arXiv:2602.14915v1 [cs.CC] 16 Feb 2026

线图之外的反铁磁伊辛模型

MARK JERRUM

Abstract. 可以说，在有界度线图上，反铁磁伊辛模型和硬核模型都是可处理的。例如，这两种情况下的格劳伯动力学都能快速混合。对于硬核模型，我们知道，可处理性还可以扩展到无爪图，甚至更广的图类。相比之下，本文证明，反铁磁伊辛模型不可能有相应的扩展。

1. Motivation

本文旨在探讨受限图类上自旋系统的计算复杂性。本文所讨论的自旋系统基于一个底层简单图 G，其“构型”是对图 G 的顶点 $V(G)$ 或边 $E(G)$ 赋予“自旋”。本引言将非正式地介绍相关概念，更精确的定义见第 2 节。一般而言，自旋系统的计算问题往往难以解决，但当 G受到限制时，问题可能会变得容易一些。相关例子包括伊辛模型在平面图上的经典精确解，以及二分图上二聚体模型配分函数的近似计算。限制图 G 还会带来一些引人入胜的开放问题，例如在二分图上近似计算硬核（独立集）模型配分函数的复杂性。

本文讨论反铁磁伊辛模型。不过，为了说明研究动机，我们需要从另一种反铁磁模型——硬核模型——谈起。这里的构型是 G 中的独立集，而构型的密度由一种称为“逸度”的量 $\lambda > 0$ 控制。见公式 (1)。

通常，当独立集中的顶点排列得更加紧密时，硬核模型会在较大的 λ下变得难以处理。但若将其限制在所谓的线图上，硬核模型就等价于单体-二聚体（匹配）模型。单体-二聚体模型的可处理性体现在多个方面：对于所有 λ，格劳伯动力学都能在多项式时间内达到混合（Jerrum 和 Sinclair [20]），而当 G 的度有界时，甚至能在最优的 $O(n\log n)$时间内达到混合（Chen、Liu 和 Vigoda [10]）；配分函数的复零点位于（负）实轴上（Heilmann 和 Lieb [16]）；并且存在一种确定性多项式时间近似算法来计算配分函数

School of Mathematical Sciences, Queen Mary, University of London, Mile End Road, London E1 4NS.

E-mail address: m.jerrum@qmul.ac.uk。部分工作得到 UKRI2771：图多项式的零点、算法与关联 项目资助。

（Bayati 等人 [4]）。上述最后一项要求 G 的度有界；在本文余下部分中我们始终假设这一条件成立；更确切地说，我们考虑这样一些图族，其中每个成员的度都由某个普适常数 Δ所界定。

对于硬核模型，我们可以将寻找可处理性的范围进一步扩大，具体来说是扩展到无爪图——一个严格包含线图的图类。Matthews 证明，格劳伯动力学可在多项式时间内达到混合；Chen 和 Gu [9]将这一结果强化为最优的 $O(n\log\ n)$ 时间；Chudnovsky 和 Seymour [12] 证明，复零点仍然位于实轴上。Patel 和 Regts [24] 在 Barvinok [2] 的工作基础上，提出了一个用于计算配分函数的多项式时间确定性算法。随后，我们还可以把研究范围拓展到更特殊的遗传图类，这些图类通过排除爪的细分而得到；Bencs [5], 、Jerrum [18] 以及 Jerrum 和 Patel [19]给出了关于其可处理性的结果。

最后将目光转向反铁磁伊辛模型，我们发现线图仍然是可处理的：Dyer、Heinrich、Jerrum 和 M¨uller [15], 证明格劳伯动力学可在多项式时间内达到混合；Chen、Liu 和 Vigoda [11]则将这一结果改进为最优的 $O(n\log\ n)$ 时间。（相互作用强度可以任意大，但其影响体现在 O 记号所隐含的常数中。）Bencs、Csikv´ari 和 Regts [6]证明，（单变量）配分函数的零点位于实轴上，并由此推导出存在一种多项式时间确定性算法来近似配分函数。鉴于这两个模型十分相似——它们都有两种自旋且都是反铁磁的——自然会让人想问，我们能否将伊辛模型的可处理性拓展到线图之外。

对于硬核模型而言，第一步是将结果推广到无爪图。反铁磁伊辛模型的基态（最小能量）构型对应于 G 中的最大割。Bodlaender 和 Janson [8]证明，在无爪图中寻找最大割是 NP 完全的，这有力地表明反铁磁伊辛模型在这类图上难以处理。[1] 在本文中，我们将细节一一补足，证明情况确实如此。所采用的方法是标准方法，至少可追溯至 Luby 和 Vigoda [22]。定理 3 断言，近似计算配分函数是 NP 困难的；若能高效地对构型进行采样，则意味着 RP $=$ NP。定理 4 断言，格劳伯动力学一般需要指数时间才能达到混合；这一结论是无条件的，不依赖复杂性理论假设。

