arXiv:2602.14945v1 [math.AT] 16 Feb 2026

复射影空间上球面丛的几乎复结构不存在性

刘承婉和杨慧君

Abstract.我们研究复射影空间上的偶维球面丛是否存在几乎复结构。对于纤维为 S^{2q} 、底空间为 $\mathbb{C}P^n$ 的丛 $\xi_{n,q}$ ，我们建立了一个必要条件：若 $q \geq a(n)$ 对某个显式函数成立，则全空间 $E_{n,q}$ 不存在几乎复结构。作为应用，我们分析了一个与典范线丛相关的具体族，并得到了以 p 进赋值表述的不存在判据；对于 $p = 2$ ，这给出了一个简单的数值界。证明依赖于陈类计算以及示性类的整除性质。结果留下了关于 $4 \leq q < a(n)$ 范围内是否存在的开放问题。

1. Introduction

我们先固定一些记号。对于 CW复形 X，令 $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(X)$（分别为 $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X)$）表示 X 上复（分别为实）向量丛同构类的集合，并令 $K(X)$（分别为 $KO(X)$）表示 X 的约化 KU 群（分别为约化 KO 群），即 X 上复（分别为实）向量丛的稳定等价类集合。对于 $\xi \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X)$（分别为 $\eta \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(X)$），我们用 $\tilde{\xi} \in KO(X)$（分别为 $\tilde{\eta} \in K(X)$）表示其稳定类（参见 Hilton [11, 第 62] 页）。实化同态

$$\tilde{r}_X \colon \widetilde{K}(X) \longrightarrow \widetilde{KO}(X)$$

由实化约映射诱导

$$r_X \colon \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(X) \longrightarrow \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X).$$

设 M是一个 $2n$维光滑流形，其切丛为 TM。若 TM 属于 $\widetilde{\ }\ r_M$的像（分别地，若 TM属于 $\tilde{r}_M$的像），则称 M具有一个几乎复结构 （分别地，具有一个稳定几乎复结构）。

确定哪些流形具有几乎复结构是几何与拓扑学中的一个经典问题，许多作者对此作出了贡献；例如参见 Wu [24],Ehresmann [8], Steenrod [17], Massey [15], Thomas [22, 23], Heaps [10], Gauduchon 等[9], Kotschick [13], Tang [20, 21], Yang [25, 26, 27], 及其中的参考文献。

球面和复射影空间是这一领域的基础对象。关于这些流形以及由它们构造出的空间是否存在近复结构，一直是一个连贯且不断发展的研究方向。一个经典事实是，在球面中，只有S^2 和 S^6 存在几乎复结构（参见 [4]）。一个自然的推广是考虑

2020 数学学科分类。 57R15；55R40；55R25。关键词与短语。 几乎复结构；球面丛；复射影空间；陈类； p-进赋值。第二作者为通讯作者，获得河南省自然科学基金（编号：242300421380）资助。

球面乘积。Calabi 和 Eckmann [5] 证明，奇数维球面的乘积 $S^{2p+1} \times S^{2q+1}$ 存在复结构，因此也存在几乎复结构。对于偶数维球面的乘积，Sutherland [18] 和 Datta–Subramanian [7]给出了完整的刻画：当且仅当一个乘积是由若干个 S^2、S^6和 $S^2 \times S^4$ 构成的乘积时，它才存在几乎复结构。Sutherland 还将这些结果推广到了球面上的球面丛，并给出了偶数维球面上的偶数维球面丛的全空间成为近复流形的充要条件。

复射影空间 $\mathbb{C}P^n$ 本身是复流形，因此具有典范的几乎复结构；Thomas [23]等人对其几乎复结构进行了详细研究。这自然引出了一个问题：这些复基底上的球面丛是否具有几乎复结构？回答这一问题将延续上述研究方向。

这一方向的初步进展聚焦于乘积流形。Tang [19] 证明，$S^{2q} \times \mathbb{C}P^2$ 具有几乎复结构当且仅当 $q = 0$，1，3；而 $S^{2q} \times \mathbb{C}P^3$ 具有几乎复结构当且仅当$q = 0$，1，2，3。随后，Chakraborty 和 Thakur [6] 推导出了乘积 $S^{2q} \times M$（其中 M 是闭定向流形）成为近复流形的一个一般必要条件。他们工作的一个推论是，对于 $n > 1$ 和 $n \not\equiv 3$（模 4），乘积 $S^{2q} \times \mathbb{C}P^n$ 具有几乎复结构当且仅当 $q = 1$ 或 3。Ambika 和 Subhash [2], 研究了更一般的情形，即复射影空间上的扭曲球面丛（而非平凡乘积），并得出若干部分结果。

