arXiv:2602.14933v1 [math.RT] 16 Feb 2026

有限辛群的极大幂幺子群的车放置与余伴随轨道

Mikhail Venchakov

摘要

设 U 是有限域上特征为 p 且充分大的辛群中的一个极大幂幺子群。根据 Kirillov轨道方法，群 U 的余伴随轨道在描述 U 的不可约复特征标中发挥着关键作用。迄今研究的几乎所有重要轨道和特征标类，都可以统一描述为与所谓正交车放置相关的轨道和特征标。本文按照 Mackey小群方法的思想，为相应的不可约特征构造一个半直积分解。作为推论，我们给出与最大可能维数轨道对应的特征标的显式公式。

关键词： 幺幂子群、辛群、余伴随轨道、轨道方法、不可约特征、麦基方法、极化、正交车放置。

AMS学科分类： 20C15, 17B08,20D15.

1. 引言

设 U 是定义在特征 p 充分大的有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的单幺代数群。U 的表示论中主要使用的工具是轨道方法，该方法由 A.A. Kirillov 于 1962 年创立，参见 [Ki62],[Ki04], [Ka77]。轨道方法的核心思想是，U 的不可约表示与该群的余伴随轨道一一对应。具体而言，群 U 通过伴随作用作用于其李代数 $\mathfrak{u}$；U 在对偶空间 $\mathfrak{u}^*$ 上的对偶作用称为余伴随作用。事实证明，U 的所有不可约复特征标构成的集合 Irr(U) 与余伴随轨道集合 $\mathfrak{u}^*/U$ 之间存在自然的双射；精确表述见下文定理 3.1。

设 U 是单经典群在 $\mathbb{F}_q$ 上的一个极大幂幺子群（或等价地，一个 Sylow p-子群）。群 U 的所有余伴随轨道的完整描述是一个棘手的问题，因此一个自然的问题是，如何描述某些重要的轨道类及其对应的不可约特征。对于 A_{n-1} 情形，最大可能维数的轨道在 Kirillov 关于轨道方法的第一篇工作 [Ki62] 中得到了分类。它们全都与所谓的 Kostant级联相关，而后者实际上是一种正交车放置。对于其他经典根系，与 Kostant级联相关的轨道也具有最大可能维数，见 [Ko12] 和 [Ko13]。对于 A_{n-1}，次最大维数的轨道由 A.N. Panov 在 [IP09] 中进行了分类。这类轨道同样对应于正交车放置（在其典范形式中，允许加上简单根协向量）。类型 C_n 中最大维数轨道的分类可由 C. Andre 和 A. Neto 的论文 [AN06] 得出。B_n 和 D_n 中最大可能维数轨道的描述，以及所有类型 B_n、C_n 和 D_n 中次最大维数轨道的描述，将在 [IV26i] 中给出。所有这些轨道也都与正交车放置相关（在其典范形式中，允许加上简单根协向量）。

本成果源自高等经济学院基础研究计划下实施的一项研究项目。

类型 A_{n-1} 中与最大维数轨道对应的不可约特征 M 由 C. Andre 在 2011 [An01] 中计算得出。A_{n-1} 中次最大维数的特征 $M-2$ 由 M. Ignatev 在 [Ig09i] 中计算得出。类型 C_n 中最大维数特征的公式可由 Andre 和 Neto 的研究成果 [AN06] 得到。正交情形中的最大维数特征，以及经典情形中的次最大维数特征，将在 [IV26i] 中计算。Andre 的方法基于他所建立的 $\mathfrak{u}^*$ 的一个非常优美的分层；这些分层由任意的（可能是非正交的）车放置以及从这些车放置到 $\mathbb{F}_q^\times$ 非零数集合的映射进行编号。

本文提出了一种基于小群的 Mackey 方法计算特征标的另一种途径。该方法将计算具有阿贝尔正规子群的半直积群的不可约特征标，转化为计算某些称为小群的子群的不可约特征标，详见第 3 节。事实证明，该方法可用于计算 A_{n-1} 的最大维数和次最大维数特征标，参见 [Ig09i]。此外，在 [IV25] 中，我们将该方法用于计算下一种可能维数的特征标 $M-4$。本文则将 Mackey 方法的一种改进应用于辛情形下与任意正交车放置相关的特征标。作为推论，我们对 [AN09] 中给出的最大维数特征标公式提供了另一种证明。我们还独立地对先前在 [AN06] 中得到的最大维轨道进行了分类。

本文结构如下。第 2 节简要回顾有限辛群及其极大幺幂子群的主要定义和事实。我们还定义根系中的车放置及其相关的余伴随轨道。第 3 节回顾轨道方法。作为主要结果，我们按照 Mackey 方法的思路，给出与正交车放置所关联轨道相对应的任意特征标的一种分解，见定理 3.8。特别地，为了构造与线性形式 f 的轨道相对应的表示，并得到上述分解，需要给出 f 的一种极化。本节中我们还为与正交车放置相关轨道上的典范形式建立了这样一种极化。

在第 4 节中，我们探讨最大维特征标。首先，我们根据所谓的典范形式对最大维轨道进行分类，见定理 4.5。接下来，我们描述任意最大维特征标的支撑（即群 U 中该特征标取非零值的元素集合），并计算其取值。具体而言，我们将支撑分解为共轭类的并集，并计算该特征标在每个共轭类上的取值，见定理 4.10。

我感谢我的导师 Mikhail Ignatev 对我工作的持续关心，也感谢 Alexey Petukhov 富有成效的讨论。

2. 定义与记号

辛群的对应根系为 C_n。我们将类型为 C_n 的根系记作 Φ。按照惯例，我们将其视为 $\mathbb{R}^n$的以下子集：

$$C_n = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j, 1 \le i < j \le n\} \cup \{\pm 2\varepsilon_i, 1 \le i \le n\},$$

其中 $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$中的标准基。选取单根集 $\Delta = \Delta(\Phi)$，如 [Bou0 中所示 2]:

$$\Delta(C_n) = \{\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}, 1 \le i \le n-1\} \cup \{2\varepsilon_n\}. \tag{1}$$

正根集合 $\Phi^+ \supset \Delta$ 如下所示：

$$C_n^+ = \{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j, 1 \le i < j \le n\} \cup \{2\varepsilon_i, 1 \le i \le n\}. \tag{2}$$

记 $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}(\Phi)$ 为由向量 e_α、 $\alpha \in \Phi$ 张成的 $\mathfrak{gl}_m(\mathbb{F}_q)$ 子代数，其中

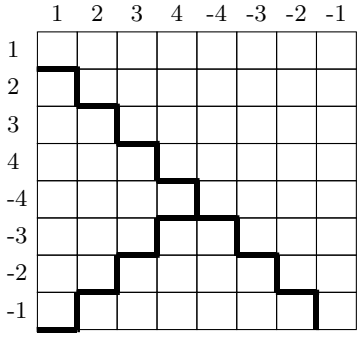
$$\begin{aligned} e_{2\varepsilon_i} &= e_{-i,i}, \quad 1 \le i \le n, \\ e_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} &= e_{j,i} - e_{-i,-j}, \quad 1 \le i < j \le n, \\ e_{\varepsilon_i + \varepsilon_j} &= e_{-j,i} + e_{-i,j}, \quad 1 \le i < j \le n. \end{aligned}$$

这里, $m = 2n$，我们用指标对 $m \times m$ 矩阵的行和列进行编号

$$1, 2, \dots, n, -n, \dots, -2, -1,$$

并记$e_{a,\ b}$ 为通常的初等矩阵。当然，它是相应辛代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\Phi)$ 中的极大幂零子代数。特别地，$\dim \mathfrak{u} = |\Phi^+|$。

例 2.1。 这里我们示意性地画出了代数 C_4。约定如下：给定 $1 \le j < i$，方格 $(i,\ j)$（分别为 $(-i,\ j)$ 和 $(-j,\ j)$）对应于根 $\varepsilon_j - \varepsilon_i$（分别对应于$\varepsilon_j + \varepsilon_i$ 和 $2\varepsilon_j$）。



此外，我们定义函数

$$\begin{aligned} &\mathrm{col}\colon \Phi^+ \to \{1, \dots, n\}\colon \mathrm{col}(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j) = \mathrm{col}(2\varepsilon_i) = i, \\ &\mathrm{row}\colon \Phi^+ \to \{-n, \dots, n\}\colon \mathrm{row}(\varepsilon_i \pm \varepsilon_j) = \mp j, \mathrm{row}(2\varepsilon_i) = -i. \end{aligned}$$

对于任意的 $-n+1 \le i \le n-1$ 和 $1 \le j \le n$，集合

$$\begin{aligned} R_i &= R_i(\Phi) = \{\alpha \in \Phi^+ \mid \mathrm{row}(\alpha) = i\}, \\ C_j &= C_j(\Phi) = \{\alpha \in \Phi^+ \mid \mathrm{col}(\alpha) = j\} \end{aligned}$$

分别称为第 i 行和第 j 列。我们在指标集上引入镜像序

$$1 \prec 2 \prec \ldots \prec n \prec -n \prec \ldots \prec -2 \prec -1,$$

以及 Φ^+ 上的以下全序:

$$\begin{aligned} \alpha \prec \beta &\overset{\text{def}}{\iff} \mathrm{col}(\beta) \prec \mathrm{col}(\alpha) \text{ or } \mathrm{col}(\beta) = \mathrm{col}(\alpha),\ \mathrm{row}(\beta) \prec \mathrm{row}(\alpha), \\ \alpha \prec' \beta &\overset{\text{def}}{\iff} \mathrm{col}(\beta) \prec \mathrm{col}(\alpha) \text{ or } \mathrm{col}(\beta) = \mathrm{col}(\alpha),\ \mathrm{row}(\beta) \succ \mathrm{row}(\alpha). \end{aligned} \tag{3}$$

Fo例如，对于 $\Phi = C_6$，我们有 $\varepsilon_2 - \varepsilon_4 \succ \varepsilon_2 \succ \varepsilon_2 + \varepsilon_5 \succ \varepsilon_3 - \varepsilon_6$、$2\varepsilon_2 \succ' \varepsilon_2 + \varepsilon_5 \succ' \varepsilon_2 - \varepsilon_4 \succ' \varepsilon_3 - \varepsilon_6$。现在可以定义我们关注的主要对象了。

定义 2.2。 设子集 $D = \{\beta_1, \dots, \beta_t\} \subset \Phi^+$ 由两两正交的根组成，并满足以下条件:

$$|D \cap R_i| \le 1 \text{ and } |D \cap C_j| \le 1 \text{ for all } i, j. \tag{4}$$

我们将这样的子集 D 称为正交车放置。（注意，在 [AN06], 中，这样的子集 D 称为 Φ基本子集。）

将相应辛有限群 G 中的极大幺幂子群 $\exp(\mathfrak{u})$ 记为 U。下文中，我们始终假设 $p = \operatorname{char}\mathbb{F}_q \geqslant n$。在此假设下，映射

$$\exp\colon \mathfrak{u} \to U\colon x \mapsto \sum_{i=0}^{m-1} \frac{x^i}{i!}$$

是良定义的，事实上还是一个双射（并且是 $\mathbb{F}_q$ 上的代数簇同构）；我们用 $\ln$ 表示其逆映射。此外，贝克-坎贝尔-豪斯多夫公式指出，对于李子代数 $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{u}$ 和任意的 $u,\ v \in \mathfrak{a}$，有

$$\exp(u)\exp(v) = \exp(u + v + \tau(u, v)), \tag{5}$$

其中 $\tau(u,\ v) \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$（这里 $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = \langle [x, y],\ x,\ y \in \mathfrak{a}\rangle_{\mathbb{F}_q}$）。

群 U 通过伴随作用作用于其李代数 $\mathfrak{u}$；U 在 $\mathbb{F}_q$ 对偶空间 $\mathfrak{u}^*$ 上的对偶作用称为余伴随。利用非退化形式

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB)$$

在 $\mathfrak{gl}_m(\mathbb{F}_q)$ 上，可以将对偶空间 $\mathfrak{u}^*$ 与空间 $\mathfrak{u}^t$ 等同（在这种情况下，对于任意 $\alpha = 2\varepsilon_i \in \Phi^+$，$e_\alpha^* = e_\alpha^t$；否则则为 $e_\alpha^* = e_\alpha^T/2$）。在此等同下，余伴随作用具有如下形式：

$$g.x = \operatorname{pr}(gxg^{-1}),\ g \in U,\ x \in \mathfrak{u}^*$$

（此处我们将沿 $\mathfrak{u}$ 的投影 $\mathfrak{gl}_m(\mathbb{F}_q) \to \mathfrak{u}^*$ 记为 pr）。余伴随作用的轨道在群 U 的不可约表示的分类中起着关键作用。