尽管无爪图是本注记的最初目标，但结果表明，所采用的构造对更小的拟线图类，乃至更小的多重图的线图类同样有效。后者与线图非常接近，这表明线图是具有强相互作用的反铁磁伊辛模型可处理性的极限。对恰好位于线 [14], 之上的遗传图类的考察提供了进一步的旁证，表明最大基数割在线图之外是 NP 完全的。然而，与硬核模型不同——在硬核模型中，导出细分爪完全解释了可处理性（至少对于排除有限个导出子图的遗传类而言）——此处并未确立可处理性与难解性之间的精确边界。

[1] Bencs、Csikv´ari 和 Regts [6, §5] 还提供了进一步的线索：他们给出了伊辛配分函数不是实根的无爪图。

2. Preliminaries

假设 G 是一个图， $\mu > 1$ 和 $\lambda > 0$。令 $n = |V(G)|$ 且 $m = |E(G)|$。我们关注 G上的两个自旋系统。在第一个系统中，我们将自旋取为$+1$ 和 -1，但为简洁起见写作 $+$ 和 $-$。

对于 $\sigma\colon\ V(G) \to \{+,-\}$ 由 σ 定义的割为

$$\operatorname{cut}\sigma = \big\{e \in E(G) : \sigma(e) = \{+,-\}\big\}$$

and $\operatorname{wt}\sigma = \mu^{|\operatorname{cut}\sigma|}$ 是其权重。然后定义（反铁磁）伊辛配分函数 *function* 为

$$Z(G,\mu) = \sum_{\sigma:V(G)\to\{+,-\}} \operatorname{wt}\sigma.$$

配分函数是相应吉布斯分布的归一化因子，其定义为 $\sigma \mapsto \operatorname{wt}(\sigma)/Z(G,\ \mu)$，对所有 $\sigma\colon\ V(G) \to \{+,-\}$ 均成立。

本注中的结果将涉及上述定义的配分函数 $Z(G,\ \mu)$；但为了与现有研究建立联系，我们需要考虑 $Z(G,\ \mu)$ 的一个推广，其中既包含来自单个顶点的贡献，也包含来自边的贡献。为此，引入顶点权重 $\mathbf{z} = \{z_v\colon\ v \in V(G)\}$ 并定义

$$Z(G,\mu,\mathbf{z}) = \sum_{\sigma:V(G)\to\{+,-\}} \operatorname{wt}\sigma \prod_{v:\sigma(v)=+} z_v.$$

变量 z_v 可以看作表示作用于顶点 v 上的“外场”的影响。将 $Z(G,\ \mu,\ \mathbf{z})$ 视为关于 $\mathbf{z}$ 的多项式，其复零点已得到广泛研究，并能帮助我们理解伊辛模型中的相变现象。人们也关注这样得到的一元多项式：对每个 z_v 都代入同一个变量 z；从物理上看，这对应于均匀场。粗略地说，在正实轴的邻域内不存在零点，表明没有相变。

G 中的独立集 是一个顶点集合 $U \subseteq V(G)$，其中 G 中没有任何一条边的两个端点都属于 U。用 $\mathcal{I}(G)$ 表示 G 中所有独立集构成的集合。那么，独立集多项式，也称为硬核配分函数，定义为

$$Z_{\mathrm{IS}}(G,\lambda) = \sum_{U\in\mathcal{I}(G)} \lambda^{|U|}. \tag{1}$$

与之前一样，配分函数是独立集上吉布斯分布的归一化因子，该分布由 $U \mapsto \lambda^{|U|}/Z_{\mathrm{IS}}(G,\ \lambda)$ 给出。同样，研究 $Z_{\mathrm{IS}}(G,\ \lambda)$ 作为关于 λ 的多项式时的复零点也很有价值。显然可以将其推广为多变量情形。

对于上述两种自旋系统（以及其他系统），主要的计算问题是如何将配分函数近似到（例如）一个常数因子以内，以及如何确定一种简单的、采用单点更新的马尔可夫链的混合时间（即达到近平衡所需的时间）；这种马尔可夫链称为格劳伯动力学。对于伊辛模型，算法 1 给出了其定义。

