arXiv:2602.14973v1 [math.RA] 16 Feb 2026

# 交换 $\mathbb{Q}$-代数中满格所生成的半群

克劳斯·赫特林 和 KHADIJA LARABI

Abstract. 有限维交换$\mathbb{Q}$-代数中的满格构成一个交换半群。在代数数域的情形下，某个商半群的顶层部分就是类群。对于可分代数，这个商半群的一些基本结果，尤其是 Jordan-Zassenhaus 定理，早已为人所知。本文也考察不可分代数，研究这类代数中满格构成的交换半群以及相应的商半群。在这种交换但不可分的情形下，由此得到 Jordan-Zassenhaus 定理的某种推广。一个应用涉及正则整数 $n \times n$ 矩阵的$GL_n(\mathbb{Z})$-共轭类。

## Contents

1. 引言 1 2. 有限维 $\mathbb{Q}$-向量空间中的满格 6 3. 有限维交换 $\mathbb{Q}$-代数 8 4. 交换半群 12 5. $\mathbb{Q}$-代数中的满格与序：一些半群 16 6. Jordan-Zassenhaus 定理的推广 23 7. 局部化 28 8. 一个序与较小序之间的正合列 33 9. 除去根基 39 10. 满格的足够高次幂可逆 41 参考文献 47

## 1. Introduction

本文结果的一个动机是以下问题。

日期：2026年2月16日。2020 数学主题分类。16H15, 16H20, 20M14, 11R54,13C20。关键词和短语。交换 $\mathbb{Q}$-代数、满格、序、交换半群、Jordan-Zassenhaus 定理。

**问题 1.1.** 设 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$，并设 $J \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ 为一个约旦标准形矩阵，它对每个特征值都只有一个约旦块，且其特征多项式 $f$ 属于 $\mathbb{Z}[t]$。研究集合$S_{1,\ f}$，其中包含 $M_{n\times n}(\mathbb{Z})$ 中与 $J$ $GL_n(\mathbb{C})$-共轭的矩阵所构成的 $GL_n(\mathbb{Z})$-共轭类，并探究该集合所具有的所有结构。

集合 $S_{1,\ f}$ 并非空集，因为它包含 $GL_n(\mathbb{Z})$-共轭类，即伴随矩阵 $M_f := \begin{pmatrix} & & & -f_0 \\ 1 & & & -f_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -f_{n-1} \end{pmatrix}$（空缺位置填零）的共轭类

多项式 $f = t^n + f_{n-1}t^{n-1} + \ldots + f_1 t + f_0 \in \mathbb{Z}[t]$ 的共轭类。事实上，$M_{n\times n}(\mathbb{Z})$ 中的每个矩阵若与 $J$ $GL_n(\mathbb{C})$-共轭，则都与 $M_f$ $GL_n(\mathbb{Q})$-共轭，但不一定与 $M_f$ $GL_n(\mathbb{Z})$-共轭。

根据 Jordan-Zassenhaus 定理 [Za38]，当 $J$ 为半单时，集合$S_{1,\ f}$ 是有限的，也就是说，当 $f$ 具有单根时，该集合是有限的。否则它是无限的。

这篇论文的一个结果是：即使在 $J$ 不是半单且$S_{1,\ f}$ 为无限的情况下，也能得到一个有限性结论。可以将其视为 Jordan-Zassenhaus 定理在这一情形下的推广。见下文定理 1.3 (a)。

无论如何，集合$S_{1,\ f}$ 是一个交换半群，并且还配备了一个除法映射。我们对这些结构感兴趣。在本引言的末尾，我们将回到$S_{1,\ f}$ 并对此作出解释。

现在我们介绍本文的主要对象。全文中，$A$ 将是一个带单位元 $1_A$的有限维交换 $\mathbb{Q}$-代数。$A$ 的结构并不复杂。它分解为直和 $A = F \oplus R$，其中 $F$ 是代数数域之和，而 $R$是根基，即由所有幂零元构成的理想。$A$可分当且仅当 $A = F$，因此 $R = 0$。定义

$$\mathcal{L}(A) := \{L \subset A \,|\, L \text{ is a } \mathbb{Z}\text{-lattice which generates } A \text{ over } \mathbb{Q}\}.$$

$A$的元素称为满格。$A$中的乘法在 $\mathcal{L}(A)$上诱导出乘法和除法映射。如果 $L_1$ 和 $L_2$ 是两个满格，那么

$$\begin{aligned} L_1 \cdot L_2 &:= \{\sum_{i\in I} a_i b_i \,|\, I \text{ a finite index set}, a_i \in L_1, b_i \in L_2\} \\ \text{and} \quad L_1 : L_2 &:= \{a \in A \,|\, aL_2 \subset L_1\} \end{aligned}$$

它们也是满格。带有此乘法的 $\mathcal{L}(A)$是一个交换半群。 $A$ 中的满格 $\Lambda$ 是一个序，如果

$$1_A \in \Lambda \quad \text{and} \quad \Lambda \cdot \Lambda \subset \Lambda \quad (\text{then } \Lambda \cdot \Lambda = \Lambda).$$

对于每个满格 $L$ ， $A$ 中的

$$\mathcal{O}(L) := L : L$$

是一个序，称为 的序。

尽管 $\mathcal{L}(A)$（太）大了。 $\mathcal{L}(A)$ 上一个自然的等价关系如下，称为 $\varepsilon$-等价，

$$L_1 \sim_\varepsilon L_2 \ \Leftrightarrow_{\text{Def.}} \ \exists\, a \in A^{unit} \text{ with } aL_1 = L_2,$$
$$\text{where} \quad A^{unit} := (\text{the group of units in } A).$$

$\mathcal{L}(A)$ 上的乘法和除法映射可下降到商

$$\mathcal{E}(A) := \mathcal{L}(A)/\sim_\varepsilon,$$

因此，特别地， $\mathcal{E}(A)$ 也是一个交换半群。我们的结果涉及半群 $\mathcal{L}(A)$ 和 $\mathcal{E}(A)$。

为了表述这些结果，我们需要简要介绍任意交换半群 $S$ 的结构。满足 $cc = c$ 的元素 $c \in S$ 称为<款式 id='4'>幂等元</款式>。如果存在一个幂等元 $c$ 和一个满足 $ac = a$ 和 $ab = c$ 的元素 $b \in S$ ，则称元素 $a \in S$ 为<款式 id='7'>可逆</款式>。此时， $c$ 唯一，称为 $e_a$；并且存在唯一的可逆元 $a^{-1} \in S$ ，满足 $aa^{-1} = e_a$、 $a^{-1}e_a = a^{-1}$ 和 $e_{a^{-1}} = e_a$ 。于是，对于每个幂等元 $c$ ，集合

$$G(c) := \{a \in S \mid a \text{ invertible with } e_a = c\}$$

是一个以 $c$ 为单位元的群。由所有可逆元构成的 $S$ 的子集 $\bigcup_c$ <款式 id='3'>幂等元</款式>$G(c)$ 是 $S$ 的子半群。 $S$ 上一个自然的等价关系如下，即 $w$-等价，

$$a \sim_w b \ \Leftrightarrow_{\text{Def.}} \ a = b \quad \text{or}$$
$$\exists\, x_1, x_2 \in S \text{ with } ax_1 = b, bx_2 = a.$$

那么， $W(S) := S/\sim_w$ 是一个商半群，而对于一个幂等元$c \in S$ $G(c) = [c]_w$。

**引理 1.2.** *(a)* $\mathcal{L}(A)$ 中的幂等元就是各个序。 $\mathcal{E}(A)$ 中的幂等元是这些序的 $\varepsilon$-类。

*(b)* 当且仅当 $[L]_\varepsilon$ 在 $\mathcal{E}(A)$中可逆时， $L$ 在 $\mathcal{L}(A)$ 中可逆。于是 $e_L = \mathcal{O}(L)$ 和 $e_{[L]_\varepsilon} = [\mathcal{O}(L)]_\varepsilon$。

*(c)* $W(\mathcal{L}(A)) = W(\mathcal{E}(A))$。此外， $\mathcal{L}(A)$ 上的除法映射可下降为 $W(\mathcal{L}(A))$ 上的除法映射。

以下定理汇集了这篇论文的五项主要结果。定理之后我们将对这些结果加以评论。

**定理 1.3**。*(a)*（定理 *6.3*）对于每个序 $\Lambda$ 集合

$$\{[L]_\varepsilon \mid L \in \mathcal{L}(A), \mathcal{O}(L) = \Lambda\} \subset \mathcal{E}(A)$$

是有限的。

*(b)*（定理 *5.8 (b)*）对于每个序 $\Lambda$ 集合 $\{[L]_\varepsilon \mid L \in \mathcal{L}(A)\ \mathcal{O}(L) = \Lambda\}$ 可分解为有限多个 $w$-类，这些类的大小全部相同（根据 *(a)* 为有限大小）。其中一个是群 $G([\Lambda]_\varepsilon)$。

*(c)*（定理 *8.2* 的一部分）设 $\Lambda_1$ 和 $\Lambda_2$ 为满足 $\Lambda_2 \subset \Lambda_1$的序。存在自然的满射群同态 $G(\Lambda_2) \to G(\Lambda_1), L \mapsto \Lambda_1 L$，以及 $G([\Lambda_2]_\varepsilon) \to G([\Lambda_1]_\varepsilon)$，$[L]_\varepsilon \mapsto [\Lambda_1 L]_\varepsilon$。

*(d)*（定理 *9.2*）关于分裂 $A = F \oplus R$ 的投影 $A \to F$ 诱导出半群的满射同态 $\mathcal{L}(A) \to \mathcal{L}(F)$ 和$\mathcal{E}(A) \to \mathcal{E}(F)$。对于每个序 $\Lambda$，它们限制为满射群同态 $G(\Lambda) \to G(\mathrm{pr}_F \Lambda)$，并限制为一个同构

$$G([\Lambda]_\varepsilon) \to G([\mathrm{pr}_F \Lambda]_\varepsilon)$$

的有限群。

*(e)*（定理 *10.1*）设维数 $A \geq 2$。对于 $A$中的每个满格 $L$，满足 $k \geq$ 维数 $A - 1$ 的每个幂 $L^k$ 都是可逆的。

这些结果的特殊情形早已为人所知，主要在 20 世纪 60 年代由 Dade、Taussky 和 Zassenhaus 在论文 [DTZ62] 中证明，Faddeev 在数篇论文 [Fa67][Fa 68] 中证明，Neukirch 则在著作 [Ne99]中证明。

对于 $A$ 可分的情形，部分 (a) 可由 Jordan-Zassenhaus 定理[Za38] 推出。因此，它可以视为 Jordan-Zassenhaus 定理的推广。对于根基为 $R \neq 0$ 且 $R^2 = 0$ 的 $A$，该结论已在 [Fa67]中证明。部分 (b) 是新的。对于代数数域 $A$，部分 (c)（以及定理 8.2 的全部内容）已在 [Ne99]中证明。除群同态 $G([\Lambda]_\varepsilon) \to G([\mathrm{pr}_F \Lambda]_\varepsilon)$ 的单射性已在 [Fa68]中证明外，部分 (d) 是新的。对于代数数域 $A$，部分 (e) 是 [DTZ62]的主要结果。

定理 1.3 的五个部分分别在第 5 节（末尾）、第 6 节、第 8 节、第 9 节和第 10 节中证明。第 2、3、4、5 和 7 节介绍背景材料。第 2 节和第 3 节内容相当基础。第 4 节和第 5 节（定理 5.8 除外）是对 [DTZ62] 的浓缩（但其中的假设限制更多）；第 7 节的前半部分取自 [Fa65]。

[DTZ62] 和 [Ne99] 只考虑一个代数数域 $A$，并研究其中各个序的素理想局部化。在第 7 节中，我们沿用 [Fa65] 的做法，引入另一种适用于

任意 $A$ 的局部化族。它用于第 8、9 和 10 节中 (c)、(d) 和 (e) 部分的证明。

定理 1.3 中的五个主要结果由两个更具技术性的定理 7.6 和 10.2 支持。

值得进一步研究的两个问题是：（1）$\mathcal{L}(A)$ 和 $\mathcal{E}(A)$ 中的除法映射；（2）半群 $\mathcal{L}(A)$ 和 $\mathcal{E}(A)$ 中不可逆元的性质。关于（2），我们目前只有定理 1.3（e）。

最后，我们回到集合 $S_{1,\ f}$，其中 $f \in \mathbb{Z}[t]$ 是某个次数 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ 的酉元。考虑

$$A_f := \frac{\mathbb{Q}[t]}{(f)_{\mathbb{Q}[t]}} \supset \Lambda_f := \frac{\mathbb{Z}[t]}{(f)_{\mathbb{Z}[t]}}.$$

$A_f$ 是一个带单位元 $1_A$ 的 $n$ 维交换 $\mathbb{Q}$-代数，$\Lambda_f$ 是 $A_f$中的一个序。定义集合

$$S_{2,f} := \{[L]_\varepsilon \,|\, L \in \mathcal{L}(A), \mathcal{O}(L) \supset \Lambda_f\}.$$

它是 $\mathcal{E}(A)$ 的一个子半群，而且 $\mathcal{E}(A_f)$ 上的除法映射也限制在其上。下面这个古老的观察虽然简单，却至关重要。

**引理 1.4.** [LMD33] 集合 $S_{1,f}$ 与 $S_{2,f}$ 之间存在自然的一一对应。

从 $S_{2,f}$ 中的一个 $\varepsilon$-类到 $S_{1,f}$ 中的一个共轭类：选取 $S_{2,f}$ 中 $\varepsilon$-类里的 $L$。选取一个 $\mathbb{Z}$-基 $(b_1, ..., b_n)$ 作为 $L$ 的基。于是

$$(\bar{t}b_1, ..., \bar{t}b_n) = (b_1, ..., b_n) \cdot B \quad \text{for some matrix} \quad B \in M_{n\times n}(\mathbb{Z}).$$

$B$ 的 $GL_n(\mathbb{Z})$-共轭类属于 $S_{1,f}$。

因此，$S_{1,f}$ 也是一个带有除法映射的交换半群。我们没有这些结构在 $S_{1,f}$ 上的直接应用，不过我们觉得它们很有意思。

这篇论文没有包含任何例子。不过，另有一篇更长的论文 [HL26] 与之配套，其中包含大量例子：所有 $n = 2$ 的情形、许多 $n = 3$ 的情形，以及一些任意 $n$ 的情形。

我们以一些记号结束引言。

**记号 1.5.**（a）在全文中，$A$是一个有限维交换 $\mathbb{Q}$代数，带有单位元 $1_A$。

（b）子集 $B \subset A$ 的零化子 Ann($B$) 是 $\mathbb{Q}$向量空间 Ann($B$):
$= \{a \in A \,|\, ab = 0 \text{ 对 } b \in B\}$.

（c） $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$, $\mathbb{P}$： $\mathbb{N}$}中的素数，
$p \in \mathbb{P}$下有 $p$ 个元素的域。

（d）对于带有单位元 $1_R$ 的交换环 $R$，其单位元群称为 $R^{unit}$:
$= \{a \in R \,|\, \exists\, b \in R$，其中 $ab = 1_R\}$。

## 2. Full lattices in finite dimensional $\mathbb{Q}$-vector spaces

本节首先给出一个定义，随后介绍几个基础引理，它们将在后文中派上用场。

**定义 2.1**。设 $V$ 是有限维的 $\mathbb{Q}$-向量空间。

(a) $V$ 中的格 是一个有限生成的 $\mathbb{Z}$-模 $L \subset V$。$V$ 中的满格 是 $V$ 中的一个格，它在 $\mathbb{Q}$上生成 $V$。$V$ 中所有满格的集合称为 $\mathcal{L}(V)$。

(b) $V$的对偶空间记作 $V^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, \mathbb{Q})$。对于每个子集 $M \subset V$，定义 $M^{*\mathbb{Z}} := \{C \in V^* \mid C(m) \in \mathbb{Z}$对所有 $m \in M\} \subset V^*$成立。它是 $V^*$ 作为加法群的一个子群。

下面的引理汇集了一些显然的或众所周知的事实。

**引理 2.2**。设 $V$ 是一个有限维 $\mathbb{Q}$-向量空间。

*(a)* $L$ 在 $V$ 中是一个格，且不含挠元。因此，它有一个 $\mathbb{Z}$-基和一个秩 秩 $L \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，后者等于 $L$ 的 $\mathbb{Z}$-基中元素的个数。$L$ 的秩也等于由 $L$ 生成的 $\mathbb{Q} \cdot L \subset V$ 这个 $\mathbb{Q}$-子空间的维数。当且仅当 $\mathbb{Q} \cdot L = V$ 时，格 $L$ 是满格。

*(b)* $(V^*)^* = V$。若 $L$ 是 $V$ 中的一个格，则 $(L^{*\mathbb{Z}})^{*\mathbb{Z}} = L$。此外，当且仅当 $L$ 是 $V$ 中的满格时，$L^{*\mathbb{Z}}$ 才是 $V^*$ 中的满格。

*(c)* 设 $L_1$ 和 $L_2$ 是 $V$ 中的满格。那么 $L_1 + L_2$ 和 $L_1 \cap L_2$ 也都是 $V$ 中的满格。存在 $k_1$ 和 $k_2 \in \mathbb{N}$，使得

$$k_1 L_1 \subset L_2 \subset k_2^{-1} L_1.$$

*(d)* 设 $L_1$ 是 $V$与 $N \in \mathbb{N}$中的满格。集合 $\{L \in \mathcal{L}(V) \mid L \supset L_1, [L : L_1] \leq N\}$与 $\{L \in \mathcal{L}(V) \mid L \subset L_1, [L_1 : L] \leq N\}$是有限的。特别地，若 $L_2$ 是满足 $L_2 \supset L_1$的满格，则集合 $\{L \in \mathcal{L}(V) \mid L_1 \subset L \subset L_2\}$ 是有限的。

*(e)* 设 $L \subset V$ 是一个非格的 $\mathbb{Z}$-模。则 $0 \in V$ 是 $L$的聚点。

下面的引理将反复用到。

**引理 2.3.** 设 $V_1$、$V_2$ 与 $V_3$ 为有限维 $\mathbb{Q}$-向量空间。设 $L_1 \in \mathcal{L}(V_1)$ 与 $L_3 \in \mathcal{L}(V_3)$，并设 $\beta : V_1 \times V_2 \to V_3$ 是一个 $\mathbb{Q}$-双线性映射，使得对某些元素 $a_1, \ldots, a_l \in V_1$

$$\bigcap_{i=1}^{l} \ker\Big(\beta(a_i, .) : V_2 \to V_3\Big) = \{0\}. \tag{2.1}$$

*(a)* 那么集合

$$L_3 : L_1 \;:=\; \{b \in V_2 \mid \beta(., b)(L_1) \subset L_3\}$$

是 $V_2$ 中的满格，因此 $L_3 : L_1 \in \mathcal{L}(V_2)$。

*(b)* 对偶双线性映射 $\beta^*$ 定义如下

$$\begin{aligned} \beta^* : V_1 \times V_3^* &\to V_2^*, \\ \beta^*(a, C)(b) &:= C(\beta(a, b)) \quad \text{for } a \in V_1, C \in V_3^*, b \in V_2. \end{aligned}$$

*Then*

$$\begin{aligned} (L_3 : L_1)^{*\mathbb{Z}} &= \beta^*(L_1, L_3^{*\mathbb{Z}}), \\ \text{equivalently: } L_3 : L_1 &= (\beta^*(L_1, L_3^{*\mathbb{Z}}))^{*\mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

**证明：** (a) 集合 $L_3 : L_1$ 是一个 $\mathbb{Z}$-模。假设它不是 $V$中的格。那么根据引理 2.2 (e)，存在一个点列 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其中各点属于 $L_3 : L_1 - \{0\}$，且 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$。

对于 (2.1) 中的每个 $a_i$，点列 $(\beta(a_i, b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ 由 $L_3$ 中的点组成，并收敛于 0。因此存在一个 $n_i \in \mathbb{N}$，使得 $\beta(a_i, b_n) = 0$ 对于 $n \geq n_i$成立。于是，根据假设 (2.1)，当 $n \geq$ 时，$b_n = 0$ $\max_i n_i$，这与假设矛盾。因此 $L_3 : L_1$ 是一个格。

它是 $V_2$ 中的满格，因为对于任意 $b \in V_2$，都存在一个数 $r \in \mathbb{N}$，使得$\beta(., rb)(L_1) \subset L_3$。

(b) 由于以下原因，我们有 $(\beta^*(L_1, L_3^{*\mathbb{Z}}))^{*\mathbb{Z}} = L_3 : L_1$。

$$\begin{aligned} & b \in (\beta^*(L_1, L_3^{*\mathbb{Z}}))^{*\mathbb{Z}} \subset (V_2^*)^* = V_2 \\ \iff \quad & C(\beta(a, b)) = \beta^*(a, C)(b) \in \mathbb{Z} \quad \text{for all } a \in L_1, C \in L_3^{*\mathbb{Z}} \\ \iff \quad & \beta(a, b) \in L_3 \quad \text{for all } a \in L_1 \\ \iff \quad & b \in L_3 : L_1. \end{aligned}$$

