{G}^F)$，且 $N := \mathrm{N}_G(\mathbf{L})$。

在 [RSST25 定理 8.8], 中，我们构造了一个 $\mathcal{H}$-等变双射

$$\mathrm{Irr}_0(GE \mid \mathcal{E}(G, (\mathbf{L}, \lambda))) \to \mathrm{Irr}_0(\mathrm{N}_{GE}(\mathbf{L}) \mid \lambda).$$

（注意，在 [RSST25], 中没有提及高度。不过，根据双射的构造，结合 Clifford 理论以及我们已知相应的双射对于 G 和 N 是保持高度的，可以推出高度为零的特征标也得到保持，例如可使用 [Ros24 命题 3.1]中的特征标公式。）

本节中，我们要研究这个双射与 ℓ-块的相容性。为此，请注意，引理 7.8 和 7.9 将有助于计算 Dade 群。

回顾一下，若 $(\mathbf{G}\ F)$ 是分裂的，且 $\mathbf{L}$ 是一个 d-分裂 Levi 子群，那么 $\mathrm{Z}^\circ(\mathbf{L})$ 的多项式阶仅能被分圆多项式 Φ_i 整除，其中带有 $i \mid 2d$（例如参见 [GM20，例 3.5.15]）。特别地，$\mathrm{Z}(\mathbf{L})_\ell^F = (\mathrm{Z}(\mathbf{L})^{\Phi_d})_\ell^F$。

在本节中，我们固定 G 的一个极大分裂的 E-稳定环面 T_0，它包含于 G 的一个E-稳定 Borel 子群 B_0 中。因此，d-分裂 Levi 子群 L 与一个标准 Levi 子群 L_I在 G 中共轭。令 $n := g^{-1}F(g) \in \mathrm{N}_{\mathbf{G}}(\mathrm{T}_0)$，其中 $g \in \mathrm{G}$ 满足${}^g\mathrm{L}_I = \mathrm{L}$。由于 L 是 d-分裂的，我们可以假设 w 中 n 在 $W := \mathrm{N}_{\mathbf{G}}(\mathrm{T}_0)/\mathrm{T}_0$ 中的像是 $(\mathrm{G}\ F)$ 的一个 Sylow d-扭曲（定义见 [Sp10a，定义 3.1]），并且假设 $n \in V$，其中 V是扩展 Tits 群，且 n的阶仅含有与 w的阶相同的素因子。

引理 8.1。保留关于$\mathbf{G}$的假设，ℓ如上，并进一步假设$(\mathbf{G}\ F)$是分裂的，且令 F_{p_0} 为一个域自同构，使得 $p_0^{f_0} = q$ 和 $\ell \nmid f_0$。若 ℓ 为奇数且 $d_\ell(p_0) = d_\ell(q)$，则所有幺正块的 *Dade* 分歧群中都含有 F_{p_0}。

证明。沿用上一段的情形，并记 $F_0 := F_{p_0}$。我们的假设意味着 $(d,\ f_0) = 1$ 其中 $d := d_\ell(p_0) = d_\ell(q)$。特别地，由于 w 的阶整除d，且 n 的素因子与 w的素因子相同，可知 n 的阶与 f_0互素。因此，存在某个 $n_0 \in \langle n \rangle$ 使得 $n_0^{f_0} = n$。注意到 W 是一个有理群，因此 n_0 和 n 在 W中的像是 W-共轭的。这意味着 n_0 是 $(\mathbf{G}\ F_0)$ 的一个 Sylow d-扭拧，

利用 $d_\ell(p_0) = d_\ell(q)$，以及多项式阶仅取决于 Weyl 群中元素的 W-共轭类。

我们断言 $\mathbf{Z}(\mathbf{L}_I)_\ell^{n_0F_0} = \mathbf{Z}(\mathbf{L}_I)_\ell^{nF}$。由于 $V^{F_0} = V$，我们有 $(n_0F_0)^{f_0} = nF$，因此只需证明这两个群的基数相同。为此，注意到 $(\mathbf{Z}(\mathbf{L}_I)^{\Phi_d})_\ell^{nF} = \mathbf{Z}(\mathbf{L}_I)_\ell^{nF}$，因为 ℓ 是奇数。接下来需要证明 $\Phi_d(p_0)_\ell = \Phi_d(q)_\ell$。为此，只需注意 $\frac{p_0^{df_0}-1}{p_0^d-1}$ 不能被 ℓ 整除，因为这等价于 $1 + p_0^d + \ldots p^{d(f_0-1)}$

$_0 \equiv df_0 \neq 0$ 模 ℓ。因此，$\mathbf{Z}(\mathbf{L}_I)_\ell^{nF}$ 被 n_0F_0 中心化，从而得到所要断言。

现在，根据 $[\mathbf{L},\mathbf{L}]$ 的结构，并结合 [GM20, 例 3.5.29], 中的讨论，我们看到 n_0F_0 在 $[\mathbf{L},\mathbf{L}]^F$ 上作用为域自同构；作为这样的自同构，它固定 $[\mathbf{L},\mathbf{L}]^F$ 的每个幺幂特征标。特别地，n_0F_0 稳定幺幂特征标 λ。由此，结合引理 7.8 和引理 7.9，我们推得 F_0 属于 $b_G(\mathbf{L}\ \lambda)$ 的 Dade 群。□

在考虑扭曲群中引理 8.1 的类比之前，我们先作如下观察：

引理 8.2. 对于 $\mathbf{G}$ 的一个阶为2的图自同构 γ，有 $|\mathbf{G}^{\gamma F_q} : (\mathbf{G}^\gamma)^{F_q}|_{p'}$ 是分圆多项式 $\Phi_e(q)$ 的乘积，其中每个 e 都是正偶整数。