状态空间 Ω 上遍历马尔可夫链（$X_n : n \in \mathbb{N}$）的混合时间，是对所有初始状态 $\omega \in\Omega$ 取最大值后，所需的最短时间 $t \in \mathbb{N}$；此时，在给定 $X_0 = \omega$ 的条件下， X_t的分布与极限分布之间的变差距离小于 $1\,4$。

算法 1 图 G上伊辛模型的格劳伯动力学。

设 $X_t = \sigma$ // 时刻 t的构型：均匀随机抽取 $v \in V(G)\sigma'$ $(u) \leftarrow \sigma(u)$，对所有 $u \in V(G) \setminus \{v\}\sigma'(v) \leftarrow -\sigma(v)$。以 $\mathrm{wt}(\sigma')/(\mathrm{wt}(\sigma) + \mathrm{wt}(\sigma'))$ 的概率，令 $X_{t+1} \leftarrow \sigma'$；以 $\mathrm{wt}(\sigma)/(\mathrm{wt}(\sigma) + \mathrm{wt}(\sigma'))$ 的概率，令 $X_{t+1} \leftarrow \sigma$

本说明中最相关的图类是线图、准线图和无爪图。设 H 是一个图。 H 的线图是图 $G = L(H)$，其顶点集为$V(G) = E(H)$，边集为

$$E(G) = \big\{\{e, f\} : e, f \in E(H), e \neq f \text{ and } |e \cap f| \neq \emptyset\big\}. \tag{2}$$

如果一个图是某个基图 H的线图 $L(H)$，则称它为线图 。如果一个图不包含爪，即不包含图$K_{1,3}$作为导出子图，则称它为无爪图 。最后，如果对于每个顶点 v， v 的邻域都可以划分为两个集合，且这两个集合各自导出一个团，则称该图为准线图 。（ v的邻域中还可能存在额外的边。）显然，在线图中，每个顶点的邻域都可以如此划分。同样显然的是，准线图不含爪。因此我们有

$$\{\text{line graphs}\} \subset \{\text{quasi-line graphs}\} \subset \{\text{claw-free graphs}\}.$$

这两个包含关系都是严格的。这三类图都是遗传的，即对取导出子图封闭。线图和无爪图都已得到广泛研究，而拟线图受到的关注较少，但仍相当可观 [13]。在自旋系统的背景下，值得注意的线图包括笼目晶格和烧绿石晶格。

最后，尽管主要定理是针对拟线图陈述的，但它们实际上也适用于范围更窄（而且似乎更鲜为人知）的多重图的线图类。设 H 是一个多重图，我们将其理解为允许存在平行边、但不允许自环的图。其线图 $G = L(H)$ 的顶点集为$V(G) = E(H)$，边集为 $E(G)$，定义与 (2) 中完全相同。注意， G 是一个简单图： H 中的平行边 e， f 会在 G 中生成一条边，即使它们共享两个端点也是如此。显然，线图也是多重图的线图；而且不难验证，多重图的线图是拟线图。可以将线图理解为由团（非不相交地）并合而成的图，其中 (i) 每个顶点至多属于两个团，且 (ii) 每对团至多交于一个顶点。于是，多重图的线图可以看作仅仅取消了条件 (ii)。所有提及的包含关系都是严格的，因此完整的图景如下

$$\{\text{线}\quad \text{图}\} \subset \{\text{多重图的线图}\} \subset \{\text{拟线图}\} \subset \{\text{无爪图}\} \quad .$$

3. Complexity-theoretic analysis

如果一个图的所有顶点的度均为 3，则称其为三次图。 CubicMaxCut是以下问题。

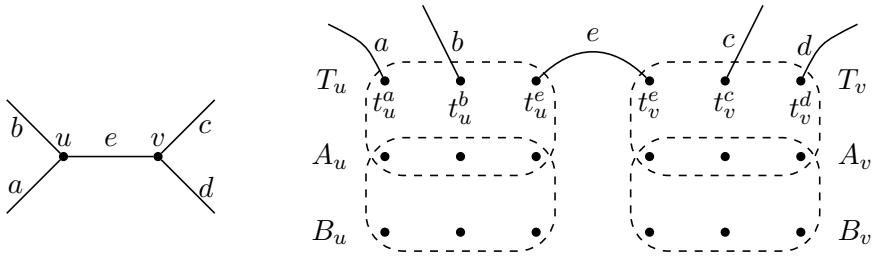

FIGURE 1. 图 G 中的一条边 $e=\{u,v\}$ 及其在图 G^*中的对应边。虚线框饰表示团。

实例：一个三次图 G；**输出：**

$\max_{\sigma:V(G)\to\{+,-\}}|\text{割}\,\sigma|$。

这是 NP 困难的。不仅如此，Berman 和 Karpinski [7,定理 1(1)]证明：

引理 1. 近似到NP 困难，且近似比在0.997以内。也就是说，计算一个数 c使得 $0.997C \le c \le C$（其中$C=\textsc{CubicMaxCut}(G)$）是NP 困难的。