基于这一基础，本文通过研究此类球面丛存在近复结构的必要条件，为这一研究方向作出了贡献。本文中，所有纤维为 S^{2q} 的球面丛均假定其结构群为 $SO(2q+1)$。

对于正整数 n 和 q，设 $\xi_{n,\,q}$ 是一个以 $\mathbb{C}P^n$ 为底空间、纤维为 S^{2q}的球面丛，并将其全空间记为 $E_{n,\,q}$。由 Yang [26, 定理 1.1] 可轻易推知，$\xi_{n,\,q}$ 的伴随实向量丛具有稳定复结构（参见 [2, 命题 3.1]）；因此，$E_{n,\,q}$ 具有稳定几乎复结构（参见 [2, 定理 1.1]）。然而，并非所有此类全空间都具有（非稳定）几乎复结构。事实上，Ambika 和 Subhash [2] 证明了$E_{n,\,1}$ 总是具有几乎复结构，而$E_{2n,\,2q}$ 则不具有。

我们的主要结果陈述如下。对于正整数 n，定义

$$a(n) := \begin{cases} n+3, & 1 \le n \le 2; \\ n+2, & 3 \le n \le 5; \\ n, & n \ge 6. \end{cases}$$

定理 1.1。设 $\xi_{n,\,q}$ 是 $\mathbb{C}P^n$ 上的一个球面丛，其纤维为 S^{2q}。若 $q \ge a(n)$，则全空间 $E_{n,\,q}$ 不允许存在几乎复结构。

回想一下，在所有球面中，只有 S^2 和 S^6 存在几乎复结构。此外，Sutherland [18] 证明了 $E_{1,\,q}$（即在 $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$ 上）存在几乎复结构，当且仅当 $q \le 3$；这些事实表明，当 $q \le 3$ 时，$E_{n,\,q}$ 上可能存在几乎复结构。对照定理 1.1，自然会提出这样的问题：在范围 $4 \le q < a(n)$ 内，$E_{n,\,q}$ 是否存在几乎复结构?

为了说明我们的方法，我们考虑一族特定的球面丛。令 γ_n 表示 $\mathbb{C}P^n$ 上的典范复直线丛。对于任意正整数 q，令 $q\gamma_{n\mathbb{R}} \oplus \epsilon$ 为 q 份 γ_n 的底层实向量丛 $\gamma_{n\mathbb{R}}$ 与平凡实直线丛 ϵ 的惠特尼和。记 $\xi(\gamma_n,\ q)$ 为 $q\gamma_{n\mathbb{R}} \oplus \epsilon$ 所关联的球面丛；则按构造，$\xi(\gamma_n,\ q)$ 是一个在 $\mathbb{C}P^n$ 上且存在截面的 S^{2q}-丛。

对于素数 p，令 $v_p(n+1)$为 p-进赋值 $n+1$(p整除$n+1$的最高幂；参见第2节）。设 $\delta_p := v_p(2)$，因此 $\delta_2 = 1$ 且 $\delta_p = 0$ 对于奇数 p。由第3.1 节中的定理3可立即得到：

定理 1.2。若存在素数 p使得

$$p^{\lfloor \frac{q-1}{p-1} \rfloor - v_p(n+1) - \delta_p} - q > n \quad (or\ \geq n\ if\ p-1 \nmid q-1),$$

则 $\xi(\gamma_n, q)$ 的全空间 $E(\gamma_n, q)$ 不承认几乎复结构。 □

取 $p = 2$ 并记 $\nu = v_2(n+1)$，则有

$$p^{\lfloor \frac{q-1}{p-1} \rfloor - v_p(n+1) - \delta_p} - q = 2^{q-\nu-2} - q.$$

令 $\log_2$ 表示以 2 为底的对数。简单计算可知，若

$$q \geq \lfloor \log_2(\tfrac{n+1}{2^\nu}) \rfloor + 2\nu + 4,$$

则 $2^{q-\nu-2} - q > n$。因此：

推论 1.3. 若 $q \geq \lfloor \log_2 \binom{n+1}{2^\nu} \rfloor + 2\nu + 4$，则 $E(\gamma_n, q)$ 不承认几乎复结构。□

本文结构安排如下。第2节研究复向量丛的陈类的整除性质。基于这些结果，第3节推导出流形上的球面丛不承认几乎复结构的条件，并给出定理 1.1的证明。

2. Divisibility properties of Chern classes

本节将构建证明定理 1.1所需的技术工具。设 η 是 CW复形 X 上的复向量丛，并假设 η 在 $2q-1$ 骨架上是平凡的，其中该骨架为 X 的第 $(2q-1)$ 阶骨架。我们研究其陈类的整除性质；主要结果是定理 2.4，它将在第 3节发挥关键作用。