证明. 我们逐一考察各种情形，并参考 [DM94, 命题 1.22] 之后的注释。若 G 是 D_n 型，则 G^γ 是 B_{n-1} 型，且 $|G^{\gamma F_q}: (G^\gamma)^{F_q}|_{p'} = (q^n+1)$。若 G 是 A_n 型，则 G^γ 是 $X^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$ 型，其中 $X \in \{C, B\}$。$A_n(q)$ 的阶的 p'-部分为 $\prod_{i=1}^n (q^{i+1} - (-1)^{i+1})$。若只计算 $i+1$ 为偶数的情形，并令 $j := (i+1)/2$，则得到 $\prod_{j=1}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} (q^j - 1)$，这恰好是 $(G^\gamma)^{F_q} = X^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}(q)$ 的阶中奇分圆多项式的贡献。□

注记 8.3. 尽管本节始终假设$\mathbf{G}$是经典型的，但我们指出，引理 8.2 中 $\mathbf{G} = E_6$ 且 $\mathbf{G}^\gamma = F_4$ 的情形同样成立，证明方法也相同。我们还注意到，引理 8.2 中 γ 为二阶的假设是必要的，因为若 $G = D_4$ 且 γ 是三重性自同构，则 $\mathbf{G}^\gamma = G_2$，因此 $|\mathbf{G}^{\gamma F_q} : (\mathbf{G}^\gamma)^{F_q}|$ 可被 $\Phi_3(q)$ 整除。

接下来，我们证明扭曲群的引理 8.1 的一个类似结果。

引理 8.4. 设 $F = F_q\gamma$，其中 γ 是一个二阶图自同构。设 $F_0 = F_{p_0}$，其中 p_0 是满足 $p_0^{f_0} = q$ 和 $\ell \nmid 2f_0$ 的某个整数。若 $d = d_\ell(q)$ 为奇数且 $d_\ell(p_0) = d_\ell(q)$，则所有幺正块的 *Dade* 分歧群中都含有 F_0。

证明。设 $b := b_G(\mathbf{L}\ \lambda)$ 是 G 的一个幺幂块。回忆一下，存在一个标准 Levi 子群 $\mathbf{L}_I$（相对于 $\mathbf{T}_0 \subset \mathbf{B}_0$），使得 $\mathbf{L}_I$ 与 $\mathbf{L}$ 在 $\mathbf{G}$ 下共轭。此外，幺幂 d-尖点对的分类表明，子集 I 总可以选为 γ-稳定的（参见引理 7.14）。

因此，L_I^γ 是连通约化群 G^γ 的 Levi 子群（见 [DM94，命题 1.11] 和 [DM94，注 1.30]）。考虑 (G^γ, F_q) 的 Sylow d-扭曲 $n \in N_{\mathbf{G}^\gamma}(T_0^\gamma)$。按构造，这意味着 $(T\ nF_q)$ 含有 $(G^\gamma,\ nF_q)$ 的一个 Sylow d-环面。由引理 8.2，$|G^{\gamma F_q} : (G^\gamma)^{F_q}|_{p'}$ 仅能被分圆多项式 $\Phi_e(q)$ 整除，其中 e 为偶数。由于 $(T^\gamma)^{nF_q} \leq T^{\gamma nF_q}$，因此可知 $(T\ n\gamma F_q)$ 含有 $(G\ \gamma nF_q)$ 的一个 Sylow d-环面，所以 n 也是 $(G\ \gamma F_q)$ 的一个 Sylow d-扭曲。

现在注意到，$(\mathbf{G}^\gamma, F_q)$ 是一个分裂的、单的、单连通的经典型群。因此，我们可以应用引理 8.1 的证明，找到某个 $n_0 \in \langle n \rangle \leq V^\gamma$，使得 $n_0^{f_0} = n$

并且 $\mathrm{Z}(\mathbf{L}_I)_\ell^{nF}$被 n_0F_0 中心化。因此，我们可以再次结合引理 7.8 与引理 7.9 得出结论。□

另一方面，若 $d_\ell(p_0) \neq d_\ell(q)$，则 Dade 群中的元素结构受到如下限制：

引理 8.5。设 $F_0 := F_{p_0}$ 是域自同构，且 $q = p_0^{f_0}$。继续假设 $\mathbf{G}$ 为经典型，并设 f_0 是 2 的幂，且 $d := d_\ell(q)$ 为奇数。设 $b = b_G(\mathbf{L}\ \lambda)$ 是一个幺正 ℓ-块，且 F_0 属于 b的 ***Dade*** 分歧群。那么

$$W_{G\langle F_0\rangle}(\mathbf{L}) \cong W_G(\mathbf{L}) \times \mathrm{C}_{G\langle F_0\rangle}(\mathrm{Z}(\mathbf{L})_\ell^F)/\mathbf{L}^F.$$

此外，若 $\mathrm{C}^{G\langle F_0\rangle}(\mathrm{Z}(\mathbf{L})_\ell^F)/\mathbf{L}^F = \langle F_0\rangle^{\sim}$，则存在一个同构

$$W_{G\langle F_0\rangle}(\mathbf{L}) \cong (W_G(\mathbf{L}_I)^{wF} \times \langle F_0\rangle)/\langle wF\rangle,$$

在该同构下，$\sim F_0$ 对应于 vF_{p_0}，使得 $v^2 \in \langle w\rangle$。若 $v \notin \langle w\rangle$，则 $d_\ell(p_0) = 2d_\ell(q)$。此时，F_0 必为 $G\langle F_p\rangle[b]$的 ***Sylow*** 2-子群的生成元。

证明。如前所述，我们可以找到 $x \in G$，使得 xF_0 固定 D的一个亏群，并且可以假设该亏群包含 $\mathrm{Z}(\mathbf{L})_\ell^F$。因此，$xF_0$ 正规化 $\mathbf{L} = \mathrm{C}_{\mathbf{G}}(\mathrm{Z}(\mathbf{L})_\ell^F)$，我们用$F_{p_0}$ 表示其在 $W_{G\langle F_0\rangle}(\mathbf{L})$中的共轭类。