Berman 和 Karpinski 给出了最大度数为3的图的结果，但他们的归约实际上构造的是三次图（参见 [7, §3]）。

在讨论主要结果的证明之前，先做一个小小的观察。

引理 2。 每个三次图 G 都有一个大小至少为 $n=|V(G)|$ 的割。

证明。 设 $\sigma\colon V(G)\to\{+,-\}$ 是图 G中的最大基数割。如果某个顶点 v满足 $\sigma(v)=+$，且与至少两个顶点 u_1, u_2 相邻，其中 $\sigma(u_1)=\sigma(u_2)=+$，那么翻转 v 的符号就能得到更大的割。当 $\sigma(v)=-$ 时情况类似。因此， G中的每个顶点都至少与割另一侧的两个顶点相邻，从而 $|\text{割}\,\sigma|\ge n$。□

定理 3。 存在一个普适常数 $\mu>1$，使得对于度至多为 *8* 的拟线图 G:

- 函数 $G\mapsto Z(G,\mu)$ 在因子 *2* 的范围内难以近似，是 NP-困难的，并且
- 除非 $\mathrm{RP}=\mathrm{NP}$，否则不可能在多项式时间内对伊辛实例 (G,μ) 的吉布斯分布进行近似采样。

“近似”可以理解为实现一个输出分布，使其与真实分布的变差距离在$1\ 4$ 以内。

常数2作为近似因子是任意的，并且可以被任意多项式，甚至 n的适度指数函数所替代。

证明。 假设 G 是 $\textsc{CubicMaxCut}$的一个实例。令 $n=|V(G)|$ 且 $m=|E(G)|$，从而 $m=\frac{3}{2}n$。

按如下方式构造一个反铁磁伊辛模型实例 $(G^*,\ \mu)$。首先，对所有 $v\in V(G)$，定义顶点集为

$$V(H_v)=T_v\cup A_v\cup B_v$$

其中 T_v、 A_v 和 B_v 是基数为 3 的互不相交集合。这里， T_v 是一组具有额外结构的“终端点”:

$$T_v = \{t_v^e : e \ni v\}.$$

因此，对于每一对 v， e，都有一个终端，其中 e 是与顶点 v 相 incident 的边。边集 $E(H_v)$ 由 $T_v \cup A_v$ 上的一个团与 $A_v \cup B_v$ 上的一个团的并集构成。 $E(H_v)$ 中没有其他边。[2] 现在，通过对 $v \in V(G)$ 上的图 H_v 取不相交并并添加一些额外的边，来定义 G^* 。具体而言，

$$V(G^*) = \bigcup_{v \in V(G)} V(H_v)$$

and

$$E(G^*) = \big\{\{t_u^e, t_v^e\} : e = \{u, v\} \in E(G)\big\} \cup \bigcup_{v \in V(G)} E(H_v).$$

G^* 中位于某个 H_v 内部的边称为内部边，其余边称为外部边。参见图1。值得指出的是， G^* 是一个准线图，且最大度为 8。

假设 G 中的最大割的基数为 C。我们证明，对于足够大的普适常数 $\mu > 1$，且该常数独立于 n，从 (G^*, μ) 上的吉布斯分布中抽取的样本，将以高概率指出 G 中一个大小至少为 $0.997C$ 的割。

令 $\sigma^* \colon V(G^*) \to \{+,-\}$ 是 G^* 上的一个伊辛构型。由此诱导的构型 $\varphi(\sigma^*) \colon V(G) \to \{+,-\}$ 在 G 上定义为 $\varphi(\sigma^*) = \sigma$ ，其中

$$\sigma(v) = \mathrm{maj}\{\sigma^*(t_v^e) : e \ni v\}, \quad \text{for all } v \in V(G),$$

其中，maj 表示多数表决。定义

$$Z_\sigma = Z_\sigma(G^*, \mu) = \sum_{\sigma^* \in \varphi^{-1}(\sigma)} \mathrm{wt}\, \sigma^*.$$