我们首先建立必要的代数背景。设 $t_1, \ldots, t_n$ 为不定元。对于 $k \leq n$，用 $\sigma_k = \sigma_k(t_1, \ldots, t_n)$ 表示第 k 个初等对称多项式；对于 $k \geq 1$，令 s_k 为满足以下条件的唯一多项式

$$s_k(\sigma_1, \ldots, \sigma_k) = \sum_{i=1}^{n} t_i^k.$$

初等多项式与幂和之间的关系由牛顿公式给出（参见 [16,习题16-A，第 195]或 [14, (2.11′)，第 23] 页）

$$s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \sigma_2 s_{k-2} + \cdots + (-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1 + (-1)^k k\sigma_k = 0. \tag{2.1}$$

这些关系使我们能够用 σ_k 表示 s_1，……，s_k，且系数为有理数（参见 [14,(2.14′)，第 25]页）：

$$(-1)^k\sigma_k = \sum_{\substack{m_1+2m_2+\cdots+km_k=k\\ m_i\geq 0}} \frac{(-1)^{m_1+m_2+\cdots+m_k}}{m_1!\,m_2!\cdots m_k!}\prod_{i=1}^{k}\Big(\frac{s_i}{i}\Big)^{m_i}. \tag{2.2}$$

对于底空间为 X 的复向量丛 η，我们用 $s_k(\eta)$ 表示 $s_k(c_1(\eta)\ldots,c_k(\eta))$。$\eta$ 的陈特征定义为形式和

$$\mathrm{ch}(\eta) := \dim\eta + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{s_k(\eta)}{k!} \in H^*(X;\mathbb{Q}).$$

如果上同调类 $z\in H^k(X;\mathbb{Q})$ 属于自然映射 $H^k(X;\mathbb{Z})\to H^k(X;\mathbb{Q})$ 的像，则称其为整的。令 $\phi(t)$ 为数值函数

$$\phi(t) = \prod_{p\text{ prime}} p^{\lfloor t/(p-1)\rfloor},$$

其中 $\lfloor\cdot\rfloor$ 表示下取整函数。Adams [1] 证明了关于陈特征的以下整性定理。

引理 2.1 (Adams [1])。设 X 为 CW复形，η 为其上的复向量丛。若 η 在 X 的$(2q-1)$骨架上平凡，则对于每个整数 $t\geq 0$，类 $\phi(t)\,(q+t)!^{\,s_{q+t}}(\eta)$ 都是整的。

为了处理 $\phi(t)$ 中出现的素因子，我们需要一些初等数论知识。对于素数 p 和非负整数 n，令 $S_p(n)$ 表示 n 的 p 进制展开中各位数字之和；显然，$S_p(n)\geq 1$。由于 n 至多有 $\lfloor\log_p n\rfloor+1$ 位数字，且每位数字至多为 $p-1$，我们得到以下界。

引理 2.2. 对于任意非负整数 n,

$$S_p(n)\leq (p-1)\big(\lfloor\log_p n\rfloor+1\big),$$

且等式成立当且仅当 $n=p^{\lfloor\log_p n\rfloor}-1$。

对于非零有理数 r，用 $v_p(r)$ 表示其 p-进赋值（参见例如 [12, 第2]页）；因此 $r=p^\rho a/b$，其中 $\rho,a,b\in\mathbb{Z}$ 且 a,b 与 p 互素，并且 $v_p(r)=\rho$。赋值满足通常的法则

$$v_p(r_1r_2) = v_p(r_1)+v_p(r_2), \tag{2.3}$$

$$v_p(r_1/r_2) = v_p(r_1)-v_p(r_2). \tag{2.4}$$

由 $\phi(t)$ 的定义可立即得到

$$v_p\big(\phi(t)\big) = \Big\lfloor\frac{t}{p-1}\Big\rfloor. \tag{2.5}$$

勒让德公式（参见 [12, 第7]页）给出阶乘的 p-进赋值：

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big\lfloor\frac{n}{p^k}\Big\rfloor = \frac{n-S_p(n)}{p-1}. \tag{2.6}$$