记 $F = F_q\gamma_0$ 为 γ_0 一个可能是平凡的图自同构。令 $g \in \mathbf{G}^{\gamma_0}$ 在 F 下的 Lang 像为 $n \in \mathrm{N}_G(\mathbf{T}_0)^{\gamma_0}$，并令 $w = n\mathbf{T}_0$，分别如引理 8.1 和引理 8.4 的证明中所述。用 n的 Lang 原像 g 作共轭后，我们得到一个同构

$$W_{G\langle F_0\rangle}(\mathbf{L}) \cong (W_G(\mathbf{L}_I)^{wF} \times \langle F_0\rangle)/\langle wF\rangle.$$

现在，若vF_{p_0} 在此同构下对应于 F_{p_0}，则根据注记 7.10，它中心化 $W_{G\langle F_0\rangle}(\mathbf{L})$。由于$\mathbf{G}$ 是经典型，我们知道 $W_G(\mathbf{L})$同构于$S_{d'} \wr S_a$ 的指数为 1 或 2 的某个子群，其中 $d' \in \{d, 2d\}$ 为某个正整数 a。（例如，参见 [GM20，例 3.5.29]。）

然而，$\mathrm{Z}(W_{G\langle F_0\rangle}(\mathbf{L}_I)^{wF}) = \mathrm{Z}(W_G(\mathbf{L}_I)^{wF})\langle F_0\rangle$，因此 $\mathrm{Z}(W_G(\mathbf{L}_I)^{wF}) = \langle x_0,\ w\rangle$，其中$x_0$ 是 W的最长元素，若最长元素属于 $\mathrm{Z}(W^F)$，否则则为 $x_0 = 1$。由此可得 $v^2 \in \langle w\rangle$，因此 v^2 是$(\mathbf{G},\ F)$的 Sylow d-扭曲，因为 d 为奇数，且 f_0 是 2 的幂。

另一方面，若 $d_\ell(p_0) = d_\ell(q)$，则根据引理 8.1 和引理 8.4 的证明，有 $v \in \langle w\rangle$。因此，若 $v \notin \langle w\rangle$，则可得 $d_\ell(p_0) = 2d_\ell(q)$，因为 f_0 是 2 的幂。若 $F_{p_0'} \in G\langle F_p\rangle[b]$，则 $F_{p_0'}$ 的平方的像必为 Sylow d-扭曲，从而迫使$(F_{p_0'})_2 \in \langle F_{p_0}\rangle$。□

回忆引理 4.2 中的（$\mathbf{G}$ F）：对于任意 F-稳定子群 $\mathbf{H}$，若其为 $\mathbf{G}$ 的子群，则存在相应的 F-稳定子群$\mathbf{H}$，其在映射 $\mathrm{pr}: \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ 下的像为 $\mathbf{H}$。我们固定正规子群 $\mathbf{G} \lhd \mathbf{G} \lhd \mathbf{G}E$，使得商 $\mathbf{G}/\mathbf{G}$ 在同构 $\mathbf{G}^F E \cong \mathbf{G}^F E$下对应于 $\langle F_p\rangle \subset E$ 的Sylow 2-子群。此外，群 $\mathbf{L}$ 是 $\mathbf{G}$ 的一个 F-稳定 Levi 子群，且包含于抛物子群 $\mathbf{P}$ 中，使得 $\mathbf{L}$（分别为 $\mathbf{P}$）是$\mathbf{L}$（分别为 $\mathbf{P}$）在映射 $\mathrm{pr}: \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ 下的像。此外，我们有

$$\mathrm{pr}|_{\mathbf{G}^F} \circ R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}} \circ \mathrm{pr}^{-1}|_{\mathbf{L}^F} = R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}.$$

注意，F 在$\mathbf{G}$上定义了一个 $\mathbb{F}_p$-结构，因此对于奇素数 ℓ_0，$\mathbf{G}^F$ 的幂单 ℓ_0-块由幂单 $d_{\ell_0}(p)$-尖点对参数化。现在可以验证，上面构造的Levi子群$\mathbf{L}$ 对任意素数 ℓ_0都是 $d_{\ell_0}(p)$-分裂的。这由以下事实得出

即由于对S =Z°(L)$^{\Phi_d}$ 有L = C$_{\mathbf{G}}$(S)，从而L = C$_{\mathbf{G}}$(S)，并且若S$_0$ = S$^{\Phi_{d_0}}$，其中 $d_0 = d_{\ell_0}(p)$，则pr(S$_0$) = S，因为 F 在G的单分量上传递作用（或者通过比较多项式阶，注意到若 $q = p^f$ 则 $\Phi_d(q) = \prod_{e|f,(d,f/e)=1} \Phi_{de}(p)$且 $d_0 = d(f, d_0)$）。由此得到L = C$_{\mathbf{G}}$(S$_0$)。

因此，(**L**, λ)（其中 λ 是在 $\mathrm{pr}|_{\mathbf{L}^F}$ 下与 λ 对应的特征标）是一个幺正$d_{\ell_0}(p)$-尖点对，它在$\mathbf{G}^F$与$\mathbf{G}^F$之间的同构下定义与 (**L**, λ) 相同的 ℓ-块。

我们希望在当前情形中应用定理 7.16，这要求素数 p 为奇数。我们先讨论当 $p = 2$ 时如何绕开这个问题，并从朗定理的以下推论开始。

引理 8.6。设 $F = F_q\gamma_0$，其中 γ_0 是某个（可能平凡的）图自同构，且 $q = p_0^{f_0}$。假设 $g \in \mathbf{G}^{\gamma_0}F_p$ 满足 $(gF_{p_0})^{f_0} = F_q$。则 gF_{p_0} 与 F_{p_0} 在 $(\mathbf{G}^{\gamma_0})^{F_q}$ 下共轭。

证明。由于$\mathbf{G}^{\gamma_0}$ 是连通的，依据 [DM94，注 1.30]，我们可以应用朗定理，找到某个$t \in \mathbf{G}^{\gamma_0}$ 使得 $tF_{p_0}(t^{-1}) = g$。因此，${}^tF_{p_0} = gF_{p_0}$，从而 ${}^tF_q = (gF_{p_0})^{f_0} = F_q$，这表明 $t \in (\mathbf{G}^{\gamma_0})^{F_q}$。□