使得

$$Z(G^*, \mu) = \sum_{\sigma : V(G) \to \{+,-\}} Z_\sigma.$$

假设 σ 指定了 G 中一个基数为 c 的割。我们声称

$$\mu^{18n+c} \le Z_\sigma(G^*, \mu) \le 2^{8n} \mu^{18n+c}. \tag{3}$$

在验证 (3) 之前，我们需要检查“构件”图 $\{H_v\}$ 的关键性质。若一个构型 σ^* 在 H_v 上是完美的，则

$$\sigma^*(T_v) = \{\pm\},\ \sigma^*(A_v) = \{\mp\},\ \text{and}\ \ \sigma^*(B_v) = \{\pm\}.$$

注意，若 σ^* 在 H^v 上是完美的，则 H^v 的（内部）边对 $\mathrm{wt}\,\sigma^*$ 的贡献为 μ^{18} ；否则至多为 μ^{17} 。为此，考虑两种情况（忽略对称性） $\sigma^*(A_v) = \{+\}$ 和 $\sigma^*(A_v) = \{+,-\}$。然后计算扩展到 T_v 和 B_v 的方式数。

若 σ^* 完美 对所有 $v \in V(G)$ 在 H_v 上都是完美的，则称其为完美。存在唯一的完美构型 $\sigma_0^* \in \varphi^{-1}(\sigma)$。该构型的权重为 $\mathrm{wt}\,\sigma_0^* = \mu^{18n+c}$。这处理了 (3) 中的下界

[2] H_v 与 Bencs、Csikv´ari 和 Regts [6, §5]给出的一个反例之间存在相似之处。回过头来看，这并不令人意外，因为要摆脱可处理性，我们需要采用一个（小型）图，其配分函数的零点并不全部位于实轴上。

对于上界，令 σ_0^* 如前所述，且 $\sigma^* \in \varphi^{-1}(\sigma)$ 为任意的。假设我们依次对每个 $v \in V(G)$，通过在每个不完美的 H_v上重新分配自旋，将 σ^* 变换为 σ_0^* 。先前不完美的 H_v 中，内部边对 $\mathsf{wt}\,\sigma^*$ 的贡献至少增大到原来的 μ倍。然而，有可能一条外部边从 $+-$ 或 $-+$ 变为 $--$ 或 $++$，从而使权重减小到原来的 μ分之一。在所有情况下，权重都不会减小，因此 $\mathsf{wt}\,\sigma^* \le \mathsf{wt}\,\sigma_0^*$。(3) 中的上界来自于注意到 $|\varphi^{-1}(\sigma)| = 2^{8n}$。

现在令 C 为 G 和 $0 < c < C$ 中最大割的基数。注意到 (3)，我们有

$$\sum_{\substack{\sigma:V(G)\to\{+,-\}\\ |\operatorname{cut}\sigma|>c}} Z_\sigma \ge \sum_{\substack{\sigma:V(G)\to\{+,-\}\\ |\operatorname{cut}\sigma|=C}} Z_\sigma \ge 2\mu^{18n+C}. \tag{4}$$

and

$$\sum_{\substack{\sigma:V(G)\to\{+,-\}\\ |\operatorname{cut}\sigma|\le c}} Z_\sigma \le 2^n \times 2^{8n}\mu^{18n+c} = 2^{9n}\mu^{18n+c}. \tag{5}$$

令 $c = 0.997C$，使得 $[c, C]$ 与引理 1 中指定的间隙相匹配，并回忆由引理 2 可知 $C \ge n$。那么

$$\mu^{18n+C} \ge 2^{9n+2}\mu^{18n+c} \tag{6}$$

在满足 $n \ge 10$ 且令 $\mu \ge 2^{3067}$ 的条件下。因此，结合 (4)、(5) 和 (6)，从 G^* 上的吉布斯分布中抽取的随机构型 σ^*，将以至少 $3\,4$ 的概率满足 $|\text{割 } \varphi(\sigma^*)| > c = 0.997C$。假设我们有一个针对有界度准线图上的吉布斯分布的多项式时间近似采样器，其变差距离不超过 $1\,4$。那么，通过映射 φ，我们就能以至少 $1\,2$ 的概率，在 G 中找到一个基数至少为 c 的割。根据引理 1，这将意味着 RP $=$ NP。

现在假设我们有一个算法，该算法生成满足以下条件的 $Z(G,\ \mu)$ 对 $Z(G,\ \mu)$ 的近似

$$\tfrac{1}{2}Z(G,\mu) \le \widetilde{Z}(G,\mu) \le 2Z(G,\mu).$$

那么，如果 G具有基数为 C 的最大割，我们有

$$\widetilde{Z}(G,\mu) \ge \tfrac{1}{2}Z(G,\mu) \ge \mu^{18n+C}, \qquad \text{(by (4))}$$