定义 2.3. 设 $D = \{\beta_1, \ldots, \beta_t\} \subset \Phi^+$ 为正交车放置，且 $\xi = (\xi_\beta)^{\beta\in D}$ 为取自 $\mathbb{F}_q$的一组非零常数。令

$$f = f_{D,\xi} = \sum_{\beta\in D} \xi_\beta e_\beta^* \in \mathfrak{u}^*.$$

我们称线性形式 f 的余伴随轨道 $\Omega = \Omega_{D,\xi} \subset \mathfrak{u}^*$ 与 D 相关联，并称 f 为 Ω 上的典范形式。

定义 2.4. 对任意李代数 $\mathfrak{g}$ 与线性形式 $f \in \mathfrak{g}^*$，考虑满足下列条件的集合 $\mathfrak{p}$。

1. 对任意 $x, y \in \mathfrak{p},\ \ f([x, y]) = 0$。
2. 集合 $\mathfrak{p}$ 是 $\mathfrak{u}$ 中满足性质 1 的极大子空间。
3. 集合 $\mathfrak{p}$ 是一个子代数。

这样的子空间称为形式 f 的 极化。

注意，对于任意线性形式，都存在一个极化 [Ve70]。此外，容易看出，f 的余伴随轨道维数与 f 的极化维数之间存在如下简单公式

$$\dim \Omega_f = 2 \cdot \operatorname{codim} \mathfrak{p}$$

（例如，参见 [Sr74，第 117]页）。

3. 与正交车放置相关的特征标的 Mackey 型分解

首先，我想回顾一下 A.A. Kirillov [Ki62], [Ki04] 提出、并由 D. Kazhdan [Ka77] 推广到有限群的轨道方法的主要思想（另见 [Ki95]），并为辛群中与正交车放置相关的轨道提供一种构造。根据轨道方法，构造极化是获得与给定线性形式的轨道相对应的不可约表示的必要步骤。

具体而言，选取并固定 $\theta\colon\ \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}^\times = \mathbb{C}\setminus\{0\}$，即域 $\mathbb{F}_q$ 的任意一个非平凡特征标（也就是从该域的加法群到复数乘法群的非平凡同态）。回忆一下，我们将 $\exp\colon \mathfrak{u} \to U$ 的逆映射记作 $\ln\colon U \to \mathfrak{u}$。令 $\Omega \subset \mathfrak{u}^*$ 为任意一个余伴随轨道。考虑以下函数 $\chi = \chi_\Omega\colon\ U \to \mathbb{C}$:

$$\chi(g) = q^{-\frac{1}{2}\dim\Omega} \cdot \sum_{f\in\Omega} \theta(f(\ln(g))), \quad g \in U \tag{6}$$

（在 $\mathbb{F}_q$ 上，余伴随轨道是 $\mathfrak{u}^*$ 中维数为偶数的仿射簇；此外，$q^{\dim\Omega} = |\Omega|$）。轨道方法的主要思想可由以下定理表述。

定理 3.1. [Ka77，命题 2] 映射 $\Omega \mapsto \chi_\Omega$ 在群 U 的余伴随轨道集合与该群的有限维不可约复特征标集合 $\mathrm{Irr}(U)$ 之间建立了一一对应。此外，与Ω 对应的表示的复维数等于

$$q^{\frac{1}{2}\dim\Omega} = \sqrt{|\Omega|}.$$

□

此外，与给定轨道 Ω 对应的表示的构造如下。应选取线性形式 $f \in \Omega$ 以及 f 的极化 $\mathfrak{p}$。接下来，应考虑 $\exp(\mathfrak{p})$ 的如下一维表示:

$$\varphi_f(h) = \theta(f(\ln(h))),\ h \in \exp(\mathfrak{p}).$$

所需的表示现在具有形式 $\mathrm{Ind}_{\exp(\mathfrak{p})}^{U}(\varphi_f)$。

现在，我们旨在给出与正交车放置相关联的任意线性形式 $f = f_{D,\xi}$的极化的一种构造。让我们再引入一些记号。

定义 3.2. 设 $\beta \in \Phi^+$。根 α、$\gamma \in \Phi^+$ 称为 β-**奇异**，如果 $\alpha+\gamma=\beta$。所有β-奇异根的集合记为 $S(\beta)$。

容易看出，奇异根如下所示:

$$\begin{aligned}
S(\varepsilon_i-\varepsilon_j) &= \bigcup_{l=i+1}^{j-1} \{\varepsilon_i-\varepsilon_l, \varepsilon_l-\varepsilon_j\},\ 1\le i<j\le n,\\
S(2\varepsilon_i) &= \bigcup_{l=i+1}^{n} \{\varepsilon_i-\varepsilon_l, \varepsilon_i+\varepsilon_l\},\ 1\le i\le n,\\
S(\varepsilon_i+\varepsilon_j) &= \bigcup_{l=i+1}^{j-1} \{\varepsilon_i-\varepsilon_l, \varepsilon_l+\varepsilon_j\} \cup \bigcup_{l=j+1}^{n} \{\varepsilon_i-\varepsilon_l, \varepsilon_j+\varepsilon_l\}\\
&\quad \cup \bigcup_{l=j+1}^{n} \{\varepsilon_j+\varepsilon_l, \varepsilon_j-\varepsilon_l\} \cup S_{ij},\ 1\le i<j\le n,
\end{aligned}$$

其中 $S_{ij} = \{\varepsilon_i-\varepsilon_j, 2\varepsilon_j\}$.

注记 3.3。注意，给定 $\beta \in \Phi^+$ 时， β 的列恰好包含每一对 β-奇异根中的一个根，这些根的和为 β; 但 $\beta = 2\varepsilon_i$ 的情形除外。准确地说，令

$$S^+(\beta) = \begin{cases} \{\varepsilon_i + \varepsilon_j,\ i < k \leqslant n\}, & \text{if } \beta = 2\varepsilon_i, \\ S(\beta) \cap C_{\mathrm{col}(\beta)} & \text{otherwise,} \end{cases}$$

使得 $S(\beta) = S^+(\beta) \cup S^-(\beta)$，其中 $S^-(\beta) = S(\beta) \backslash S^+(\beta)$。

记号 3.4。令 $j_1 < \cdots < j_t$ 为来自正交车放置 D 的根的列数。置 $j_0 = 0$ 并定义 $M = M_D = \bigcup_{i=0}^{t} M_i$，其中 $M_0 = \varnothing$，并且对于任意 $i = 1, \ldots\ldots, t$，归纳地定义为

$$M_{j_i} = \{\gamma \in S^-(\beta) \mid \beta \in D \cap C_{j_i} \text{ and } \gamma, \beta - \gamma \notin \bigcup_{l=0}^{i-1} M_{j_l}\}.$$

下一个命题给出了为 $f_{D,\ \xi}$ [Ig09, 《定理 1.1》构造极化的方法].

命题 3.5。考虑 $f = f_{D,\ \xi}$ 并置 $P = \Phi^+ \backslash M$， 则

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{D,\xi} = \sum_{\alpha \in P} k e_\alpha$$

是形式 f 的一个极化。 □

上文我们观察到了余伴随轨道与不可约表示之间的联系。轨道方法还给出了与余伴随轨道对应的不可约特征标的公式 (6)，但如果我们想得到特征标的显式公式，该公式并不便于计算，因此我们必须采用一些特殊方法。更确切地说，在论文 [Ig09i] 和[IV25] 中，我们使用小群的 Mackey 方法计算了 U 的 A_n型次正则特征标和深度为 2 的特征标。此外，在论文 [IV26] 中，对于群 U 具有 B_n 型和 D_n型的情形，我们使用该方法得到了与正交车放置相关轨道所对应特征标的所谓麦基分解。本文将 Mackey 方法推广到 C_n型。Mackey 方法表述如下。

设 $\mathcal{G}$ 是任意有限群， A、 B 是它的子群，满足 $\mathcal{G}$ 是 A 与 B的半直积，即 $\mathcal{G} = AB$、 $A \triangleleft \mathcal{G}$ 且 $A \cap B = \{1\}$ （记作 $\mathcal{G} = A \rtimes B$）。进一步假设$A$ 是阿贝尔群，且 ψ 是它的不可约特征标。群 B 中 ψ 的中心化子 （或小群）是如下形式的子群

$$B^\psi = \{b \in B \mid \psi \circ \tau_b = \psi\},$$

其中 τ_b: $A \to A.\ a \mapsto bab^{-1}$.

任意元素 $g \in \mathcal{G}$ 都可以唯一表示为 $g = ab$，其中 $a \in A,\ b \in B$; 由此定义映射 $\pi_A^{\mathcal{G}}$: $\mathcal{G} \to A$: $g \mapsto a$, $\pi_B^{\mathcal{G}}$: $\mathcal{G} \to B$: $g \mapsto b$, $g \in \mathcal{G}$. 注意， $\pi_B^{\mathcal{G}}$是群同态，而 $\pi_A^{\mathcal{G}}$ 通常不是。对于 B 中任意子群 $\widetilde{B}$，以及任意特征标 ψ: $A \to \mathbb{C}^\sim$ 和 η: $B \to \mathbb{C}$，可以定义群 $A \rtimes B = AB$ 的特征标 $\psi_0\eta_0$，其中

$$\psi_0 = \psi \circ \pi_A^{A \rtimes \widetilde{B}},\ \eta_0 = \eta \circ \pi_{\widetilde{B}}^{A \rtimes \widetilde{B}}.$$

用 Irr($\mathcal{G}$) 表示 $\mathcal{G}$ 的不可约特征标集合。麦基方法的基本思想是将对群 $\mathcal{G}$ 的表示的研究归结为对其子群 A 和 B 的表示的研究，可以表述如下。

定理 3.6. [Le74, 命题 1.2] 设 $\mathcal{G} = A \rtimes B$ 是一个有限群，且 A 是阿贝尔群。那么，群 $\mathcal{G}$ 的每个不可约特征标 χ 都具有如下形式

$$\chi = \mathrm{Ind}_{A \rtimes B^\psi}^{\mathcal{G}} \psi_0\eta_0 \tag{7}$$

对于某些 $\psi \in \mathrm{Irr}(A)$, $\eta \in \mathrm{Irr}(B)$。反过来，， 任何形如 (7) 的函数都是 $\mathcal{G}$的不可约特征标。□

然而，在 C_n 的情形下，我们在寻找合适的群 A 和 B 时遇到了问题，使得$U = A \rtimes B$且 A 为阿贝尔群，稍后将对此进行说明。因此，我们无法直接使用麦基方法，但我们将以麦基方法为指导，在稍作修改的基础上，对与正交车放置相关的任意特征标给出分解。

我们将考虑两种不同的情形。对于与 $D = \{\beta_1 \succ \ldots \succ \beta_t\}$ 在 Φ^+ 中的正交车放置相关联的轨道 $\Omega_{D,\ \xi}$，将以下形式的 $\mathfrak{u}$ 的子代数记为 $\mathfrak{u}_1$ 和 $\mathfrak{v}$：

$$\mathfrak{u}_1 = \bigoplus_{\alpha \in C'} \mathbb{F}_q e_\alpha,\ \mathfrak{v} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+ \setminus C_1} \mathbb{F}_q e_\alpha,$$

其中，若 $D \cap C_1 = 2\varepsilon_1$，则 $C' = C_1 \backslash \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_1 - \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_1 - \varepsilon_n\}$；否则为 $C' = C_1$。注意，在 $D \cap C_1 = 2\varepsilon_1$ 的情况下，代数 $\mathfrak{u}_1$ 显然不是阿贝尔的；否则则是。记$U_1 = \exp(\mathfrak{u}_1)$、$V = \exp(\mathfrak{v})$。此外，在群 U_1 上定义函数 $\psi = \psi_{D,\ \xi}$ 如下：

$$\psi(x) = \theta(f(\ln(x))) = \begin{cases} \theta(\xi_{\beta_1} x_{i,1}), & \text{if } \mathrm{col}(\beta_1) = 1, \mathrm{row}(\beta_1) = i, \\ 1, & \text{if } \mathrm{col}(\beta_1) > 1. \end{cases} \tag{8}$$