下一个引理给出了若干估计，这些估计在后文中至关重要。

引理 2.3。设 p 为素数，q、l 为正整数。
(1) 对每个满足 $0 \le t < p-1$ 的整数 t，

$$v_p\left(\frac{(q+t-1)!}{\phi(t)}\right) \ge v_p\big((q-1)!\big).$$

(2) 假设 $p^{\lfloor \frac{q-1}{p-1} \rfloor - l+1} > q$。那么对每个满足 $0 \le t < p^{\lfloor \frac{q-1}{p-1} \rfloor - l+1} - q$（若 $p-1 \nmid q-1$，则为 $0 \le t \le p^{\lfloor \frac{q-1}{p-1} \rfloor - l+1} - q$）的整数 t，

$$v_p\left(\frac{(q+t-1)!}{\phi(t)}\right) \ge l.$$

证明。(1) 对于 $0 \le t < p-1$，我们有 $\lfloor t/(p-1) \rfloor = 0$，因此 $v_p(\phi(t)) = 0$ 由（2.5）可得。因此

$$v_p\left(\frac{(q+t-1)!}{\phi(t)}\right) = v_p\big((q+t-1)!\big) \ge v_p\big((q-1)!\big).$$

(2) 利用（2.5）、（2.6）和（2.4）进行计算，得到

$$\begin{aligned} v_p\left(\frac{(q+t-1)!}{\phi(t)}\right) &= v_p\big((q+t-1)!\big) - \left\lfloor \frac{t}{p-1} \right\rfloor \\ &= \frac{q+t-1-S_p(q+t-1)}{p-1} - \left\lfloor \frac{t}{p-1} \right\rfloor \\ &= \frac{q-1-S_p(q+t-1)}{p-1} + \frac{t}{p-1} - \left\lfloor \frac{t}{p-1} \right\rfloor. \end{aligned}$$

如果 $t < p^{\lfloor \frac{q-1}{p-1} \rfloor - l+1} - q$，则 $q+t-1 < p^{\lfloor \frac{q-1}{p-1} \rfloor - l+1} - 1$，因此由引理 2.2

$$\frac{S_p(q+t-1)}{p-1} < \left\lfloor \frac{q-1}{p-1} \right\rfloor - l + 1.$$

因此

$$\begin{aligned} v_p\left(\frac{(q+t-1)!}{\phi(t)}\right) &> l - 1 + \frac{q-1}{p-1} - \left\lfloor \frac{q-1}{p-1} \right\rfloor + \frac{t}{p-1} - \left\lfloor \frac{t}{p-1} \right\rfloor \\ &\ge l-1. \end{aligned}$$

因此左端至少为 l。

现在假设 $p-1 \nmid q-1$ 且 $t = p^{\lfloor \frac{q-1}{p-1} \rfloor - l+1} - q$，则 $q+t-1 = p^{\lfloor \frac{q-1}{p-1} \rfloor - l+1} - 1$。由引理2.2，我们得到等式

$$\frac{S_p(q+t-1)}{p-1} = \left\lfloor \frac{q-1}{p-1} \right\rfloor - l + 1.$$

此外，由于 $p-1 \nmid q-1$ 与 t 是相应地选取的，可以验证

$$\frac{q-1}{p-1} - \left\lfloor \frac{q-1}{p-1} \right\rfloor + \frac{t}{p-1} - \left\lfloor \frac{t}{p-1} \right\rfloor = 1.$$

将这些等式代入上述表达式，得到

$$v_p\left(\frac{(q+t-1)!}{\phi(t)}\right) = l.$$

至此，证明完成。 □

有了这些估计，我们现在可以陈述本截面的主要结果 .

定理 2.4. 设 p 是一个素数， q 是一个正整数。设 η 是 *CW*复形 X 上的一个复向量丛，并且在 X的（$2q-1$）骨架上是平凡的。那么：

(i) 对每个满足 $q \le k < q+p-1$的 k，陈类 c_k（η）模挠元可被 $p^{v_p(\,(q-1)\,!\,)}$整除。

(ii) 若正整数 l满足 $p^{\lfloor \frac{q-1}{p-1} \rfloor - l+1} > q$，则对每个满足 $q \le k < p^{\lfloor \frac{q-1}{p-1} \rfloor - l+1}$的 k（若 $p-1 \nmid q-1$，则也对 $q \le k \le p^{\lfloor \frac{q-1}{p-1} \rfloor - l+1}$），$c_k$（$\eta$）模挠元可被 p^l整除。

证明。由于 η在（$2q-1$）骨架上是平凡的，因此有 c_i（η）$=0$当 $1 \le i \le q-1$时；于是由牛顿公式（2.1）可得

$$s_i(\eta) = 0, \qquad 1 \le i \le q-1. \tag{2.7}$$

Adams 引理 2.1 给出了整系数类 $z_{q+t} \in H^*(X;\mathbb{Z})$，使得

$$\frac{\phi(t)}{(q+t)!}\, s_{q+t}(\eta) = z_{q+t} \quad \text{in } H^*(X;\mathbb{Q}),$$