$\beta^*(L_1, L_3^{*\mathbb{Z}})$ 是 $V_2^*$ 中的一个格，因为 $L_1$ 和 $L_3^{*\mathbb{Z}}$ 是 $V_1$ 和 $V_3^*$ 中的格。由于 $(\beta^*(L_1, L_3^{*\mathbb{Z}}))^{*\mathbb{Z}} = L_3 : L_1$ 是 $V_2$ 中的一个满格，根据引理 2.2 (b)，$\beta^*(L_1, L_3^{*\mathbb{Z}})$ 是 $V_2^*$ 中的一个满格，并且 $\beta^*(L_1, L_3^{*\mathbb{Z}}) = (L_3 : L_1)^{*\mathbb{Z}}$.□

**引理 2.4**。设 $V$ 是一个带有递增滤过的有限维 $\mathbb{Q}$-向量空间

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset ... \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

对于某个 $n \in \mathbb{N}$。记作

$$V_{[j]} := V_j / V_{j-1} \quad \text{for } j \in \{1, ..., n\}$$

并记对于 $L \in \mathcal{L}(V)$

$$L_{[j]} := (L \cap V_j + V_{j-1})/V_{j-1} \subset V_{[j]} \quad \text{for } j \in \{1, ..., n\}.$$

*(a)* 那么 $L_{[j]} \in \mathcal{L}(V_{[j]})$。

*(b)* 如果 $K$ 和 $L \in \mathcal{L}(V)$ 满足 $K \supset L$，那么

$$K_{[j]} \supset L_{[j]} \quad \text{and} \quad [K:L] = \prod_{j=1}^{n} [K_{[j]} : L_{[j]}]. \tag{2.2}$$

*(c)* 固定 $L \in \mathcal{L}(V)$。对于任意 $j \in \{1, ..., n\}$ 有限集 $\{K_{j,1}, ..., K_{j,l_j}\} \subset \mathcal{L}(V_{[j]})$，考虑该集合

$$\{K \in \mathcal{L}(V) \,|\, K \supset L, K_{[j]} \in \{K_{j,1}, ..., K_{j,l_j}\} \text{ for } j \in \{1, ..., n\}\}$$

是有限的。

**证明：** (a) 显然。

(b) 我们只讨论 $n = 2$ 的情形。一般情形可类似地分别通过归纳得出。对于 $j \in \{1;\ 2\}$ 记 $m_j :=$ 维数 $V_{[j]}$。对于 $j \in \{1;\ 2\}$ 分别选取 $\mathbb{Z}$-基 $\mathcal{B}_{K,\,j} \in M_{1\times m_j}(K_{[j]})$ 和 $\mathcal{B}_{L,\,j} \in M_{1\times m_j}(L_{[j]})$，并将 $\mathcal{B}_{L,\,j}$ 的元素表示为 $\mathcal{B}_{K,\,j}$ 的元素的线性组合，所得矩阵记为 $M_j \in M_{m_j\times m_j}(\mathbb{Z})$，即 $\mathcal{B}_{L,\,j} = \mathcal{B}_{K,\,j} \cdot M_j$。那么 $[K_{[j]} : L_{[j]}] = |$行列式 $M_j|$。

任意将 $\mathcal{B}_{K,2}$ 和 $\mathcal{B}_{L,2}$ 提升为 $\widetilde{K}$ $\widetilde{\phantom{x}}$（分别为 $L$）中的元素，并将相应的元组记为 $\mathcal{B}_{K,2}$ 和$\mathcal{B}_{L,2}$。那么$\widetilde{\phantom{x}}$ $\widetilde{\phantom{x}}$($\mathcal{B}_{K,2},\mathcal{B}_{K,1}$) 是 $K$ 的一个 $\mathbb{Z}$-基，而 $(\mathcal{B}_{L,2}, \mathcal{B}_{L,1})$ 是 $L$ 的一个 $\mathbb{Z}$-基，并且将 $L$ 的这个 $\mathbb{Z}$- 基的元素表示为 $K$ 的这个 $\mathbb{Z}$- 基的线性组合的矩阵为

$$\begin{pmatrix} M_2 & 0 \\ * & M_1 \end{pmatrix} \in M_{(m_1+m_2)\times(m_1+m_2)}(\mathbb{Z}).$$

其行列式的绝对值为

$$[K:L] = |\det M_2| \cdot |\det M_1| = [K_{[2]} : L_{[2]}] \cdot [K_{[1]} : L_{[1]}].$$

(c) 满格 $K \supset L$ 满足 $K_{[j]} \in \{K_{j,1}, ..., K_{j,l_j}\}$，这是由 (b) 部分得出的

$$[K:L] \leq \prod_{j=1}^{n} \max_i [K_{j,i} : L_{[j]}],$$

因此，数值 $[K:\ L]$ 有上界。由引理 2.2 (d) 可得，这类格 $K$ 的集合是有限的。□

## 3. Finite dimensional commutative $\mathbb{Q}$-algebras

在整篇论文中，$A$ 是一个带有单位元 $1_A$ 的有限维交换$\mathbb{Q}$-代数。$A$ 的结构理论并不困难。它部分由 Wedderburn-Malcev 定理 [CR62, (72.19) 定理]所涵盖。但我们需要更仔细地考察其结构。这将在定理 3.1 和引理 3.3 中完成。

**定理 3.1**。设 $A$ 是一个带有单位元 $1_A$的有限维交换 $\mathbb{Q}$-代数。那么 $A$ 有唯一的向量空间分解

$$A = \bigoplus_{j=1}^{k} A^{(j)} \quad \text{for some } k \in \mathbb{N} \tag{3.1}$$

具有以下性质。

***(i)*** $A^{(1)}, ..., A^{(k)}$ 是 $\mathbb{Q}$-代数，且对 $i \neq j$有 $A^{(i)} \cdot A^{(j)} = \{0\}$。

***(ii)*** $1_A = \sum_{j=1}^{k} 1_{A^{(j)}}$ 可分解为代数$A^{(j)}$的单位元 $1_{A^{(j)}}$。

***(iii)*** $A^{(j)}$ 可唯一分解为

$$A^{(j)} = F^{(j)} \oplus N^{(j)} \tag{3.2}$$

其中 $F^{(j)}$ 是一个 $\mathbb{Q}$-子代数和一个代数数域，且 $N^{(j)}$是 $A^{(j)}$的唯一极大理想。$A^{(j)}$ 是一个 $F^{(j)}$ -代数。$N^{(j)}$由幂零元构成，并且是 $A^{(j)}$的根基。

**证明：** 对每个 $a \in A$，令 $\mu_a : \ A \to A, \quad b \mapsto ab$表示乘以 $a$。$\mathbb{Q}$-向量空间 $A$ 关于 $\mathbb{Q}$-线性自同态 $\mu_a$分解为主空间。由于所有 $\mu_a$ 彼此交换，$A$ 关于所有 $\mu_a$具有唯一的同时主空间分解 $A = \bigoplus_{j=1}^{k} A^{(j)}$。事实上，只需考虑 $A$ 的一个 $\mathbb{Q}$-基 $a_1$，..... $a_{\dim A}$，以及 $\mu_{a_1}$，..... $\mu_{a_{\dim A}}$的主空间的交。

对每个 $a \in A$，每个 $A^{(j)}$ 在 $\mu_a$ 作用下不变，因此 $A^{(j)}$ 是一个 $\mathbb{Q}$-代数，且

$$A^{(i)} \cdot A^{(j)} \subset A^{(i)} \cap A^{(j)} = \{0\} \quad \text{for } i \neq j.$$

将 $1_A$ 分解为它在 $A^{(1)}$，..... $A^{(k)}$，$1_A = \sum_{j=1}^{k} 1_{A^{(j)}}$中的和项。对 $a \in A^{(j)}$，我们有 $a = 1_A \cdot a = 1_{A^{(j)}} \cdot a$，因此 $1_{A^{(j)}}$是 $A^{(j)}$中的单位元。

对每个 $a \in A$，Jordan-Chevalley 定理给出唯一分解 $\mu_a = (\mu_a)_s + (\mu_a)_n$，其中$(\mu_a)_s$与$(\mu_a)_n$ 是 $\mathbb{Q}[\mu_a]$中可交换的自同态，$(\mu_a)_s$ 是半单的，而$(\mu_a)_n$ 是幂零的 [Bo90, VII §5 9。定理 1]。于是 $a = a_s + a_n$，其中 $a_s, a_n \in \mathbb{Q}[a] \subset A$,$\mu_{a_s} = (\mu_a)_s$, $\mu_{a_n} = (\mu_a)_n$。

$a = a_s + a_n$ 对 $a \in A^{(j)}$ 的分解给出分解$A^{(j)} = F^{(j)} \oplus N^{(j)}$，其中 $a_s$是半单的，$a_n$是幂零的。$F^{(j)}$包含元素 $a$，使得限制$\mu_a|_{F^{(j)}}$ 的特征多项式是不可约的。否则 $F^{(j)}$与 $A^{(j)}$将进一步分解。因此

$$F^{(j)} = \mathbb{Q}[a] \cong \mathbb{Q}[t]/(\text{characteristic polynomial of } \mu_a|_{F_j})$$

是一个代数数域。 □

**注记 3.2.** (i) 事实上，若尔当-谢瓦莱分解在任意完全域 [Bo90, VII §5 9. 定理 1]上都成立。因此，在定理 3.1 中，我们可以将域 $\mathbb{Q}$ 替换为任意完全域 $k$，尤其是有限域。我们将在定理 7.6 和定理 10.3 的证明中用到这一点。

不过，子空间 $F^{(j)}$ 通常并不是代数数域。它们是 $k$ 的有限扩张域。

(ii) 和

$$F := \bigoplus_{j=1}^{k} F^{(k)} \tag{3.3}$$

是 $A$ 的可分子代数。$A$ 中的极大理想是子空间 $N^{(j)} \oplus \bigoplus_{i\neq j} A^{(i)}$，对应于 $j \in \{1, ..., k\}$。它们的交是根基

$$R = \bigoplus_{j=1}^{k} N^{(j)}. \tag{3.4}$$

它是 $A$ 的所有幂零元构成的集合。代数 $A$ 自然分解为直和 $A = F \oplus R$。诱导投影

$$\mathrm{pr}_F : A \to F \tag{3.5}$$

与加法、乘法和除法相容。我们将在第 9 节再谈这个问题。

(iii) 我们有

$$\begin{aligned} F^{unit} &= \prod_{j=1}^{k} (F^{(j)})^{unit} = \prod_{j=1}^{k} (F^{(j)} - \{0\}), \\ A^{unit} &= F^{unit} \times R, \\ \mathrm{pr}_F(A^{unit}) &= F^{unit} \quad \text{and} \quad \mathrm{pr}_F^{-1}(F^{unit}) = A^{unit}. \end{aligned}$$

$R$ 的幂及其各次幂的零化子在 $A$上诱导出两个彼此关系良好的滤过，见引理 3.3。

**引理 3.3.** 考虑定理 *3.1* 中的情形。

*(a)* 对于 $j \in \{1, ..., k\}$，记 $n_j$ 为考虑由 $R^j$ 的幂给 $A$ 带来的递减滤过，

$$A = R^0 \supset R^1 \supset ... \supset R^{n_{max}} \supset R^{n_{max}+1} = \{0\}$$

（此处 $j$ *in* $R^j$ 同时用作上标和指数）。它称为根基滤过。它满足

$$R^{l_1} \cdot R^{l_2} = R^{l_1+l_2} \quad \text{for } l_1, l_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \tag{3.6}$$

将此滤过的商记为

$$R^{[l]} := R^l/R^{l+1} \quad \text{for } l \in \{0, 1, ..., n_{max}\}.$$

$A$ 上的乘法在以下商的有序对上诱导出乘法

$$R^{[l_1]} \cdot R^{[l_2]} = R^{[l_1+l_2]} \quad \text{for } l_1, l_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \tag{3.7}$$

***(a)*** 中的所有结构都与分解 $A = \bigoplus_{j=1}^{k} A^{(j)}$ 相容，尤其是

$$\begin{aligned} R^l &= \bigoplus_{j=1}^{k} R^l \cap A^{(j)} \quad \text{with} \quad R^l \cap A^{(j)} = (N^{(j)})^l, \\ R^{[l]} &\cong \bigoplus_{j=1}^{k} (N^{(j)})^l/(N^{(j)})^{l+1} \quad \text{canonically.} \end{aligned}$$

***(b)*** 考虑由湮灭子$\mathrm{Ann}(R^l)$给出的 $A$ 的递增滤过，

$$\begin{gathered} S_l := \mathrm{Ann}(R^l) \quad \text{for } l \in \{0, 1, ..., n_{max}+1\}, \\ \{0\} = S_0 \subset S_1 \subset ... \subset S_{n_{max}} \subset S_{n_{max}+1} = A. \end{gathered}$$

它称为底层滤过，因为 $S_1 = \mathrm{Ann}(R)$ 是 $A$的底层。它满足

$$\begin{aligned} R^{l_1} \cdot S_{l_2} &\subset S_{l_2-l_1} \quad \text{for } l_1 < l_2, \\ R^{l_1} \cdot S_{l_2} &= \{0\} \quad \text{for } l_1 \geq l_2. \end{aligned} \tag{3.8}$$

将底层滤过的商记为

$$S_{[l]} := S_l/S_{l-1} \quad \text{for } l \in \{1, ..., n_{max}+1\}.$$

$A$ 上的乘法在满足以下条件的商的有序对上诱导出乘法

$$\begin{aligned} R^{[l_1]} \cdot S_{[l_2]} &\subset S_{[l_2-l_1]} \quad \text{for } l_1 < l_2, \\ R^{[l_1]} \cdot S_{[l_2]} &= \{0\} \quad \text{for } l_1 \geq l_2. \end{aligned} \tag{3.9}$$

考虑 $l_1$、$l_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，其中 $l_1 < l_2$，并考虑 $R^{[l_1]}$的一组 $\mathbb{Q}$-基 $a_1, ..., a_{\dim R^{[l_1]}}$。这些同态

$$\mu_{a_i}^{[l_2]} : S_{[l_2]} \to S_{[l_2-l_1]}, b \mapsto a_i \cdot b$$

满足

$$\Big( \bigcap_{i=1}^{\dim R^{[l_1]}} \ker \mu_{a_i}^{[l_2]} \Big) = \{0\} \subset S_{[l_2]}. \tag{3.10}$$

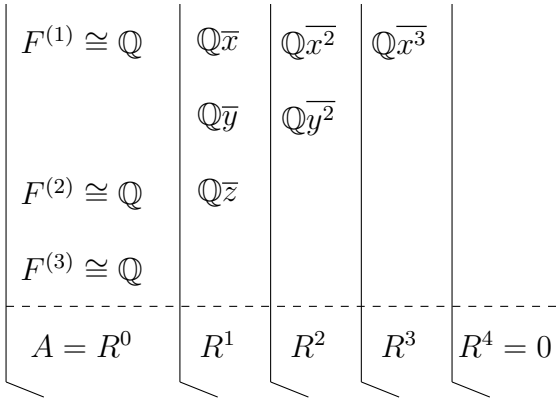


FIGURE 3.1. 例 3.4 中的根基滤过

*(b)* 部分中的所有结构均与分解 $A = \bigoplus_{j=1}^{k} A^{(j)}$ 相容。

**证明：** (a) (3.6) 中的等式由 $R$的幂$R^l$ 的定义得出。由此可得 (3.7)。其余部分都很直接。

(b) (3.8) 由 $S_l$的定义得出。由此可得 (3.9)。关键在于证明 (3.10)。

~假设 $b \in S_{[l_2]}$ 满足条件：对每个 $i$，都有 $a_i \cdot b = 0 \in S_{[l_2-l_1]}$。取 $b \in S_{l_2}$使得 $[\widetilde{b}]_{[l_2]} = b$，并取 $\widetilde{a_i} \in R^{l_1}$ 使得 $[\widetilde{a_i}]^{[l_1]} = a_i$。于是，对每个 $i$，都有 $\widetilde{a_i} \cdot \widetilde{b} \in_{\sim} S_{l_2-l_1-1}$。因此，$R^{l_1} \cdot b \subset S_{l_2-l_1-1}$，所以

$$R^{l_2-1} \cdot \widetilde{b} = R^{l_2-l_1-1} \cdot R^{l_1} \cdot \widetilde{b} \subset R^{l_2-l_1-1} \cdot S_{l_2-l_1-1} = \{0\}.$$

~这意味着 $b \in S_{l_2-1}$，因此 $b = 0$。这证明了 (3.10)。 □

**例 3.4**。考虑 $A = A^{(1)} \oplus A^{(2)} \oplus A^{(3)}$ 其中

$$\begin{aligned} A^{(1)} &\cong \mathbb{Q}[x,y]/(xy, x^4, y^3), \\ A^{(2)} &\cong \mathbb{Q}[z]/(z^2), \\ A^{(3)} &\cong \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

设 $x$,- $\overline{x^2}$, $\overline{x^3}$,- $\overline{y}$, $\overline{y^2}$, $z$ 分别为相应单项式在$A^{(1)}$ 中的等价类。图 3.1 和图 3.2 展示了根基滤过和底层滤过。这里 $n_1 = 3$、 $n_2 = 1$、 $n_3 = 0$、 $n_{max} = 3$。

## 4. 交换半群

本节回顾交换半群的基本性质。我们主要遵循 [DTZ62, 第 1 章。2], 但将相关概念和结果浓缩为两个定义和两个定理。它们将在第5节及之后所有各节中应用。

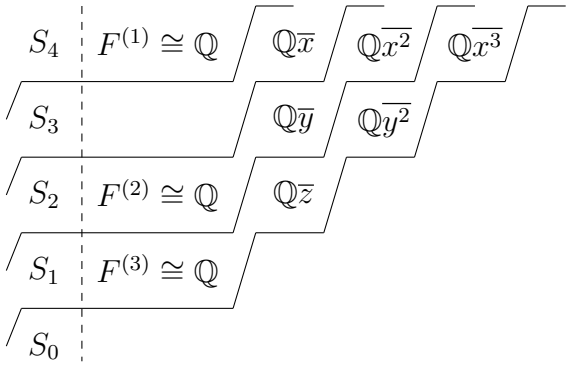


FIGURE 3.2. 例 3.4 中的底层滤过

**定义 4.1**。 (a) 交换半群是一个集合 $S$，配有一个乘法映射 $\cdot : S \times S \to S$，该映射满足交换律（$ab = ba$）和结合律（$a(bc) = (ab)c$）。该半群称为 $S$，因此省略乘法映射。

(b) 设 $S$ 是一个交换半群。若存在元素 $b \in S$ 和元素 $c \in S$，使得 $ab = c$ 且 $ac = a$，则称元素 $a \in S$ 为可逆 元素。

(c) 设 $S$ 是一个交换半群。若 $cc = c$，则称元素 $c \in S$ 为幂等 元素。

**定理 4.2**。 [DTZ62, 1.2.3, 1.2.10]
设 $S$ 是一个交换半群。

*(a)* 设 $a \in S$ 可逆。那么存在唯一的元素 $c \in S$，满足$(ac = a, \exists\, b \in S$ 满足 $ab = c)$。它称为 $e_a$。它是幂等元。存在唯一的元素 $b \in S$，满足$(ab = e_a, be_a = b)$。它称为 $a^{-1}$。它可逆，并且 $e_{a^{-1}} = e_a$。

*(b)* 幂等元 $c \in S$ 可逆，其中 $e_c = c$ 且 $c^{-1} = c$。

*(c)* 设 $c \in S$ 是幂等元。集合

$$G(c) := \{a \in S \,|\, a \text{ invertible with } e_a = c\} \tag{4.1}$$

是一个群。它是 $S$ 的一个极大子群。$S$ 的任意极大子群都等于 $G(\widetilde{c})$，其中 $\widetilde{c} \in S$ 是某个幂等元。

*(d)* 若 $a$、$b \in S$ 可逆，则 $ab$ 可逆，其中 $e_{ab} = e_a e_b$。

*(e)* 假设 $e_1$、$e_2 \in S$ 都是幂等元。那么 $e_1e_2$ 是幂等元。集合 $G(e_1)e_2$、$G(e_2)e_1$ 和 $G(e_1)G(e_2)$ 都是 $G(e_1e_2)$ 的子群。映射

$$G(e_1) \to G(e_1)e_2,\ a \mapsto ae_2, \quad \text{and} \quad G(e_2) \to G(e_2)e_1,\ b \mapsto be_1, \tag{4.2}$$

是满射群同态。

*(f)* $\bigcup_{c\text{ 幂等元}} G(c) \subset S$ 中可逆元的并集是不相交并。它是 $S$ 的子半群。当且仅当 $S$ 中的任意元素都是可逆元时，它等于 $S$ 。

**证明：** (a) 假设 $b_1,\ c_1,\ b_2,\ c_2 \in S$ 且 $ac_1 = a,\ ab_1 = c_1,\ ac_2 = a,\ ab_2 = c_2$。那么

$$c_1 = ab_1 = c_2ab_1 = c_2c_1 = b_2ac_1 = b_2a = c_2,$$
$$c_1c_1 = c_1ab_1 = ab_1 = c_1.$$

这说明 $e_a$ 是唯一的，且它是幂等元。现在假设$b_3,\ b_4 \in S$ 且 $ab_3 = e_a,\ b_3e_a = b_3,\ ab_4 = e_a,\ b_4e_a = b_4$。那么

$$b_3 = b_3e_a = b_3ab_4 = e_ab_4 = b_4.$$

这说明 $a^{-1}$是唯一的。其存在性由下式得出

$$a(b_1c_1) = (ab_1)c_1 = c_1c_1 = c_1 \text{ and } (b_1c_1)c_1 = b_1(c_1c_1) = b_1c_1.$$