按照惯例，我们将矩阵 x 的第 $(i,\ j)$ 个元素记为 x_{ij}。

另一方面，考虑 V 的以下子群：

$$\begin{array}{l} V' = \prod_{\alpha \in \Phi_1^+} X_\alpha, \text{ where} \\ \Phi_1^+ = \begin{cases} \Phi^+ \setminus C_1, & \text{if } \mathrm{col}(\beta_1) > 1, \\ \Phi^+ \setminus (C_1 \cup S^-(\beta_1)), & \text{if } \mathrm{col}(\beta_1) = 1, \end{cases} \\ X_\alpha = \{x_\alpha(t), t \in \mathbb{F}_q\},\ x_\alpha(t) = \exp(te_\alpha). \end{array}$$

特别地，若 $\mathrm{col}(\beta_1) > 1$ 或 $D \cap C_1 = 2\varepsilon_1$，则 $V' = V$。显然，$V' = \exp(\mathfrak{v}')$，其中 $\mathfrak{v}' = \bigoplus_{\alpha \in \Phi_1^+} \mathbb{F}_q e_\alpha$。

引理 3.7。对于任意正交车放置 $D \subset \Phi^+$ 和任意 ξ，子群V'与子群 V中特征标 ψ 的中心化子相同，即 $V' = V^\psi$。

Proof。若 $\mathrm{col}(\beta_1) > 1$，则显然成立，因为此时 $V' = V^\psi = V$。令

$$\mathrm{col}(\beta_1) = 1, \mathrm{row}(\beta_1) = i.$$

这里及下文中，我们将记 $x = \exp(y) \in V$和 $h = \exp(z) \in U_1$，其中

$$y = \sum_{\alpha \in \Phi^+ \setminus C_1} y_\alpha e_\alpha \in \mathfrak{v},\ z = \sum_{\gamma \in C'} z_\gamma e_\gamma \in \mathfrak{u}_1,\ y_\alpha, z_\gamma \in \mathbb{F}_q.$$

由于 $h = 1_m + z$，有

$$\begin{aligned} xhx^{-1} &= \exp(y)(1_m + z)(\exp(y))^{-1} \\ &= 1_m + \exp(y) z (\exp(y))^{-1}. \end{aligned}$$

但是 $\exp(y)z(\exp(y))^{-1} = (\exp \mathrm{ad} y)(z)$，因此我们得到

$$xhx^{-1} = 1_m + (\exp \mathrm{ad}_y)(z).$$

特别地，由公式（8）可得，

$$\psi(xhx^{-1}) = \theta(\xi_{\beta_1}((\exp \mathrm{ad}_y)(z))_{i,1}).$$

注意，在 $\beta_1 = 2\varepsilon_1$ 的情况下 $V' = V$，因此 $V^\psi \subset V'$。这意味着我们只需证明 $V' \subset V^\psi$。当 $\mathrm{col}(\beta_1) = 1$ 时，这显然成立。事实上，根据定义，V' 是子群 X_α（$\alpha \in \Phi_1^+$）的乘积，但这些子群将特征标 ψ 中心化。因此，只需证明在 $\beta_1 \neq 2\varepsilon_1$ 的情况下 $V^\psi \subset V'$。

假设 $y \in \mathfrak{v}\backslash\mathfrak{v}'$，我们断言存在 $z \in \mathfrak{u}_1$，使得 $z_{i,\ 1} \neq ((\exp \mathrm{ad}_y)(z))_{i,\ 1}$。更确切地说，将 y 改写为如下形式:

$$y = \sum_{\alpha\in\Phi_1^+} y_\alpha e_\alpha + \sum_{\delta\in S^-(\beta_1)} y_\delta e_\delta \in \mathfrak{v} \setminus \mathfrak{v}',\ y_\alpha,\ y_\delta \in \mathbb{F}_q.$$

令 δ_0 为所有满足 $y_\delta \neq 0$ 的 $\delta \in S^-(\beta_1)$ 中关于序 $\prec'$ （见 (3)）的最小根。存在 $\gamma_0 \in \Phi^+$ 使得 $\gamma_0 + \delta_0 = \beta_1$ （此外， $\gamma_0 \in C_1$）。考虑元素 $z = e_{\gamma_0} \in \mathfrak{u}_1$。根据定义，$z_{i,\ 1} = 0$。同时，

$$(\exp \mathrm{ad}_y)(z) = z + \mathrm{ad}_y z + \frac{1}{2}\mathrm{ad}_y^2 z + \dots.$$

首先，假设 $\delta_0 \neq 2\varepsilon_i$ （情形 $\delta_0 = 2\varepsilon_i$ 在技术上略有不同，我们稍后再讨论）。容易看出 $\mathrm{ad}_y z = c_0 y_{\delta_0} e_{\beta_1}$，其中 $c_0 \neq 0$，因此 $\mathrm{ad}_y^2 z = 0$，因为对于所有 $\delta \in S^-(\beta_1)$，都有 $\beta_1 + \delta \notin \Phi^+$。因此，

$$((\exp \mathrm{ad}_y)(z))_{i,1} = c_0 y_{\delta_0} \neq 0.$$

现在，我们转向 $\delta_0 = 2\varepsilon_i$ 的情形。定义集合 $S_i^* = S^*(\beta_1,\ \delta_0)$ 为 $S^-(\beta_1)$ 中关于序 $\prec$ 大于 δ_0 的根所构成的集合。事实上， S_i^* 中的根是列 C_i 中除根 $2\varepsilon_i$ 以外的根。这里我们看到 $\gamma_0 = \varepsilon_1 - \varepsilon_i$。直接计算可得

$$\mathrm{ad}_y z = c_0 y_{\delta_0} e_{\beta_1} + \sum_{S_i^*} y_\delta e_{\delta+\gamma_0}.$$

注意，所有满足 $\delta + \gamma_0$ where $\delta \in S_i^*$ 的根都属于 Φ^+，甚至属于 C_1。更准确地说，这些根来自 S_i^*，其列指标 i 被替换为 1。由于 $2\varepsilon_i - \delta + \gamma_0 + \delta \in \Phi^+$ （此外，该根是 β_1），且根 $2\varepsilon_i - \delta + \gamma_0$ 是唯一一个能使加到 δ 上的根成为正根的正根，因此我们得到

$$\mathrm{ad}_y^2 z = \sum_{S_i^*} y_\delta y_{2\varepsilon_i-\delta}[e_\delta, e_{2\varepsilon_i-\delta+\gamma_0}] = \sum_{S_i^*} y_\delta y_{2\varepsilon_i-\delta} c_\delta e_{\beta_1}.$$

这里 $c_\delta =$ 若 $\mathrm{row}(\delta) > 0$，则为 1；否则为 $c_\delta = -1$。因此，这个和为零，我们得到

$$((\exp \mathrm{ad}_y)(z))_{i,1} = c_0 y_{\delta_0} \neq 0$$

对于某个非零常数 c_0。证明完毕。 □

因此，我们已经计算出子群 V 中特征标 ψ 的中心化子。接下来更详细地研究其结构。记

$$\Phi_2^+ = \begin{cases} \Phi_1^+ \setminus S^-(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_i), & \text{if } \beta_1 = \varepsilon_1 \mp \varepsilon_i,\ 2 \le i \le n, \\ \Phi_1^+ & \text{otherwise,} \end{cases}$$

并设

$$\mathfrak{v}_1 = \bigoplus_{\alpha\in\Phi_1^+\setminus\Phi_2^+} \mathbb{F}_q e_\alpha,\ \widetilde{\mathfrak{u}} = \bigoplus_{\alpha\in\Phi_2^+} \mathbb{F}_q e_\alpha. \tag{9}$$

~不难验证， $\mathfrak{v}' = \mathfrak{v}_1 \oplus \widetilde{\mathfrak{u}}$，其中 $\mathfrak{v}_1$ 是 $\mathfrak{v}'$ 的理想。因此， $V' = V_1 \rtimes U$，其中

$$V_1 = \exp(\mathfrak{v}_1) = \prod_{\alpha\in\Phi_1^+\setminus\Phi_2^+} X_\alpha,\ \widetilde{U} = \exp(\widetilde{\mathfrak{u}}) = \prod_{\alpha\in\Phi_2^+} X_\alpha$$

（若 $\Phi_1^+ = \Phi_2^+$则 $V_1 = \{1_m\}$ 且 $\widetilde{U} = V'$）。

~此外，我们注意到 U 与较低秩辛群的极大幂幺子群同构。更确切地说，令

$$\widetilde{\Phi} = \begin{cases} C_{n-1}, & \text{if } \mathrm{col}(\beta_1) > 1 \text{ or } D \cap C_1 = 2\varepsilon_1, \\ C_{n-2} & \text{otherwise,} \end{cases}.$$

~于是很容易看出 $\widetilde{\mathfrak{u}} \cong \mathfrak{u}(\Phi)$。根系 Φ_2^+ 与 $\widetilde{\Phi}$之间还存在显然的一一对应关系，我们将其记为 π。稍微滥用一下记号，我们将~代数 $\widetilde{\mathfrak{u}}$ 与 $\mathfrak{u}(\Phi)$之间相应的同构也记为同一个字母 π。

现在，最后我们可以给出与正交车放置相关的不可约特征标的分解。回顾一下，我们在群 U_1 上定义了函数 ψ，并求得其中心化子 $V^\psi = V' = V_1 \rtimes \widetilde{U}$。可以直接验证 $\psi \circ \pi_{U_1}^{U_1 \rtimes V'}$是一个同态，因此它是群 $U_1 \rtimes V'$的一个~ ~1维表示，其特征标为 $\widetilde{\mathfrak{u}} =$。在这种情况下，$\mathrm{Lie}(U) \cong \mathfrak{u}(\Phi)$，~因此群 U 的不可约特征标与 $\widetilde{\mathfrak{u}}^*$ 中的余伴随轨道一一对应（参见（6））。

如上所述，设 $D = \{\beta_1 \succ \ldots \succ \beta_t\}$是 $\Phi^+, \xi = (\xi_\beta)_{\beta \in D}$ 中的一个正交车放置，$\Omega = \Omega_{D,\,\xi}$是其对应的轨道，而 χ 是群 U 的相应不可约特征标。记~ ~ ~ ~ $D = \pi(D \setminus C_1) \subset \Phi^+$，$\Omega = \Omega_{\widetilde{D},\,\widetilde{\xi}}$，并令 $\widetilde{\chi}$为群 U 的相应不可约特征标。这里

$$\widetilde{\xi} = \begin{cases} \xi \in (\mathbb{F}_q^\times)^t, & \text{if } \mathrm{col}(\beta_1) > 1, \\ (\xi_{\beta_2}, \ldots, \xi_{\beta_t}) \in (\mathbb{F}_q^\times)^{t-1}, & \text{if } \mathrm{col}(\beta_1) = 1. \end{cases}.$$

记 η 为定义与特征标 $\widetilde{\chi}$ 对应的表示 $V_{\widetilde{\chi}}$ 的同态。则η是一个同态，因此 $\eta \circ \pi_{\widetilde{U}}^{V'} \circ \pi_{V'}^{U_1 \rtimes V'}$是定义 $U_1 \rtimes V'$ 的一个表示且其特征标为 $\widetilde{\chi} \circ \pi_{\widetilde{U}}^{V'} \circ \pi_{V'}^{U_1 \rtimes V'}$ 的同态。因此，群 $U_1 \rtimes V'$ 的特征标 $(\widetilde{\chi} \circ \pi_{\widetilde{U}}^{V'} \circ \pi_{V'}^{U_1 \rtimes V'}) \cdot (\psi \circ \pi_{U_1}^{U_1 \rtimes V'})$ 的乘积将是该群的一个特征标，因为它是相应表示的张量积的特征标。

定理 3.8. 设 $\pi_{\widetilde{U}}^{U_1 \rtimes V'} = \pi_{\widetilde{U}}^{V'} \circ \pi_{V'}^{U_1 \rtimes V'}$。则

$$\chi = \mathrm{Ind}_{U_1 \rtimes V'}^{U}((\psi \circ \pi_{U_1}^{U_1 \rtimes V'}) \cdot (\widetilde{\chi} \circ \pi_{\widetilde{U}}^{U_1 \rtimes V'})). \tag{10}$$