因此

$$\frac{s_{q+t}(\eta)}{q+t} = \frac{(q+t-1)!}{\phi(t)}\, z_{q+t} \tag{2.8}$$

对每个 $t \ge 0$。

现在固定 $k \ge q$。利用表达式 (2.2) 以及 (2.7) 和 (2.8)，我们得到

$$\begin{aligned}(-1)^k c_k(\eta) &= \sum_{\substack{qm_q+\cdots+km_k=k \\ m_i \ge 0}} \frac{(-1)^{m_q+\cdots+m_k}}{m_q!\cdots m_k!} \prod_{i=q}^{k} \Big(\frac{s_i(\eta)}{i}\Big)^{m_i} \\ &= \sum_{\substack{qm_q+\cdots+km_k=k \\ m_i \ge 0}} \frac{(m_q+\cdots+m_k)!}{m_q!\cdots m_k!}\, \frac{(-1)^{m_q+\cdots+m_k}}{(m_q+\cdots+m_k)!} \prod_{t=0}^{k-q} \Big(\frac{(q+t-1)!}{\phi(t)}\, z_{q+t}\Big)^{m_{q+t}}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

(i) 若 $q \le p$则 $v_p((q-1)!) = 0$，且结论显然成立。假设 $q > p$，于是 $q+p-1 < 2q-1$。对于 $q \le k < q+p-1$，在 (2.9) 中只有含有 $m_k = 1$以及其他所有 $m_i = 0$的项会留下，因为其他任何组合都需要包含一个涉及 $s_i(\eta)$与 $i < q$的乘积，而它们为零。因此

$$(-1)^k c_k(\eta) = -\frac{s_k(\eta)}{k} = -\frac{(k-1)!}{\phi(k-q)}\, z_k.$$

应用引理 2.3 的第 (1) 部分，取 $t = k-q$（注意 $0 \le t < p-1$），得到 $v_p\big(\frac{(k-1)!}{\phi(k-q)}\big) \ge v_p((q-1)!)$，因此 $c_k(\eta)$可被 $p^{v_p((q-1)!)}$整除（模去挠元）。

(ii) 由于多项式系数 $\frac{(m_q+\cdots+m_k)!}{m_q!\cdots m_k!}$都是整数，因此只需证明，对于满足条件 $qm_q+\cdots+km_k = k$ 的任意非负整数 m_i，都有

$$v_p\left(\frac{1}{(m_q+\cdots+m_k)!} \prod_{t=0}^{k-q} \Big(\frac{(q+t-1)!}{\phi(t)}\Big)^{m_{q+t}} \right) \ge l.$$

关于 k的条件蕴含 $k-q < p^{\lfloor \frac{q-1}{p-1} \rfloor - l + 1} - q$(或在 $\leq$例外情形下）。根据引理 2.3 的第 (2) 部分，对于每个满足 t 的 $0 \leq t \leq k-q$，都有

$$v_p\left(\frac{(q+t-1)!}{\phi(t)}\right) \geq l.$$

现在使用赋值规则（2.3），（2.4）和勒让德公式（2.6）：

$$\begin{aligned} & v_p\left(\frac{1}{(m_q+\cdots+m_k)!}\prod_{t=0}^{k-q}\Big(\frac{(q+t-1)!}{\phi(t)}\Big)^{m_{q+t}}\right) \\ = & \sum_{t=0}^{k-q} m_{q+t}\, v_p\left(\frac{(q+t-1)!}{\phi(t)}\right) - v_p\big((m_q+\cdots+m_k)!\big) \\ \geq & \; l\,(m_q+\cdots+m_k) - \frac{m_q+\cdots+m_k}{p-1} + \frac{S_p(m_q+\cdots+m_k)}{p-1}. \end{aligned}$$

Since $l \geq 1 \geq \frac{1}{p-1}$ 且 $m_q+\cdots+m_k \geq 1$，我们有 $S_p(m_q+\cdots+m_k) \geq 1$，因此

$$\begin{aligned} & v_p\left(\frac{1}{(m_q+\cdots+m_k)!}\prod_{t=0}^{k-q}\Big(\frac{(q+t-1)!}{\phi(t)}\Big)^{m_{q+t}}\right) \\ \geq & \Big(l-\frac{1}{p-1}\Big)(m_q+\cdots+m_k) + \frac{S_p(m_q+\cdots+m_k)}{p-1} \\ \geq & \; l - \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p-1} = l. \end{aligned}$$