另一方面，如果 G没有基数大于 c的割，那么

$$\widetilde{Z}(G,\mu) \le 2Z(G,\mu) \le 2^{9n+1}\mu^{18n+c} \le \tfrac{1}{2}\mu^{18n+C}. \qquad \text{(by (5) and (6))}$$

我们显然可以区分这两种情况。根据引理 1，我们可以将 CubicMaxCut(G) 的近似在多项式时间内归约为在有界度拟线图 G^* 上对伊辛模型配分函数的近似。□

两点说明。第一点显而易见：上述结果给出了关于 μ 的（超）天文级界限，而且显然没有说明在这个宇宙中的计算问题。尽管还有收紧估计的余地，但鉴于引理 1 中的起点，界限不太可能缩小到仅仅天文级。不过，这确实表明，[9, 18, 19] 中关于硬核（独立集）模型的正面结果，在反铁磁伊辛模型中并无对应结果。第二点是，证明中构造的图 G^* 是一种特殊的拟线图

其中团可以预先选定。换个角度看，G^* 是一个多重图的线图。

熟悉 Lebowitz、Ru- elle 和 Speer 所述浅野收缩方法的读者 [21], 可能会好奇，为什么该方法无法得到一个包含实轴的配分函数零点自由区域。若能得到这样的区域，就会与定理 3（该定理依赖于多相的存在）相矛盾，或者至少证明 P =NP。可以把线图看作由团通过识别顶点构造而成。各个团的配分函数的根已知都位于负实轴上。因此，线图本身具有一个包含正实轴的抛物形多变量[3] 零点自由区域 [21, 11]。这对严格意义上的线图成立，但对拟线图则不成立。问题的端倪见于 [21, 例 2.2(c)]: 识别顶点时会产生平行边，所得伊辛系统的相互作用强度并非常数。顺带一提，在硬核模型中不会出现这个问题，因为平行边等价于单边。这在一定程度上解释了这两种模型性质上的差异。

4. 指数时间混合

在假设 NP $\neq$ P 的条件下，定理 3 排除了任何用于近似计算配分函数或近似抽样构型的多项式时间算法。对于格劳伯（单点）动力学，我们还有一个无条件的混合时间指数上界。

一个 n 顶点图 G 是 c 扩张图，当且仅当对于每个满足$|U| \le \frac{1}{2}|V(G)|$的顶点子集 $U \subset V(G)$，都有 $|N_G(U) \setminus U| \ge c|U|$，其中 $N_G(U)$ 表示 U 的邻域。

定理 4。存在一个普适常数 $\mu > 1$，以及一个拟线图族$(G_n : n \in \mathbb{N})$，其最大度不超过 *8*，且满足 $|V(G_n)| = 18n$；对于伊辛模型(G_n, μ)，其上的格劳伯动力学的混合时间为$\Omega(2^n)$。

证明。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，令 G_n 为一个三次二分 $n + n$ 顶点图，且它是一个$1\,8$ 扩张图。此类图的存在性可由 Bassalygo 的一个引理推出 [3]；Alon 引用了这个引理，并明确给出了随机三次二分图作为数值示例。参见 [1, 引理 4.1] 及其后面的讨论。令 G_n^* 为通过定理 3 证明中所用构造从 G_n 得到的图。注意，G_n^* 是一个最大度为 8 、具有 $2n \times 9 = 18n$ 个顶点的拟线图。

令 $V(G_n) = L(G_n) \cup R(G_n)$ 为 G_n 的二分划分，$\Omega_=$（分别为 Ω_+、Ω_-）为 G_n 中的割集，其中 $L(G_n)$ 内的 $+$ 顶点数等于（分别大于、小于） $R(G_n)$ 内的顶点数。回顾函数 φ，它将 G_n^* 中的构型映射到 G_n 中的构型，并用于定理 3 的证明。从 $\varphi^{-1}(\Omega_+)$ 中的一个构型转变为 $\varphi^{-1}(\Omega_-)$ 中的一个构型时，G_n^* 上的格劳伯动力学必须经过 $\varphi^{-1}(\Omega_=)$ 中的某个构型。