其可逆性及 $e_{a^{-1}} = e_a$ 由 $aa^{-1} = e_a,\ a^{-1}e_a = a^{-1}$得出。

(b) 这由 $cc = c$得出。

(c) 根据 (b)，$c \in G(c)$。任意 $a \in G(c)$ 在 $G(c)$ 中都有逆元 $a^{-1}$。对于 $a, b \in G(c)$ $(ab)a^{-1}b^{-1} = c$ 且 $(ab)c = ab$，因此 $ab \in G(c)$ 以及 $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ 也成立。所以 $G(c)$ 是一个群。如果 $G \subset S$ 是一个群，那么它的单位元 $e_G$ 是幂等元，且任意元素 $a \in G$ 都是可逆的，且 $e_a = e_G$，因此 $G \subset G(e_G)$。

(d) $(ab)a^{-1}b^{-1} = e_ae_b,\ (e_ae_b)(ab) = ab$。(e) 这可由

(b)–(d) 各部分直接得出。

(f) 如果 $a \in G(c_1) \cap G(c_2)$，其幂等元为 $c_1,\ c_2$，那么 $c_1 = e_a = c_2$。其余部分可由 (d) 和 (e) 得出。□

**定义 4.3.** (a) 设 $S$ 是一个交换半群。它的单位是一个元素 $e$，满足对所有 $a \in S$都有 $ea = a$ 。显然，如果单位存在，则唯一。含有单位的交换半群称为么半群。

(b) 设 $S$ 是一个交换半群。若两个元素 $a_1$ 和 $a_2 \in S$满足以下条件，则称它们 $w$-等价 （记作： $a_1 \sim_w a_2$）：

$$a_1 = a_2 \quad \text{or} \quad \exists\ x_1, x_2 \in S \text{ with } a_1x_1 = a_2, a_2x_2 = a_1. \tag{4.3}$$

半群 $S$ 上的 $w$-等价关系自然导出一个商半群 $S/\sim_w =:\ W(S)$，如定理 4.4 所示。

**定理 4.4.** [DTZ62, 1.2.12, 1.2.16, 1.2.17]

设 $S$ 是一个交换半群。

*(a)* $\sim_w$ 是一个等价关系，并且与 $S$中的乘法相容，即

$$a_1 \sim_w a_2, b_1 \sim_w b_2 \Rightarrow a_1b_1 \sim_w a_2b_2. \tag{4.4}$$

$a$ 的等价类称为 $[a]_w$。因此商 $S/\sim_w$ 是一个交换半群。这个半群称为 $W(S)$。

***(b)*** 若 $a$ 可逆，则 $[a]_w = G(e_a)$。***(c)*** 设 $a \in S$。以下三个性质等价：***(i)*** $a$ 可逆。***(ii)*** $[a]_w$ 可逆（在 $W(S)$ 中）。***(iii)*** $[a]_w$ 是幂等元（在 $W(S)$ 中）。

$W(S)$ 的子群只有集合 $\{[c]_w\}$，其中 $c \in S$ 是幂等元。

***(d)*** 定理 ***4.2 (e)*** 中讨论过 $S$ 的子半群 $\bigcup_{c\text{ 幂等元}} G(c)$（由可逆元组成）。$W(S)$ 的子半群 $W(\bigcup_{c\text{ 幂等元}} G(c))$ 与 $S$ 的子半群 $\{c \in S \mid c \text{ 是幂等元}\}$ 同构。

**证明：** (a) 根据（4.3），$\sim_w$ 是自反且对称的。为了证明 $\sim_w$ 具有传递性，假设 $a_1 \sim_w a_2$ 且 $a_2 \sim_w a_3$。若 $a_1 = a_2$或 $a_2 = a_3$，则显然 $a_1 \sim_w a_3$。因此假设 $a_1 \neq a_2$ 且 $a_2 \neq a_3$。那么存在 $x_1$，$x_2$，$x_3$，$x_4$，使得 $a_1x_1 = a_2$，$a_2x_2 = a_1$ 且 $a_2x_3 = a_3$，$a_3x_4 = a_2$。于是

$$a_1x_1x_3 = a_3,\ a_3x_4x_2 = a_1, \quad \text{so } a_1 \sim_w a_3.$$

现在假设 $a_1 \sim_w a_2$ 且 $b_1 \sim_w b_2$。若 $a_1 \neq a_2$ 且 $b_1 \neq b_2$，则存在$x_1$，$x_2$，$y_1$，$y_2 \in S$，使得 $a_1x_1 = a_2$，$a_2x_2 = a_1$ 且 $b_1y_1 = b_2$，$b_2y_2 = b_1$。于是

$$a_1b_1x_1y_1 = a_2b_2,\ a_2b_2x_2y_2 = a_1b_1, \quad \text{so } a_1b_1 \sim_w a_2b_2.$$

若 $a_1 = a_2$ 或 $b_1 = b_2$，则 $a_1b_1 \sim_w a_2b_2$ 同理可得。

(b) 设 $a$ 可逆。首先假设 $b \in [a]_w$ 且 $b \neq a$。则$x_1$，$x_2 \in S$以及 $ax_1 = b$，$bx_2 = a$存在。于是

$$e_ab = e_aax_1 = ax_1 = b,\ b(x_2a^{-1}) = aa^{-1} = e_a, \quad \text{so } b \in G(e_a).$$

现在假设 $b \in G(e_a)$。则 $bb^{-1} = e_a$，$e_ab = b$ 并且

$$b(b^{-1}a) = e_aa = a,\ a(a^{-1}b) = e_ab = b, \quad \text{so } b \in [a]_w.$$

(c) (i)⇒(iii)：由 (b)，$[a]_w = [e_a]_w$。由 (a)，$[e_a]_w^2 = [e_a^2]_w = [e_a]_w$。

(iii)⇒(ii)：半群中的幂等元（此处为 $W(S)$）是可逆的，见定理 4.2 (b)。

(ii)⇒(i)：设 $b, c \in S$，其中 $[a]_w[b]_w = [c]_w$ 且 $[c]_w[a]_w = [a]_w$。于是$[ab]_w = [c]_w$ 且 $[ca]_w = [a]_w$。若 $ab \neq c$且 $ca \neq a$，则特别有$x_1$，$y_1 \in S$，其中 $(ab)x_1 = c$ 和 $(ca)y_1 = a$ 存在，因此 $a(bx_1y_1) = cy_1$且 $(cy_1)a = a$。这表明此时 $a$ 可逆，且 $e_a = cy_1$。若 $ab = c$ 或 $ca = a$，则同理可推出 $a$ 可逆（将 $x_1$ 或$y_1$ 替换为空位即可）。

由 (ii)⇒(iii)，带有幂等元 $[c]_w$ 的群 $G([c]_w)$ 仅由$[c]_w$组成。根据定理 4.2 (c)，这些群是$W(S)$中的极大群，因此它们是 $W(S)$ 中唯一的群。

(d) 这由(b)、(c)两部分以及定理 4.2得出。 □

## 5. Full lattices and orders in $\mathbb{Q}$-algebras, some semigroups

在整篇论文中， $A$ 与定理3.1中相同，因此 $A$ 是一个带有单位元 $1_A$的有限维交换 $\mathbb{Q}$-代数。

**定义 5.1.** 一个序 $\Lambda$ 在 $A$ 中是 $A$ 中的一个满格，且

$$1_A \in \Lambda \quad \text{and} \quad \Lambda \cdot \Lambda \subset \Lambda, \tag{5.1}$$

因此它是一个满格，也是带有单位元的 $A$的子环。(5.1)蕴含$\Lambda \cdot \Lambda = \Lambda$。

本节介绍 $A$中序和满格的基本性质。结果表明， $\mathcal{L}(A)$成为一个交换半群，并且存在商半群 $\mathcal{E}(A)$、 $W(\mathcal{L}(A))$和 $W(\mathcal{E}(A))$。我们将应用并比较第 4 节中的概念。

第 6 节将深入探讨该理论，并给出论文的一项主要结果，阐述商半群 $\mathcal{E}(A)$ 的结构。

下述引理的 (c) 部分是 Krull 引理的一个版本，我们取自 [DTZ62, 1.3.2]。

**引理 5.2.** *(a)* 设 $L$、 $L_1$ 和 $L_2$ 是 $A$中的满格。那么

$$\begin{aligned} L_1 \cdot L_2 &:= \{\sum_{i\in I} a_i b_i \,|\, I \text{ a finite index set}, a_i \in L_1, b_i \in L_2\} \text{ and} \\ L_1 : L_2 &:= \{a \in A \,|\, a \cdot L_2 \subset L_1\} \end{aligned}$$

是 $A$中的满格，并且

$$\mathcal{O}(L) := L : L$$

是 $A$中的一个序。它称为 $L$的序。

*(b)* 设 $L_1$、 $L_2$、 $L_3$ 和 $L_4$ 是 $A$ 中的满格。那么

$$\begin{aligned} L_1 L_2 = L_2 L_1, \quad (L_1 L_2) L_3 = L_1 (L_2 L_3), \\ (L_1 : L_2) L_3 \subset (L_1 L_3) : L_2, \quad (L_1 : L_2)(L_3 : L_4) \subset (L_1 L_3) : (L_2 L_4). \end{aligned} \tag{5.2}$$

*(c)* (*Krull* 引理， [DTZ62,1.3.2]) 设 $\Lambda$ 和 $L$ 是 $A$ 中的满格，且 $\Lambda \cdot \Lambda \subset \Lambda$ 和 $\Lambda \cdot L = L$。那么 $1_A \in \Lambda$，因此 $\Lambda$ 是一个序。

**证明：** (a) 由于 $L_1$ 在 $\mathbb{Q}$ 上生成 $A$，它包含 $A$ 中的一个单位 $a \in A^{unit}$（事实上，它包含许多这样的元素）。由于 $L_2$ 在 $A$ 上生成

$\mathbb{Q}$， $a \cdot L_2$ 和 $L_1 \cdot L_2$ 也在 $\mathbb{Q}$ 上生成 $A$。由于 $L_1 \cdot L_2$ 是一个有限生成的 $\mathbb{Z}$- 模，它是 $A$ 中的一个满格。

为了证明 $L_1 : L_2$ 是 $A$ 中的满格，可对

$$(V_1, V_2, V_3, \beta, L_1, L_3)_{\text{in Lemma 2.3}} \sim (A, A, A, \text{multiplication}, L_2, L_1)_{\text{here}}.$$

因此， $\mathcal{O}(L) = L : L$ 也是一个满格。显然，它包含 $1_A$且在乘法下封闭，因此是一个序。

(b) 显然。

(c) 取 $L$的一个 $\mathbb{Z}$-基$(b_1, ..., b_n)$。由于 $L = \Lambda \cdot L$，存在$a_{ij} \in \Lambda$，其中 $i, j \in \{1, ..., n\}$，使得

$$(b_1, ..., b_n) = (b_1, ..., b_n) \cdot (a_{ij}), \quad \text{so} \quad 0 = (b_1, ..., b_n) \cdot (\delta_{ij} - a_{ij}).$$

从右边乘以矩阵$(\delta_{ij} - a_{ij})$的伴随矩阵，得到 $b_k \cdot \det(\delta_{ij} - a_{ij}) = 0$，因此 $A \cdot \det(\delta_{ij} - a_{ij}) = 0$，从而$\det(\delta_{ij} - a_{ij}) = 0$。由于 $\Lambda \cdot \Lambda \subset \Lambda$， $a_{ij}$ 的所有乘积都属于 $\Lambda$，因此 $1_A \in \Lambda$也属于 $\Lambda$。□

关于序的乘积、乘积的序以及商的一些基本观察如下。

**引理 5.3.** *(a)* 若 $\Lambda_1$ 和 $\Lambda_2 \in \mathcal{L}(A)$ 是序，则序 $\Lambda_1\Lambda_2$包含 $\Lambda_1$ 和 $\Lambda_2$，且它是具有此性质的最小序。因此，任何包含 $\Lambda_1$ 和 $\Lambda_2$的序，也包含 $\Lambda_1\Lambda_2$。

*(b)* 设 $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(A)$ 满足 $\mathcal{O}(L_1) = \Lambda_1$ 且 $\mathcal{O}(L_2) = \Lambda_2$。那么

$$\mathcal{O}(L_1 L_2) \supset \Lambda_1\Lambda_2, \quad \mathcal{O}(L_1 : L_2) \supset \Lambda_1\Lambda_2. \tag{5.3}$$

若 $L_1$ 可逆，则

$$L_1 : L_2 = L_1 \cdot (\Lambda_1 : L_2). \tag{5.4}$$

若 $L_2$ 可逆，则

$$L_1 : L_2 = (L_1 : \Lambda_2) \cdot L_2^{-1}. \tag{5.5}$$

**证明：** (a) $\Lambda_1\Lambda_2 \supset \Lambda_1$，这是因为 $1_A \in \Lambda_2$。

(b) $\Lambda_1(L_1L_2) = (\Lambda_1L_1)L_2 = L_1L_2$ 表明 $\Lambda_1 \subset \mathcal{O}(L_1L_2)$，类似地 $\Lambda_2 \subset \mathcal{O}(L_1L_2)$。结合 (a) 可推出 $\Lambda_1\Lambda_2 \subset \mathcal{O}(L_1L_2)$。$(\Lambda_1(L_1 : L_2))L_2 = \Lambda_1((L_1 : L_2)L_2) \subset \Lambda_1L_1 = L_1$，因此 $\Lambda_1(L_1 : L_2) \subset (L_1 : L_2)$，因此 $\Lambda_1 \subset \mathcal{O}(L_1 : L_2)$。

$(\Lambda_2(L_1 : L_2))L_2 = (L_1 : L_2)(\Lambda_2L_2) = (L_1 : L_2)L_2 \subset L_1$，因此 $\Lambda_2(L_1 : L_2) \subset (L_1 : L_2)$，因此 $\Lambda_2 \subset \mathcal{O}(L_1 : L_2)$。

假设 $L_1$ 是可逆的。那么

$$(L_1(\Lambda_1 : L_2))L_2 \subset L_1\Lambda_1 = L_1, \quad \text{so } L_1(\Lambda_1 : L_2) \subset L_1 : L_2,$$
$$(L_1^{-1}(L_1 : L_2))L_2 \subset L_1^{-1}L_1 = \Lambda_1, \quad \text{so } L_1^{-1}(L_1 : L_2) \subset \Lambda_1 : L_2,$$
$$\text{so } L_1 : L_2 \subset L_1(\Lambda_1 : L_2).$$

假设 $L_2$ 可逆。那么

$$((L_1 : \Lambda_2)L_2^{-1})L_2 \subset (L_1 : \Lambda_2)\Lambda_2 \subset L_1, \quad \text{so } (L_1 : \Lambda_2)L_2^{-1} \subset L_1 : L_2,$$
$$((L_1 : L_2)L_2)\Lambda_2 \subset (L_1 : L_2)L_2 \subset L_1, \quad \text{so } (L_1 : L_2)L_2 \subset L_1 : \Lambda_2,$$
$$\text{so } L_1 : L_2 \subset (L_1 : \Lambda_2)L_2^{-1}. \qquad \square$$

**定义 5.4**。回顾记号 1.5，$A^{unit}$ 是 $A$ 中单位元的集合。

(a) 在 $\mathcal{L}(A)$ 上定义等价关系 $\sim_\varepsilon$ 如下：

$$L_1 \sim_\varepsilon L_2 \ :\Longleftrightarrow \quad a \in A^{unit} \text{ with } a \cdot L_1 = L_2 \text{ exists.}$$

满格 $L$ 关于 $\sim_\varepsilon$ 的等价类称为 $L$ 的 $\varepsilon$-类，记作 $[L]_\varepsilon$。满格的 $\varepsilon$-类集合记作 $\mathcal{E}(A)$ $(= \mathcal{L}(A/\sim_\varepsilon))$。

(b) 若某个序 $\Lambda$ 满足 $\mathcal{O}(L) \supset \Lambda$，则称 $A$ 中的满格 $L$ 为 $\Lambda$-理想。若 $\mathcal{O}(L) = \Lambda$，则称其为一个 精确 $\Lambda$-理想 。

引理 *5.5.* 满格的乘法在 $\mathcal{L}(A)$ 上给出交换半群的结构。它在 $\mathcal{E}(A)$ 上诱导出交换半群的结构。若 $L_1 \sim_\varepsilon L_2$，则 $\mathcal{O}(L_1) = \mathcal{O}(L_2)$，因此序 $\mathcal{O}([L_1]_\varepsilon) := \mathcal{O}(L_1)$ 是良定义的。此外，$\mathcal{L}(A)$ 上的除法映射 $(L_1, L_2) \mapsto L_1 : L_2$ 诱导出 $\mathcal{E}(A)$ 上的除法映射 $([L_1]_\varepsilon, [L_2]_\varepsilon) \mapsto [L_1]_\varepsilon : [L_2]_\varepsilon := [L_1 : L_2]_\varepsilon$。

**证明：**由 (5.2)，$\mathcal{L}(A)$ 在满格的乘法下是一个交换半群。

设 $L_1 \sim_\varepsilon L_3$ 与 $L_2 \sim_\varepsilon L_4$。则存在 $a_1, a_2 \in A^{unit}$，其中 $a_1L_1 = L_3$与 $a_2L_2 = L_4$。于是 $a_1a_2L_1L_2 = L_3L_4$ 且 $(a_1a_2^{-1}) \cdot (L_1 : L_2) = L_3 : L_4$，因此 $L_1L_2 \sim_\varepsilon L_3L_4$ 且 $L_1 : L_2 \sim_\varepsilon L_3 : L_4$。$\square$

引理 5.5 为将第 4 节中的概念应用于并比较半群 $\mathcal{L}(A)$ 和 $\mathcal{E}(A)$ 奠定了基础。下述定理讨论了这两个半群中的幂等元和可逆元。值得注意的是，$\mathcal{L}(A)$ 和 $\mathcal{E}(A)$ 中的除法映射所起的作用远不如乘法那么重要。

定理 5.6 的主要部分实质上已包含在 [DTZ62 的第 1] 节中。尽管其中的假设在我们的情形下意味着 $A$是一个代数数域。因此，我们重新证明定理 5.6。定理 5.7 也同样如此。定理

5.6 (c) 中的等价关系 (i) 4](v) 并未出现在 [DTZ62], 中，而是在 [Fa65, 26.4] 中。尽管下文给出的 (i) $\Longleftrightarrow$ (v) 的证明并未见于 [Fa65]。

**定理 5.6.** [DTZ62, 1.3.3, 1.3.6, 1.3.7] [Fa65, 26.4]

*(a)* $\Lambda \in \mathcal{L}(A)$ 是半群 $\mathcal{L}(A)$ 中的幂等元，当且仅当它是一个序。

*(b)* $[L]_\varepsilon$ 是半群 $\mathcal{E}(A)$ 中的幂等元，当且仅当该类 $[L]_\varepsilon$ 包含一个序。

*(c)* 设 $L \in \mathcal{L}(A)$。以下五个性质等价：

*(i)* $L$ 在半群 $\mathcal{L}(A)$ 中可逆。*(ii)* 存在 $L_2 \in \mathcal{L}(A)$，且满足 $L \cdot L_2 = \mathcal{O}(L)$。*(iii)* $L \cdot (\mathcal{O}(L) : L) = \mathcal{O}(L)$。*(iv)* $[L]_\varepsilon$ 在半群 $\mathcal{E}(A)$ 中可逆。*(v)* $\mathcal{O}(\mathcal{O}(L) : L) = \mathcal{O}(L)$。

若此条件成立，则 $e_L = \mathcal{O}（L）$， $L^{-1} = \mathcal{O}（L）: L$， $L^{-1}$ 可逆，且$\mathcal{O}（L^{-1}）= \mathcal{O}（L）$，以及 $e_{[L]_\varepsilon} = [\mathcal{O}（L）]_\varepsilon$， $[L]_\varepsilon^{-1} = [L^{-1}]_\varepsilon$。

**证明：** (a) $\Leftarrow$: 设 $\Lambda$ 为一个序。由 $1 \in \Lambda$，我们有$\Lambda\Lambda = \Lambda$（而不仅仅是 $\Lambda\Lambda \subset \Lambda$），因此 $\Lambda$ 是一个幂等元。

$\Rightarrow$: 设 $\Lambda$ 为一个幂等元，因此 $\Lambda\Lambda = \Lambda$。引理 5.2 (c)（Krull 引理）对 $\Lambda = L$ 表明 $1 \in \Lambda$。因此 $\Lambda$ 是一个序。

(b) $\Leftarrow$: 设 $\Lambda \in [L]_\varepsilon$ 是一个序。那么

$$[L]_\varepsilon[L]_\varepsilon = [\Lambda]_\varepsilon[\Lambda]_\varepsilon = [\Lambda\Lambda]_\varepsilon = [\Lambda]_\varepsilon = [L]_\varepsilon.$$

$\Rightarrow$: 假设 $[L]_\varepsilon[L]_\varepsilon = [L]_\varepsilon$。那么 $LL \sim_\varepsilon L$，因此存在满足$aLL = L$ 的 $a \in A^{unit}$。于是 $(aL)^2 = (aL)$，且 $aL \in [L]_\varepsilon$ 是 $\mathcal{L}(A)$中的幂等元。由 (a) 可知，$aL$是一个序。

(c) (i)$\Rightarrow$(ii): 设 $L$ 在半群 $\mathcal{L}(A)$中可逆。那么 $L_2$，并且存在 $\Lambda \in \mathcal{L}(A)$，其中 $\Lambda$ 是一个序，且存在 $LL_2 = \Lambda$ 和 $\Lambda L = L$。最后一个条件表明 $\Lambda \subset \mathcal{O}(L)$。现在 $LL_2 = \mathcal{O}(L)LL_2 = \mathcal{O}(L)\Lambda = \mathcal{O}(L)$ (=，而不只是 $\subset$，这是因为 $1 \in \Lambda$)。