注 8.7. 假设我们处于引理 8.5 的情形，并且 $p = 2$。在这种情况下，我们有 $V \cong W$。令 γ_0 再次表示某个（可能平凡的）图自同构，使得$F = F_q\gamma_0$。利用引理 8.5 中的构造可知，C$_{G\langle F_0\rangle}$(Z(**L**)$_\ell^F$) = $\mathbf{L}^F\langle y\rangle$ 对某个γ_0-稳定元 y 成立，且 $y^{f_0} = F_q$。因此，由引理 8.6，y 特别地 G-共轭于 F_{p_0}。于是$\mathbf{G}^F E$中相应的元素是拟半单的（因为它$\mathbf{G}^F$-共轭于 E中的一个拟半单元），从而定理 7.16 的证明得以通过。

注意，下述结果不再提及素数 ℓ_0，而仅依赖于 d-Harish-Chandra 级数（即仅依赖于整数 d）。

推论 8.8. 假设 d 是一个奇整数。则存在一个 *Levi* 子群**L**，包含于某个抛物子群**P** 中，而该抛物子群属于 **G**，且其连通分支为 **L**，使得广义d-*Harish-Chandra* 级数 $R_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(\lambda)$ 对于 $\lambda \in$不可约特征标($\mathbf{L}^F \mid \lambda$)的不同扩张互不相交。

证明。我们可以假设 $1 \neq d$，否则该结论由 [RSF22 第 2] 节并结合引理 7.9 得出。我们希望应用推论 7.12。为此，只需对满足$d_{\ell_0}(q) = d$的奇素数 ℓ_0 验证定理 7.16 的假设（情形 $p = 2$ 见注 8.7）。换言之，只需找到一个素数 ℓ_0，使得与 (**L**, λ) 相关联的幂单 ℓ_0-块的 Dade 群包含 G/G 的一个 Sylow 2-子群，其中 $G = \mathbf{G}^F$。我们将证明可以选取满足 $d_{\ell_0}(q) = d$ 的素数 $2 \neq \ell_0$。

设 p_0 为 p 的幂，且 f_0 满足 $q = p_0^{f_0}$。由于 $1 \neq d$ 为奇数，故 $\Phi_d(p_0)$ 为奇数，从而它至少有一个奇素因子，我们可以选取 ℓ_0 为 $p_0^d - 1$的一个 Zsigmondy 素因子。注意，由于 **G** 是经典型的且 ℓ_0 为奇数，ℓ_0 必然是一个好素数。若 f_0 与 d 互素（特别地，当 f_0 为 2 的幂时即如此），则 q 模 ℓ_0 的阶也是 d。然后选取 p_0 使得 f_0 为 2 的幂，从而 F_{p_0} 属于 G/G 的某个 Sylow 2- 子群，我们有 $d = d_{\ell_0}(p_0) = d_{\ell_0}(q)$。由于 $d_{\ell_0}(q) \notin \{1, 2\}$，由此亦得 $\ell_0 \nmid (q \pm 1)$，故 $\ell_0 \nmid |\mathrm{Z}(G)|$。

由引理 8.1 和引理 8.4 可得 $G[b_{\hat{G}}] = G$。对于奇数 p，结论是定理 7.16 的推论。若 $p = 2$，则我们利用注 8.7 得出结论。□

ˆ ˆ 命题 *8.9*。固定 $\Lambda(\lambda) \in Irr(N_{\hat{G}^F}(L)_\lambda)$ 的一个 λ 扩张。记 λ 为 $\hat{\Lambda}(\lambda)$ 在 $\hat{L}^F$ 上的限制。设 ℓ 是一个奇素数，使得 $d_\ell(q) = d$ 为奇数，并记 $\hat{\lambda}'$ 为 $\hat{\Lambda}(\lambda)$ 在 $\hat{L}' := C_{\hat{G}^F}(Z(L)_\ell^F)$ 上的限制。那么，对于每个 $\chi \in Irr(G^F)$，都存在一个扩张 $\hat{\chi} \in Irr(\hat{G}^F \mid \chi)$，使得 $\hat{\chi}$ 属于唯一一个与 *Brauer* 对 $(Z(L)_\ell^F, b_{\hat{L}'}(\hat{\lambda}'))$ 对应的块，且 $\hat{\chi}$ 和 $\hat{\lambda}$ 在 ℓ-进数域上的值域相同。