~ ~ ~Proof。令 $P = \exp(\mathfrak{p}) \subset U$，$\widetilde{P} = \exp(\widetilde{\mathfrak{p}}) \subset U$，则 $\widetilde{P} = U_1 \rtimes (V_1 \rtimes P)$。将 (10) 右端的函数记为 η。由定理 3.1，

$$\chi = \mathrm{Ind}_P^U(\theta \circ f \circ \ln), \quad \widetilde{\chi} = \mathrm{Ind}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{U}}(\theta \circ f \circ \ln).$$

我们将进一步的推理分解为一系列步骤。

1. 我们声称，若 $y \in P$，则 $f(\ln \pi_{V_1 \rtimes \widetilde{P}}^{P}(y)) = f(\ln \pi_{\widetilde{P}}^{P}(y))$。事实上，显然

$$\pi_{V_1 \rtimes \widetilde{P}}^{P}(y) = (\pi_{V_1}^{V_1 \rtimes \widetilde{P}} \circ \pi_{V_1 \rtimes \widetilde{P}}^{P})(y) \cdot (\pi_{\widetilde{P}}^{V_1 \rtimes \widetilde{P}} \circ \pi_{V_1 \rtimes \widetilde{P}}^{P})(y) = \pi_{V_1}^{P}(y) \cdot \pi_{\widetilde{P}}^{P}(y).$$

令 $u = \ln \pi_{V_1}^{P}(y) \in \mathfrak{p}$, $v = \ln \pi_{\widetilde{P}}^{P}(y) \in \mathfrak{p}$，则由 (5) 得

$$\pi_{V_1 \rtimes \widetilde{P}}^{P}(y) = \exp(u)\exp(v) = \exp(u + v + \tau), \quad \text{where } \tau \in [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}],$$

因此 $\ln \pi_{V_1 \rtimes \widetilde{P}}^{P}(y) = \ln \pi_{V_1}^{P}(y) + \ln \pi_{\widetilde{P}}^{P}(y) + \tau$。但 $\mathfrak{p}$是 f 的一个极化，故 $f(\tau) = 0$。同时，$\ln \pi_{V_1}^{P}(y) \in \mathfrak{v}_1$，并且显然 $f|_{\mathfrak{v}_1} \equiv 0$ （见 (9) 中 $\mathfrak{v}_1$ 的定义）。由此可得

$$f(\ln \pi_{V_1 \rtimes \widetilde{P}}^{P}(y)) = f(\ln \pi_{V_1}^{P}(y)) + f(\ln \pi_{\widetilde{P}}^{P}(y)) + f(\tau) = f(\ln \pi_{\widetilde{P}}^{P}(y)).$$

2. 我们断言，若 $y \in P$，则 $f(\ln y - \ln \pi^P_{\widetilde{P}}(y) - \ln \pi^P_{U_1}(y)) = 0$。证明与上一步类似。事实上，若 $u = \ln \pi^P_{V_1 \rtimes \widetilde{P}}(y) \in \mathfrak{p}$，$v = \ln \pi^P_{U_1}(y) \in \mathfrak{p}$，则根据 (5)，

$$y = \pi^P_{U_1}(y) \cdot \pi^P_{V_1 \rtimes \widetilde{P}}(y) = \exp(u)\exp(v) = \exp(u + v + \tau), \quad \text{where } \tau \in [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}].$$

因此，$\ln y = \ln \pi^P_{U_1}(y) + \ln \pi^P_{V_1 \rtimes \widetilde{P}} + \tau$。但 $\mathfrak{p}$ 是 f 的极化，故 $f(\tau) = 0$，从而 $f(\ln \pi^P_{V_1 \rtimes \widetilde{P}}(y)) = f(\ln \pi^P_{\widetilde{P}}(y))$。

3. 下一个断言如下。设 $\mathcal{G} = A \rtimes B$ 是一个有限群，C 是 B 中的一个子群，且 λ 是群 C的一个复表示。则 $\mathrm{Ind}^G_{A \rtimes C}(\lambda \circ \pi^{A \rtimes C}_C) = (\mathrm{Ind}^B_C \lambda) \circ \pi^{\mathcal{G}}_B$。这在[Le74，命题 1.2]中得到证明。

4. 我们将第3步应用于情形 $\mathcal{G} = V_1 \rtimes U$、$A = V_1$、$B = U$、$C = P$、$\lambda = \theta \circ f \circ \ln$。我们得到

$$\mathrm{Ind}^{\widetilde{U}}_{\widetilde{P}}(\theta \circ f \circ \ln) \circ \pi^{V_1 \rtimes \widetilde{U}}_{\widetilde{U}} = \mathrm{Ind}^{V_1 \rtimes \widetilde{U}}_{V_1 \rtimes \widetilde{P}}(\theta \circ f \circ \ln \circ \pi^{V_1 \rtimes \widetilde{P}}_{\widetilde{P}}).$$

现在，我们将步骤 3 应用于 $\mathcal{G} = U_1 \rtimes V'$，$A = U_1$，$B = V' = V_1 \rtimes U$，$C = V_1 \rtimes P$，$\lambda = \theta \circ f \circ \ln \circ \pi^{V_1 \rtimes P}_{\widetilde{P}}$ 的情形。我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}^{V_1 \rtimes \widetilde{U}}_{V_1 \rtimes \widetilde{P}}(\theta \circ f \circ \ln \circ \pi^{V_1 \rtimes \widetilde{P}}_{\widetilde{P}}) \circ \pi^{U_1 \rtimes V'}_{V_1 \rtimes \widetilde{U}} &= \mathrm{Ind}^{U_1 \rtimes V'}_{U_1 \rtimes (V_1 \rtimes \widetilde{P})}(\theta \circ f \circ \ln \circ \pi^{V_1 \rtimes \widetilde{P}}_{\widetilde{P}} \circ \pi^{U_1 \rtimes (V_1 \rtimes \widetilde{P})}_{V_1 \rtimes \widetilde{P}}) = \\ &= \mathrm{Ind}^{U_1 \rtimes V'}_P(\theta \circ f \circ \ln \circ \pi^P_{\widetilde{P}}).\end{aligned}$$

因此，考虑到 $V' = V_1 \rtimes U$，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}^{\widetilde{U}}_{\widetilde{P}}(\theta \circ f \circ \ln) \circ \pi^{U_1 \rtimes V'}_{\widetilde{U}} &= (\mathrm{Ind}^{\widetilde{U}}_{\widetilde{P}}(\theta \circ f \circ \ln)) \circ \pi^{V_1 \rtimes \widetilde{U}}_{\widetilde{U}} \circ \pi^{U_1 \rtimes V'}_{V_1 \rtimes \widetilde{U}} = \\ &= \mathrm{Ind}^{U_1 \rtimes V'}_P(\theta \circ f \circ \ln \circ \pi^P_{\widetilde{P}}).\end{aligned}$$

5. 可以 通过以下方式重写 (10) 的右端，同时考虑步骤 4 y:

$$\begin{aligned}\eta &= \mathrm{Ind}^U_{U_1 \rtimes V'}((\psi \circ \pi^{U_1 \rtimes V'}_{U_1}) \cdot (\widetilde{\chi} \circ \pi^{U_1 \rtimes V'}_{\widetilde{U}})) = \\ &= \mathrm{Ind}^U_{U_1 \rtimes V'}((\theta \circ f \circ \ln \circ \pi^{U_1 \rtimes V'}_{U_1}) \cdot (\mathrm{Ind}^{\widetilde{U}}_{\widetilde{P}}(\theta \circ f \circ \ln) \circ \pi^{U_1 \rtimes V'}_{\widetilde{U}})) = \\ &= \mathrm{Ind}^U_{U_1 \rtimes V'}((\theta \circ f \circ \ln \circ \pi^{U_1 \rtimes V'}_{U_1}) \cdot \mathrm{Ind}^{U_1 \rtimes V'}_P(\theta \circ f \circ \ln \circ \pi^P_{\widetilde{P}})).\end{aligned}$$

6. 我们断言下列等式成立：

$$\mathrm{Ind}^{U_1 \rtimes V'}_P(\theta \circ f \circ \ln) = (\theta \circ f \circ \ln \circ \pi^{U_1 \rtimes V'}_{U_1}) \cdot \mathrm{Ind}^{U_1 \rtimes V'}_P(\theta \circ f \circ \ln \circ \pi^P_{\widetilde{P}}).$$

事实上，设 $H \subset U_1 \rtimes V'$ 是 $(U_1 \rtimes V')/P$ 的任意完全代表系（实际上，可以选择 H 为 V' 的子集，因为 $U_1 \subset P$）。那么，对于任意 $x \in U_1 \rtimes V'$，

$$\begin{aligned}&((\theta \circ f \circ \ln \circ \pi^{U_1 \rtimes V'}_{U_1}) \cdot \mathrm{Ind}^{U_1 \rtimes V'}_P(\theta \circ f \circ \ln \circ \pi^P_{\widetilde{P}}))(x) = \\ &= \theta(f(\ln \pi^{U_1 \rtimes V'}_{U_1}(x))) \cdot \textstyle\sum_{h \in H | h^{-1}xh \in P} \theta(f(\ln \pi^P_{\widetilde{P}}(h^{-1}xh))) = \\ &= \textstyle\sum_{h \in H | h^{-1}xh \in P} \theta(f(\ln \pi^{U_1 \rtimes V'}_{U_1}(x) + \ln \pi^P_{\widetilde{P}}(h^{-1}xh))).\end{aligned}$$

但 $h \in B$意味着，对于任意有限群 $\mathcal{G} = A \rtimes B$以及任意的$x \in G$、$h \in B$，都有 $h^{-1}\pi^{\mathcal{G}}_A(x)h = \pi^{\mathcal{G}}_A(h^{-1}xh)$。在我们的情形下，这意味着

$$\psi(X) = f(\ln \pi^{U_1 \rtimes V'}_{U_1}(x)) = f(\ln(h^{-1}\pi^{U_1 \rtimes V'}_{U_1}(x)h)) = f(\ln \pi^{U_1 \rtimes V'}_{U_1}(h^{-1}xh)),$$

因为 $h \in H \subset V' = V^{\psi}$，见引理 3.7。

此外，对于 $h^{-1}xh \in P$，我们有 $\pi_{U_1}^{U_1 \rtimes V'}(h^{-1}xh) = \pi_{U_1}^{P}(h^{-1}xh)$。利用步骤 2，我们得到

$$\begin{aligned}&((\theta \circ f \circ \ln \circ \pi_{U_1}^{U_1 \rtimes V'}) \cdot \mathrm{Ind}_P^{U_1 \rtimes V'}(\theta \circ f \circ \ln \circ \pi_{\widetilde{P}}^{P}))(x) = \\ &= \textstyle\sum_{h \in H | h^{-1}xh \in P} \theta(f(\ln \pi_{U_1}^{P}(x) + \ln \pi_{\widetilde{P}}^{P}(h^{-1}xh))) = \\ &= \textstyle\sum_{h \in H | h^{-1}xh \in P} \theta(f(\ln h^{-1}xh)) = \mathrm{Ind}_P^{U_1 \rtimes V'}(\theta \circ f \circ \ln).\end{aligned}$$

7. 结合步骤 5 和 6，我们得出

$$\eta = \mathrm{Ind}_{U_1 \rtimes V'}^{U} \mathrm{Ind}_P^{U_1 \rtimes V'}(\theta \circ f \circ \ln) = \mathrm{Ind}_P^{U}(\theta \circ f \circ \ln) = \chi,$$

由此证明完毕。 □

4. 最大维特征标

在本节中，我们将对 [AN09] 中给出的最大维特征标公式给出另一种证明。我们还将对先前在 [AN06] 中得到的最大维轨道给出一种独立的分类。首先，我们需要回顾 [IP25] 中的一些记号。

设 X 是 Φ^+ 的一个子集。令 $\mathfrak{u}_X := \bigoplus_{\alpha \in X} \mathbb{F} e_\alpha$，其（李）括号由公式给出

$$[e_\alpha, e_\beta] = \begin{cases} [e_\alpha, e_\beta], & \text{if } \alpha + \beta \in X, \\ 0, & \text{if } \alpha + \beta \notin X \end{cases}$$