(ii)$\Rightarrow$(iii): 根据 $\mathcal{O}(L)$的定义： $L$， $L_2 \subset \mathcal{O}(L)$: $L$，并且 $L \cdot (\mathcal{O}(L) : L) \subset \mathcal{O}(L)$。结合 $L \cdot L_2 = \mathcal{O}(L)$，这表明 $L \cdot (\mathcal{O}(L) : L) = \mathcal{O}(L)$。

(iii)$\Rightarrow$(iv): $[L]_\varepsilon[\mathcal{O}(L) : L]_\varepsilon = [L(\mathcal{O}(L) : L)]_\varepsilon = [\mathcal{O}(L)]_\varepsilon$且$[\mathcal{O}(L)]_\varepsilon[L]_\varepsilon = [\mathcal{O}(L)L]_\varepsilon = [L]_\varepsilon$。

(iv)$\Rightarrow$(i): 设 $[L]_\varepsilon$ 在半群 $\mathcal{E}(A)$中可逆，其中$e_{[L]_\varepsilon} = [\Lambda]_\varepsilon$ 具有 $\Lambda$ 序。则 $[L]_\varepsilon = [L]_\varepsilon[\Lambda]_\varepsilon = [L\Lambda]_\varepsilon$，且 $L_1 \in \mathcal{L}(A)$中存在 $[L]_\varepsilon[L_1]_\varepsilon = [\Lambda]_\varepsilon$。因此 $a \in A^{unit}$ 中存在 $aLL_1 = \Lambda$，所以$\Lambda \supset \mathcal{O}(L)$。现在 $[L]_\varepsilon = [L\Lambda]_\varepsilon$ 表明 $\Lambda = \mathcal{O}(L)$，因此 $L$ 在$\mathcal{L}(A)$中可逆。

现在假设 (i)–(iv) 成立。(iii) 和 $\mathcal{O}(L)L = L$ 表明 $L$ 是可逆的，且 $e_L = \mathcal{O}(L)$。(5.3) 表明 $\mathcal{O}(L)(\mathcal{O}(L) : L) = \mathcal{O}(L) : L$。

结合 (iii)，这也表明 $L^{-1} = \mathcal{O}(L) : L$ 以及 $\mathcal{O}(L^{-1}) = \mathcal{O}(L)$。$\mathcal{E}(A)$ 中各类的性质显而易见。

(i)⇒(v)：(i) 蕴含 $\mathcal{O}(L)$：$L = L^{-1}$ 和 $\mathcal{O}(L^{-1}) = \mathcal{O}(L)$。

(v)⇒(i)：我们将对.....应用引理 2.3

$$\begin{aligned} & (V_1, V_2, V_3, \beta, L_1, L_3)_{\text{Lemma 2.3}} \\ = \; & (A, A, A, \text{multiplication}, L(\mathcal{O}(L) : L), \mathcal{O}(L))_{\text{here}}. \end{aligned}$$

我们也将 $\beta^*$：$A \times A^* \to A^*$ 记作乘法。我们将证明

$$L_1^2 \subset L_1, \tag{5.6}$$

$$L_1 \cdot L_3^{*\mathbb{Z}} = L_3^{*\mathbb{Z}}. \tag{5.7}$$

用格 $L_3^{*\mathbb{Z}} \in \mathcal{L}(A^*)$ 替代 $A$ 中的满格，Krull 引理（引理 5.2）(c) 的一个变体仍然成立，并且表明 $1_A \in L_1 = L(\mathcal{O}(L): L)$，因此 $L_1 = \mathcal{O}(L)$，所以 $L$ 可逆。

(5.6) 可由此推出

$$L_1^2 = (L(\mathcal{O}(L) : L))^2 \subset \mathcal{O}(L) \cdot L(\mathcal{O}(L) : L) = L(\mathcal{O}(L) : L) = L_1.$$

由引理 2.3 (b)，(5.7) 等价于

$$L_3 : L_1 = L_3. \tag{5.8}$$

证明如下。考虑 $a \in L_3$：$L_1 = \mathcal{O}(L) : (L(\mathcal{O}(L) : L))$。

$$\begin{aligned} & L(\mathcal{O}(L) : L)a \subset \mathcal{O}(L), \\ \text{so} \quad & (\mathcal{O}(L) : L)a \text{ maps } L \text{ to } \mathcal{O}(L), \\ \text{so} \quad & (\mathcal{O}(L) : L)a \subset \mathcal{O}(L) : L, \\ \text{so} \quad & a \in \mathcal{O}(\mathcal{O}(L) : L) = \mathcal{O}(L) \text{ (here (v) is used)}, \\ \text{so} \quad & \mathcal{O}(L) : (L(\mathcal{O}(L) : L)) = \mathcal{O}(L). \end{aligned}$$

蕴含关系 (v)⇒(i) 得证。 □

现在讨论弱等价类和半群$W(\mathcal{L}(A))$ 与 $W(\mathcal{E}(A))$。定理 5.7 的 (c) 部分指出，它们相同。

**定理 5.7.** [DTZ62, 1.3.9, 1.3.11]

*(a)* 设 $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(A)$。以下四个性质等价。

*(i)* $L_1 \sim_w L_2$.

*(ii)* $1 \in (L_1 : L_2)(L_2 : L_1)$.

*(iii)* $\mathcal{O}(L_1) = \mathcal{O}(L_2)$ *and* $L_3 \in G(\mathcal{O}(L_1))$ *with* $L_1 L_3 = L_2$ *exists.*

*(iv)* $[L_1]_\varepsilon \sim_w [L_2]_\varepsilon$.

*(b)* 设 $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(A)$，且 $L_1 \sim_w L_2$。我们有

$$L_1 : L_2 \in G(\mathcal{O}(L_1)), \quad L_2 : L_1 \in G(\mathcal{O}(L_1)), \quad (L_1 : L_2)^{-1} = L_2 : L_1,$$
$$L_2 = (L_2 : L_1)L_1, \quad L_1 = (L_1 : L_2)L_2,$$
$$\mathcal{O}(L_1) = \mathcal{O}(L_2) = \mathcal{O}(L_1 : L_2) = \mathcal{O}(L_2 : L_1) = (L_1 : L_2)(L_2 : L_1).$$

*(c)* $W(\mathcal{L}(A)) = W(\mathcal{E}(A))$，并且这个半群继承了来自 $\mathcal{L}(A)$ 上除法映射的除法映射。

**证明：** (a) (i)⇒(ii)：设 $L_1 \sim_w L_2$。则 $L_3, L_4 \in \mathcal{L}(A)$，其中$L_1L_3 = L_2$ 和 $L_2L_4 = L_1$ 存在。特别地

$$L_1(L_2 : L_1) = L_2 \quad \text{and} \quad L_2(L_1 : L_2) = L_1$$

（而不只是 $L_1(L_2 : L_1) \subset L_2$ 和 $L_2(L_1 : L_2) \subset L_1$）。可应用引理 5.2 (c)（Krull 引理），并得到 $1 \in (L_1 : L_2)(L_2 : L_1)$，这是基于以下两项计算：

$$\begin{aligned} & L_2(L_1 : L_2)(L_2 : L_1) = L_1(L_2 : L_1) = L_2, \\ & \big((L_1 : L_2)(L_2 : L_1)\big)^2 = (L_1 : L_2)(L_2 : L_1)(L_1 : L_2)(L_2 : L_1) \\ \subset \quad & (L_1 : L_2)(L_2 : L_1)(L_1 : L_1) = (L_1 : L_2)(L_2 : L_1)\mathcal{O}(L_1) \\ \overset{(5.3)}{=} \quad & (L_1 : L_2)(L_2 : L_1). \end{aligned}$$

(ii)⇒(iii)：定义 $\Lambda := (L_1 : L_2)(L_2 : L_1)$。最后一次计算 $\Lambda\Lambda \subset \Lambda$ 以及 (ii) 中的假设 $1 \in \Lambda$表明 $\Lambda$ 是一个序。根据 (5.3)，它包含$\mathcal{O}(L_1)$ 和 $\mathcal{O}(L_2)$。根据定义，它包含于 $L_1 : L_1 = \mathcal{O}(L_1)$ 和 $L_2 : L_2 = \mathcal{O}(L_2)$ 之中，其中 $L_1 : L_2$ 和 $L_2 : L_1$。因此 $\mathcal{O}(L_1) = \Lambda = \mathcal{O}(L_2)$。这也等于 $\mathcal{O}(L_1 : L_2)$ 和 $\mathcal{O}(L_2 : L_1)$，因为 (5.3) 蕴含以下两个包含关系：

$$\mathcal{O}(L_1) \subset \mathcal{O}(L_1 : L_2) \subset \mathcal{O}(\Lambda) = \Lambda.$$

由 $\Lambda = (L_1 : L_2)(L_2 : L_1)$，我们得到 $L_1 : L_2 \in G(\Lambda)$、$L_2 : L_1 \in G(\Lambda)$ 以及 $(L_1 : L_2)^{-1} = L_2 : L_1$。现在 $L_3 := L_2 : L_1 \in G(\Lambda)$ 满足

$$L_2 = L_2\Lambda \subset L_1(L_2 : L_1) \subset L_2, \quad \text{so } L_2 = L_1(L_2 : L_1) = L_1L_3.$$

(iii)⇒(i)：$L_1L_3 = L_2$ 与 $L_2L_3^{-1} = L_1L_3L_3^{-1} = L_1\mathcal{O}(L_1) = L_1$ 表明 $L_1 \sim_w L_2$。

(i)⇒(iv)：平凡。

(iv)⇒(i)：假设 $[L_1]_\varepsilon[L_3]_\varepsilon = [L_2]_\varepsilon$ 且 $[L_2]_\varepsilon[L_4]_\varepsilon = [L_1]_\varepsilon$。则$a_1, a_2 \in A^{unit}$ 使得 $a_1L_1L_3 = L_2$ 与 $a_2L_2L_4 = L_1$ 存在。因此 $L_1 \sim_w L_2$。

(b) 这一点已在 (a) 部分中 (ii)⇒(iii) 的证明中得到证明。

(c) 假设 $L_1 \sim_\varepsilon L_2$。根据引理 5.5，$\mathcal{O}(L_1) = \mathcal{O}(L_2)$，并且 $a \in A^{unit}$ 与 $aL_1 = L_2$ 存在。于是 $L_1a\mathcal{O}(L_1) = L_2$ 且$L_2a^{-1}\mathcal{O}(L_1) = L_1$，因此 $L_1 \sim_w L_2$。所以集合 $W(\mathcal{L}(A))$与

$W(\mathcal{E}(A))$相同。乘法也相同，因为所有乘法都是由 $\mathcal{L}(A)$上的乘法诱导而来。最后，我们要证明

$$L_3 \sim_w L_5,\ L_4 \sim_w L_6 \Rightarrow L_3 : L_4 \sim_w L_5 : L_6. \tag{5.9}$$

我们计算

$$\begin{aligned} L_3 : L_4 &\supset (L_3 : L_5)(L_5 : L_6)(L_6 : L_4) \\ &\supset (L_3 : L_5)(L_5 : L_3)(L_3 : L_4)(L_4 : L_6)(L_6 : L_4) \\ &\overset{\text{(b)}}{=} \mathcal{O}(L_3)(L_3 : L_4)\mathcal{O}(L_4) \overset{(5.3)}{=} (L_3 : L_4), \\ \text{so } L_3 : L_4 &= (L_5 : L_6)\big((L_3 : L_5)(L_6 : L_4)\big), \end{aligned}$$

并类似地

$$L_5 : L_6 = (L_3 : L_4)\big((L_5 : L_3)(L_4 : L_6)\big).$$

因此 $L_3 : L_4 \sim_w L_5 : L_6$。 □

根据定义， $L_1 \sim_w L_2$ 当且仅当 $L_3$ 和 $L_4 \in \mathcal{L}(A)$存在，且$L_1L_3 = L_2$ 和 $L_2L_4 = L_1$。 定理 5.7 (a) (i) $\Longleftrightarrow$(iii) 和 (b) 对此给出了显著的加强。它指出，可以在 $G(\mathcal{O}(L_1))$中选取 $L_3$ 和$L_4$ ，即 $L_3 = L_2 : L_1$ 和 $L_4 = L_1 : L_2 = L_3^{-1}$。

事实上，满足附加条件 $L_3$， $L_4 \in G(\mathcal{O}(L_1))$的 $L_3$ 和 $L_4$ 是唯一的，见下一个定理 5.8 的 (a) 部分。证明很容易。但这会带来一个重要推论，定理 5.8 的 (b) 部分对此作了表述：对于任意 $L \in \mathcal{L}(A)$，存在双射$[\mathcal{O}(L)]_w \to [L]_w$ 和 $[[\mathcal{O}(L)]_\varepsilon]_w \to [[L]_\varepsilon]_w$。 DTZ62]中没有陈述定理 5.8。

考虑一个序 $\Lambda$ 以及集合

$$\{[L]_\varepsilon \mid L \in \mathcal{L}(A), \mathcal{O}(L) = \Lambda\}. \tag{5.10}$$

定理 6.5 将说明这个集合是有限的。接着，定理 5.8 中的 (5.13) 表明，这个集合可分解为有限多个 $w$-类，它们的大小都相同，其中一个是 $G([\Lambda]_\varepsilon)$。定理 6.5 与定理 5.8 (b) 一起，以良好的方式构造了 $\mathcal{E}(A)$。

**定理 5.8**。 *(a)* 设 $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(A)$ 满足 $L_1 \sim_w L_2$。那么 $\mathcal{O}(L_1) = \mathcal{O}(L_2)$。满足 $L_1L_3 = L_2$ 且 $L_3 \in G(\mathcal{O}(L_1))$ 的唯一满格 $L_3$ 是$L_3 = L_2 : L_1$。

*(b)* 设 $\Lambda$ 为一个序，且 $L_1 \in \mathcal{L}(A)$ 满足 $\mathcal{O}(L_1) = \Lambda$。则

$$G(\Lambda) = [\Lambda]_w \quad \text{and} \quad G([\Lambda]_\varepsilon) = [[\Lambda]_\varepsilon]_w. \tag{5.11}$$

这些映射

$$G(\Lambda) \to [L_1]_w, \qquad L_3 \mapsto L_3 L_1, \tag{5.12}$$

$$G([\Lambda]_\varepsilon) \to [[L_1]_\varepsilon]_w, \qquad [L_3]_\varepsilon \mapsto [L_3]_\varepsilon [L_1]_\varepsilon, \tag{5.13}$$

是良定义的双射。

**证明：** (a) 定理 5.7 (a) (i)⇒(iii) 给出 $\mathcal{O}(L_1) = \mathcal{O}(L_2)$。设$L_3 \in G(\mathcal{O}(L_1))$, 其中 $L_1 L_3 = L_2$。于是 $L_3 \subset L_2 : L_1$。此外 $L_1 = L_2 L_3^{-1}$，这意味着 $L_3^{-1} \subset L_1 : L_2$。这个包含意味着

$$L_3 \supset (L_1 : L_2)^{-1} \overset{\text{Theorem 5.7 (b)}}{=} L_2 : L_1.$$

因此 $L_3 = L_2 : L_1$。

(b) (5.11) 可由定理 4.4 (b) 得出。

(5.12) 中的映射确实以 $[L_1]_w$ 为像，因为对于 $L_3 \in G(\Lambda)$

$$L_1 \cdot L_3 = L_3 L_1, \quad (L_3 L_1) \cdot L_3^{-1} = L_1, \quad \text{so } L_3 L_1 \sim_w L_1.$$

由定理 5.7 (a) 中的 (i)⇒(iii) 可知，它是满射。由 (a) 可知，它是单射。

(5.13) 中的映射是双射，因为 (5.12) 中的映射是双射，且它保持 $\varepsilon$-类。□

## 6. An extension of the Jordan-Zassenhaus theorem

全文中， $A$ 均如定理 3.1 所述，因此 $A$ 是一个带单位元 $1_A$ 的有限维交换 $\mathbb{Q}$-代数。若其根基 $R$ 为 0，则它是可分的。此时， $A$ 是若干代数数域的直和。下述定理汇集了代数数论中的一些经典结果。

**定理 6.1**。（例如 [Ne99]或 [BSh73]）

设 $A$是一个代数数域。

*(a)* 它有一个极大阶 $\Lambda_{max}(A)$，它包含所有其他序，即 $A$ 中代数整数的集合。

*(b)* 每个满足 $\mathcal{O}(L) = \Lambda_{max}(A)$ 的满格 $L$ 都是可逆的。*(c)* 群

$$G([\Lambda_{max}]_\varepsilon) = \{[L]_\varepsilon \mid L \text{ 是一个满足 } \mathcal{O}(L) = \Lambda_{max}(A)\} \text{ 的满格}$$

是有限的。它是 $A$ 的类群。

**推论 6.2.** 设 $A$ 是可分的，因此 $A = \bigoplus_{j=1}^{k} A^{(j)}$ 是 $A^{(1)}$、.....、$A^{(k)}$ 代数数域。则定理 *6.1* 在这种情况下也成立。更确切地说，有如下结论。

*(a)* $A$ 具有一个极大序 $\Lambda_{max}(A)$，它包含所有其他序。它是 $\Lambda_{max}(A) = \bigoplus_{j=1}^{k} \Lambda_{max}(A^{(j)})$。

*(b)* 每个带有 $\mathcal{O}(L) = \Lambda_{max}(A)$ 的满格 $L$ 都是直和 $L = \bigoplus_{j=1}^{k} L^{(j)}$，其中 $L^{(j)}$ 是 $A^{(j)}$ 中的一个满格，且带有 $\mathcal{O}(L^{(j)}) = \Lambda_{max}(A^{(j)})$。$L$ 是可逆的，其逆元为 $L^{-1} = \bigoplus_{j=1}^{k}(L^{(j)})^{-1}$。

*(c)* 群 $G([\Lambda_{max}]_\varepsilon)$ 是有限群，并且同构于代数数域$A^{(1)}$、...、$A^{(k)}$的类群的乘积$\prod_{j=1}^{k} G([\Lambda_{max}(A^{(j)})]_\varepsilon)$。

**证明：** (a) 若 $\Lambda$ 是 $A$ 中的一个序，则 $1_{A^{(j)}} \cdot \Lambda$ 是 $A^{(j)}$ 中的一个序。于是 $\Lambda \subset \bigoplus_{j=1}^{k} 1_{A^{(j)}} \cdot \Lambda \subset \bigoplus_{j=1}^{k} \Lambda_{max}(A^{(j)}) = \Lambda_{max}$.