ˆ 证明。首先，由引理 7.9 可知 $\Lambda(\lambda)$ 存在。设 f_0 为最大 2 的幂，使得 q 可写成 $q = p_0^{f_0}$，其中 p_0 为 p 的某个幂。设 p' 为 p_0 的最小幂，使得该中心化元对应于引理 8.5 中的西罗 d-扭。于是块 $b_G(\mathbf{L}\ \lambda)$ 的 Dade 分歧群由 $F_{p_0'}$ 生成，其中 $p_0'^{\delta} = p'$ 对 $\delta \in \{1, 2\}$。若 $\delta = 2$，设 f' 使得 $p_0^{f'} = p_0'$。由此可知，ℓ-进整数包含一个本原 $2f'$ 次单位根（因为 p_0' 模 ℓ 的阶必然为偶数）。设 $\hat{\mathbf{G}}'$ 为 $\mathbf{G}\langle F_{p'}\rangle$ 在映射 $\mathrm{pr} : \mathbf{G}E \to \mathbf{G}E$ 下的完全原像。现在，结合定理 D 与推论 8.8（并在 $p = 2$ 的情形下考虑到注 8.7），我们找到 χ 的某个扩张 $\hat{\chi}' \in$ 不可约特征标$(G\langle F_{p'}\rangle)$，它位于具有 Brauer 对 $(\mathbf{Z}(\mathbf{L})_\ell^F, b_{\hat{L}'}(\hat{\lambda}'))$ 的块中，使得 $\mathbb{Q}(\hat{\chi}') = \mathbb{Q}(\hat{\lambda}')$，并且 $\hat{\chi}'$ 是 $R_{\hat{\mathbf{G}}'\hat{\mathbf{L}}\cap\hat{\mathbf{G}}'\subset\hat{\mathbf{P}}\cap\hat{\mathbf{G}}'}(\hat{\lambda}')$ 的一个组成成分。（注意，我们有 $\mathbb{Q}(\hat{\chi}') = \mathbb{Q}(\hat{\lambda}')$，这是由于定理 D 与推论 8.8 所保证的不相交性质，以及 $R_{\hat{\mathbf{G}}'\hat{\mathbf{L}}\cap\hat{\mathbf{G}}'\subset\hat{\mathbf{P}}\cap\hat{\mathbf{G}}'}$ 借助 [DM20，推论 8.1.6] 与伽罗瓦自同构相容。）此处，$\hat{\mathbf{L}} \cap \hat{\mathbf{G}}' = C_{\hat{\mathbf{G}}'}(\mathbf{Z}(\mathbf{L})_\ell^F)$。由此可知，存在特征标 $\hat{\chi}$ 覆盖 $\hat{\chi}'$，它位于 $G\langle F_{p_0}\rangle$ 的具有 Brauer 对 $(\mathbf{Z}(\mathbf{L})_\ell^F, b_{\hat{L}'}(\hat{\lambda}'))$ 的块中，进而 $\hat{\chi}$ 是 $R_{\hat{\mathbf{G}}\hat{\mathbf{L}}\subset\hat{\mathbf{P}}(\hat{\lambda}\varepsilon)}$ 的一个组成成分，其中 ε 为某个特征标。若 $\delta = 1$，则我们可以选取 $\varepsilon = 1$，从而结论成立。

因此，现在假设 $\delta = 2$。由于 $\hat{\chi}$ 覆盖 $\hat{\chi}'$，可知 ε 在 $\hat{\mathbf{G}}'^F$ 上的限制是平凡的，这迫使 $\varepsilon^{2f'} = 1$。另一方面，如上所述，ℓ 进数域包含一个本原的 $2f'$ 次单位根。得益于 [RSST25, Thm. 7.6, Sec. 8.A], ，特征标 $\hat{\chi}$ ˆ ˆ 与 λ 在 ℓ 进数域上的值域相同。同样，λ 与 $\lambda\varepsilon$ 相差一个阶整除 $2f'$ 的线性特征标。特别地，它们在 ℓ 进数域上的值域相同。□

现在我们证明定理 E，并在此重述该定理。它解决了 Alperin–McKay–Navarro 猜想的块分布问题的一部分。

定理 8.10. 保留本节第一段中的假设。特别地，$\mathbf{G}$ 是经典型单群，但不属于 D_4，型，且 ℓ 是一个不整除 $|\mathrm{Z}(G)|$ 的奇素数。此外，$(\mathbf{L}\ \lambda)$ 是一个幺幂 d-尖点对，其中 $d := d_\ell(q)$。那么存在一个保持块的 $\mathcal{H}$-等变双射

$$\mathrm{Irr}_0(GE \mid \mathcal{E}(G, (\mathbf{L}, \lambda))) \to \mathrm{Irr}_0(\mathrm{N}_{GE}(\mathbf{L}) \mid \lambda).$$

证明。注意，根据我们对 G的假设，E 是阿贝尔的。此外，由引理 7.9可知，对于任意 $G \le H \le GE$，我们可以固定一个扩张 $\Lambda(\lambda) \in \mathrm{Irr}(\mathrm{N}_H(\mathbf{L})_\lambda)$，它是 $\lambda \in \mathrm{Irr}(L)$的扩张。

因此，我们得到一个双射

$$\mathrm{Irr}_0(H) \to \mathrm{Irr}_0(\mathrm{N}_H(\mathbf{L}))$$

通过将特征标集 $\mathrm{Irr}(H \mid R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda)\eta)$（其中 $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}(\lambda)\eta$ 是 $\mathcal{E}(G, (\mathbf{L}\ \lambda))$ 中在 [BMM93, Thm. 3.2] 的双射下对应于 η 的特征标）双射地映到特征标集 $\{$诱导$^{\mathrm{N}_H(\mathbf{L})\,\mathrm{N}_H(\mathbf{L})_\lambda}(\hat{\Lambda}(\lambda)\hat{\eta})$ $\mid \hat{\eta} \in$不可约特征标$(W_H(\mathbf{L}\ \lambda) \mid \eta)\}$。

ˆ ˆ 令 $G := G\langle F_p\rangle$ ，并设 $b := b_G(\mathbf{L}\ \lambda)$。则要么 $G[b] = (GE)[b]$ ，要么存在某个 ˆ 对合 $e \in E$ 使得 $GE[b] = G[b]G\langle e\rangle[b]$。现在对于 $\chi \in$ 不可约特征标(b)，到 $G\langle e\rangle$ 的两个扩张（局部情形类似）具有相同的值域。因此，应用 ˆ 引理 7.6，只需对 G 而非 GE证明该命题。注意，幺幂 ˆ 特征标依 [GM20, Thm. 4.5.11] 是 G-不变的。

令 ˆN := N$\hat{G}$(L) 和 ˆL' := C ˆ$_G$(Z(L)$_\ell$)，并记 ˆλ 为 ˆ$\Lambda(\lambda)$ 在 ˆ $L' \cap$ ˆ$_N$ = ˆL'上的限制。注意，特征标 ψ := Ind ˆ$_N$ˆ$^{N_\lambda}$(ˆ$\Lambda(\lambda)$ˆη) 属于 N ˆ$_G$(L) 中唯一覆盖 ˆ 块 $b_{\hat{L}'}$(Res$^{N_\lambda}$ˆ$_{L'}$(ˆ$\Lambda(\lambda)$ˆη)) 的块。（回忆一下，唯一性由 [Na98，推论 9.21],得出，而这个唯一的块由块诱导给出。）现在，回忆一下， N 中覆盖 $b_L(\lambda)$ 的唯一块 b'由 [CE04，定理 21.7]诱导为 G 的块 $b = b_G$(L λ)。接着，利用 [KS15，定理 B], 中的广义 Harris–Kn¨orr 定理， ψ 的块诱导到 ˆG ，此构造给出了一个满射，将 ˆN 中位于 b' 之上的块映到 ˆ ˆG 中位于 b之上的块。由于 G/G 是循环群，我们可以利用这一点以及 b 之上的其他块是与 b作张量积这一事实，得到 Irr$_0$(ˆ $G \mid \mathcal{E}(G,$ (L λ)) $\to$ Irr$_0$(ˆ$N \mid \lambda$) 之间存在某个保块双射。剩下要证明的是，可以选择这样的双射使其具有 $\mathcal{H}$-等变性。