假设 $\sigma \in \Omega_=$，并令

$$S = (L(G_n) \cap \sigma^{-1}\{-\}) \cup (R(G_n) \cap \sigma^{-1}\{+\})$$

[3]我们先前提到，通过另一种方法得到了一个更大的单变量区域 [6]。

我们有 $|S| = |S^c| = n$，其中 $S^c = V(G_n) \setminus S$。由于 G_n 是一个 $\frac{1}{8}$ 扩张图，S^c 中至少有 $\frac{1}{8} \times 2n = \frac{1}{4}n$ 个顶点与 S 中的某个顶点相邻，由此可得 $|\text{割 } \sigma| \le m - \frac{1}{4}n$，其中 $m = 3n$ 是 G_n 中边的数量。与前一个证明一样，这意味着 $Z_\sigma \le (2^8\mu^{18})^{2n}\mu^{m-n/4}$，并且

$$\sum_{\sigma\in\Omega_=} Z_\sigma \le 2^{2n}(2^8\mu^{18})^{2n}\mu^{m-n/4} = 2^{18n}\mu^{36n}\mu^{m-n/4}.$$

另一方面，

$$\sum_{\sigma\in\Omega_\pm} Z_\sigma \ge (\mu^{18})^{2n}\mu^m = \mu^{36n}\mu^m.$$

因此

$$\sum_{\sigma\in\Omega_=} Z_\sigma \le 2^{-n} \sum_{\sigma\in\Omega_\pm} Z_\sigma,$$

只要满足 $\mu \ge 2^{76}$。

这个不等式意味着，在 G_n^* 上，格劳伯动力学的“导通率”呈指数级小，因此混合时间呈指数级大。具体而言，不失一般性地假设 $\sum_{\sigma\in\Omega_+} Z_\sigma \le \frac{1}{2}$，我们可以在 [17, Claim 7.14]，中令 $A = \varphi^{-1}(\Omega_+)$ 和 $M = \varphi^{-1}(\Omega_=)$，从而得到混合时间的下界 2^{n-2}。□

几点说明。基本上，同样的论证适用于任何“谨慎”的马尔可夫链，只要它在每次转移时仅改变少量自旋。此外，根据切格尔不等式，伊辛系统（G_n，μ）上的格劳伯动力学的谱隙为 $O(2^{-n})$；等价地，弛豫时间为 $\Omega(2^n)$。

5. Interactions of varying strength

关于线图上的反铁磁伊辛模型，现有正面结果的一个特点是 [15, 11, 6]它们依赖于所有边上的相互作用强度均为常数。假设我们不再像之前那样只采用单一的相互作用强度 μ，而是允许两种：μ（较大）和 1。那么，图 G 中权重为 1 的边对构型 σ 的权重 wt_σ 没有影响，因此在计算配分函数时，也可以将它们从实例 G 中移除。因此，对任意 n顶点图 G，计算 $Z(G,\mu)$等同于计算完全图 K_n 在某种相互作用强度模式下的配分函数，该模式取自 $\{\mu, 1\}$。但是，K_n 是星图$K_{n,1}$的线图。因此，如果允许相互作用强度不同，那么线图和任意图一样难处理。

因此，似乎具有不同相互作用强度的线图并无研究价值，即使我们只允许两种强度（诚然，两者相差很大）。然而，对我们而言，这并非完全 毫无意义，因为我们只关注有界度图类，而且显然并非每个有界度图族都能作为有界度线图的子图得到。

然而，很容易证明，即使顶点度受到限制，允许两种相互作用强度也会导致难解性。给定一个三次图 G，引入图构件 J_v，其中 $v \in V(G)$，它们比之前的构件更加简单。J_v的顶点集是 $V(J_v) = T_v \cup A_v$，其中 T_v 和 A_v 是基数为 3 的集合，并且 $T_v = \{t_v^e : e \ni v\}$。$J_v$ 的边集是具有二分划分 $T_v + A_v$ 的完全二分图的边集。按照之前对 J_v 的做法构造 $G^\dagger$

，但用 J_v 代替 H_v。注意， $G^\dagger$ 是最大度为 6 的线图的子图。

与之前一样，若 $\sigma^\dagger(T_v) = \{\pm\}$ 且$\sigma^\dagger(A_v) = \{\mp\}$，我们就称构型 $\sigma^\dagger$ 在 $G^\dagger$ 上关于 J_v 是完美的。若 $\sigma^\dagger$ 在 J_v上是完美的，则 J_v 中的内部边对 $\mathrm{wt}\,\sigma^\dagger$ 贡献因子 μ^9 ；否则至多贡献 μ^6 。因此，定理3和定理4的证明可以从拟线图推广到线图的子图（并改进了 μ的界）。