对所有 $\alpha,\ \beta \in X$（注意，如果 $\alpha,\ \beta,\ \alpha + \beta \in \Phi$，那么 $[e_\alpha, e_\beta]$ 与 $e_{\alpha+\beta}$ 成比例）。这样的双线性括号 $[\cdot, \cdot]$ 不一定总能定义一个李代数，但在 X 是一个 C-模式（“模式子群的组合对应物”的简称）或 C-拟模式（“拟模式子群的组合对应物”的简称）的假设下，它确实定义了一个李代数，参见下面的定义。

Defi定义 4.1。 我们称 X 为 *C-pattern*，如果 X 满足以下条件 on:

$$\text{if } \alpha, \beta \in X \text{ and } \alpha + \beta \in \Phi^+ \text{ then } \alpha + \beta \in X.$$

显然，这个条件等价于 $\mathfrak{u}_X$ 是 $\mathfrak{u}$的李子代数。

定义 4.2。 我们称 X 为 *C-quattern*，如果对于两个 C-pattern X_+, X_-，有 $X_- \subset X_+$ 且

$$\text{if } \alpha_- \in X_-, \alpha_+ \in X_+ \text{ and } \alpha_- + \alpha_+ \in X_+ \text{ then } \alpha_- + \alpha_+ \in X_-.$$

显然，这等价于说 $\mathfrak{u}_{X_-}$ 是李代数 $\mathfrak{u}_{X_+}$ 的理想；在这种情况下，我们有 $\mathfrak{u}_X \cong \mathfrak{u}_{X_+}/\mathfrak{u}_{X_-}$，其中右边是李代数对其理想取商，因此左边是一个李代数。

从现在起，我们假设 X 始终是一个 C-quattern。记 U_X 为李代数为 $\mathfrak{u}_X$的幺幂群。每个 C-pattern X 都是一个 C-quattern，其中 $X_+ = X, X_- = \varnothing$；对于每个 C-quattern X，数据 $(\mathfrak{u}_X, [\cdot, \cdot])$ 在 $\mathfrak{u}_X$上赋予李代数结构。

Set

$$Z(X) := \{\alpha \in X \mid (\alpha + X) \cap X = \varnothing\}.$$

于是很容易验证，$\mathfrak{n}_{Z(X)}$ 与 $\mathfrak{n}_X$的中心重合。特别地，这意味着对于任意 C-quattern X，$Z(X) \neq \varnothing$。

定义 4.3。 取定 $f \in \mathfrak{u}_X^*$ ，并考虑 $Z \subset Z(X)$。如果对于所有 $\alpha \in Z$， f 满足 Z-饱和 条件，即$f(e_\alpha) \neq 0$，则称 f 为 Z-饱和 。如果 f 是 $Z(X)$-饱和的，则称 f 为< стиле id='15'>饱和 。我们将 Z-饱和线性形式构成的簇记为 $\mathfrak{n}_{X;Z}^*$。

显然，每个 $\mathfrak{u}_{X;Z}^*$ 都是 U_X-稳定的，因此是余伴随轨道的集合。我们通过公式 $e_\alpha^* \mapsto e_\alpha^*$ 将 $\mathfrak{u}_{X;Z}^*$ 映射到 $\mathfrak{u}^*$ ，并将此映射的像记为 $\mathfrak{n}_{X;Z}^*$ 。我们将经常把 $\mathfrak{u}_{X;Z}^*$ 与 $\mathfrak{u}_{X;Z}^*$ 视为同一对象。

定义 4.4。 设 $Z \subset Z(X)$ 是一个子集，且 $Y \subset \mathfrak{u}_{X;Z}^*$ 是一个子簇。若 Y 与 $\mathfrak{u}_{X;Z}^*$ 的每个 U_X-轨道恰好交于一点，则称 Y 是 $\mathfrak{u}_{X;Z}^*$ 的一个集合截面 。

显然，集合截面是自然商映射 $\mathfrak{u}_{X;Z}^* \to \mathfrak{u}_{X;Z}^*/U_X$ 的一个截面，但这仅在集合论意义上成立。另请注意，我们将明确考虑的所有集合截面，都将是形如 $V(S_1) \sqcup V(S_2) \sqcup \ldots$ 的集合之并，其中 S_1， S_2， $\ldots \subset \Phi^+$ 是某些子集。

接下来，我们定义正根子集 D_{reg} 如下：

$$D_{\mathrm{reg}} = \{(2\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, \ldots, 2\varepsilon_n, \varepsilon_1+\varepsilon_2, \varepsilon_2+\varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_{n-1}+\varepsilon_n)\} \in \Phi^+$$

（也就是说，子集 D_{reg} 由与方块（-1，1)……（$-n$， n）和（-2，1)……（$-n$， $n-1$）对应的根组成，如例 2.1 所示）。与第 2 节一样，我们将考虑来自$\mathbb{F}_q^\times$的一组常数 ξ；不过在本节中，其定义会稍作修正。更确切地说，对任意正根集合 D ，令 $\xi = (\xi_\beta)_{\beta \in D}$，但允许 $\xi_{2\varepsilon_n}$ 为零。现在我们可以陈述并证明以下结果。

定理 **4.5.** 设 $D \in \Phi^+$ 是 D_{reg}，的一个极大正交子集，且 ξ 如上所述，则 pu t

$$f = f_{D,\xi} = \sum_{\beta \in D} \xi_\beta e_\beta^* \in \mathfrak{u}^*. \tag{11}$$

那么， f 的轨道具有最大维数。反过来，每个最大维数的轨道恰好包含一个这样的线性形式。

Proof。所有此类轨道均具有最大维数，这一事实可直接由极化子的构造得出（注意， $\mathfrak{u}^*(C_n)$ 中余伴随轨道可能达到的最大维数已知：它等于 $n(n-1)$，例如参见 [AN06]）。更准确地说，$\dim \Omega f_{D,\xi} = 2\operatorname{codim} \mathfrak{p} = |M_D|$，其中 $\mathfrak{p}$是$f = f_{D,\xi}$的一个极化子，并且很容易看出，在这种情况下，$|M_D|$ 总是$(n-1)(n-2)/2$ 。因此，$\dim \Omega f = n(n-1)$是最大的。

为证明逆命题，我们首先要证明：给定 $f = (\xi_\beta)_{\beta \in \Phi^+} \in \mathfrak{u}^*$ 和 $\delta \prec' \varepsilon_1 + \varepsilon_2$，其中 δ 是相对于序 $\prec'$具有非零常数 ξ_δ 的最大根， f的轨道维数不是最大维数。假设 $\delta = \varepsilon_1 + \varepsilon_3$，即 $\xi_{2\varepsilon_1} = \xi_{\varepsilon_1+\varepsilon_2} = 0$。考虑 $\widetilde{\ }$quattern $Y = \Phi^+ \backslash \{2\varepsilon_1, \varepsilon_1+\varepsilon_2\}$，并将 f在$\mathfrak{u}_{Y;Z}$上的投影记作 f，其中 $Z = \langle e_\delta \rangle \subset Z(Y)$。形式 f 的轨道维数可计算为秩(β_f)（回忆一下， β_f 是定义在 $\mathfrak{u}$上的二次型，由 $\beta_f(x,y) = f([x,y])$定义）。我们要比较分别定义在 $\mathfrak{u}$和 $\mathfrak{u}_{Y;Z}$上的二次型 β_f和 $\beta_{\tilde{f}}$的秩。写出形式 β_f的矩阵 A如下（所有根按序 $\prec'$排列）：

$$A = \begin{pmatrix} * & \cdots & * & \cdots & * & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & & \ddots & & * & -cf(2\varepsilon_1) & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & * & \cdots & * & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & cf(2\varepsilon_1) & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

这里，与根 α和 δ对应的项（因而由 $\beta_f(e_\alpha, e_\delta) = \beta_{\widetilde{f}}(e_\alpha, e_\delta)$填充）在 $\alpha+\delta \notin \{2\varepsilon_1, \varepsilon_1+\varepsilon_2\}$时标记为 $*$。显然， $f(2\varepsilon_1) = 0$，所以秩(β_f) =秩$(\beta_{\widetilde{f}})$。因此，我们可以考虑形式 f 及其在 $\mathfrak{u}_{Y;Z}$ 中的轨道，而不必考虑 f 及其在 $\mathfrak{u}$中的轨道。

令 Y' 定义为集合 $Y\backslash\{\delta_1, \cdots, \delta_{2n-4}, \beta_1 \cdots, \beta_{2n-4}\}$，其中 $\delta_i \in S^+(\gamma)$ 且 $\beta_i \in S^-(\gamma)$。考虑映射 φ：$\mathfrak{u}_Y^* \to \mathfrak{u}^* = \mathfrak{u}_X^*$，定义如下：对于 $e_\tau^* \in \mathfrak{u}_Y^*$,

$$\varphi(e_\tau^*) = e_\tau^* \in \mathfrak{u}^*.$$

根据 [IP25，命题 5.11],，集合 Y' 是一个 quattern，且存在形式 $f' \in \mathfrak{u}_{Y';Z}$，使得 $\widetilde{\ }$ 满足： $\varphi(f')$ 位于 $\mathfrak{u}_{Y;Z}$ 中形式 f 的轨道上，并且

$$\dim \Omega_{\widetilde{f}} = \dim \Omega_{f'} + |\{\delta_1, \ldots, \delta_{2n-4}, \beta_1, \ldots, \beta_{2n-4}\}| = \dim \Omega_{f'} + 2(2n-4).$$

容易看出，商代数 $\mathfrak{u}_{Y'}$ 同构于其理想之和 $\mathfrak{u}(C_{n-2}) \oplus\langle e_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}\rangle \oplus \langle \varepsilon_2 - \varepsilon_3\rangle$。由此可知，$\mathfrak{u}_{Y;Z}$ 中 $\dim \Omega_{f'}$ 小于 $(n-2)(n-3)$，而这是 $\mathfrak{u}(C_{n-2})$ 中轨道可能达到的最大维数。因此，我们得到

$$\dim \Omega_{\widetilde{f}} \leq (n-2)(n-3) + 2(2n-4) = n(n-1) - 2 < n(n-1).$$

当 $\delta \prec' \varepsilon_1 + \varepsilon_3$ 时，其他情形也可类似处理。例如，设 $\delta = \varepsilon_1 + \varepsilon_4$。在这种情况下，形式 f 的轨道包含于代数 $\mathfrak{u}_Y$ 对理想 $\langle e_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}\rangle \subset Z(Y)$ 取商所得的商代数中，但我们已经证明， $\mathfrak{u}_{Y;Z}$ 中轨道的最大可能维数小于 $n(n-1)$，其中 $Z = \{\varepsilon_1 + \varepsilon_3\}$。还需注意， $\mathfrak{u}_{Y;Z}$ 是 $\mathfrak{u}_Y$ 中由最大维轨道组成的开子空间，因此它与最大维轨道集合的交集非空，所以 $\mathfrak{u}_Y$ 中轨道的最大维数也小于 $n(n-1)$。

现在我们知道，具有最大维数轨道的线性形式 $f = (\xi_\beta)_{\beta\in\Phi^+}$ 必须满足非零常数 ξ_δ，其中 δ 是满足 $\xi_\delta \neq 0$ 且 $\delta = 2\varepsilon_1$ 或 $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ 的最大根。我们的目标是给出最大维轨道集合的一个集合截面。考虑 $\delta = 2\varepsilon_1$ 的情形。我们对 n 作归纳。关于 $\Phi = C_2$ 的归纳基已知，参见例如 [GMR16]。固定 f，并令 $X = \Phi^+$、 $\gamma = \delta = 2\varepsilon_1 \in Z(X)$ 和 $Y = X\backslash\{\delta_1, \ldots, \delta_{n-1}, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\}$ 分别对应 $\delta_i = \varepsilon_1 - \varepsilon_i$ 和 $\beta_i = \varepsilon_1 + \varepsilon_i$。根据定义，形式 f 属于 $\mathfrak{u}_{X;Z(X)}$。

命题 5.11 告诉我们， Y 是一个 quattern；如果 K 是 $\mathfrak{u}_{Y;Z(X)}$ 的一个集合截面，那么 $\varphi(K)$ 就是 $\mathfrak{u}_{X;Z(X)}$的一个集合截面。还要注意， $\mathfrak{u}_Y$ 同构于 $\mathfrak{u}(C_{n-1}) \oplus I$，其中 $I = \langle e_{2\varepsilon_1}\rangle$ 以及两个$\widetilde{\ }$直和项都是理想。这意味着我们可以选取一个形式 $f' \in \mathfrak{u}_{Y,\ Z(X)}$，使得 $f = \varphi(f')$ 位于 f 的轨道$\widetilde{\ }$上（注意， f 在对应于来自 C_1的根的位置上取零值）。根据命题 5.11，我们还可以断言：

$$\dim \Omega_f = \dim \Omega_{\widetilde{f}} = \dim \Omega_{f'} + 2(n-1) \leq (n-1)(n-2) + 2(n-1) = n(n-1),$$