将 ˆ$_G$ = ˆ^{G_2}ˆ$G_{2'}$ 分解，使得对于 $\pi = 2$ 和 $2'$，ˆ G_π/G 分别是 ˆ G/G 的 Hall π-子群。（此处为简化记号，在此语境下，我们用 2 表示集合 $\{2\}$ ，用 $2'$ˆ 表示整除 $|G|$的奇素数集合。）由于这里的分解是互素的，注意到 ˆ ˆ 引理 7.6 适用，因此只需分别对 G_2 和 $G_{2'}$ 证明该陈述。也就是说，只需证明对于 $\pi \in \{2, 2'\}$ ，存在保块的 $\mathcal{H}$-等变双射

$$\mathrm{Irr}_0(\hat{G}_\pi \mid \mathcal{E}(G, (\mathbf{L}, \lambda)) \to \mathrm{Irr}_0(\hat{N}_\pi \mid \lambda),$$

ˆ ˆ其中 $N_\pi := G_\pi \cap NE$。

我们首先考虑 $2'$ 部分。对于 $G_{2'}$，我们注意到每个幺幂特征标都为实（甚至是有理数值），因此存在唯一一个延拓它的 $G_{2'}$ 实特征标，且该特征标属于覆盖 b 的唯一实块，见引理 2.6 和 2.7。在局部端，注意到块诱导与复共轭相容（见引理 2.7）。特别地，覆盖 ˆ $N_{2'}$ 的块 $b_{\hat{L}_{2'}}$(Res$^{\hat{L}'}$ˆ$_{L_{2'}}$(ˆλ)) 的唯一块（其中 $b_{\hat{L}_{2'}}$(Res$^{\hat{L}'}$ˆ$_{L_{2'}}$(ˆλ)) 是 ˆ $L_{2'}$:= ˆ$L' \cap$ ˆ$N_{2'}$ 的块，见 Na98，推论 9.21]）是覆盖 b_L $(\lambda)^N$ 的唯一实块（见引理 2.7）。因此，由于商是阿贝尔群，且其余的块都是这些实块与线性特征标的张量积，总可以选取这个双射，使其保持 ℓ-块的分布。

ˆ 现在我们考虑到 G_2 的扩张。我们已在 [RSST25，定理 7.6，第 8.A 节]ˆ ˆ 中证明，对每个 ˆ$\chi \in$ 不可约特征标$(G_2 \mid \mathcal{E}(G,$ (L λ))) $\cup$ 不可约特征标$(N_2 \mid \lambda)$，有 $\mathbb{Q}$(ˆχ) $\subset \mathbb{Q}_{f_2}$，其中 f 是使得 $q = p^f$ 的整数，且 f_2 是整除 f 的 2 的最高次幂。

首先假设 $d = d_\ell(q)$ 为偶数。在此情形下， ℓ-进数包含所有 f_2 次单位根，因为此时 f_2 整除 $d_\ell(p)$，从而有 $\ell - 1$。特别地，幺幂 ˆ 特征标到 G_2 的所有扩张都是 $\mathcal{H}$-不变的。于是此处任意保块双射（其存在性如上文对 G 的 ˆ讨论所述）均适用。

因此，我们可以假设 $d = d_\ell(q)$ 为奇数。在此情形下，命题 8.9 表明，对于每个由特征标 $\eta \in$ Irr(W_G(L λ)) 标记的 $\chi \in \mathcal{E}(G,$(L λ))，都存在一个 $\mathcal{H}$-等变双射

$$R_\eta : \mathrm{Irr}(\hat{L}_2 \mid \lambda) \to \mathrm{Irr}(\hat{G}_2 \mid \chi)$$

满足 $(1, b\hat{}G_2(R_\eta(\hat{}\lambda))) \lhd (\mathrm{Z}(\mathrm{L})^F_\ell, b_{\hat{L}_2})$，其中 $b_{\hat{L}_2}$ 是 $\hat{} L_2 := \mathrm{C}\hat{}G_2(\mathrm{Z}(L)_\ell)\hat{}$ 的唯一一个块，包含 λ 的限制的不可约成分。根据 [RSST25, $\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}$ 引理 7.5]，的证明，对于 $\lambda \in \mathrm{Irr}(L_2 \mid \lambda)$，存在一个扩张 $\Lambda(\lambda) \in \mathrm{Irr}((N_2)_\lambda \mid \lambda)\hat{}$，且满足 $\mathcal{H}_{\hat{\Lambda}(\hat{\lambda})} = \mathcal{H}_{\hat{\lambda}}$。此外，由于 $\hat{} N_2 = \mathrm{N}\hat{}G_2(\mathrm{Z}(L)_\ell)$，特征标 $\mathrm{Ind}^{N_2}(\hat{}N_2)_\lambda(\hat{}\Lambda(\hat{}\lambda)\hat{}\eta)$ 全都属于由 [Na98, 推论 9.21] 给出的诱导块 $(b_{\hat{L}_2})^{N_2}$。回顾注记 7.10，$W\hat{}G_2(\mathrm{L}\ \lambda) = \hat{}W_G(\mathrm{L}\ \lambda) \times L_2/L$，因此每个特征标 $\eta \in \mathrm{Irr}(W_G(\mathrm{L}\ \lambda))$ 都有唯一的扩张 $\eta^\circ \in \hat{} \mathrm{Irr}(W\hat{}G_2(\mathrm{L}\ \lambda))$，且 L_2/L 在其核中。因此，若以 $\mathrm{Irr}(\hat{}N/N)$-等变的方式扩展映射 $\hat{}\mathrm{Ind}^{N_2}(\hat{}N_2)_\lambda(\hat{}\Lambda(\hat{}\lambda)\eta^\circ) \mapsto R_\eta(\hat{}\lambda)$，便得到一个双射

$$\mathrm{Irr}_0(\hat{N}_2 \mid \lambda) \to \mathrm{Irr}_0(\hat{G}_2 \mid \mathcal{E}(G, (\mathbf{L}, \lambda)))$$