推论5。 定理*3*和定理*4*中的“最大度至多为*8*的拟线图”可替换为“最大度至多为*6*的线图子图”。

可以在有限范围内调整相互作用强度，同时保持可处理性，但无法容忍大幅变化。

References

[1] N. Alon. 特征值与扩展图. *Combinatorica*, 6(2):83–96, 1986. [2] Alexander Barvinok and Pablo Sober´on. 计算具有重数的图同态的配分函数. *J. Combin. Theory Ser. A*, 137:1–26, 2016. [3] L. A. Bassalygo. 渐近最优开关电路. *Problemy Peredachi Informatsii*, 17 3 81 88, 1981 ( ): – . [4] Mohsen Bayati, David Gamarnik, Dimitriy Katz, Chandra Nair, and Prasad Tetali. 用于计数匹配的简单确定性近似算法. In *Annual ACM Symposium on Theory of Computing* 122 127 *STOC'07—Proceedings of the 39th* 2007 , pages – . ACM, New York, . [5] Ferenc Bencs. *Graphs, Groups and Measures*. 博士论文，中欧大学，2019. [6] Ferenc Bencs, P´eter Csikv´ari, and Guus Regts. Wagner加权子图计数多项式的一些应用. *Electron. J. Combin.*, 28(4):Paper No. 4.14, 21, 2021. [7] Piotr Berman and Marek Karpinski. 关于一些更紧的不可近似性结果（扩展摘要）. In *Automata languages and programming (Prague, 1999)* 1644 *Lecture Notes in Comput.* , , *Sci.* 200 209 1999 volume of , pages – . 施普林格, 柏林, . [8] Hans L. Bodlaender and Klaus Jansen. 关于最大割问题的复杂性. *Nordic J.* , ( ): – . [9] *Comput.* 7 1 14 31, 2000 Zongchen Chen and Yuzhou Gu. 快速抽样 *b* *b* *Proceedings of* 匹配和-边 *the 2024 Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)* 4972 4987 覆盖. In , pages – . SIAM, 费城 PA, 2024. [10] Zongchen Chen, Kuikui Liu, and Eric Vigoda. 格劳伯动力学的最优混合：通过高维扩张实现熵分解. In *STOC '21—Proceedings of the 53rd Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing* 1537 1550 [2021] 2021 , pages – . ACM, New York, © . [11] Zongchen Chen, Kuikui Liu, and Eric Vigoda. 通过稳定性实现谱独立性及其在Holant类问题中的应用. *TheoretiCS*, 3:Art. 16, 49, 2024. [12] Maria Chudnovsky and Paul Seymour. 无爪图的独立集多项式的根. *J. Combin. Theory Ser. B*, 97(3):350–357, 2007. [13] Maria Chudnovsky and Paul Seymour. 无爪图。VII. 拟线图. *J. Combin. Theory* , ( ): – . *Ser. B* 102 6 1267 1294, 2012 [14] de Ridder, H. N. et al. 图类及其包含关系信息系统（ISGCI），2024。https://www.graphclasses.org. [15] Martin Dyer, Marc Heinrich, Mark Jerrum, and Haiko M¨uller. 线图上的反铁磁伊辛模型的多项式时间近似算法. *Combin. Probab. Comput.*, 30(6):905–921, 2021. [16] Ole J. Heilmann and Elliott H. Lieb. 单体-二聚体系统理论. *Comm. Math. Phys.*, 25 190: –232, 1972. [17] Mark Jerrum. *Counting, sampling and integrating: algorithms and complexity*. 苏黎世联邦理工学院数学讲义. Birkh¨auser Verlag, 巴塞尔, 2003.

[18] Mark Jerrum. 有界度

H Com- 无图

bin. Probab. Comput. 34 6 803 814, 2025
上的硬核模型的格劳伯动力学. , ( ): – . [19] Mark Jerrum and Viresh Patel. 受限图类上独立集多项式的零点自由区域，2025。arXix:2510.01466. [20] Mark Jerrum and Alistair Sinclair. 永久式的近似计算. *SIAM J. Comput.*, 18(6):1149–1178, 1989.[21] Joel L. Lebowitz, David Ruelle, and Eugene R. Speer. 某些伊辛自旋系统中李-杨零点的位置及相变的缺失. *J. Math. Phys.*, 53(9):095211, 13, 2012. [22] Michael Luby and Eric Vigoda. 用于抽样独立集的格劳伯动力学快速收敛. *Random Structures Algorithms*, 15(3-4):229–241, 1999. [23] James Matthews. *Markov Chains for Sampling Matchings*. 博士论文，信息学院，爱丁堡大学，2008。 http://hdl.handle.net/1842/3072. [24] Viresh Patel and Guus Regts. 配分函数和图多项式的确定性多项式时间近似算法. *SIAM J. Comput.*, 46(6):1893–1919, 2017.