当且仅当 $\dim \Omega_{f'} = (n-1)(n-2)$ 取最大值时，等式成立。因此，根据归纳$\widetilde{\ }$假设， f'有一个线性形式 $g = g_{\widetilde{D},\ \widetilde{\xi}}$，对应于 $D = D' \cup 2\varepsilon_1$，其中 D'是 $D'_{\mathrm{reg}} \subset \Phi^+_{n-1}$的一个极大正交子集，并且 $\widetilde{\xi} = (\xi_\beta)_{\beta\in\widetilde{D}}$位于其轨道上。因此， f的轨道上有形如 (11) 的元素 $f_{\widetilde{D},\ \widetilde{\xi}}$。这就完成了此情形下的证明。

当 $\delta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ 时，也可以用类似的方法处理。主要区别在于，必须将 X 选为 $\Phi^+\backslash 2\varepsilon_1, \gamma = \delta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \in Z(X)$, 而对于 Y，我们取集合 $X\backslash\{\delta_1, \ldots, \delta_{2n-3}, \beta_1, \ldots, \beta_{2n-3}\}$，其中 $\delta_i \in S^+(\gamma)$ 且 $\beta_i \in S^-(\gamma)$。后续论证与前一种情况相同。□

由此可推得一个推论：我们可以计算这类轨道的数量。

推论 4.6. 记 S_n 为域 $\mathbb{F}_q$上最大维余伴随轨道的数量，则 $S_n = Ar_1^n + Br_2^n$，其中

$$A = \frac{v+2+\sqrt{v^2+4v}}{2\sqrt{v^2+4v}}, \quad B = \frac{-v-2+\sqrt{v^2+4v}}{2\sqrt{v^2+4v}}$$

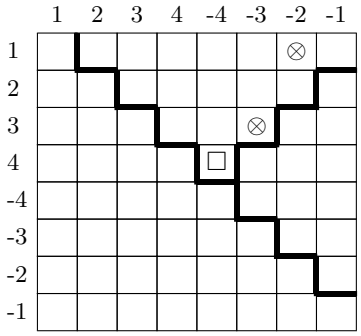
and

$$r_1 = \frac{v + \sqrt{v^2 + 4v}}{2}, \quad r_2 = \frac{v\sqrt{v^2 + 4v}}{2}$$

for $v = q - 1$。特别地， S_n 是一个具有非负整数系数的多项式 .

Proof. 由定理 4.5 的证明可知，序列 S_n 满足一个简单的递推条件 $S_n = vS_{n-1} + vS_{n-2}$。解这个线性递推式，我们得到所要求的结果。□

例 4.7。这里我们示意性地画出了一个最大维数形式的例子。集合 D 等于 $\{\varepsilon_1 + \varepsilon_2, 2\varepsilon_3, 2\varepsilon_4\}$，符号 $\otimes$ 表示一个非零常数，而符号 $\square$ 表示域 $\mathbb{F}_q$ 中的任意常数。



接下来，我们需要定义正根的另一个重要子集。设 $D \subset D_{\text{reg}}$ 为一个极大正交子集。考虑自然数 $I = \{$ 的集合 I_D $\mathsf{col}(\beta)$ $\mid \beta = \varepsilon_i + \varepsilon_j, \ \beta \in D\}$ 并令 $D' = D \bigcup_{i \in I_D} 2\varepsilon_i$。

定义 4.8。设 $D \subset \Phi^+$ 为正根的任意子集，且 $\phi = (\phi_\beta)_{\beta \in D}$ 为域 $\mathbb{F}_q$ 中非零常数的集合。定义元素 $x_D(\phi) \in \mathfrak{u}$ 如下：

$$x_D(\phi) = \sum_{\beta \in D} \phi_\beta e_\beta.$$

定义 4.9. 设 $D \in \Phi^+$ 和 $\beta \in \Phi^+$。记

$$X_\beta^D = \{\mathrm{row}(\alpha) \mid \alpha \in D, \mathrm{row}(\alpha) \prec \mathrm{row}(\beta), \mathrm{col}(\alpha) \succ \mathrm{col}(\beta)\} \cup \mathrm{row}(\beta),$$

$$Y_\beta^D = \{\mathrm{col}(\alpha) \mid \alpha \in D, \mathrm{row}(\alpha) \prec \mathrm{row}(\beta), \mathrm{col}(\alpha) \succ \mathrm{col}(\beta)\} \cup \mathrm{col}(\beta)$$

按序 $\prec$ 排列。记行取自 X_β^D、列取自 Y_β^D 的子式为 Δ_β^D。

在表述本节的主要结果之前，下一步是定义某些簇。对于给定的 $D \subset \Phi^+$ 和 ϕ: $D \to \mathbb{F}_q^\times$，我们定义簇

$$k_D(\phi) = \{x \in \mathfrak{u} \mid \Delta_\beta^D(x) = \Delta_\beta^D(x_D(\phi)) \text{ for all } \beta \in R(D)\}.$$

这里，对 $S(D) = \bigcup_{\alpha \in D}(\alpha + \Phi^+)$， $R(D) = \Phi^+ \backslash S(D)$（按定义，集合 $\alpha + \Phi^+$ 包含所有根 $\alpha + \gamma$, $\gamma \in \Phi^+$，其中该和也是一个正根）。我们还将 $K_D(\phi) = \exp(k_D(\phi))$ 和 $X_D(\phi) = \exp(x_D(\phi))$ 记作如此。

现在，我们回顾由下式定义的群 $\mathbb{F}_q^\times$ 的线性特征 η

$$\eta(c) = \begin{cases} 1, \text{ if } c \in (\mathbb{F}_q^\times)^2, \\ -1, \text{ otherwise,} \end{cases}$$

对所有 $c \in \mathbb{F}_q$。此外，对于特征标 η 和 θ，我们将 η 与 θ 的高斯和定义为

$$G(\eta, \theta) = \sum_{c \in \mathbb{F}_q^\times} \eta(c)\theta(c).$$

为便于书写,我们引入一些额外的记号。令 j 为 0 或 1，设

$$D_j = \begin{cases} D \cap \{\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} \mid 1 \le i \le n-1\}, & \text{if } j = 1, \\ D \cap \{2\varepsilon_i \mid 1 \le i \le n\}, & \text{if } j = 0, \end{cases}$$

and

$$D_j(\alpha) = \begin{cases} D \cap \{\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} \mid \varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} \prec' \alpha\}, & \text{if } j = 1, \\ D \cap \{2\varepsilon_i \mid 2\varepsilon_i \prec' \alpha\}, & \text{if } j = 0, \end{cases}$$

当 $\alpha \in \Phi^+$时。

现在我们可以描述与最大维数轨道相对应的特征标的支撑，并计算它在支撑中某个共轭类上的取值。

定理 4.10。设 D 是上述 D_{reg}, ξ 的一个极大正交子集，且 $f = f_{D,\xi}$。记 χ 为与形式 f的轨道 $\Omega_{D,\xi}$ 相对应的特征标，则

a) 支撑$(\chi) = \bigsqcup K_{D^*}(\phi)$, 其中 D^* 遍历 D' 的所有可能正交子集， ϕ 遍历D^*,ϕ所有从 D^* 到 $\mathbb{F}_q^\times$ 的映射。

b) $\chi(K_{D^*}(\phi)) = C \prod_{\alpha \in D^* \cap D} \theta(\xi_\alpha \phi_\alpha),$

其中

$$C = q^{(\frac{n(n-1)}{2} - t(D,D^*) - t_1(D,D^*))} G(\eta, \theta)^{t_0(D,D^*)} \prod_{\alpha \in D_0} \prod_{\beta \in D_0^*(\alpha)} \eta(\xi_\alpha \phi_\beta),$$

并且，根据定义，

$$t_0(D, D^*) = \sum_{\alpha \in D_0} |D_0(\alpha)|, \quad t_1(D, D^*) = \sum_{\alpha \in D_1} |D_1^*(\alpha)|, \quad t(D, D^*) = \sum_{\alpha \in D} |D_0^*(\alpha)| + |D_1^*(\alpha)|.$$

事实上，在证明该定理的过程中，我们将得到

$$\ln(\mathrm{Supp}(\chi)) = \bigsqcup_{D^*, \phi} k_{D^*}(\phi),$$

并且，簇 $k_{D*}(\phi)$ 与元素 $x_{D^*}(\phi)$的伴随作用轨道重合，但对于任意 $x \in \mathfrak{u}$，$\exp(gxg^{-1}) = g\exp(x)g^{-1}$。因此，簇

$$K_{D^*}(\phi) = \exp(k_{D^*}(\phi)) = \{\exp(gx_{D^*}(\phi)g^{-1}) \mid g \in U\}$$

与 $X_D(\phi)$ 的共轭类重合。除此之外，这也说明记号$\chi(K_{D^*}(\phi))$是正确的。在证明定理 4.10 之前，我们需要证明一个技术引理。

引理 4.11。设 D 如定理 4.10 中所述，且 $D^* \in D'$ 为任意车放置，令$y = x_{D^*}(\phi)$ 其中 $\phi : D^* \to \mathbb{F}_q^\times$。则 $|U.y| = |k_{D^*}(\phi)|$，其中 $U.y$ 表示 y 在群 U的伴随作用下的轨道。

Proof。首先，为方便起见，将簇 $k_{D^*}(\phi)$ 记作 Y，并注意到 Y同构于域 $\mathbb{F}_q$ 上的维数为 $S(D)$ 的仿射空间（因此其基数等于 $q^{S(D)}$）。对此的简要说明是，元素 x 上形如 $\Delta_\beta^{D^*}(x) = \Delta_\beta^{D^*}(y)$ 的方程，

Y实际上是形如 $x_{i,j} = f_{i,j}(x_{-1,1}, x_{-2,1}, \ldots, \widehat{x_i}, j, \ldots)$ 的方程，由此可得 Y 与所需维数的仿射空间之间存在正则双射，参见 [Ig09i]。利用 $|U.x| = \dfrac{|U|}{|\text{Stab } y|}$ 这一事实，我们可以通过计算元素 y 的稳定子来计算其轨道的基数。事实上，对于 $g = \exp z \in U$，其中 $z = \sum_{\alpha\in\Phi^+} z_\alpha e_\alpha$，我们有

$$g.y = gyg^{-1} = (\exp \mathrm{ad}_z)(y) = y + [z, y] + \frac{1}{2}[z, [z, y]] + \ldots. \tag{13}$$

我们用 $C(\beta)$ 表示这样的正根集合：它们与 β 之和也是正根。容易看出

$$C(\beta) = \begin{cases} \{\varepsilon_j - \varepsilon_i \mid j < i\} \text{ if } \beta = 2\varepsilon_i, \\ \{\varepsilon_j - \varepsilon_i \mid j < i\} \cup \{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_j \mid j < i+1\} \text{ if } \beta = \varepsilon_i + \varepsilon_{i+1}. \end{cases}$$

注意，对于任意 β_1 和 β_2，只要它们来自 D^*，就有 $C(\beta_1) \cap C(\beta_2) = \varnothing$。接下来，记 δ 为关于序 $\prec'$，从D^* 中取出的最小根，并将集合 $\cup_{\beta\in D^*} C(\beta)$ 记为 $C(D^*)$。现在，在所有满足 $z_\alpha \neq 0$ 的 $\alpha \in C(\delta)$ 中，记关于同一序的最小根为 δ'。由公式 (13) 以及当 $\beta \in D^*$ 和 $\alpha \in \Phi^+$ 时 $\beta \prec' \alpha + \beta$ 这一事实可知，$(g.y)_{\delta+\delta'} = z_{\delta'}$，因为根$\delta + \delta'$ 是小于 δ 且最接近 δ 的根。但是 $y_{\delta+\delta'} = 0$，因此我们得出 $z_{\delta'}$ 必须为零，这与 δ' 的存在矛盾。所以，对所有 $\alpha \in C(\delta)$，都有 $z_\alpha = 0$。现在，我们可以将相同的论证应用于 D^* 中下一个最小的根。因此，经过若干次迭代，我们得到对所有$\alpha \in C(D^*)$，都有 $z_\alpha = 0$。最后还需注意，$|C(D)| = |S(D)|$。因此，$\ln(\text{Stab } y)$ 同构于维数为 $\dim \mathfrak{u} - |S(D)|$ 的仿射空间，所以 $|U.y| = q^{|S(D)|}$。证明完毕。□