(b) $1_{A^{(j)}} \in \Lambda_{max}(A^{(j)}) \subset \Lambda_{max}(A)$。因此 $L$ 包含 $L^{(j)} := 1_{A^{(j)}} \cdot L$，并且是直和 $L = \bigoplus_{j=1}^{k} L^{(j)}$。此外

$$\mathcal{O}(L^{(j)}) = 1_{A^{(j)}} \cdot \mathcal{O}(L) = 1_{A^{(j)}} \cdot \Lambda_{max}(A) \overset{(a)}{=} \Lambda_{max}(A^{(j)}).$$

B定理 6.1 $L^{(j)}$ 的 y 部分 (b) 在 $A^{(j)}$ 中可逆。其余部分显而易见。(c) 这由定理 6.1 (c) 和部分 (b) 得出。□

定理 6.1 (c) 中类群的有限性是 Jordan-Zassenhaus 定理 [Za 38]的一个非常特殊的情形（另见 [CR62，定理 (79.1)] 或 [Re03，定理 (26.4)]）。该定理对非交换可分代数同样成立。在我们的情形中，它蕴含如下有限性结果。

**定理 6.3.** （*Jordan-Zassenhaus* 定理的特殊情形）
设 $A$ 可分。对 $A$ 中的任意序 $\Lambda$，集合

$$\{[L]_\varepsilon \mid L \in \mathcal{L}(A), \mathcal{O}(L) \supset \Lambda\}$$

Λ-理想的 $\varepsilon$-类是有限的。

定理 6.3 在 $A$ 不可分时不成立，如下述 Faddeev 的构造所示。

**定理 6.4.** [Fa65，命题 25.1]
假设 $A$ 不是可分的，因此其根基 $R$ 不是 0。设 $\Lambda$ 是 $A$中的一个序。则集合 $\{\Gamma \in \mathcal{L}(A) \mid \Gamma$ 一个序 $\Gamma \supset \Lambda\}$ 是无穷的。因此集合 $\{[L]_\varepsilon \mid L \in \mathcal{L}(A)\ \mathcal{O}(L) \supset \Lambda\}$ 是无穷的。

**证明：** 例如，下面是一个具有
$\Lambda \subsetneqq \Lambda_1 \subsetneqq \Lambda_2 \subsetneqq ... \subsetneqq \Lambda_m \subsetneqq \Lambda_{m+1} \subsetneqq ...$ 的序$\Lambda_m$ 的无穷序列，

$$\Lambda_m := \Lambda + \sum_{l=1}^{n_{max}} \frac{1}{2^{lm}} \big(\Lambda \cap R\big)^l \quad \text{for } m \in \mathbb{N}$$

其中，$n_{max} \in \mathbb{N}$ 是唯一的，且满足 $R^{n_{max}} \supsetneqq R^{n_{max}+1} = \{0\}$。第二个结论由第一个结论以及以下基本

观察可得:

$$\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{L}(A) \text{ orders with } [\Lambda_1]_\varepsilon = [\Lambda_2]_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \Lambda_1 = \Lambda_2, \tag{6.1}$$

这由 $\Lambda_1 = \mathcal{O}(\Lambda_1) = \mathcal{O}(\Lambda_2) = \Lambda_2$ 推出。 □

但如果限定于精确 $\Lambda$-理想，定理 6.3 可推广到不可分代数。定理 6.5 中对 Jordan-Zassenhaus 定理的这一推广，是本论文的五项主要结果之一。在具有根基 $R$ 且 $R^2 = 0$ 的代数 $A$ 的情形下，该结果由 Faddeev[Fa67] 证明。

**定理 6.5**。设 $A$ 如定理 *3.1* 中所述，则 $A$ 是一个带单位元的有限维交换 $\mathbb{Q}$-代数。对于 $A$ 中的任意序 $\Lambda$，集合

$$\{[L]_\varepsilon \mid L \in \mathcal{L}(A), \mathcal{O}(L) = \Lambda\}$$

精确 $\Lambda$-理想的 $\varepsilon$-类是有限的。

证明见以下评述之后。

**评述 6.6.** (i) 对于可分代数 $A$，定理 6.5 等价于定理 6.3，因为在给定的序 $\Lambda$ 与极大阶 $\Lambda_{max}$（$A$）之间只有有限多个序。

(ii) 定理 6.5 对于具有根基 $R \neq 0$ 的非交换 $\mathbb{Q}$-代数并不成立，即使 $R^2 = 0$ 也不成立。Faddeev 给出了一个例子 [Fa67,7°]。

(iii) 我们下面对定理 6.5 的证明，以及 Faddeev 对 $R^2 = 0$ 属于 [Fa67] 这一情形的证明，都分为三个步骤。在 [Fa67] 中，这些步骤见第 4°、5° 和 6° 节。

步骤 1 基本相同。尽管我们对 $L$ 与 $1_A \in L$ 的选择并未见于 [Fa67, 4°]。

我们的步骤 2 紧密沿用了 Faddeev 的步骤 2 的论证。

但我们的步骤 3 采用了不同的方法。它结合了引理 3.3 中的底层滤过、$R^{[1]}$ 对其的作用（也见引理 3.3）以及引理 2.3。与 Faddeev 的步骤 3 相比，这种方法技术性较低，也更容易推广到具有 $R^2 \neq 0$ 的代数 $A$。

**定理 6.5 的证明：** 固定一个序 $\Lambda$ 在 $A$。

**步骤 1：** 回顾定理 3.1 中的分解 $A = \bigoplus_{j=1}^{k} A^{(j)}$和 $A^{(j)} = F_{(j)} \oplus N^{(j)}$，$A$ 的可分子代数 $F := \bigoplus_{j=1}^{k} F_{(j)}$、$A$ 的根基 $R = \bigoplus_{j=1}^{k} N^{(j)}$，以及分解 $A = F \oplus R$。因此存在一个自然同构

$$F \cong R^{[0]} = R^0/R^1 = A/R.$$

此处及下文中，我们使用引理 3.3 中关于 $A$ 上的底层滤过 $S_\bullet$ 、 $A$ 上的根基滤过 $R^\bullet$ 以及相应商 $S_{[l]}$ 和 $R^{[l]}$ 的记号。

我们作如下扩展记号。对于每个 $L$中的满格，其在投影到 $R^{[0]}$ 下的像称为 $L^{[0]}$。它是$R^{[0]}$ 中的满格，并视为 $F$中的满格。对于 $m \in \{1, 2, ..., n_{max}\}$，子商

$$L_{[m]} := (L \cap S_m + S_{m-1})/S_{m-1} \subset S_m/S_{m-1} = S_{[m]}$$

是 $S_{[m]}$中的满格。记号 $L_{[m]}$ 与引理 2.4 中的记号兼容，其中 $V = A$ 和 $V_\bullet = S_\bullet$。

$\Lambda^{[0]}$ 是 $F$中的一个序。若 $L$ 是一个精确的 $\Lambda$-理想，则 $F$ 中的满格 $L^{[0]}$是一个 $\Lambda^{[0]}$-理想（但不一定是精确的 $\Lambda^{[0]}$-理想）。 $A$ 中满格的一个 $\varepsilon$-类经由 $L \mapsto L^{[0]}$ 投影为$F$中满格的一个 $\varepsilon$-类。

由 Jordan-Zassenhaus 定理 6.3， $F$ 中 $\Lambda^{[0]}$-理想的 $\varepsilon$-类构成有限集，因此可用一个有限集 $I$为其编索引。我们为每个 $i \in I$ 选取一个代表元 $K^i \in \mathcal{L}$（$F$）。我们可以且将选择它使得 $1_A \in K^i$。

每个精确 $\Lambda$-理想的 $\varepsilon$-类都包含满格 $L$，满足 $L^{[0]} = K^i$，其中 $i \in I$。若对于这样的 $L$有 $1_A \notin L$，则对于某个 $r \in R$有 $1_A + r \in L$，因为 $L^{[0]} = K^i$ 且 $1_A \in K^i$。于是我们用 $\widetilde{L}$ 替换 $L :=(1_A+r)^{-1}L$。它满足 $[\widetilde{L}]_\varepsilon = [L]_\varepsilon$、$\widetilde{L}^{[0]} = L^{[0]} = K^i$ 和 $1_A \in \widetilde{L}$。

最后，对于精确的 $\Lambda$-理想 $L$，条件 $1_A \in L$ 等价于条件 $L \supset \Lambda$。

因此，只需证明对于每个 $i \in I$，集合

$$\{[L]_\varepsilon \,|\, L \in \mathcal{L}(A) \text{ with } \mathcal{O}(L) = \Lambda, L^{[0]} = K^i, L \supset \Lambda\} \tag{6.2}$$

是有限的。事实上，我们将证明对于每个 $i \in I$，集合

$$\{L \,|\, L \in \mathcal{L}(A) \text{ with } \mathcal{O}(L) = \Lambda, L^{[0]} = K^i, L \supset \Lambda\} \tag{6.3}$$

是有限的。

**步骤 2：** 回顾引理 3.3， $S_{[1]} = S_1 =$Ann$(R) \subset A$ 是 $A$的底层，$\Lambda_{[1]} = \Lambda \cap S_1$，并且对于 $A$中的任意满格 $L$，都有 $L_{[1]} = L \cap S_1$。在步骤 2 中，我们将证明对于每个 $i \in I$，集合

$$\{L_{[1]} \,|\, L \in \mathcal{L}(A) \text{ with } \mathcal{O}(L) = \Lambda, L^{[0]} = K^i, L \supset \Lambda\} \tag{6.4}$$

是有限的。对于 $L$，当 $\mathcal{O}(L) = \Lambda$ 且 $L^{[0]} = K^i$ 时，条件 $\Lambda = L :$ $L$以及引理 3.3 中的乘法映射 $R^{[0]} \times S_1 \to S_1$ 给出条件

$$\Lambda_{[1]} = \Lambda \cap S_1 = (L \cap S_1) : L^{[0]} = L_{[1]} : K^i.$$

正如我们现在将要证明的，这个条件确实从上方限制了 $L_{[1]} = L \cap S_1$。论证沿用 [Fa67, 5°]。

我们应用引理 3.3 和引理 2.3 (b)，并取

$$(V_1, V_2, V_3, \beta)_{\text{in Lemma 2.3}} \sim (R^{[0]}, S_{[1]}, S_{[1]}, \text{multiplication})_{\text{here}}$$

并且也将 $\beta^*$ 记为乘法。于是

$$\Lambda_{[1]}^{*\mathbb{Z}} = L_{[1]}^{*\mathbb{Z}} \cdot K^i.$$

我们可以将两边同乘极大阶 $\Lambda_{max}(F)$。于是$K^i \cdot \Lambda_{max}(F)$是一个 $\Lambda_{max}(F)$-理想，故由推论 6.2 它是可逆的。我们得到

$$\begin{aligned} \Lambda_{[1]}^{*\mathbb{Z}} \cdot \Lambda_{max}(F) &= L_{[1]}^{*\mathbb{Z}} \cdot \Lambda_{max}(F) \cdot (K^i \cdot \Lambda_{max}(F)), \\ \Lambda_{[1]}^{*\mathbb{Z}} \cdot \Lambda_{max}(F) \cdot (K^i \cdot \Lambda_{max}(F))^{-1} &= L_{[1]}^{*\mathbb{Z}} \cdot \Lambda_{max}(F). \end{aligned}$$

存在自然数 $r$，使得 $r \cdot \Lambda_{max}(F) \subset \Lambda^{[0]}$，这由引理 2.2 (c) 得到。将两边同乘 $r$ 即得

$$\begin{aligned} r \cdot \Lambda_{[1]}^{*\mathbb{Z}} \cdot \Lambda_{max}(F) \cdot (K^i \cdot \Lambda_{max}(F))^{-1} &= L_{[1]}^{*\mathbb{Z}} \cdot r \cdot \Lambda_{max}(F) \\ &\subset L_{[1]}^{*\mathbb{Z}} \cdot \Lambda^{[0]} = L_{[1]}^{*\mathbb{Z}}, \\ \left( r \cdot \Lambda_{[1]}^{*\mathbb{Z}} \cdot \Lambda_{max}(F) \cdot (K^i \cdot \Lambda_{max}(F))^{-1} \right)^{*\mathbb{Z}} &\supset L_{[1]}. \end{aligned}$$

这从上方界定了 $L_{[1]}$。由于 $L \supset \Lambda$， $L_{[1]}$ 以 $L_{[1]} \supset \Lambda_{[1]}$为下界。由引理 2.2 (d)，(6.4) 中的集合是有限的。

**步骤 3：** 我们将归纳地证明，对于每个 $i \in I$ 和 $m \in \{1, 2, ..., n_{max} + 1\}$，元组集合

$$\{(L_{[m]}, L_{[m-1]}, ..., L_{[1]}) \mid L \in \mathcal{L}(A) \text{ with } \mathcal{O}(L) = \Lambda, \quad L^{[0]} = K^i, \ L \supset \Lambda\} \tag{6.5}$$

是有限的。步骤 2 证明了这一点对 $m = 1$ 成立。假设对某个$m \leq n_{max}$成立。我们固定 ($L_{[m]}$, $L_{[m-1]}$, ....., $L_{[1]}$) =($K_m$, $K_{m-1}$, ....., $K_1$)，并希望证明集合

$$\{L_{[m+1]} \mid L \in \mathcal{L}(A) \text{ with } \mathcal{O}(L) = \Lambda, \ L^{[0]} = K^i, \ L \supset \Lambda, \ (L_{[m]}, ..., L_{[1]}) = (K_m, ..., K_1)\} \tag{6.6}$$

是有限的。

我们应用引理 3.3 和引理 2.3 (a)，并取

$$(V_1, V_2, V_3, \beta)_{\text{in Lemma 2.3}} \sim (R^{[1]}, S_{[m+1]}, S_{[m]}, \text{multiplication})_{\text{here}}.$$

Then

$$\Lambda^{[1]} \cdot L_{[m+1]} \subset L_{[m]} = K_m,$$

SO

$$L_{[m+1]} \subset K_m : \Lambda^{[1]}.$$

$L_{[m+1]}$ 因此被满格 $K_m : \Lambda^{[1]}$ 中的 $S_{[m+1]}$ 从上方界定。由于 $L \supset \Lambda$，它被 $L_{[m+1]} \supset \Lambda_{[m+1]}$ 从下方界定。因此，(6.6) 中的集合是有限的。

式（6.5）中的集合对于任意 $m$ 都是有限的，特别地，对于 $m = n_{max} + 1$ 也是如此。

由引理 2.4 (c) 以及 $V = A$ 和 $V_\bullet = S_\bullet$，我们得出（6.3）中的集合是有限的。□

## 7. Localization

在Ne99，第一章 §12] 中，研究了代数数域中的序，并充分利用了由素理想给出的局部化。对于如定理 3.1 中的任意代数 $A$ 的序，Fa 64] 和 Fa65 6°] 中提出了另一种局部化族。在本节中，我们引用关于这一局部化族的一些基本结果，并证明新的定理 7.6。下一节中，我们将运用这些工具，得到类似于Ne99，第一章 §12]中某些结果的结论。

**定义 7.1**。回顾一下，$\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$ 表示所有素数的集合，并且对于 $p \in \mathbb{P}$ $\mathbb{F}_p :$ $= \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 表示具有 $p$ 个元素的域。

(a) 对于 $p \in \mathbb{P}$，记作（此记号沿用 [Ne99，第 I 章 §11]）

$$\mathbb{Z}_{(p)} \ := \ \{\frac{a}{b} \,|\, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}, \gcd(a,b) = 1, \gcd(p,b) = 1\} \subset \mathbb{Q}.$$

它是 $\mathbb{Q}$ 的子环，也是一个局部环，其极大理想为 $p\mathbb{Z}_{(p)}$，单位群为 $\mathbb{Z}_{(p)}^{unit} = \mathbb{Z}_{(p)} - p\mathbb{Z}_{(p)}$。

(b) 设 $V$ 是某个 $n \in \mathbb{N}$ 上的 $n$ 维 $\mathbb{Q}$ 向量空间。设 $L$ 是 $V$ 中的一个满格。对于 $p \in \mathbb{P}$，记作

$$L_{(p)} \ := \ \mathbb{Z}_{(p)} \cdot L := \{qa \,|\, q \in \mathbb{Z}_{(p)}, a \in L\} \subset V.$$

它是一个秩为 $n$ 的自由 $\mathbb{Z}_{(p)}$-模，且 $L \subset L_{(p)} \subset \mathbb{Q} \cdot L_{(p)} = V$。

以下基本事实见于 [Fa65, 6°]。部分 (c) 的证明见 [Fa64, 3°]。

**定理 7.2**。设 $V$ 是某个 $n \in \mathbb{N}$ 上的 $n$ 维 $\mathbb{Q}$ 向量空间。设 $L_1$、$L_2$、$L_3$ 和 $L_4$ 是 $V$ 中的满格，且满足 $L_3 \supset L_4$。

*(a)*

$$L_1 \ = \ \bigcap_{p \in \mathbb{P}} (L_1)_{(p)}$$

且对于每个 $p \in \mathbb{P}$

$$\begin{aligned}(L_1 + L_2)_{(p)} &= (L_1)_{(p)} + (L_2)_{(p)},\\ (L_1 \cap L_2)_{(p)} &= (L_1)_{(p)} \cap (L_2)_{(p)},\\ (L_1 \cdot L_2)_{(p)} &= (L_1)_{(p)} \cdot (L_2)_{(p)} \quad \text{if } V = A \text{ as in Theorem 3.1},\\ (L_1 : L_2)_{(p)} &= (L_1)_{(p)} : (L_2)_{(p)} \quad \text{if } V = A \text{ as in Theorem 3.1}.\end{aligned}$$

(*b*) $\mathbb{P}$ 中满足 $p$的元素子集

$$(L_1)_{(p)} \neq (L_2)_{(p)}$$

是有限的。

(*c*) [Fa65，命题 6。1] [Fa64，$3^\circ$ 引理] 对于每个 $p \in \mathbb{P}$，令 $U_p \subset V$ 为秩为 $n$的自由 $\mathbb{Z}_{(p)}$-模。假设

$$U_p = (L_1)_{(p)} \quad \text{for all except finitely many } p \in \mathbb{P}.$$

于是存在唯一的满格 $L$，使得 $V$

$$L_{(p)} = U_p \quad \text{for each } p \in \mathbb{P}.$$

根据（*a*）可知，它是 $L = \bigcap_{p\in\mathbb{P}} U_p$.

*(d)* 存在一个自然同构

$$L_3/L_4 \;\cong \bigoplus_{p\in\mathbb{P}:\ (L_3)_{(p)}\neq(L_4)_{(p)}} (L_3)_{(p)}/(L_4)_{(p)} \tag{7.1}$$

分别作为挠元 $\mathbb{Z}$-模和有限加法群。注意，根据 *(b)* 部分，集合 $\{p \in \mathbb{P} \mid (L_3)_{(p)} \neq (L_4)_{(p)}\}$ 是有限的。

下面的结果揭示了可逆性与局部化之间一个显著的关系，其中 $V = A$ 如定理 3.1 所述。

**定理 7.3**。 [Fa65，命题 27。1] 设 $A$ 如定理 *3.1* 所述。设满格 $L \in \mathcal{L}(A)$ 的序为 $\Lambda := \mathcal{O}(L)$。那么：

$L$ 可逆，当且仅当对每个 $p \in \mathbb{P}$,, $\iff$ $L_{(p)}$ 都是一个主 $\Lambda_{(p)}$-理想 (7.2)

$$\text{i.e. } L_{(p)} = a_p\Lambda_{(p)} \text{ for some } a_p \in A^{unit} \text{ for each } p \in \mathbb{P},$$
$$\text{with } a_p = 1_A \text{ for all except finitely many } p.$$

事实上，在 [Fa65 $27^\circ$] 中，只证明了较难的蕴含关系 $\Rightarrow$。

蕴含 $\Leftarrow$的证明：将定理 7.2 (c) 应用于 $U_p := a_p^{-1}\cdot\widetilde{\Lambda_{(p)}}$，对每个 $p \in \mathbb{P}$ 均如此。由此得到一个满格 $L$，满足对每个 $p \in \mathbb{P}$ 都有 $(\widetilde{L})_{(p)} = a_p^{-1} \cdot \Lambda_{(p)}$，因此

$$(\widetilde{L} \cdot L)_{(p)} = \Lambda_{(p)} \quad \text{for each } p \in \mathbb{P}, \quad \text{so } \widetilde{L} \cdot L = \Lambda,$$
$$(\Lambda \cdot \widetilde{L})_{(p)} = a_p^{-1}\Lambda_{(p)} = (\widetilde{L})_{(p)} \text{ for each } p \in \mathbb{P}, \quad \text{so } \Lambda \cdot \widetilde{L} = \widetilde{L},$$

因此 $L$ 是可逆的，且满足 $L^{-1} = \widetilde{L}$。 □

**注 7.4**。设 $A$ 如定理 3.1 中所述。由定理 5.8 (a)，两个满格 $L_1$ 和 $L_2$ 是 $w$-等价的，当且仅当 $\mathcal{O}(L_1) = \mathcal{O}(L_2)$，且存在一个可逆格 $L_3 \in G(\mathcal{O}(L_1))$，满足 $L_1 L_3 = L_2$（事实上，此时 $L_3 = L_2 : L_1$ 是唯一的）。由定理 7.3，这等价于

$$(L_2)_{(p)} \quad = \quad a_p \cdot (L_1)_{(p)} \quad \text{for each } p \in \mathbb{P} \tag{7.3}$$

对几乎所有 $p \in \mathbb{P}$取 $a_p = 1_A$ ，而对其余 $p \in \mathbb{P}$取 $a_p \in A^{unit}$ 。满足 (7.3) 的格 $L_1$ 与 $L_2$ 称为局部等价。因此，在我们的交换情形中，$w$-等价与局部等价重合[Fa65, 28°]。

$\Lambda_{(p)}^{unit} := (\Lambda_{(p)})^{unit}$ 中元素的下述刻画将用于定理 7.6 的证明。

**引理 7.5.** 设 $A$ 如定理 *3.1* 中所述。设 $\Lambda$ 为 $A$中的一个序。设 $p \in \mathbb{P}$ 为一个素数。对任意 $a \in A$ ，$\det(a) \in \mathbb{Q}$ 表示 $A$的自同态$(\mu_a : \ A \to A, \ \ b \mapsto ab)$ 的行列式。

*(a)* 考虑一个元素 $a \in \Lambda_{(p)}$。则

$$a \in \Lambda_{(p)}^{unit} \quad \Longleftrightarrow \quad \det(a) \in \mathbb{Z}_{(p)}^{unit}.$$

（*b*）考虑一个元素 $a \in \Lambda$。于是

$$a \in \Lambda_{(p)}^{unit} \quad \Longleftrightarrow \quad a + p\Lambda \in \Lambda/p\Lambda \text{ is in } (\Lambda/p\Lambda)^{unit}.$$

**证明：** （a）$\Rightarrow$: $a \in \Lambda_{(p)}$ 蕴含 $\det(a) \in \mathbb{Z}_{(p)}$，并且 $a^{-1} \in \Lambda_{(p)}$ 蕴含 $(\det(a))^{-1} = \det(a^{-1}) \in \mathbb{Z}_{(p)}$。

$\Leftarrow$: 假设 $\det(a) \in \mathbb{Z}_{(p)}^{unit}$。记 $p_{Ch,a}(t) \in \mathbb{Z}[t]$ 为自同态 $(\mu_a : A \to A, \ b \mapsto ab)$ 的特征多项式。于是$p_{Ch,a}(a) = 0$，由凯莱–哈密顿定理可知，并且 $t$整除 $p_{Ch,a}(t) - (-1)^n \det(a)$，因此

$$\begin{aligned} b \ &:= \ \frac{p_{Ch,a}(a) - (-1)^n \det(a)}{a} = \frac{(-1)^{n+1} \det(a)}{a} \in \mathbb{Z}[a] \subset \Lambda_{(p)}, \\ a^{-1} \ &= \ (-1)^{n+1} (\det(a))^{-1} \cdot b \in \Lambda_{(p)}. \end{aligned}$$