至此证明完毕。

□

3。 Non-existence of almost complex structures on sphere bundl es

借助第2节的整除性结果，我们现在研究球面丛上近复结构的存在性。我们的主要结果是定理3.1，它给出了不存在性的一般准则。作为推论，我们证明了定理1.1 （已在引言中宣布）。

回顾第1节，对于素数 p，我们令

$$\delta_p := v_p(2) = \begin{cases} 1, & p = 2, \\ 0, & p \text{ odd}. \end{cases}$$

对于闭定向光滑流形 M，我们用 $\chi(M)$表示其欧拉类（或欧拉示性数，在不会引起混淆时）。

定理 3.1. 设 M 是一个闭定向光滑 $2n$维流形， ξ 是 M 上以 S^{2q}为纤维的球面丛。假设 ξ 具有截面。如果存在素数 p ，使得要么

(a) $p > n+1$ *and* $v_p\big((q-1)!\big) \geq v_p(\chi(M)) + \delta_p + 1$, *or*

(b) $p^{\left\lfloor \frac{q-1}{p-1} \right\rfloor - v_p(\chi(M)) - \delta_p} - q > n$ *(or* $\geq n$ *if* $p-1 \nmid q-1$*),*

则全空间 $E(\xi)$ 不容许几乎复结构。

为证明定理 3.1 ，我们需要一个关于几乎复结构存在性的经典判别准则（见 Sutherland [18,定理 1.1] 或 Thomas [22, 定理 1.7]）。

引理 3.2。闭定向光滑 $2n$流形 N 存在几乎复结构$\tilde{}$当且仅当它存在满足以下条件的稳定几乎复结构 $\tilde{\eta} \in K(N)$

$$c_n(\tilde{\eta}) = \chi(N).$$

注意，维数 $E(\xi) = 2(n+q)$。鉴于引理 3.2，证明定理 3.1 的策略是证明，对于 $E(\xi)$ 上任意一个稳定复向量丛，其第 $(n+q)$ 个陈类都不可能等于 $E(\xi)$ 的欧拉类。

定理 *3.1* 的证明。记 $\pi\colon E(\xi) \to M$为投影，并记 $s\colon M \to E(\xi)$ 为选定的截面。

$$\begin{array}{ccc} S^{2q} & \xhookrightarrow{j} & E(\xi) \\ & & \underset{\pi}{\overset{s}{\uparrow\downarrow}} \\ & & M \end{array}$$

通过 s，我们可以将 M 视为 $E(\xi)$ 的子空间。由关于这一对 $(E(\xi), M)$ 的约化K理论的长正合列，我们得到一个分裂短正合列

$$0 \longrightarrow \widetilde{K}(E(\xi), M) \xrightarrow{j^*} \widetilde{K}(E(\xi)) \underset{\pi^*}{\overset{s^*}{\rightleftarrows}} \widetilde{K}(M) \longrightarrow 0,$$

其中，j^*、s^* 和 π^* 是诱导同态。因此，每个稳定复$\tilde{}$向量丛 $\tilde{\eta} \in K(E(\xi))$ 都可以唯一地写成

$$\tilde{\eta} = \eta_1 + \eta_2, \qquad \eta_1 = \tilde{\eta} - \pi^*\big(s^*(\tilde{\eta})\big), \quad \eta_2 = \pi^*\big(s^*(\tilde{\eta})\big).$$

根据构造，对于 $k > n$，有 $c_k(\eta_2) = 0$，因此

$$c_{n+q}(\tilde{\eta}) = c_{n+q}(\eta_1 + \eta_2) = \sum_{k=q}^{n+q} c_k(\eta_1)\, c_{n+q-k}(\eta_2). \tag{3.1}$$

此外，$s^*(\eta_1) = 0$，所以 η_1 属于 j^* 的像。由于 $E(\xi)/M$ 是 $(2q-1)$-连通的，η_1 在 $E(\xi)$ 的 $(2q-1)$-骨架上是平凡的。

现在假设素数 p满足定理的条件 (a) 或 (b)。将定理 2.4 应用于 η_1，我们得到每个陈类 $c_k(\eta_1)$，其中 $q \le k \le n+q$ 都可被 $p^{v_p(\chi(M))+\delta_p+1}$ 整除（模去挠元）。将这一信息代入（3.1）：右端的每一项都获得相同的因子，因此

$$c_{n+q}(\tilde{\eta}) \text{ is divisible by } p^{v_p(\chi(M))+\delta_p+1}. \tag{3.2}$$