还要注意，对于上文引理中的 $y = x_{D^*}(\phi)$ 和 D^*，$U.y$ 是 $k_{D^*}(\phi)$ 的子集。由该陈述可得 $\Delta_\beta^{D^*}(gyg^{-1}) = \Delta_\beta^{D^*}(y)$。因此，集合 $U.y$ 和 $k_{D^*}(\phi)$ 重合。

Proof of Theorem 4.10, part (a)。

我们从定理的第一个陈述开始。我们已经知道，簇 $K_{D^*}(\phi)$ 与元素 $X_{D^*}(\phi)$ 的共轭类重合。首先，我们将 χ 的支撑分解为较大的簇 $K_{D^*}(\phi)$ 中的 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$。回顾上一节中 χ、U_1、V' 和 U 的定义。我们对 n 作归纳。归纳基显然成立。

假设 $\beta_1 = 2\varepsilon_1$，并对任意的 $g = \exp(x) \in U$ 置 $g_{U_1} = \pi_{U_1}^{U_1\rtimes V'}$ 和 $g_{\widetilde{U}} = \pi_{\widetilde{U}}^{U_1\rtimes V'}$。再记 $U_1 \rtimes V'$ 的一组完备陪集代表元（为方便起见，记作 U_1V'）在 U 中为 M。利用诱导特征的标准公式，我们得到

$$\chi(g) = \sum_{y=h^{-1}gh \mid y\in U_1V', h\in M} \theta(f(\ln(y_{U_1})))\widetilde{\chi}(y_{\widetilde{U}}) \tag{14}$$

$\widetilde{\ }$（回想一下，在这种情况下，$U = V'$ 且 $\widetilde{\mathfrak{u}}$ 同构于 $\mathfrak{u}(C_{n-1})$）。更确切地说，M 可按如下方式选取：

$$M = \{\exp(t) \mid t \in \mathfrak{u}\backslash(\mathfrak{u}_1 \oplus \mathfrak{v})\}.$$

条件 $y \in U_1V'$ 或可改写为 $h^{-1}xh \in \mathfrak{u}_1 \oplus \mathfrak{v}$。事实上，$y = h^{-1}\exp(x)h = \exp(h^{-1}xh)$，但显然 $U_1V' = \exp \mathfrak{u}_1 \exp \mathfrak{v} \subset \exp(\mathfrak{u}_1 \oplus \mathfrak{v})$，而这些集合的基数相同，因此它们相等。

由元素 $h \in M$ 进行的共轭不会影响 g中不属于 C_1 和 R_{-1} 的元素。$\widetilde{\ }$群 U上的投影 π通过删除第一列中的元素来实现，因此 $y_{\widetilde{U}} = g_{\widetilde{U}}$。于是，公式 (14) 可以写为

$$\chi(g) = \widetilde{\chi}(g_{\widetilde{U}}) \sum_{y=h^{-1}gh \mid y\in U_1V', h\in M} \theta(f(\ln(y_{U_1}))).$$

考虑到 $g_{\widetilde{U}}$ 必须属于 Supp($\widetilde{\chi}$)，我们将归纳假设应用于它，从而得到所需的关于 g 的一部分方程。更确切地说，

$$\Delta_{\beta}^{D^*}(x) = \Delta_{\beta}^{D^*}(x_{D^*}(\varphi)) \text{ for all } \beta \in R(D^*)\backslash C_1$$

对于某些 $D^* \in D'$。将这些条件与条件 $h^{-1}xh \in \mathfrak{u}_1 \oplus \mathfrak{v}$ 相结合，我们还得到

$$\Delta_{\beta}^{D^*}(x) = \Delta_{\beta}^{D^*}(x_{D^*}(\varphi)) \text{ for all } \beta \in C_1\backslash C'.$$

事实上，在该情形下，所有这些方程仅仅意味着，对从1到 n的所有 i ，有$x_{1,i} = 0$ 。因此，仍需对集合 C' 中的根得到所需的方程。

为了得到这些方程，我们需要考察表达式 $\theta(f(\ln(y_{U_1})))$。因为在该情形下$f(x) = x_{-1,1}$ ，对于 $x \in \mathfrak{u}_1$ ，我们只关心元素$(\ln(y_{U_1}))_{-1,1}$。直接的矩阵计算表明

$$\theta(f(\ln(y_{U_1}))) = \theta(\xi_{\beta_1}(\sum_{i,j=2}^{n} h_{i,1}h_{j,1}x_{-i,j} - 2\sum_{i=2}^{n} h_{i,1}x_{-i,1} + x_{-n,1}))$$

（我们提醒，$x_{-i,j} = x_{-j,i}$，其中 $i = 1,\ldots,n$）。我们看到，括号中的表达式是有限域上关于变量$h_{i,1}$的二次型，因此我们可以将其化为典范形式。

有两种可能：

1. 该形式　并非中心的；因此，其典范形式将为 $\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \ldots + \lambda_k z_k^2 + \lambda_{k+1} z_{k+}$ 1.

2. 该形式是中心的，因此其典范形式将为 $\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \ldots + \lambda_k z_k^2$.

（其中 λ_i 是一些非零常数，而 z_j 是变量）。根据事实 $\sum_{c\in\mathbb{F}_q} \theta(c) = 0$，我们得出第一种选择不适合我们，因为对所有 h求和将为零（这是由于线性项 $\lambda_{k+1}z_{k+1}$），所以值 $\chi(g)$ 也将为零。因此，我们的形式必须是中心的。我们可以写出该二次型的矩阵。容易验证，它恰好是由矩阵 $\pi(x)$ 中的元素 $\widetilde{x}_{i,\ j}$ 组成的矩阵（事实上，这些元素是矩阵 x 中去掉第一列和最后一行后的元素 $x_{i,\ j}$）；我们将此矩阵记为 $\widetilde{x}$。该形式的线性部分的系数为 $(-2x_{-2}, 1, -2x_{-3}, 1, \ldots, -2x_{-n}, 1)$；我们将此向量记为 b。该二次型所有中心的集合由线性方程组 $\widetilde{x}y^t = -\frac{b^t}{2}$ 描述，其中y 是变量向量。对该方程组应用克罗内克–卡佩利判别法，可得到关于第一列的其余方程条件，但子式 $\Delta_{2\varepsilon_1}^{D^*}(x)$ 的条件除外；这给出了簇 $k_{D^*}(\phi)$，在该簇中，此子式可以取任意值。这等价于根 $\beta_1 = 2\varepsilon_1$ 是否属于 D^* 的条件。因此，对于某个 $D^* \in D'$，有 $x \in k_{D^*}(\phi)$ 和 $g \in K_{D^*}(\phi)$。

现在转到 $\beta_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_{n-1}$ 的情形。与前一种情形一样，我们先描述 U_1V' 的一组完整陪集代表元。容易验证，集合 M 可以按如下方式选取：

$$M = \{\exp(t) \mid t \in \mathfrak{u}\backslash(\mathfrak{u}_1 \oplus \mathfrak{v}')\}.$$

接下来需要注意，在任意 $g \in U$ 中，不属于 C_1、C_2 和 R_{-1}、R_{-2} 的元素在与 $h \in M$ 共轭后不会改变。此外，从 U_1V' 到 V' 的投影，以及从 $V'^{\sim}$ 到 U 的投影，只需分别删除 C_1、R_{-1} 和 C_2、R_{-2} 中的元素即可。因此，公式 (14) 可改写为

$$\chi(g) = \widetilde{\chi}(g_{\widetilde{U}}) \sum_{y=h^{-1}gh \mid y\in U_1V', h\in M} \theta(f(\ln(y_{U_1}))).$$

由于 $\widetilde{\chi}(g_{\widetilde{U}}) \neq 0$，我们得到关于元素 x 的如下方程：

$$\Delta_{\beta}^{D^*}(x) = \Delta_{\beta}^{D^*}(x_{D^*}(\varphi)) \text{ for all } \beta \in R(D^*)\backslash(C_1 \cup C_2)$$

对于某些 $D^* \in D'$。现在，我们希望满足条件 $y = h^{-1}gh \in U_1V'$。与前一情形相同，该陈述等价于如下陈述： $z = h^{-1}xh \in \mathfrak{u}_1 \oplus \mathfrak{v}'$，论证如上。由条件 $z_{i,\ 2} = 0$ （针对 $j = 3$、n ）以及上文所写的关于子式的方程，我们得到 $x_{j,\ 2} = 0$ （针对 $j = 3$、n ）（对于这些位置 $\Delta^{D^*}_{\varepsilon_2-\varepsilon_i}(x) = x_{i,2}$）。让我们写下由条件 $z \in \mathfrak{u}_1 \oplus \mathfrak{v}'$ 所产生的其余条件。条件 $z_{i,\ 2} = 0$ （针对 i，从 $-n$ 到 -3 ）给出我们 $\widetilde{x}h^t = b^t$，其中 $\widetilde{x}$ 是 $(2n-2) \times (2n-2)$ 矩阵，由矩阵 $\pi(x)$ 的元素构成，$h = (h_3,2, h_4,2, \ldots, h_n,2)$ 以及 $b = (h_{-n},2, h_{-n+1},2, \ldots, h_{-3},2)$。条件 $z_{-2,\ 2} = 0$ 给出我们

$$\sum_{i,j=3}^{n} h_{i,2}h_{j,2}x_{-i,j} - 2\sum_{i=3}^{n} h_{i,2}x_{-i,2} + x_{-n,2} = 0.$$

利用方程组 $\widetilde{x}h^t = b^t$ 中的方程，我们可以将后面的表达式改写如下：

$$\sum_{i=3}^{n} x_{-i,2}h_{i,2} = x_{-2,2}.$$

将这个方程与方程组 $\widetilde{x}h^t = b^t$ 结合，我们得到新的线性方程组 $\widetilde{\widetilde{x}}h^t = b^t$，其中 $\widetilde{\widetilde{x}}$ 由 $\widetilde{x}$ 添加一行（$x_{-3,\ 2}$，$x_{-4,\ 2}$，……，$x_{-n,\ 2}$）得到，向量 b 则由 b 添加 $x_{-2,\ 2}$得到。这个方程组也必须相容，因此我们可以使用克罗内克–卡佩利判别法。由此可得关于第二列的其余条件，特别是子式 $\Delta^{D^*}_{2\varepsilon_2}(x)$恒为零（因为矩阵 $\widetilde{x}$ 的秩不大于 $n-2$，且该方程组的增广矩阵 $\widetilde{x}h^t = b^t$ 的大小为（$n-1$）×（$n-1$））。因此，现在我们得到以下方程：

$$\Delta^{D^*}_{\beta}(x) = \Delta^{D^*}_{\beta}(x_{D^*}(\varphi)) \text{ for all } \beta \in R(D^*)\backslash C_1$$

要得到第一列的方程，我们需要考察表达式

$$\theta(\xi_{\beta_1}(\ln(y_{U_1}))) = \sum_{i=2}^{n} x_{i,1}h_{-i,1} - \sum_{i=2}^{n} x_{-i,1}h_{i,1} + x_{-1,1}.$$

由方程组 $\widetilde{x}h^t = b^t$ 可知，某些元素 $h_{i,\ 2}$（且只有这些元素），$i = 3$，……，n，可以由其余元素表示。作为上述表达式的推论，我们立即得到$x_{i,\ 1} = 0$，其中 $i = 2$，……，n。因此，

$$\theta(\xi_{\beta_1}(\ln(y_{U_1}))) = -\sum_{i=2}^{n} x_{-i,1}h_{i,1} + x_{-1,1}. \tag{15}$$