它是 $\mathcal{H}$-等变的，并保持 ℓ-块不变，正如所需。 □

8.1. **一个例子**。本文最后明确讨论 $G = \mathrm{SL}_2(q)$ 且 $\ell \mid (q-1)$ 的情形；这尤其展示了一种情形：斯坦伯格特征标属于 G 的主块，但定义 3.3 中的扩展斯坦伯格特征标不属于主块。

例 8.11。设 $G = \mathrm{SL}_2(q)$，且 ℓ 是一个满足 $\ell \mid (q-1)$ 的奇素数。注意，斯坦伯格特征标 St_G 属于主块 $b := B_0(G)$。令 $\mathbf{T}_0 \leq \mathbf{B}$ 为对角环面及其对应的 F- 稳定 Borel 子群，并记 $B := \mathbf{B}^F$ 和 $T_0 := \mathbf{T}_0^F$。令 p_0 为满足以下条件的最小值：存在某个正整数 f_0，使得 $p_0^{f_0} = q$ 是一个 $d_\ell(p_0) = 1$。在此情形下，$\mathrm{Ind}_{B\langle F_{p_0}\rangle}^{G\langle F_{p_0}\rangle}(1_{B\langle F_{p_0}\rangle})$ 与广义 Harish-Chandra 归纳一致，且包含平凡特征和广义斯坦伯格特征标 $\mathrm{St}^{G\langle F_{p_0}\rangle}$。这正是属于 $G\langle F_{p_0}\rangle$ 主块的幺幂特征标。

现在假设存在 p_1 使得 $p_1^2 = p_0$，因此 $d_\ell(p_1) = 2$。特别地，若 $n \in \mathrm{N}_G(\mathrm{T}_0) \setminus T_0$，则 nF_{p_1} 中心化 $(T_0)_\ell$，因为 $(p_0 - 1)_\ell = (p_1 + 1)_\ell (p_1 - 1)_\ell$。在这种情况下，$G\langle F_{p_1}\rangle$ 的广义 Steinberg 特征标不在主块 $B_1 := B_0(G\langle F_{p_1}\rangle)$ 中，而在块 $B_1 \otimes \varepsilon$ 中，其中 $\varepsilon \in \mathrm{Irr}(G\langle F_{p_1}\rangle / G\langle F_{p_0}\rangle)$ 是唯一的二阶特征标。计算如下：利用定理 7.16 以及 [DM94，定理 3.11]（正如定理后面的备注所指出的，本例满足其假设）可知，广义 Alvis–Curtis 对偶交换块 B_1 和 $B_1 \otimes \varepsilon$。（事实上，注意到 $|\mathbf{T}^{nF}| = p+1$，因此 Alvis–Curtis 对偶与 Lusztig 诱导在陪集 GF_{p_0} 上不交换，而是会引入一个 -1 符号。另见第 7.3 节。）由于广义 Alvis–Curtis 对偶将平凡特征映到广义 Steinberg 特征标，因此 Steinberg 特征标不属于 $G\langle F_{p_1}\rangle$ 的主块。特别地，若 $p_2^2 = p_1$，则 $G\langle F_{p_2}\rangle[b] = G\langle F_{p_1}\rangle$，因此 $G\langle F_{p_2}\rangle$ 的主块 B_2 经 Alvis–Curtis 对偶与 $B_2 \otimes \varepsilon_2$ 交换，其中 ε_2 是一个扩张 ε 的线性特征标（其阶必为 4）。因此，覆盖平凡特征的特征标是 B_2 中具有实特征标域的唯一幺幂特征标。另一方面，注意到 $d_\ell(p_2) = 4$，所以 B_2 中的所有特征标都是 $\mathcal{H}$-不变的。

将此与 $G = \mathrm{GL}_2(q)$ 的情形进行比较，此时 $G[B_0(G)] = G\langle F_{p_0}\rangle$。特别地，主块在广义 Alvis–Curtis 对偶下的像总是主块。

References

[Bon06] C. Bonnafé. 关于非连通中心有限约化群特征标的研究：对特殊线性群和酉群的应用。*Astérisque* ( ), . BMM , , 有限约化群的泛型块, **212** 1993 7 92 ( ), – .

[CE94] M. Cabanes and M. Enguehard, 34

Invent. Math. 关于幺幂块及其普通特征标。**117** 1994 149 164 2, 22, 27

( ), – . [99] M. Cabanes and M. EnguehardCE , 关于有限约化群的块与扭曲诱导。

Adv. Math. **145** 2 1999 189 229 23, 27, 29 期 ( ), – . CE , *Representation Theory of Finite Reductive Groups*. 剑

[04] M. Cabanes and M. Enguehard

桥大学出版社，剑桥， 2004 5, 6, 9, 11, 14, 15, 16, 17, 22, 23, 24, 25, 29, 30, 35 . CS , 连通

[13] M. Cabanes and B. Späth

中心有限约化群中的等变性与可扩张性。 *Math. Z.* **275** 2013 689 713 23 ( ), – . CS , 特征度上的 McKay 猜想,

[25] M. Cabanes and B. Späth

Ann. of Math.，即将出版，预印本 arXiv:2410.20392 (2024)。 3, 9[DM94] F. Digne and J. Michel, 非连通约化群。

Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 27 3 345 406 1994 ( ): – 2, 7, 8, 10, 15, 16, 20, 25, 26, 27, 28, 31, 33, 36

[20] F. Digne and J. Michel *Representations of finite groups of Lie type*DM , , 第二版，伦敦数学会学生文本丛书,

95, 2020 34 剑桥大学出版社，剑桥，. Da , 块

[73] E. C. Dade *Illinois J. Math.* **17** 1973 198 272 21

扩张, ( ), – .[77] E. C. Dade *J. Algebra* **45** 1977 Da , 关于同构块的备注, ( ), no.