另一方面，由于 ξ 是一个 S^{2q}-丛，全空间的欧拉示性数满足

$$\chi(E(\xi)) = \chi(S^{2q})\,\chi(M) = 2\,\chi(M),$$

因此

$$v_p\big(\chi(E(\xi))\big) = v_p(\chi(M)) + \delta_p. \tag{3.3}$$

比较（3.2）与（3.3）可知，c_{n+q}（$\tilde{\eta}$）永远不可能等于 χ（E（ξ）；由引理3.2可知，这意味着 E（ξ）不可能具有几乎复结构。□

定理*1.1*的证明。回顾引言中的结论：

$$a(n)=\begin{cases} n+3, & 1\le n\le 2;\\ n+2, & 3\le n\le 5;\\ n, & n\ge 6. \end{cases}$$

对于 $M=\mathbb{C}P^n$，我们有维数 $M=2n$。阻碍理论（参见 [16, §12]）表明，当$q\ge a(n$时，球面丛 $\xi_{n,\,q}$ 存在截面。我们将验证，对于这样的 q，定理 3.1 的假设均成立；真正起作用的素数是 2 和 3。

素数 $p=2$。记为 $\nu=v_2(n+1)$。数 n 满足 $v_2(n+1)=\nu$ 当且仅当存在整数 $k\ge 0$ 使得 $n=2^\nu(2k+1)-1=2^{\nu+1}k+2^\nu-1$。

情形 $\nu\ge 4$。于是 $n\ge 2^\nu-1\ge 2\nu+3\ge \nu+7$，故根据定义 $a(n)=n$。固定一个 ν，函数 2^x、$2^{x-\nu-2}-x$ 和 $2^{x-\nu-2}-2x$ 在 $[\nu+7,\infty)$ 上严格递增。因此

$$2^{n-\nu-2}-2n\ge 2^{2^\nu-\nu-3}-2^{\nu+1}+2\ge 2^{\nu+1}-2^{\nu+1}+2>0,$$

因此，对于任意 $q\ge a(n)=n$，

$$2^{q-\nu-2}-q\ge 2^{n-\nu-2}-n>n.$$

由定理 3.1 的 (b) 部分（其中 $p=2$），全空间 $E_{n,\,q}$ 不允许存在几乎复结构。

情形 $0\le\nu\le 3$ 且 n 充分大。定义

$$k_\nu=\begin{cases} 3-\nu, & \nu=0,1,\\ 1, & \nu=2,3, \end{cases}\qquad n_\nu=2^{\nu+1}k_\nu+2^\nu-1.$$

直接可验证 $2^{n_\nu-\nu-2}-2n_\nu>0$。若 $v_2(n+1)=\nu$ 且 $n\ge n_\nu$，则 $n\ge 6$ 且$a(n)=n$。再次利用单调性可得

$$2^{n-\nu-2}-2n\ge 2^{n_\nu-\nu-2}-2n_\nu>0,$$

因此，对每个 $q\ge n$，都有 $2^{q-\nu-2}-q>n$。于是定理 3.1(b) 再次排除了在 $E_{n,\,q}$ 上存在几乎复结构的可能。

满足 $0\le\nu\le 3$ 和 $n<n_\nu$ 的 n 的其余取值仅限于：$1\le n\le 5$ 和$n=7$。我们逐一讨论。

$n=2$，4，5：取 $p=2$。容易验证

$$2^{a(n)-v_2(n+1)-2}-a(n)>n,$$

并且函数 $2^{x-v_2(n+1)}-2-x$ 在 $x\ge a(n)$ 上递增。因此，对于所有 $q\ge a(n)$，

$$2^{q-v_2(n+1)-2}-q\ge 2^{a(n)-v_2(n+1)-2}-a(n)>n,$$

且定理 3.1(b) 适用。

素数 $p=3$。现在我们考察尚未涵盖的那些 n。

$n=1$：这里 $\chi(\mathbb{C}P^1)=2$，所以 $v_3(\chi(\mathbb{C}P^1))+\delta_3+1=v_3(2)+1=0+1=1$。对于任意$q\ge a(1)$，$=4$ 我们有 $v_3((q-1)!)\ge v_3(3!)=1$，因此定理 3.1 的条件 (a)（其中$p=3$）得到满足。因此，对于 $q\ge 4$，$E_{1,\,q}$ 不承认几乎复结构。