（b）假设 $a \in \Lambda$。于是 $\det(a) \in \mathbb{Z}$。由（a）可得 $a \in \Lambda_{(p)}^{unit} \Leftrightarrow p \nmid \det(a)$。这等价于 $a + p\Lambda \in (\Lambda/p\Lambda)^{unit}$。□

在第 8 节中，我们将使用定理 7.6。关键在于 (7.6) 中群同态的满射性。

**定理 7.6.** 设 $A$ 如定理 *3.1* 中所述。设 $\Lambda$ 为一个序，并设 $L \subset \Lambda$ 为一个 $\Lambda$-理想（不必精确）。由定理 *7.2 (b)* 可知，集合 $P_0 := \{p \in \mathbb{P} \mid \Lambda_{(p)} \neq L_{(p)}\}$ 是有限的。

*(a)* 商 $\Lambda/L$ 是一个有限含幺交换环。对每个 $p \in P_0$，商 $\Lambda_{(p)}/L_{(p)}$ 是一个有限含幺交换环。存在一个自然同构

$$\Lambda/L \;\to\; \prod_{p\in P_0} \Lambda_{(p)}/L_{(p)} \tag{7.4}$$

有限交换含单位元环的。它诱导出一个同构

$$(\Lambda/L)^{unit} \;\to\; \prod_{p\in P_0} (\Lambda_{(p)}/L_{(p)})^{unit} \tag{7.5}$$

有限交换乘法群（环中的单位元）。

*(b)* 固定 $p \in P_0$ 和一个满足 $a_1 + L_{(p)} \in (\Lambda_{(p)}/L_{(p)})^{unit}$ 的元素 $a_1 \in \Lambda_{(p)}$。存在一个元素 $a_3 \in \Lambda \cap \Lambda_{(p)}^{unit}$，使得

$$\begin{aligned} a_3 + L &\in (\Lambda/L)^{unit}, \\ a_3 + L_{(p)} &= a_1 + L_{(p)}, \\ a_3 + L_{(q)} &= 1_A + L_{(q)} \quad \text{for } q \in P_0 - \{p\}, \end{aligned}$$

因此，$a_3 + L \in (\Lambda/L)^{unit}$ 在（7.5）中的同构下的像是因子 $(\Lambda_{(p)}/L_{(p)})^{unit}$ 中的$a_1 + L_{(p)}$，而在其他每个因子 $(\Lambda_{(q)}/L_{(q)})^{unit}$中则是单位元。特别地，群同态

$$\Lambda_{(p)}^{unit} \;\to\; (\Lambda_{(p)}/L_{(p)})^{unit}. \tag{7.6}$$

是满射。

**证明：** (a) 由定理 7.2 (d) 可得一个如 (7.4) 所示的自然映射，它是有限加法群之间的同构。显然，对于$a,\ b \in L$

$$\begin{aligned} &\Lambda/L \ni (a+L)(b+L) \mapsto \prod_{p\in P_0} \Big((a+L_{(p)})(b+L_{(p)})\Big) \\ &= \Big(\prod_{p\in P_0} (a+L_{(p)})\Big) \cdot \Big(\prod_{p\in P_0} (b+L_{(p)})\Big) \in \prod_{p\in P_0} \Lambda_{(p)}/L_{(p)}, \end{aligned}$$

因此它是有限交换含单位元环之间的同构。

(b) 考虑一个元素 $a_1 \in \Lambda_{(p)}$，其满足 $a_1 + L_{(p)} \in (\Lambda_{(p)}/L_{(p)})^{unit}$。由于 (7.5) 中的同构，我们可以选取一个元素 $a_2 \in \Lambda$，满足

$$\begin{aligned} a_2 + L &\in (\Lambda/L)^{unit}, \\ a_2 + L_{(p)} &= a_1 + L_{(p)} \quad \text{and} \\ a_2 + L_{(q)} &= 1_A + L_{(q)} \text{ for } q \in P_0 - \{p\}. \end{aligned}$$

我们希望找到一个满足 $a_3 \in \Lambda_{(p)}^{unit}$ 的元素 $a_3 \in a_2 + L(\subset \Lambda)$。这出人意料地并非平凡。

我们将使用引理 7.5 (b) 和商环 $\Lambda/p\Lambda$。我们需要讨论其结构。商 $\Lambda/p\Lambda$是一个带单位元的有限维交换 $\mathbb{F}_p$-代数。有限域 $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 是完全域。根据注 3.2 (i)，定理 3.1 可应用于 $\Lambda/p\Lambda$而非 $A$ ，以及域 $\mathbb{F}_p$ 而非域 $\mathbb{Q}$。我们将定理 3.1 中关于 $\Lambda/p\Lambda$的分解写为

$$\Lambda/p\Lambda \;=\; \bigoplus_{j=1}^{\widetilde{k}} A_{\Lambda,p}^{(j)}, \qquad A_{\Lambda,p}^{(j)} \;=\; F_{\Lambda,p}^{(j)} \oplus N_{\Lambda,p}^{(j)}. \tag{7.7}$$

其中 $\widetilde{k} \in \mathbb{N}$, $A_{\Lambda\,,\,p}^{(1)}$，……， $A_{\Lambda,\,p}^{\widetilde{k}}$是不可约局部 $\mathbb{F}_p$-代数，且$A_{\Lambda\,,\,p}^{(i)} \cdot A_{\Lambda\,,\,p}^{(j)} = \{0\}$ 适用于 $i \neq j$。 $N_{\Lambda\,,\,p}^{(j)}$ 是 $A_{\Lambda\,,\,p}^{(j)}$ 中的极大理想，并由幂零元组成。 $F_{\Lambda\,,\,p}^{(j)}$ 是 $A_{\Lambda\,,\,p}^{(j)}$ 的一个 $\mathbb{F}_p$-子代数，也是 $\mathbb{F}_p$的有限域扩张。 $A_{\Lambda\,,\,p}^{(j)}$ 是一个 $F_{\Lambda\,,\,p}^{(j)}$-代数。

~元素 $b = \sum_{j=1}^{k}(c_j + n_j) \in \Lambda/p\Lambda$ 在满足 $c_j \in F_{(j)\,\Lambda,p}$ 且 $n_j \in N_{\Lambda\,,p}^{(j)}$时是单位，当且仅当每个 $c_j \neq 0$。

~这个 $\Lambda$-理想 $L$ 在环 $\Lambda/p\Lambda$中诱导出理想 $L := (L + p\Lambda)/p\Lambda \subset \Lambda/p\Lambda$。它满足

$$\widetilde{L} = \bigoplus_{j=1}^{\widetilde{k}} \widetilde{L}^{(j)} \quad \text{where } \widetilde{L}^{(j)} := \widetilde{L} \cap A_{\Lambda,p}^{(j)},$$

并且 $\widetilde{L}^{(j)}$ 是环 $A_{\Lambda\,,p}^{(j)}$中的一个理想。若 $\widetilde{L}^{(j)}$ 是真理想，则 $\widetilde{L}^{(j)} \subset N_{\Lambda\,,p}^{(j)}$；否则 $\widetilde{L}^{(j)} = A_{\Lambda\,,p}^{(j)}$。记满足 $\widetilde{L}^{(j)} = A_{\Lambda\,,p}^{(j)}$的指标集合为 $J_1 \subset \{1, ..., \widetilde{k}\}\, j$。

用 $1_{A_{\Lambda\,,p}^{(j)}}$ 表示环 $A_{\Lambda\,,p}^{(j)}$ 中的单位元。对于 $j \in J_1$，它属于 $\widetilde{L}^{(j)} \subset \widetilde{L}$。对于 $j \in J_1$，选择一个元素 $e_j \in L$，它在满射下映射为

$$L \to \widetilde{L} = \bigoplus_{j=1}^{\widetilde{k}} \widetilde{L}^{(j)}$$

$1_{A_{\Lambda\,,p}^{(j)}}$。

考虑上面选取的元素 $a_2 \in \Lambda$。因为 $a_2 + L \in (\Lambda/L)^{unit}$，一个元素 $\widetilde{a}_2 \in \Lambda$，满足 $a_2\widetilde{a}_2 + L = (a_2 + L)(\widetilde{a}_2 + L) = 1_A + L$

可以被选取。将 $a_2$ 和 $\widetilde{a}_2$ 在 $\Lambda/p\Lambda$ 中的像写成

$$a_2+p\Lambda=\sum_{j=1}^{\widetilde{k}}(c_j+n_j)\quad\text{and}\quad\widetilde{a}_2+p\Lambda=\sum_{j=1}^{\widetilde{k}}(\widetilde{c}_j+\widetilde{n}_j)$$
$$\text{with}\quad c_j,\widetilde{c}_j\in F^{(j)}_{\Lambda,p}\quad\text{and}\quad n_j,\widetilde{n}_j\in N^{(j)}_{\Lambda,p}.$$

Then

$$a_2\widetilde{a}_2+p\Lambda=\sum_{j=1}^{\widetilde{k}}\Big(c_j\widetilde{c}_j+(c_j\widetilde{n}_j+n_j\widetilde{c}_j+n_j\widetilde{n}_j)\Big)$$
$$\text{with } c_j\widetilde{c}_j\in F^{(j)}_{\Lambda,p}\quad\text{and}\quad c_j\widetilde{n}_j+n_j\widetilde{c}_j+n_j\widetilde{n}_j\in N^{(j)}_{\Lambda,p}.$$

等式 $a_2\widetilde{a}_2+L=1_A+L$ 在 $\Lambda/p\Lambda$ 中诱导包含

$$a_2\widetilde{a}_2+p\Lambda\in\Big(\sum_{j=1}^{\widetilde{k}}1_{A^{(j)}_{\Lambda,p}}\Big)+\widetilde{L}=\sum_{j=1}^{\widetilde{k}}\Big(1_{A^{(j)}_{\Lambda,p}}+\widetilde{L}^{(j)}\Big).$$

˜因此对于 $j\in\{1,...,k\}-J_1$

$$c_j\widetilde{c}_j=1_{A^{(j)}_{\Lambda,p}},\quad\text{so}\quad c_j\in F^{(j)}_{\Lambda,p}-\{0\}.$$

由 $J_2\subset J_1$ 定义满足 $c_j=0$的指标集 $j$。定义

$$a_3:=a_2+\sum_{j\in J_2}e_j\in a_2+L\subset\Lambda.$$

˜于是对每个 $j\in\{1,...,k\}$，$a_3+p\Lambda\in\Lambda/p\Lambda$ 都有一个非零部分$c_j$ 或$1_{A^{(j)}_{\Lambda,p}}$位于 $F^{(j)}_{\Lambda,p}$中。因此 $a_3+p\Lambda\in(\Lambda/p\Lambda)^{unit}$，故由引理 7.5 (b) 得 $a_3\in\Lambda^{unit}_{(p)}$。□

**注记 7.7.** 若在定理 7.6 $L\subset p\Lambda$ 的证明中，则 $J_1=\emptyset$ 与$a_3=a_2$ 出现在该证明中。于是，$(\Lambda/L)^{unit}$ 中某个类在 $\Lambda$ 中的任一原像都属于 $\Lambda^{unit}_{(p)}$。包含 $L\subset p\Lambda$ 常常成立，但并非总是如此。

## 8. Exact sequences for an order and a smaller order

在整篇论文中，$A$ 均如定理 3.1 所述，因此 $A$ 是一个具有单位元 $1_A$的有限维交换 ℚ-代数。

若存在 $\mathcal{O}(L_1)\supset\mathcal{O}(L_2)$且 $L_2$ 可逆，则公式 (5.3) 可以改进。这是引理 8.1 (a) 所讨论的内容。

**引理 8.1.** （*a*）设 $L_1,L_2\in\mathcal{L}(A)$ 满足 $\mathcal{O}(L_1)\supset\mathcal{O}(L_2)$，且 $L_2$可逆。那么

$$\mathcal{O}(L_1L_2)=\mathcal{O}(L_1),\quad L_1:L_2=L_1L_2^{-1},\quad\mathcal{O}(L_1:L_2)=\mathcal{O}(L_1).$$

(*b*) 设 $\Lambda_1$ 和 $\Lambda_2 \in \mathcal{L}(A)$ 是两个序，满足 $\Lambda_2 \subsetneqq \Lambda_1$。若 $L \in G(\Lambda_2)$，则 $\Lambda_1 L \in G(\Lambda_1)$。这导出了群同态

$$G(\Lambda_2) \to G(\Lambda_1), \qquad L \mapsto \Lambda_1 L, \tag{8.1}$$

$$G([\Lambda_2]_\varepsilon) \to G([\Lambda_1]_\varepsilon), \qquad [L]_\varepsilon \mapsto [\Lambda_1 L]_\varepsilon. \tag{8.2}$$

**证明：** (a) 假设 $a \in \mathcal{O}(L_1 L_2)$。那么

$$aL_1 = aL_1\mathcal{O}(L_2) = aL_1L_2L_2^{-1} \subset L_1L_2L_2^{-1} = L_1\mathcal{O}(L_2) = L_1,$$

因此 $a \in \mathcal{O}(L_1)$，所以 $\mathcal{O}(L_1L_2) \subset \mathcal{O}(L_1)$。结合 (5.3) 即得等式。

根据 $L_1 : L_2$ 的定义，我们有 $(L_1 : L_2)L_2 \subset L_1$。这给出下一公式中的 $\subset$，其中第一个 $=$ 来自 (5.3)，

$$L_1 : L_2 = (L_1 : L_2)\mathcal{O}(L_2) = (L_1 : L_2)L_2L_2^{-1} \subset L_1L_2^{-1}.$$

$L_1 : L_2 \supset L_1L_2^{-1}$成立，因为 $\mathcal{O}(L_2) \subset \mathcal{O}(L_1)$。我们得到 $L_1 : L_2 = L_1L_2^{-1}$。最后，由于 $L_2^{-1}$ 可逆且 $\mathcal{O}(L_2^{-1}) = \mathcal{O}(L_2) \subset \mathcal{O}(L_1)$，$\mathcal{O}(L_1L_2^{-1}) = \mathcal{O}(L_1)$。

(b) $(\Lambda_1 L)L^{-1} = \Lambda_1\Lambda_2 = \Lambda_1$ 以及 $\Lambda_1(\Lambda_1 L) = \Lambda_1 L$ 表明，$\Lambda_1 L$ 可逆，且 $\mathcal{O}(\Lambda_1 L) = \Lambda_1$。因此，(8.1) 和 (8.2) 中的映射均定义良好。显然，它们是群同态。□

定理 8.2 讨论了 (8.1) 和 (8.2) 中的群同态。事实证明，它们是满射，并且是 (8.3) 和 (8.7) 中正合列的一部分。定理 8.2 使用第 7 节中的局部化 $\mathbb{Z} \dashrightarrow \mathbb{Z}_{(p)}$。它与 [Ne99, Ch. I §12] 中的结果有相似之处，并对其进行了推广。注记 8.3 对此有进一步说明。

**定理 8.2.** 设 $\Lambda_1$ 和 $\Lambda_2$ 是 $A$ 中的两个序，且满足 $\Lambda_2 \subsetneqq \Lambda_1$。满格 $C := \Lambda_2 : \Lambda_1$ 称为有序对 $(\Lambda_1, \Lambda_2)$的导子。根据定理 *7.2 (b)*，集合 $P_0 := \{p \in \mathbb{P} \mid (\Lambda_1)_{(p)} \neq (\Lambda_2)_{(p)}\}$ 是有限的。

*(a)* $\mathcal{O}(C) \supset \Lambda_1$。导子 $C$ 是 $\Lambda_2$ 中最大的 $\Lambda_1$-理想。

*(b)* 下列序列是正合的，

$$1 \to \prod_{p\in P_0} (\Lambda_2)_{(p)}^{unit} \to \prod_{p\in P_0} (\Lambda_1)_{(p)}^{unit} \to G(\Lambda_2) \to G(\Lambda_1) \to 1. \tag{8.3}$$

特别地，(8.1) 中的群同态是满射。这里，元组 $(a_p)_{p\in P_0} \in \prod_{p\in P_0}(\Lambda_1)_{(p)}^{unit}$在 $G(\Lambda_2)$ 中的像 $L$ 如下给出。定义 $a_p := 1_A$，其中 $p \in \mathbb{P} - P_0$。根据定理 *7.2 (c)*，存在唯一的满格 $L$，它属于 $A$，且对每个 $p \in \mathbb{P}$都有 $L_{(p)} = a_p(\Lambda_2)_{(p)}$，即$L = \bigcap_{p\in\mathbb{P}} a_p(\Lambda_2)_{(p)}$。

*(c)* 存在一个群的自然同构

$$(\Lambda_1/C)^{unit}/(\Lambda_2/C)^{unit} \;\to\; \bigoplus_{p\in P_0} (\Lambda_1)_{(p)}^{unit}/(\Lambda_2)_{(p)}^{unit}. \tag{8.4}$$

*(d)* 群同构

$$(\Lambda_1/C)^{unit}/(\Lambda_2/C)^{unit} \;\to\; \ker\big(G(\Lambda_2)\to G(\Lambda_1)\big) \tag{8.5}$$

由 *(b)* 和 *(c)* 得到的结果为

$$((a+C)\bmod(\Lambda_2/C)^{unit}) \;\mapsto\; C+a\Lambda_2, \tag{8.6}$$

其中 $a\in\Lambda_1$, $a+C\in(\Lambda_1/C)^{unit}\subset\Lambda_1/C$。

*(e)* 以下序列中的映射均为自然映射，且该序列正合，

$$1\to\Lambda_2^{unit}\to\Lambda_1^{unit}\to\prod_{p\in P_0}\frac{(\Lambda_1)_{(p)}^{unit}}{(\Lambda_2)_{(p)}^{unit}}\to G([\Lambda_2]_\varepsilon)\to G([\Lambda_1]_\varepsilon)\to 1. \tag{8.7}$$

特别地，(8.2) 中的群同态是满射。

*(f)* 群 $\Lambda_2^{unit}$在群 $\Lambda_1^{unit}$中具有有限指数。由定理 *6.5*，群 $G([\Lambda_2]_\varepsilon)$ 与 $G[\Lambda_1]_\varepsilon)$ 都是有限的。其中一个的大小可由另一个的大小通过下列公式计算，

$$\frac{|G([\Lambda_2]_\varepsilon)|}{|G([\Lambda_1]_\varepsilon)|} \;=\; \frac{|(\Lambda_1/C)^{unit}|}{|(\Lambda_2/C)^{unit}|}\cdot\frac{1}{[\Lambda_1^{unit}:\Lambda_2^{unit}]}. \tag{8.8}$$

**证明：** (a) $\mathcal{O}(C)\supset\Lambda_1$ 由 (5.3) 得出。因此 $C$ 是一个 $\Lambda_1$-理想。$\Lambda_2$ 中的任一$\Lambda_1$-理想都包含于 $\Lambda_2$： $\Lambda_1=C$。另一方面， $1_A\in\Lambda_1$蕴含 $C=C\cdot 1_A\subset C\cdot\Lambda_1\subset\Lambda_2$。因此 $C$是 $\Lambda_2$中的一个 $\Lambda_1$-理想。因此$C$ 是 $\Lambda_2$中唯一最大的 $\Lambda_1$-理想。

(b) 我们分四步进行证明。

步骤 1：在步骤 1 中，我们证明 (8.1) 中的映射是满射。设$L_1\in G(\Lambda_1)$。对几乎所有的 $p\in\mathbb{P}$ $(L_1)_{(p)}=(\Lambda_1)_{(p)}$。对这些 $p$定义 $b_p:=1_A$。对满足 $(L_1)_{(p)}\neq(\Lambda_1)_{(p)}$ 的有限多个 $p\in\mathbb{P}$，由定理 7.3 以及$L_1\in G(\Lambda_1)$, 对某个 $b_p\in A^{unit}$ 我们有 $(L_1)_{(p)}=b_p(\Lambda_1)_{(p)}$。由定理 7.2 (c)，存在唯一的满格 $L_2$，使得对每个 $p\in\mathbb{P}$有 $(L_2)_{(p)}=b_p(\Lambda_2)_{(p)}$，即 $L_2=\bigcap_{p\in\mathbb{P}}b_p(\Lambda_2)_{(p)}$。由定理 7.3，它属于 $G(\Lambda_2)$。现在

$$(\Lambda_1L_2)_{(p)}=a_p(\Lambda_1)_{(p)}(\Lambda_2)_{(p)}=a_p(\Lambda_1)_{(p)}=(L_1)_{(p)}\quad\text{for each } p\in\mathbb{P},$$

因此 $\Lambda_1L_2=L_1$。(8.1)中的映射是满射。

步骤 2：给定一个元组 $(a_p)_{p\in P_0}\in\prod_{p\in P_0}(\Lambda_1)_{(p)}^{unit}$，对每个 $p\in\mathbb{P}-P_0$ $a_p:=1_A$ 定义，并考虑满格 $L:=\bigcap_{p\in\mathbb{P}}a_p(\Lambda_2)_{(p)}$，它由定理 7.2 (c) 保证存在。这里我们证明 $L\in\ker(G(\Lambda_2)\to G(\Lambda_1))$。由定理 7.3 $L\in G(\Lambda_2)$。注意

$$(\Lambda_1L)_{(p)}=a_p(\Lambda_1\Lambda_2)_{(p)}=a_p(\Lambda_1)_{(p)}\overset{(*)}{=}(\Lambda_1)_{(p)}\quad\text{for each } p\in\mathbb{P}.$$