因此，我们需要求解线性方程组 $\widetilde{x}h^t = b^t$。考虑关于序 $\prec$ 排序的两个指标集：

$$T_{D^*} = \{\mathrm{row}(\alpha) \mid \alpha \in D^*, \mathrm{row}(\alpha) < -2\} \cup \{-\mathrm{col}(\alpha) \mid \alpha \in D^*, \mathrm{col}(\alpha) > 2\},$$

$$T^{D^*} = \{-\mathrm{row}(\alpha) \mid \alpha \in D^*, \mathrm{row}(\alpha) < -2\} \cup \{\mathrm{col}(\alpha) \mid \alpha \in D^*, \mathrm{col}(\alpha) > 2\}.$$

将位于来自 T_{D*} 的行与来自 T^{D^*} 的列交集上的矩阵记为x'。该矩阵是一个最大阶矩阵，由 $\widetilde{x}$ 中的元素组成，且行列式非零；将此行列式记为 Δ。解方程组 $\widetilde{x}h^t = b^t$ 并将所得结果代入等式（15）后，我们得到

$$\theta(\xi_{\beta_1}(\ln(y_{U_1}))) = -\sum_{i\in\{1,\ldots,n\}\backslash T^{D^*}} \Delta_{-i,1}h_{i,1} + c,$$

这里，子式$\Delta_{-i,\ 1}$位于来自 $T_{D^*}\cup\{-i\}$ 的行以及列$T^{D^*}\cup\{1\}$ 上，而 c 是某个常数。因此，对于 $i\in\{1,\dots,n\}\backslash T^{D^*}$，所有子式$\Delta_{-i,\ 1}$都必须为零，因为它们是线性项前的系数。由此得到第一列方程的其余部分，但子式 $\Delta^{D^*}_{\varepsilon_1+\varepsilon_{n-1}}(x)$和 $\Delta^{D^*}_{2\varepsilon_1}(x)$除外；这给出簇 $\widetilde{k}_{D^*}(\phi)$，其中这两个子式可以取任意值。这等价于：根 $\varepsilon_1+\varepsilon_{n-1}$ 属于 D^*，或者 $2\varepsilon_1$ 属于D^* 且 $\varepsilon_1+\varepsilon_{n-1}$ 不属于 D^*，或者这两个根都不属于 D^*。至此，定理第一条陈述的证明完成。□

Proof of Theorem 4.10, part (b)。

设定理中的 D、 $D^*\subset D'$、 ϕ 和 ξ。我们将分两种情况讨论。首先考虑 $\beta_1=2\varepsilon_1\in D$ 的情形。为方便起见，若 ϕ 未定义在$\alpha\in\Phi^+$ 上，我们记作 $\phi_\alpha=0$。我们对 n 进行归纳。此时关于 $\Phi=C_2$ 的归纳基可直接由公式验证

$$\chi=\chi_{\Omega_f}(g)=q^{-\frac{1}{2}\dim\Omega_f}\sum_{f'\in\Omega_f}\theta(f'(\ln(g))),$$

其中 $f=f_{D,\ \xi}$，且 $g=X_{D^*}(\phi)$ =exp($x_{D^*}(\phi)$)。例如，我们来考察 $\beta_1=2\varepsilon_1$ 的这一计算（事实上，这是技术上最复杂的情形）。我们有

$$\chi(g)=q^{-1}\sum_{f'\in\Omega_f}\theta(f'(x_{D^*}(\phi)).$$

根据余伴随作用的公式，并注意到 $f'(x_{D^*}(\phi))$ 取 $|\mathrm{Stab}(f)|$ 次，我们得到

$$\chi(g)=q^{-1}\theta(\xi_{2\varepsilon_2}\phi_{2\varepsilon_2})\theta(\xi_{2\varepsilon_1}\phi_{2\varepsilon_1})\sum_{y\in\mathfrak{u}}\theta(\xi_{2\varepsilon_1}(y^2_{2,1}\phi_{2\varepsilon_2}))|\mathrm{Stab}(f)|^{-1}.$$

利用 [LN97，定理 5.3.3]，并考虑到 $|\mathrm{Stab}(f)|=|U|/|\Omega_f|$，我们得到

$$\chi(g)=\begin{cases}q\prod\limits_{\alpha\in D\cap D^*}\theta(\xi_\alpha\phi_\alpha), & \text{if } \phi_{2\varepsilon_2}\notin D^*,\\ \eta(\xi_{2\varepsilon_1}\phi_{2\varepsilon_2})G(\eta,\theta)\prod\limits_{\alpha\in D\cap D^*}\theta(\xi_\alpha\phi_\alpha) & \text{otherwise,}\end{cases}$$

这与公式一致。因此，在这种情况下，归纳基得证。其他情况也可以类似地验证。

现在，我们来讨论归纳步骤。回顾 M、U_1 的定义、$\widetilde{U}$、V'，它们来自上一部分的证明。由于我们的特征标可以表示为一个诱导特征，我们可以使用诱导特征的标准公式：

$$\chi(g)=\widetilde{\chi}(g_{\widetilde{U}})\sum_{y=h^{-1}gh|y\in U_1V',h\in M}\theta(f(y_{U_1})).$$

这里，$g_{\widetilde{U}}$ 是元素 $x_{\widetilde{D}^*}(\phi)\in U(C_{n-1})$，其中 $D^*=\pi(D^*)$，而 ϕ 是将 ϕ 到集合 D^* 上的自然限制。根据余伴随作用的公式进行计算，我们得到

$$\chi(g)=\widetilde{\chi}(g_{\widetilde{U}})\theta(\xi_{2\varepsilon_1}\phi_{2\varepsilon_1})\sum_{y=h^{-1}gh|y\in U_1V',h\in M}\theta(\xi_{2\varepsilon_1}(\sum_{\alpha\in\widetilde{D}^*_0}\phi_\alpha h_\alpha^2+\sum_{\beta\in\widetilde{D}^*_1}2\phi_\beta h_\beta h_{\beta'})),$$

其中 $h_\alpha=h_{i,\ 1}$ 对应 $\alpha=2\varepsilon_i\in D^*_0$，而 $h_\beta=h_{k,\ 1}$，$h_{\beta'}=h_{l,\ 1}$ 对应 $\beta=\varepsilon_k+\varepsilon_l\in D^*_1$。采用上述论证，我们可得

$$\chi(g)=\widetilde{\chi}(g_{\widetilde{U}})\theta(\xi_{2\varepsilon_1}\phi_{2\varepsilon_1})G^{|\widetilde{D}^*_0|}(\eta,\theta)q^{(n-1)-|\widetilde{D}^*|}\prod_{\beta\in\widetilde{D}^*_0}\eta(\xi_{2\varepsilon_1}\phi_\beta).$$

~ ~考虑到 $D_0 = D_0 \cup \{2\varepsilon_1\}$、 $D_1 = D_1$ 和

$$t(D, D^*) = t(\widetilde{D}, \widetilde{D}^*) + |\widetilde{D}^*|, \quad t_0(D, D^*) = t_0(\widetilde{D}, \widetilde{D}^*) + |\widetilde{D}_0^*|, \quad t_1(D, D^*) = t_1(\widetilde{D}, \widetilde{D}^*),$$

a并对 $\widetilde{\chi}(g_{\widetilde{U}})$ 应用归纳假设，即可得到所需的公式 .

事实上， 当 $\beta_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ 时，情形要简单得多。我们将略去归纳基的证明，因为它与 相似 于前一种情形。这里我们有

$$\chi(g) = \widetilde{\chi}(g_{\widetilde{U}}) \sum_{y = h^{-1}gh | y \in U_1 V', h \in M} \theta(f(y_{U_1})).$$

通过对矩阵进行简单计算可知

$$\chi(g) = \widetilde{\chi}(g_{\widetilde{U}}) \sum_{y = h^{-1}gh | y \in U_1 V', h \in M} \theta(\xi_{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \phi_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}).$$

满足 $y \in U_1 V'$ 的 $h \in M$ 集合可以描述为满足 $h_{i,\ 2} = 0$ $(i \in \{-n, \ldots -2\} \cup T^{D^*})$ 的 $h \in M$ 集合。容易看出，$|T^{D^*}| = |D_0^*(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)| + 2|D_1^*(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)|$。因此，

$$\chi(g) = \widetilde{\chi}(g)\theta(\xi_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\phi_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}) q^{n-1+n-2-|D_0^*(\varepsilon_1+\varepsilon_2)|+2|D_1^*(\varepsilon_1+\varepsilon_2)|}.$$

~只需注意到 $D_0 = D_0$ ，以及

$$t(D,\ D^*) = t(\widetilde{D}, \widetilde{D}^*) + |\widetilde{D}^*|, \quad t_0(D, D^*) = t_0(\widetilde{D}, \widetilde{D}^*), \quad t_1(D, D^*) = t_1(\widetilde{D}, \widetilde{D}^*) + |D_1^*(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)|.$$

将归纳假设应用于 $\widetilde{\chi}(g_{\widetilde{U}})$ 后，即可得到所需结果。 □

参考文献

[An95] C.A.M. Andre. 单位上三角群的基本特征标。《代数学杂志》**175** (1995), 287–319.[An01] C.A.M. Andre. 单位上三角群的基本特征标表。《代数学杂志》**241**(2001), 437–471.[AN06] C.A. M. Andre, A.M. Neto. 类型为 B_n, C_n 和D_n的有限幺幂群的超特征。《代数学杂志》**305** (2006) 394–429.[AN09] C.A.M. Andre, A.M. Neto. 有限辛群和正交群的 Sylow p-子群的超特征理论。《代数学杂志》**322**(2009), no. 4, 1273–1294.[Bou02] N. Bourbaki. 李群与李代数。第4–6章, Springer, 2002.[GMR16] S.M. Goodwin, P. Mosch, G. R¨ohrle. 约化群的极大幺幂子群的余伴随轨道。《变换群》**21** (2016), 399–426.[Ig09] M.V. Ignatyev. 经典根系的正交子集与幺幂群的余伴随轨道。《数学札记》**86** (2009), no. 1, 65–80.[Ig09i] M.V. Ignatev. 有限域上单位上三角群的次正则特征。《数学科学杂志》**156** (2009), no. 2, 276–291.[IP09] M.V. Ignatev, A.N. Panov. 群 UT(7, K) 的余伴随轨道。《数学科学杂志》**156**(2009), no. 2, 292–312.

[IP25] M.V. Ignatev, A.V. Petukhov. 经典型 Borel 子代数的幂零根基的低维余伴随轨道，arXiv: math.RT/2507.20332.[IV25] M. Ignatev, M. Venchakov. 单位上三角群的特征标与麦基方法。《数学论述》43 (2025), no. 3, article 125656.[IV26] M. Ignatev, M. Venchakov. 与有限正交群 Sylow p-子群的车放置相关的轨道与特征标。《美国数学会会刊》，已接受，arXiv: math.RT/2406.04436.[IV26i] M. Ignatev, M. Venchakov. 有限李型经典群中 Sylow p-子群的最大维数和次最大维数轨道与特征标，准备中.[Ka77] D. Kazhdan. Springer 猜想的证明。Israel J. Math. 28 (1977), 272–286.[Ki62] A.A. Kirillov. 幂零李群的酉表示。Russian Math. Surveys 17 (1962), 53–104.[Ki04] A.A. Kirillov. 轨道方法讲义。Grad. Stud. in Math. 64, AMS, 2004.[Ki95] A.A. Kirillov. 三角主题的变奏。Amer. Math. Soc. Transl. 169 (1995), 43–73.[Ko12] B. Kostant. 正交根级联与半单李群的 Borel 子群幂零根基的余伴随结构。Moscow Math. J. 12 (2012), no. 3, 605–620.[Ko13] B. Kostant. $U(\mathfrak{n})$ 的中心、正交根级联及 Lipsman–Wolf 的一种构造。载于：李群：结构、作用与表示，Progr. in Math. 306. Birkh¨auser, 2013, 163–174.[LN97] R. Lidl, H. Niederreither. 有限域。《数学及其应用百科全书》，第2版，第20卷。剑桥大学出版社，1997.[Le74] G.I. Lehrer. 离散系列与幺幂子群。Composito Math. 28 (1974), fasc. 1, 9–19.[Sr74] B. Srinivasan. 有限 Chevalley 群的表示。Lecture Notes in Math. 366. 施普林格出版社，纽约，1974.[Ve70] M. Vergne. 构造从属于可解李代数对偶空间中一个元素的子代数。C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A–B 270 (1970), A173–A175.

Mikhail Venchakov: National Research University Higher School of Economics, Pokrovsky Boulevard 11, 109028, Moscow, Russia电子邮件地址：mihail.venchakov@gmail.com