$n=3$ 和 $n=7$：两种情况下 $v_3(n+1)=0$。对于 $q\ge a(n)$，可以验证，除非可能出现 $n=3$ 和 $q=6$，否则我们总有

$$3^{\lfloor (q-1)/2\rfloor}-q>n.$$

当 $n = 3$ 和 $q = 6, (q-1)/2$ 不是整数，因此适用条件（b）的“$\geq n$”版本，并得出 $3^{\lfloor 5/2 \rfloor} - 6 = 3^2 - 6 = 3 = n$。因此，定理 3.1(b)（其中 $p = 3$）再次表明，$E_{n,q}$ 不可能是近复的。

已涵盖所有可能性，从而完成了定理1.1的证明。 □

References

[1] J. F. Adams，《陈特征标与酉群的结构》，《剑桥哲学学会数学学报》，1961年，第57卷第2期：189–199。[2] G.V. Ambika，B. Subhash，《球面丛上的近复结构》，Topology and its Applications 365，109278，2025。[3] M.F. Atiyah，F. Hirzebruch，《向量丛与齐性空间》，《纯数学研讨会论文集》，第III卷，第7–38页，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1961。[4] A. Borel，J.P. Serre，《李群与 Steenrod 的约化幂》，《美国数学杂志》75(3)，409–448，1953。[5] E. Calabi，B. Eckmann，《一类非代数的紧复流形》，《数学年刊》，494–500，1954。[6] P. Chakraborty，A.S. Thakur，《$S^{2n} \times M$的乘积上不存在几乎复结构》，Topology and its Applications 199，102–110，2016。[7] B. Datta，S. Subramanian，《偶数维球面的乘积上不存在近复结构》，Topology and its Applications 35(1)，39–42，1990。[8] C. Ehresmann，《关于几乎复 ′流形 ′》，载于：《国际数学家大会论文集》，马萨诸塞州剑桥，2（1952）412–419。[9] P. Gauduchon，A. Moroianu 和 U. Semmelmann，《四元数-K ¨ahler 流形与内对称空间上的近复结构》，《数学发明》184（2011），389–403。[10] T. Heaps，《八维和十维流形上的近复结构》，《拓扑学》9（1970），111–119。[11] P. Hilton，《广义上同调理论与 K理论》，伦敦数学会讲义丛书，第1卷，剑桥大学出版社，伦敦，1971。[12] N. Koblitz，《p进数、p进分析与ζ函数》，《数学研究生教材》第58卷。施普林格出版社，第二版，1984。[13] D. Kotschick，《双曲流形上的近复结构》，《数学杂志》305（2023），第1期，论文编号9。[14] I. G. Macdonald，《对称函数与Hall多项式》，第二版，克拉伦登出版社，牛津，1995。[15] W. S. Massey，《近复结构存在性的障碍》，《美国数学会通报》67（1961）559–564。[16] John W. Milnor 和 James D. Stasheff，《示性类》，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州；东京大学出版社，东京，1974，《数学年刊研究丛书》第76号。[17] N. Steenrod，《纤维丛的拓扑学》，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1951。[18] W.A. Sutherland，《关于近复结构与弱复结构的注记》，《伦敦数学会杂志》40（1965），705–712。[19] Z.Z. Tang，《$S^{2m} \times \mathbb{C}P^2$与 $S^{2m} \times \mathbb{C}P^3$上的近复结构》，《中国科学通报》37（1992），第24期，2025–2028。[20] Z.Z. Tang，《格拉斯曼流形上不存在弱近复结构》，《美国数学会会刊》121（1994），第4期，1267–1270。[21] Z.Z. Tang，《Dold流形上不存在近复结构》，《中国科学：A辑》39（1996），第9期，919–924。[22] E. Thomas，《实向量丛上的复结构》，《美国数学杂志》89（1967），887–908。[23] E. Thomas，《复射影空间上的近复结构》，《美国数学会汇刊》193，123–132，1974。[24] W.T. Wu，《关于球面纤维丛结构的示性类》，《科学工业新知》第1183号，Hermann & Cie，巴黎，1952。

[25] H. Yang，连通的（$n-1$）-流形上的近复结构，Topology Appl.，159（2012），1361–1368。[26] H. Yang，流形上实向量丛稳定复结构的一则注记，Topology Appl.**189**（2015），1–9。[27] H. Yang，近复流形与复射影空间的连通和上的近复结构，Arch. Math. 113（2019），489–496。

School of Mathematics and Statistics, Henan University, Kaifeng 475004, Henan, China电子邮箱：2539872535@qq.comSchool of Mathematics and Statistics, Henan University, Kaifeng 475004, Henan, China电子邮箱：yhj@amss.ac.cn