这里 $\overset{(*)}{=}$ 由 $a_p \in (\Lambda_1)_{(p)}^{unit}$ 对 $p \in P_0$ 以及 $a_p = 1_A$ 对 $p \in \mathbb{P} - P_0$推出。这个观察表明 $\Lambda_1 L = \Lambda_1$，因此 $L \in \ker(G(\Lambda_2) \to G(\Lambda_1))$。

步骤 3：反之，考虑满格 $L_3 \in$ 核$(G(\Lambda_2) \to G(\Lambda_1))$。对于 $p \in \mathbb{P} - P_0$

$$\begin{aligned}(L_3)_{(p)} &= (\Lambda_2 L_3)_{(p)} = (\Lambda_2)_{(p)}(L_3)_{(p)} \\ &= (\Lambda_1)_{(p)}(L_3)_{(p)} = (\Lambda_1 L_3)_{(p)} = (\Lambda_1)_{(p)} = (\Lambda_2)_{(p)}.\end{aligned}$$

对于 $p \in P_0$，根据定理 7.3 和 $L_3 \in G(\Lambda_2)$，存在 $c_p \in A^{unit}$，使得 $(L_3)_{(p)} = c_p(\Lambda_2)_{(p)}$。对于 $p \in P_0$

$$(\Lambda_1)_{(p)} = (\Lambda_1 L_3)_{(p)} = (\Lambda_1)_{(p)} c_p (\Lambda_2)_{(p)} = c_p(\Lambda_1)_{(p)}, \quad \text{so } c_p \in (\Lambda_1)_{(p)}^{unit}.$$

$L_3$ 属于元组 $(c_p)_{p\in P_0} \in \prod_{p\in P_0}(\Lambda_1)_{(p)}^{unit}$的像。

步骤 4：映射 $\prod_{p\in P_0}(\Lambda_1)_{(p)}^{unit} \to G(\Lambda_2)$ 的核为$\prod_{p\in P_0}(\Lambda_2)_{(p)}^{unit}$，因为 $a_p(\Lambda_2)_{(p)} = (\Lambda_2)_{(p)}$ 等价于 $a_p \in (\Lambda_2)_{(p)}^{unit}$。

(c) 定理 7.6 (a) 中的 (7.5) 的同构对 $(\Lambda, L) = (\Lambda_1, C)$ 以及 $(\Lambda, L) = (\Lambda_2, C)$ 均成立。它诱导出一个群同构

$$\begin{aligned}\frac{(\Lambda_1/C)^{unit}}{(\Lambda_2/C)^{unit}} &\to \Big(\prod_{p\in P_0}((\Lambda_1)_{(p)}/C_{(p)})^{unit}\Big)/\Big(\prod_{p\in P_0}((\Lambda_2)_{(p)}/C_{(p)})^{unit}\Big) \\ &\cong \prod_{p\in P_0}\frac{((\Lambda_1)_{(p)}/C_{(p)})^{unit}}{((\Lambda_2)_{(p)}/C_{(p)})^{unit}}. \qquad (8.9)\end{aligned}$$

还需证明，对每个 $p \in P_0$，都存在一个群的自然同构

$$\frac{(\Lambda_1)_{(p)}^{unit}}{(\Lambda_2)_{(p)}^{unit}} \to \frac{((\Lambda_1)_{(p)}/C_{(p)})^{unit}}{((\Lambda_2)_{(p)}/C_{(p)})^{unit}}. \qquad (8.10)$$

由定理 7.6 (b)，存在自然的满射群同态

$$(\Lambda_1)_{(p)}^{unit} \to ((\Lambda_1)_{(p)}/C_{(p)})^{unit} \quad \text{and} \quad (\Lambda_2)_{(p)}^{unit} \to ((\Lambda_2)_{(p)}/C_{(p)})^{unit}.$$

复合群同态

$$(\Lambda_1)_{(p)}^{unit} \to ((\Lambda_1)_{(p)}/C_{(p)})^{unit} \to \frac{((\Lambda_1)_{(p)}/C_{(p)})^{unit}}{((\Lambda_2)_{(p)}/C_{(p)})^{unit}} \qquad (8.11)$$

是满射，且其核包含 $(\Lambda_2)_{(p)}^{unit}$。

我们要证明核恰好是 $(\Lambda_2)_{(p)}^{unit}$。设 $a \in (\Lambda_1)_{(p)}^{unit}$ 属于核。我们要证明 $a \in (\Lambda_2)_{(p)}^{unit}$。

$a$ 在$((\Lambda_1)_{(p)}^{unit}/C_{(p)})^{unit}$ 中的像属于$((\Lambda_2)_{(p)}/C_{(p)})^{unit}$，因此根据定理 7.6 (b)，它在$(\Lambda_2)_{(p)}^{unit}$中有一个原像 $b$。因此，$ab^{-1}$ 具有

$((\Lambda_1)_{(p)}/C_{(p)})^{unit}$ 中的单位元，作为$((\Lambda_1)_{(p)}/C_{(p)})^{unit}$中的像。因此 $ab^{-1} = 1_A + f$，其中某个 $f \in C_{(p)}$。所以 $a = b + bf \in (\Lambda_2)_{(p)}$。同样的论证表明 $a^{-1} \in (\Lambda_2)_{(p)}$，因此 $a \in (\Lambda_2)^{unit}_{(p)}$。因此，(8.11)中的复合映射的核为$(\Lambda_2)^{unit}_{(p)}$。

(d) 考虑具有 $a + C \in (\Lambda_1/C)^{unit}$ 的 $a \in \Lambda_1$。我们断言

$$(a + C)\Lambda_1 = \Lambda_1. \tag{8.12}$$

断言的证明：存在一个元素 $\widetilde{a} \in \Lambda$，具有 $(a + C)(\widetilde{a} + C) = 1_A + C$。于是

$$\Lambda_1 \supset (a + C)\Lambda_1 \supset (a + C)(\widetilde{a} + C)\Lambda_1 = (1_A + C)\Lambda_1 = \Lambda_1. \qquad (\square)$$

根据定理 7.6 (b) 的证明，对每个 $p \in P_0$，都存在一个元素 $d_p \in a + C \subset \Lambda_1$，具有 $d_p \in (\Lambda_1)^{unit}_{(p)}$。

根据 (c) 部分的证明，在 $\bigoplus_{p\in P_0}(\Lambda_1)^{unit}_{(p)}/(\Lambda_2)^{unit}_{(p)}$ 中，类 $((a + C) \bmod (\Lambda_2/C)^{unit})$ 在 (8.4) 中的同构下的像，是元组 $(d_p)_{p\in P_0} \in \prod_{p\in P_0}(\Lambda_1)^{unit}_{(p)}$ 的类。

定义 $d_p := 1_A$，其中 $p \in \mathbb{P} - P_0$。由 (b) 部分可知，$(d_p)_{p\in P_0}$ 在 $\ker(G(\Lambda_2) \to G(\Lambda_1))$ 中的像是满格 $L = \bigcap_{p\in P_0} d_p(\Lambda_2)_{(p)}$。还需证明 $L = C + a\Lambda_2$。

对于 $p \in P_0$，记 $a = d_p + f_p$，其中某个 $f_p \in C$。对于 $p \in P_0$

$$\begin{aligned}(C + a\Lambda_2)_{(p)} &= (C + d_p\Lambda_2 + f_p\Lambda_2)_{(p)} = (C + d_p\Lambda_2)_{(p)} \\ &= C_{(p)} + d_p(\Lambda_2)_{(p)} = d_pC_{(p)} + d_p(\Lambda_2)_{(p)} \\ &= d_p(C + \Lambda_2)_{(p)} = d_p(\Lambda_2)_{(p)}.\end{aligned}$$

对于 $p \in \mathbb{P} - P_0$

$$\begin{aligned}(C + a\Lambda_2)_{(p)} &= C_{(p)} + a(\Lambda_2)_{(p)} = C_{(p)} + a(\Lambda_1)_{(p)} = ((C + a)\Lambda_1)_{(p)} \\ &\overset{(8.12)}{=} (\Lambda_1)_{(p)} = (\Lambda_2)_{(p)} = d_p(\Lambda_2)_{(p)}.\end{aligned}$$

因此 $L = \bigcap_{p\in\mathbb{P}}(C + a\Lambda_2)_{(p)} = C + a\Lambda_2$。这证明了 (d) 部分。

(e)**断言：** 群同态

$$\ker(G(\Lambda_2) \to G(\Lambda_1)) \to \ker(G([\Lambda_2]_\varepsilon) \to G([\Lambda_1]_\varepsilon))$$

是满射。

断言的证明：考虑 $L \in G(\Lambda_2)$，其中 $[L]_\varepsilon \in \ker(G([\Lambda_2]_\varepsilon) \to G([\Lambda_1]_\varepsilon))$。于是 $[\Lambda_1 L]_\varepsilon = [\Lambda_1]_\varepsilon$，所以存在一个元素 $a \in A^{unit}$ 满足 $\Lambda_1 L = a\Lambda_1$。定义 $L := a^{-1}L$。于是 $[L]_\varepsilon = [L]_\varepsilon$, $L \in G(\Lambda_2)$, $\Lambda_1 L = \Lambda_1$，所以 $L \in \ker(G(\Lambda_2) \to G(\Lambda_1))$。$(\square)$

断言以及 (8.3) 中序列的正合性表明，该部分

$$\prod_{p\in P_0}(\Lambda_1)_{(p)}^{unit}/(\Lambda_2)_{(p)}^{unit}\to G([\Lambda_2]_\varepsilon)\to G([\Lambda_1]_\varepsilon)\to 1$$

(8.7) 中序列是正合的。

由于 $\Lambda_2^{unit}=\bigcap_{p\in\mathbb{P}}(\Lambda_2)_{(p)}^{unit}$映射的核

$$\Lambda_1^{unit}\to\prod_{p\in P_0}(\Lambda_1)_{(p)}^{unit}/(\Lambda_2)_{(p)}^{unit} \tag{8.13}$$

为 $\Lambda_2^{unit}$。接下来需要证明，(8.13) 中映射的像就是该映射的核

$$\prod_{p\in P_0}(\Lambda_1)_{(p)}^{unit}/(\Lambda_2)_{(p)}^{unit}\to G([\Lambda_2]_\varepsilon). \tag{8.14}$$

首先考虑 $a\in\Lambda_1^{unit}$以及 $(a_p)_{p\in\mathbb{P}}$，其中 $a_p:=a$（对于 $p\in P_0$）以及 $a_p:=1_A$（对于 $p\in\mathbb{P}-P_0$）。元组 $(a_p)_{p\in P_0}\in\prod_{p\in P_0}(\Lambda_1)_{(p)}^{unit}$在 $G(\Lambda_2)$ 中对应于类 $\mathrm{in}\prod_{p\in P_0}(\Lambda_1)_{(p)}^{unit}/(\Lambda_2)_{(p)}^{unit}$的像为

$$\begin{aligned}L &:= \bigcap_{p\in\mathbb{P}}a_p(\Lambda_2)_{(p)}=\bigcap_{p\in P_0}a(\Lambda_2)_{(p)}\cap\bigcap_{p\in\mathbb{P}-P_0}(\Lambda_2)_{(p)}\\ &= \bigcap_{p\in\mathbb{P}}a(\Lambda_2)_{(p)}=a\Lambda_2\in[\Lambda_2]_\varepsilon.\end{aligned}$$

因此，(8.13) 中映射的像包含于 (8.14) 中映射的核。

最后，考虑一个元组 $(a_p)_{p\in P_0}\in\prod_{p\in P_0}(\Lambda_1)_{(p)}^{unit}$，其在$\prod_{p\in P_0}(\Lambda_1)_{(p)}^{unit}/(\Lambda_2)_{(p)}^{unit}$中的类属于(8.14)中映射到 $G([\Lambda_2]_\varepsilon)$的核。定义 $a_p:=1_A$，其中 $p\in\mathbb{P}-P_0$。于是，对于每个 $p\in\mathbb{P}$，满足$L_{(p)}=a_p(\Lambda_2)_{(p)}$ 的满格 $L$ 满足 $[L]_\varepsilon=[\Lambda_2]_\varepsilon$。因此，对于某个 $b\in A^{unit}$，有 $L=b\Lambda_2$。与 $L_{(p)}=a_p(\Lambda_2)_{(p)}$ 比较可得

$$\frac{b}{a_p}\in(\Lambda_2)_{(p)}^{unit}\subset(\Lambda_1)_{(p)}^{unit}\quad\text{for each } p\in\mathbb{P},$$

因此 $b\in\bigcap_{p\in\mathbb{P}}(\Lambda_1)_{(p)}^{unit}=\Lambda_1^{unit}$。所以，(8.13)中映射的像就是(8.14)中映射的核。

(f) (c) 部分中同构的左侧显然是有限的。应用 (e) 部分中的正合序列以及 (c) 部分中的同构。特别地，群 $\Lambda_2^{unit}$在群$\Lambda_1^{unit}$中具有有限指数。□

**注记 8.3.** 将定理 8.2 与 [Ne99, Ch. I §12], 进行比较，该参考文献存在以下限制和差异。这里 $A$是

一个代数数域， $\Lambda_1$ 是 $A$中的极大阶 $\Lambda_{max}$ ，并且通过 $\Lambda_2$中的素理想进行局部化。于是， [Ne99, Ch. I §12] 中的命题 (12.9) 和 (12.11) 分别对应定理 8.2 的 (e) 部分和 (c) 部分。 [Ne99, Ch. I §12]中的定理 (12.12) 是定理 8.2 的 (f) 部分的一个特例。

当 $A$ 是代数数域时，(8.1) 中映射的满射性也已在 [DTZ62, Corollary 2.1.11] 中得到证明。

## 9. Dividing out the radical

在整篇论文中， $A$ 均与定理 3.1 中相同，因此 $A$ 是一个带单位元 $1_A$的有限维交换 $\mathbb{Q}$-代数。我们采用定理 3.1 中的记号。回顾一下，根基 $R = \bigoplus_{j=1}^{k} N^{(j)}$ 是一个理想，且其中所有元素都是幂零的。回顾一下，可分子代数$F := \bigoplus_{j=1}^{k} F^{(j)} \subset A$ of $A$、自然分解 $A = F \oplus R$，以及诱导投影 $\mathrm{pr}_F$： $A \to F$。根据注 3.2 (ii)，它在 $A$ 和 $F$ 中保持加法、乘法和除法。

本节致力于研究投影 $\mathrm{pr}_F : A \to F$对可逆满格的作用。首先，引理 9.1陈述一些基本事实。

**引理 9.1**。 *(a)* 满格在 $A$ 中的像 $\mathrm{pr}_F L$ 是 $F$中的满格。投影 $\mathrm{pr}_F$: $A \to F$ 与 $\mathcal{L}(A)$ 和 $\mathcal{L}(F)$中的乘法相容，

$$\mathrm{pr}_F(L_1 \cdot L_2) = \mathrm{pr}_F L_1 \cdot \mathrm{pr}_F L_2 \quad \text{for } L_1, L_2 \in \mathcal{L}(A). \tag{9.1}$$

它诱导出一个半群的满射同态 $\mathrm{pr}_F$： $\mathcal{L}(A) \to \mathcal{L}(F)$ 。特别地，它将幂等元映射为幂等元，因此将序映射为序。因此，它限制为一个满射同态

$$\mathrm{pr}_F : \{\text{orders in } A\} \to \{\text{orders in } F\} \tag{9.2}$$

半群的同态。不过，它不保持除法映射。一般而言，我们只有

$$\mathrm{pr}_F(L_1 : L_2) \subset \mathrm{pr}_F L_1 : \mathrm{pr}_F L_2 \quad \text{for } L_1, L_2 \in \mathcal{L}(A). \tag{9.3}$$

*(b)* 投影 $\mathrm{pr}_F$： $\mathcal{L}(A) \to \mathcal{L}(F)$ 保持 $\varepsilon$-等价和$w$-等价。因此，它诱导出满射同态

$$\mathrm{pr}_F : \mathcal{E}(A) \to \mathcal{E}(F), \tag{9.4}$$

$$\mathrm{pr}_F : W(\mathcal{L}(A)) \to W(\mathcal{L}(F)) \tag{9.5}$$

半群的同态。

*(c)* 一般而言，对于 $L \in \mathcal{L}(A)$ ，我们只有包含 $\mathrm{pr}_F \mathcal{O}(L) \subset \mathcal{O}(\mathrm{pr}_F L)$。但如果 $L$ 可逆，那么 $\mathrm{pr}_F L$ 可逆，且有$\mathcal{O}(\mathrm{pr}_F L) = \mathrm{pr}_F(\mathcal{O}(L))$ 以及 $(\mathrm{pr}_F L)^{-1} = \mathrm{pr}_F (L^{-1})$。

*(d)* 设 $\Lambda$ 是 $L$ 中的一个序。记 $\Lambda_0 := \mathrm{pr}_F \Lambda$ 为 $F$ 中诱导出的序。由 *(c)* 可得到两个群同态，

$$G(\Lambda) \to G(\Lambda_0), \quad L \mapsto \mathrm{pr}_F L, \tag{9.6}$$

$$G([\Lambda]_\varepsilon) \to G([\Lambda_0]_\varepsilon), \quad [L]_\varepsilon \mapsto [\mathrm{pr}_F L]_\varepsilon. \tag{9.7}$$

**证明：** (a) 和 (b) 两部分显然。由 (9.3) 可得包含 $\mathrm{pr}_F \mathcal{O}(L) \subset \mathcal{O}(\mathrm{pr}_F L)$。设 $L \in \mathcal{O}(L)$ 可逆。于是由 (9.1)

$$\mathrm{pr}_F L \cdot \mathrm{pr}_F L^{-1} = \mathrm{pr}_F(L \cdot L^{-1}) = \mathrm{pr}_F(\mathcal{O}(L)),$$

因此，$\mathrm{pr}_F L$ 可逆，且 $\mathcal{O}(\mathrm{pr}_F L) = \mathrm{pr}_F \mathcal{O}(L)$，并且 $(\mathrm{pr}_F L)^{-1} = \mathrm{pr}_F L^{-1}$。现在 (d) 部分显然。□

(9.6) 和 (9.7) 中的群同态具有出人意料的良好性质。定理 9.2 中较难的部分源自 Faddeev[Fa68，定理 3]，，即 (9.7) 中映射的单射性。

**定理 9.2**。(9.6) 中的群同态是满射。(9.7) 中的群同态是同构。

**证明：** 我们证明 (9.6) 中的群同态是满射。这立即意味着 (9.7) 中的群同态也是满射。结合 Faddeev 的结果 [Fa68，即定理 3] 指出 (9.7) 中的群同态是单射，可知它是同构。

令 $L_0 \in G(\Lambda_0)$，则 $L_0 \in \mathcal{L}(F)$ 可逆，且 $\mathcal{O}(L_0) = \Lambda_0$。根据定理 7.3，对每个 $p \in \mathbb{P}$，都存在一个元素 $a_p \in F^{unit}$，使得

$$(L_0)_{(p)} = a_p(\Lambda_0)_{(p)},$$

并且存在一个有限集 $P_0 \subset \mathbb{P}$，使得我们可以为 $p \in \mathbb{P} - P_0$ 选择 $a_p = 1$。

显然 $F^{unit} \subset A^{unit}$。根据定理 7.2 (c)，在 $A$ 中存在唯一的满格 $L$，满足

$$L_{(p)} = a_p \Lambda_{(p)} \quad \text{for each } p \in \mathbb{P}.$$

根据定理 7.3，它可逆，且 $\mathcal{O}(L) = \Lambda$。显然 $\mathrm{pr}_F(L) = L_0$。

这说明（9.6）和（9.7）中的映射是满射的。根据 [Fa68，定理 3]，（9.7）中的映射是单射的。□

**注 9.3.** (i) Faddeev 对（9.7）中映射单射性的证明也使用了第 7 节中的局部化。这并不难。我们给出一个不借助局部化的不同证明。

(ii) 上文对 (9.6) 中映射的满射性的证明使用了第 7 节中的局部化。它很简单。不过在这种情况下我们并没有

一种不借助局部化的不同证明。若不使用第 7 节的工具，似乎很难看出满射性。

(iii) 根据 Jordan-Zassenhaus 定理 6.3，(9.7) 中的第二个群 $G([\Lambda_0]_\varepsilon)$ 是有限的。因此，(9.7) 中的第一个群 $G([\Lambda]_\varepsilon)$ 也是有限的。我们从定理 6.5 已经知道这一点。但两个群的大小相等则是新的结论。

(iv) 根据 (5.13)，由满格 $L$ （满足 $\mathcal{O}(L) = \Lambda$ ）构成的 $\varepsilon$-类 $[L]_\varepsilon$ 的任意 $w$- 等价类，都与 $G([\Lambda]_\varepsilon)$ 一一对应，因此是有限的。因此，如果我们能独立证明，对于 $A$ 中的每个序 $\Lambda$ ，具有该序的 $w$-等价类数量有限，那么就能得到定理 6.5 的第二个证明。

(v) 假设 $A \supsetneqq F$，因此 $A$ 不可分。设 $\Lambda_0$ 是 $F$ 中的一个序。根据定理 6.4， $A$ 中存在无穷多个满足 $\mathrm{pr}_F \Lambda = \Lambda_0$ 的序 $\Lambda$ 。根据定理 9.2，对于所有这些序，其有限群 $G([\Lambda]_\varepsilon)$ 均与 $G([\Lambda_0)]_\varepsilon)$ 典范同构，因此彼此之间也典范同构。若 $\Lambda$ 和 $\Lambda$ 是两个这样的序，且 $\Lambda \supset \sim \sim \Lambda$ ，那么由定理 8.2 得到的满群同态 $G([\Lambda]_\varepsilon) \to G([\Lambda]_\varepsilon)$，是由 $G([\Lambda]_\varepsilon) \cong G([\Lambda_0]_\varepsilon) \cong G([\Lambda]_\varepsilon)$ 诱导的同构。