1, 254 258 4 – . GM , , 第187卷,

[20] M. Geck and G. Malle *The Character Theory of Finite Groups of Lie Type*

Cambridge Studies in Advanced Mathematics。剑桥大学出版社，剑桥，2020。 9, 10, 19, 21, 23, 24, 26, 28, 30, 31, 32, 35

[18] E. Giannelli A. A. Schaeffer FryGSV , , and C. Vallejo Rodríguez. *Proc. Amer. Math. Soc.* **147** (

2019 4697 4712 12), – . G , 有限群特征标的实 -块,

[ ] R. Gow 2

Osaka J. Math. **25** 1988 1, 135 147 18 ( ), no. – . Hi , 有限

[90] G. Hiss *J. Lond. Math. Soc.* **2 41**

约化群的正则块与半单块。 s - :1 (1990 63 68 9, 11, 19), – . Isa ,

[76] I.M. Isaacs

Character Theory of Finite Groups 1976 3 . 学术出版社，纽约，. Joh b , 关于

[22] B. Johansson

李型有限群在其定义特征下的归纳 McKay–Navarro 条件。 *J. Algebra* **610** 2022 223 240 9 ( ), –

[15] R. Kessar and G. Malle ℓ

. KM . Lusztig 诱导与有限约化群的 - 块。 *Pacific J. Math.*

279 2015 1 2, 269 298 ( ), no. - – .

12

[15] S. Koshitani and B. Späth KS , 诱导块中特征标的 Clifford 理论,

Proc. Amer. Math.

Soc. **143** 2015 9, 3687 3702 ( ), no. – .

35

[ ] R. Lyons J. M. Martínez LMNT , , G. Navarro, and P. H. Tiep, 主块、不可约限制、域与度。 (

2025 2507 22503 1, 2, 3, 4, 18, 20) arXiv: . Ma , 李型有限群的高度特征标。

[07] G. Malle 0

Represent. Theory **11 (2007), 192–220. 11**[Mar96] A. Marcus. 关于群代数块之间的等价：归约到单分量。

J. Algebra 184 2 372 396, 1996 7 , ( ): – . Mur . 关于有限群正规子群的块。 *Osaka J. Math.*, 50(4):1007–1020, 2013.

[13] M. Murai

21, 22, 27[Na98] G. Navarro.

Characters and blocks of finite groups 250 *London Mathematical Society* , 第 卷, . 剑桥大学出版社,

Lecture Note Series 1998 3, 4, 5, 22, 23, 26, 27, 35, 36

剑桥, .[04] G. Navarro *Ann. of Math. (2)* **160 3** Na , McKay 猜

想与伽罗瓦自同构。( ) (2004), 1129–1140. 2[Na18] G. Navarro, *Character Theory and the McKay Conjecture*. 剑桥大学出版社,

剑桥，2018。 3, 4, 5, 18, 19[NT10] G. Navarro and P. H. Tiep, 有限群有理特征标的度， *Adv. Math.* **224** (2010), no.

3, 1121 1142 1, 2, 18 – . NT ,

[13] G. Navarro and P. H. Tiep

p' *Ann. of Math.* 正规子群上相对 -度的特征标,

(2) **178** 2013 3, 1135 1171 11

( ), no. – .

[NTT08] G. Navarro, P. H. Tiep and A. Turull *J.* , 值域 *Pure Appl. Algebra* **212** 2008 3, 628 635 11 为分圆域的布劳尔特征, ( ), no. – . [24] D. Rossi Ros , 幺幂特征标的局部-整体原理。

Forum Math. Sigma **12** (2024 125, 1 29 30), e – . [RSF22] L. Ruhstorfer and A. A. Schaeffer Fry, 素数 2 和若干李型群的归纳麦凯–纳瓦罗条件。 *Proc. Amer. Math. Soc. Ser. B,* **9** (2022), 204–220. (arXiv: 2106 14745 10, 33 上有少量更正。) RSST , , B. Späth, and J. Taylor, 探索李型群的归纳伽[25] L. Ruhstorfer A. A. Schaeffer Fry 罗瓦-麦凯条件。arXiv: 2506 17123 2, 3, 23, 30, 34, 35, 36 . . SFT , 伽罗瓦自同构与经典群。[23] A. A. Schaeffer Fry and J. Taylor *Transform.* ( ), – *Groups* **28** 2023 439 486 . [92] P. P. Schmid S , 扩展斯坦伯格表示, *J. Algebra* **150** (1992 1, 254 256 17), no. – . Sp a , 经典群[10] B. Späth *d* *J. Algebra* **323** 2010 的 Sylow -环面与 McKay 猜想。I. ( ), 2469–2493. 30[Sp10b] B. Späth, 经典群的 Sylow *d*-环面与 McKay 猜想, II. *J. Algebra* **323** (2010), 2494–2509. 4[Sp12] B. Späth, 定义特征下的归纳麦凯条件。 *Bull. London Math. Soc.* **44** (2012), 426–438. 9, 10[SV20] B. Srinivasan and C. R. Vinroot, 连通中心有限约化群的特征标的伽罗瓦群作用与 Jordan 分解。 *J. Algebra* **558**, 708–727 (2020). 11

（L. Ruhstorfer） School of Mathematics and Natural Sciences, University of Wuppertal, Gaussstr.20, 42119 Wuppertal, Germany*Email address*: ruhstorfer@uni-wuppertal.de

（A. A. Schaeffer Fry） Department of Mathematics, University of Denver, Denver, CO 80210,USA*Email address*: mandi.schaefferfry@du.edu