(vi) 但在 $A \supsetneqq F$ 的情形下，对于两个序 $\Lambda$ and $\Lambda$ in $A$ with $\mathrm{pr}_F \Lambda = \mathrm{pr}_F \Lambda$，有限集 $\{[L]_\varepsilon \mid L \in \mathcal{L}(A)\ \mathcal{O}(L) = \Lambda\}$ and $\{[L]_\varepsilon \mid L \in \mathcal{L}(A)\ \mathcal{O}(L) = \Lambda\}$ 的大小可能相差很大。

## 10. Sufficiently high powers of full lattices are invertible

[DTZ62] 中的一个主要结果是第 1.5 节中的定理 C。该定理指出，若 $A$ 是维数为 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ 的代数数域，则对于每个满格 $L \in \mathcal{L}(A)$，每个满足 $k \geq n-1$ 的幂 $L^k$ 都是可逆的。 [Si70 中的定理 2] 将这一结果推广到了 $A$ 可分的情形，即代数数域的直和。这里我们进一步将其推广到我们的标准情形。

**定理 10.1**。 设 $A$ 是一个维数为 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ 、具有单位元 $1_A$ 的交换 $\mathbb{Q}$-代数。对于每个满格 $L \in \mathcal{L}(A)$ ，每个满足 $k \geq n-1$ 的幂$L^k$ 都是可逆的。

我们的证明大致遵循 [DTZ62, 2.2] 中的证明。不过两者存在差异。 [DTZ62, 2.2] 中的证明涵盖了一些情形，它们以一种与我们无关的方式推广了代数数域的情形 $A$ 。 [DTZ62, 1.5] 中的定理 C 附有定理 A 和定理 B，但它们不适用于我们的情形。证明

在 [DTZ62, 2.2] 中的证明使用了素理想局部化。我们的证明使用第 7 节中的局部化 $\mathbb{Z} \dashrightarrow \mathbb{Z}_{(p)}$。

一个重要的第一步是定理 10.2，它是[DTZ62, 2.2.2 命题] 的类比，而且本身也具有独立的研究价值。在代数数域的情形下，定理 10.2 和 [DTZ62, 2.2.2 命题]都变得平凡。此时可以选取 $\Lambda = \Lambda_{max}$。我们对定理 10.2 的证明与 [DTZ62, 2.2.2 命题]的证明截然不同。

定理 10.1 证明中的后续步骤与 [DTZ62, 2.2]中的步骤类似。它们的大部分结论汇集在定理 10.3 中。我们先证明定理 10.2，再证明定理 10.3，最后证明定理 10.1。

**定理 10.2**。设 $A$ 是一个带单位元 $1_A$ 的有限维交换 $\mathbb{Q}$代数。设 $L \in \mathcal{L}(A)$ 是一个满格。存在一个序 $\Lambda \supset \mathcal{O}(L)$，满足 $\Lambda L \in G(\Lambda)$（因此 $\mathcal{O}(\Lambda L) = \Lambda$ 且 $\Lambda L$ 可逆）。

**证明：**我们将先构造一个序 $\Lambda$，然后证明它可行。回顾分解 $A = \bigoplus_{j=1}^{k} A^{(j)}$，其中某个 $k \in \mathbb{N}$ 满足$A^{(j)}$，如定理 3.1 中的 (i)–(iii) 所述，特别是 $A^{(j)} = F_{(j)} \oplus N_{(j)}$，其中$F_{(j)}$是一个代数数域，且 $N^{(j)}$ 是$A^{(j)}$中的唯一极大理想。

对 $j \in \{1, ..., k\}$，定义 $n_j := \max(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid (N^{(j)})^n \neq \{0\})$。递减滤过的子空间

$$A^{(j)} = (N^{(j)})^0 \supset N^{(j)} \supset (N^{(j)})^2 \supset ... \supset (N^{(j)})^{n_j} \supset (N^{(j)})^{n_j+1} = \{0\}$$

是 $F^{(j)}$-向量空间。选取一个分裂

$$A^{(j)} = B^{(j,0)} \oplus B^{(j,1)} \oplus ... \oplus B^{(j,n_j)} \tag{10.1}$$

分解为 $F_{(j)}$-向量空间，其中 $B^{(j,0)} = F^{(j)}$ 给出该滤过的分裂，因此有

$$(N^{(j)})^l = B^{(j,l)} \oplus (N^{(j)})^{l+1} \quad \text{for } l \in \{0, 1, ..., n_j\}. \tag{10.2}$$

Then

$$B^{(j,l_1)} \cdot B^{(j,l_2)} \subset \bigoplus_{l \geq l_1 + l_2} B^{(j,l)} \quad \text{and} \quad B^{(j,0)} \cdot B^{(j,l)} = B^{(j,l)}. \tag{10.3}$$

令 $\mathrm{pr}_{(j,l)} : A \to B^{(j,l)}$ 为关于分裂$A = \bigoplus_{j=1}^{k} \bigoplus_{l=0}^{n_j} B^{(j,l)}$的投影。考虑满格

$$L^{(j,L)} := \mathrm{pr}_{(j,l)}(L) \in \mathcal{L}(B^{(j,l)}) \tag{10.4}$$

在 $B^{(j,l)}$ 中。

我们可以并且将会对每个 $(j,l) \in \{1,...,k\} \times \{0,1,...,n_j\}$ 在 $B^{(j,l)}$ 中选取一个满格 $B_{\mathbb{Z}}^{(j,l)} \in \mathcal{L}(B^{(j,l)})$，使得对于固定的$j$ 的满格具有以下性质:

$$\begin{aligned} B_{\mathbb{Z}}^{(j,0)} &= \Lambda_{max}(F^{(j)}), && (10.5)\\ B_{\mathbb{Z}}^{(j,l)} L^{(j,0)} &\supset L^{(j,l)}, && (10.6)\\ B_{\mathbb{Z}}^{(j,l)} &\supset \mathrm{pr}_{(j,l)}(\mathcal{O}(L)), && (10.7)\\ B_{\mathbb{Z}}^{(j,l_1)} B_{\mathbb{Z}}^{(j,l_2)} &\subset \sum_{l \geq l_1+l_2} B_{\mathbb{Z}}^{(j,l)}. && (10.8) \end{aligned}$$

事实上，(10.8) 包含

$$B_{\mathbb{Z}}^{(j,0)} B_{\mathbb{Z}}^{(j,l)} = B_{\mathbb{Z}}^{(j,l)} \quad \text{for } l \geq 0. \tag{10.9}$$

（这里 $\supset$ 由 $1_{A^{(j)}} \in B_{\mathbb{Z}}^{(j,0)}$ 推出）。注意，对于某个$q \in \mathbb{Q} - \{0\}$，$q \cdot 1_{A^{(j)}} \in L^{(j,0)}$，因此 $B_{\mathbb{Z}}^{(j,l)} L^{(j,0)} \supset q B_{\mathbb{Z}}^{(j,l)}$。满格 $B_{\mathbb{Z}}^{(j,l)}$ 是按递增的 $l$ 选取的，因此在 $B_{\mathbb{Z}}^{(j,0)}$ 之后，第一个 $B_{\mathbb{Z}}^{(j,1)}$ 、第二个 $B_{\mathbb{Z}}^{(j,2)}$ 以及最后一个 $B^{(j,n_j)}$ $\mathbb{Z}$ 。

定义 $A$中的满格

$$\Lambda := \bigoplus_{j=1}^{k} \Lambda^{(j)} \quad \text{with} \quad \Lambda^{(j)} := \bigoplus_{l=0}^{n_j} B_{\mathbb{Z}}^{(j,l)}. \tag{10.10}$$

由于 (10.5) 和 (10.8) 给出 $1_A \in \Lambda^{(j)}$和 $\Lambda^{(j)} \cdot \Lambda^{(j)} \subset \Lambda^{(j)}$，$\Lambda^{(j)}$ 是 $A^{(j)}$ 中的一个序。因此， $\Lambda$ 是 $A$中的一个序。由 (10.7) 可知，它包含 $\mathcal{O}(L)$。

**断言：**

(i) $\Lambda \bigoplus_{j=1}^{k} L^{(j,0)}$ 可逆，且其序为 $\mathcal{O}(\Lambda \bigoplus_{j=1}^{k} L^{(j,0)}) = \Lambda$。

(ii) $\Lambda \bigoplus_{j=1}^{k} L^{(j,0)} = \Lambda L$。

断言 (i) 和 (ii) 合起来给出定理 10.2。

**断言 (i) 的证明：** 满格 $B_{\mathbb{Z}}^{(j,0)} L^{(j,0)}$ 在 $F^{(j)}$中的序是极大阶 $B_{\mathbb{Z}}^{(j,0)} = \Lambda_{max}(F_{(j)})$，位于 $F^{(j)}$中。因此 $B_{\mathbb{Z}}^{(j,0)} L^{(j,0)}$可逆，且

$$\big(B_{\mathbb{Z}}^{(j,0)} L^{(j,0)}\big)\big(B_{\mathbb{Z}}^{(j,0)} L^{(j,0)}\big)^{-1} = B_{\mathbb{Z}}^{(j,0)}.$$

因此

$$\big(\Lambda^{(j)} L^{(j,0)}\big)\big(\Lambda^{(j)} (B_{\mathbb{Z}}^{(j,0)} L^{(j,0)})^{-1}\big) = \Lambda^{(j)} B_{\mathbb{Z}}^{(j,0)} = \Lambda^{(j)},$$

所以 $A^{(j)}$ 中的满格 $\Lambda^{(j)}L^{(j,0)}$ 是可逆的，其序为 $\mathcal{O}(\Lambda^{(j)}L^{(j,0)}) = \Lambda^{(j)}$。因此该满格

$$\Lambda \bigoplus_{j=1}^{k} L^{(j,0)} = \bigoplus_{j=1}^{k} \Lambda^{(j)} L^{(j,0)}$$

在 $A$ 中可逆，阶为 $\bigoplus_{j=1}^{k} \Lambda^{(j)} = \Lambda$。 (□)

**断言 (ii) 的证明：** 包含 $\supset$:

$$\begin{aligned} \Lambda L \quad &\subset \quad \Lambda \bigoplus_{j=1}^{k} \bigoplus_{l=0}^{n_j} L^{(j,l)} = \bigoplus_{j=1}^{k} \Big( \Lambda^{(j)} \bigoplus_{l=0}^{n_j} L^{(j,l)} \Big) \\ &\overset{(10.6)}{\subset} \quad \bigoplus_{j=1}^{k} \Big( \Lambda^{(j)} \bigoplus_{l=0}^{n_j} B_{\mathbb{Z}}^{(j,l)} L^{(j,0)} \Big) = \bigoplus_{j=1}^{k} \Lambda^{(j)} L^{(j,0)} = \Lambda \bigoplus_{j=1}^{k} L^{(j,0)}. \end{aligned}$$

包含 $\subset$: 我们将证明对于 $j \in \{1, ..., k\}$

$$B_{\mathbb{Z}}^{(j,n_j-l-m)} L^{(j,l)} \subset \Lambda^{(j)} L \quad \text{for } l \in \{0, 1, ..., n_j\} \text{ and } m \in \mathbb{Z} \quad (10.11)$$

在 $m$ 中用归纳法。首先

$$\begin{aligned} B_{\mathbb{Z}}^{(j,n_j-l-m)} L^{(j,l)} &\overset{(10.6)}{\subset} B_{\mathbb{Z}}^{(j,n_j-l-m)} B_{\mathbb{Z}}^{(j,l)} L^{(j,0)} \\ &\overset{(10.8)}{\subset} \Big( \sum_{r \geq n_j - m} B_{\mathbb{Z}}^{(j,r)} \Big) L^{(j,0)} \\ &= \begin{cases} \{0\} \cdot L^{(j,0)} = \{0\} & \text{if } m < 0, \\ B_{\mathbb{Z}}^{(j,n_j)} L^{(j,0)} = B_{\mathbb{Z}}^{(j,n_j)} L \subset \Lambda^{(j)} L & \text{if } m = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

因此，(10.11) 对 $m \leq 0$ 成立。

假设对于某个 $m \geq 0$ 和每个 $l \in \{0, 1, ..., n_j\}$，式 (10.11) 均成立。那么根据上述计算和归纳假设，

$$\begin{aligned} B_{\mathbb{Z}}^{(j,n_j-l-m-1)} L^{(j,l)} &\subset \Big( \sum_{r \geq n_j - m - 1} B_{\mathbb{Z}}^{(j,r)} \Big) L^{(j,0)} \\ &\subset B_{\mathbb{Z}}^{(j,n_j-m-1)} L^{(j,0)} + \Lambda^{(j)} L \\ &\subset B_{\mathbb{Z}}^{(j,n_j-m-1)} \big( L + \sum_{s \geq 1} L^{(j,s)} \big) + \Lambda^{(j)} L \\ &= B_{\mathbb{Z}}^{(j,n_j-m-1)} L + \Lambda^{(j)} L \\ &= \Lambda^{(j)} L. \end{aligned}$$

已证明 (10.11)。情形 $(l, \ m) = (0, \ n_j)$ 得到 $B_{\mathbb{Z}}^{(j,0)} L^{(j,0)} \subset \Lambda^{(j)} L$，因此 $L^{(j,0)} \subset \Lambda^{(j)} L \subset \Lambda L$，所以 $\Lambda \bigoplus_{j=1}^{k} L^{(j,0)} \subset \Lambda L$。至此，断言 (ii) 和定理 10.2 的证明完毕。□

**定理 10.3**。设 $A$ 是一个带单位元$1_A$ 的交换 $\mathbb{Q}$-代数，其维数为 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$。设 $L \in \mathcal{L}(A)$ 是一个满格。设 $\Lambda$ 是一个序，满足 $\Lambda \supset \mathcal{O}(L)$ 和 $\Lambda L \in G(\Lambda)$。

*(a)* 存在一个满格 $L_1 \in \mathcal{L}(A)$，满足 $L_1 \sim_w L$ 和 $L_1\Lambda = \Lambda$。
*(b)* 存在一个满格 $L_2 \in \mathcal{L}(A)$，满足 $L_2 \sim_w L$、$1_A \in L_2$ 和 $L_2 \subset \Lambda$。

*(c) (b)* 部分中的满格 $L_2$ 满足：*(i)* 满格序列 $(L_2^l)_{l\in\mathbb{N}}$ 递增并最终稳定，因此存在最小数 $N \in \mathbb{N}$，使得对每个 $l \geq 0$ 都有 $L_2^N = L_2^{N+l}$。*(ii)* $\Lambda_2 := L_2^N$ 是一个序，且 $\Lambda_2 \supset \mathcal{O}(L)$。*(d)* 在 *(c)* 部分中，$N \leq n-1$。

**证明：** 根据定理 8.2 (b)，映射

$$G(\mathcal{O}(L)) \to G(\Lambda), \quad K \mapsto \Lambda K,$$

是一个满群同态。选取 $K \in G(\mathcal{O}(L))$，使得 $\Lambda K = \Lambda L$。那么 $L_1 := LK^{-1}$ 满足 $L_1\Lambda = \Lambda$ 和 $L_1 \sim_w L$，最后一个结论由定理 5.8 得出。特别地，$L_1 \subset \Lambda$，因为 $1_A \in \Lambda$。

(b) 对几乎所有素数 $q$，$(L_1)_{(q)} = \Lambda_{(q)}$。令 $P_0 \subset \mathbb{P}$ 为满足$(L_1)_{(p)} \subsetneqq \Lambda_{(p)}$ 的素数 $p$ 构成的有限集。

固定一个素数 $p \in P_0$。与定理 7.6 的证明中一样，由注 3.2 (i) 可知，定理 3.1 适用于 $\Lambda/p\Lambda$ 而非 $A$，以及 $\mathbb{F}_p$而非 $\mathbb{Q}$。我们将定理 3.1 中 $\Lambda/p\Lambda$ 的分解写作

$$\Lambda/p\Lambda \;=\; \bigoplus_{j=1}^{\widetilde{k}} A_{\Lambda,p}^{(j)}, \qquad A_{\Lambda,p}^{(j)} \;=\; F_{\Lambda,p}^{(j)} \oplus N_{\Lambda,p}^{(j)}. \tag{10.12}$$

这里，$\widetilde{k} \in \mathbb{N}$、$A_\Lambda^{(1)}{}_{,p}, \ldots, A_{\Lambda,p}^{\widetilde{k}}$是不可约局部 $\mathbb{F}_p$-代数，且$A_\Lambda^{(i)}{}_{,p} \cdot A_\Lambda^{(j)}{}_{,p} = \{0\}$ 对 $i \neq j$成立。$N_\Lambda^{(j)}{}_{,p}$ 是 $A_\Lambda^{(j)}{}_{,p}$ 中的极大理想，且由幂零元组成。$F_\Lambda^{(j)}{}_{,p}$ 是 $A_\Lambda^{(j)}{}_{,p}$ 的一个 $\mathbb{F}_p$-子代数，也是 $\mathbb{F}_p$的有限域扩张。$A_\Lambda^{(j)}{}_{,p}$ 是一个 $F_\Lambda^{(j)}{}_{,p}$-代数。

~元素 $b = \sum_{j=1}^{k}(c_j + n_j) \in \Lambda/p\Lambda$ 满足 $c_j \in F_{(j)\,\Lambda,p}$且 $n_j \in N_\Lambda^{(j)}{}_{,p}$是单位，当且仅当每个 $c_j \neq 0$。因此，$\Lambda/p\Lambda$中不是单位的元素集合为

$$\Lambda/p\Lambda - (\Lambda/p\Lambda)^{unit} = \bigcup_{j=1}^{\widetilde{k}} \Big( N_{\Lambda,p}^{(j)} \oplus \bigoplus_{l\neq j} A_{\Lambda,p}^{(l)} \Big),$$

~因此它是若干个 $k$ 真 $\Lambda/p\Lambda$-理想的并集。

$\mathbb{F}_p$-子空间（$L_1 + p\Lambda$）$/p\Lambda$ 不包含于这些$\Lambda/p\Lambda$-理想中的任何一个，因为（$L_1 + p\Lambda$）$/p\Lambda \cdot \Lambda/p\Lambda = \Lambda/p\Lambda$。因此它也不包含于它们的并集中。

因此，我们可以选择一个元素 $b_p \in L_1 \subset \Lambda$ 使得

$$[b_p] = b_p + p\Lambda \in (L_1 + p\Lambda)/p\Lambda \cap (\Lambda/p\Lambda)^{unit}.$$

由引理 7.5 (b) 可得 $b_p \in \Lambda_{(p)}^{unit}$。

对于 $q \in \mathbb{P} - P_0$，定义 $b_q := 1_A$。由定理 7.3，存在唯一的满格 $L_2 \in \mathcal{L}(A)$，使得

$$(L_2)_{(p)} = b_p^{-1}(L_1)_{(p)} \quad \text{for each } p \in \mathbb{P}.$$

由注 7.4

$$L_2 \sim_w L_1 \sim_w L.$$

根据构造，对每个 $p \in \mathbb{P}$，都有 $1_A = b_p^{-1} b_p \in (L_2)_{(p)}$，因此 $1_A \in L_2$。对于每个 $p \in \mathbb{P}$，都有 $L_{2(p)} \subset \Lambda_{(p)}$，因为 $b_p \in \Lambda_{(p)}^{unit}$，所以 $L_2 \subset \Lambda$。

(c) (i) 序列 $(L_2^l)_{l\in\mathbb{N}}$ 是递增的，因为 $1_A \in L_2$。它在某个 $L_2^N$ 处变为定常，因为每个 $L_2^l \subset \Lambda$。

(ii) $\Lambda_2 := L_2^N$是一个序，因为 $1_A \in L_2^N$和 $L_2^N \cdot L_2^N = L_2^N$。

(d) 对于 $q \in \mathbb{P} - P_0$ $(L_2)_{(q)} = (L_1)_{(q)} = \Lambda_{(q)} = (\Lambda_2)_{(q)}$。

固定一个素数 $p \in P_0$。考虑 $n$ 维的 $\mathbb{F}_p$-向量空间 $\Lambda_2/p\Lambda_2$ 以及递增 $\mathbb{F}_p$-子空间序列 $((L_2^l + p\Lambda_2)/p\Lambda_2)_{l\in\mathbb{N}}$。于是对 $l \geq N$ 有 $(L_2^l + p\Lambda_2)/p\Lambda_2 = \Lambda_2/p\Lambda_2$。另一方面，如果对某个 $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & (L_2^m + p\Lambda_2)/p\Lambda_2 &&= (L_2^{m+1} + p\Lambda_2)/p\Lambda_2, \\ \text{then} \quad & (L_2^m + p\Lambda_2)/p\Lambda_2 &&= (L_2^{m+l} + p\Lambda_2)/p\Lambda_2 \quad \text{for each } l \geq 1. \end{aligned}$$

因此存在一个数 $N_p \leq N$，使得

$$\frac{L_2 + p\Lambda_2}{p\Lambda_2} \subsetneqq \frac{L_2^2 + p\Lambda_2}{p\Lambda_2} \subsetneqq \ldots \subsetneqq \frac{L_2^{N_p} + p\Lambda_2}{p\Lambda_2} = \frac{L_2^{N_p+l} + p\Lambda_2}{p\Lambda_2} = \frac{\Lambda_2}{p\Lambda_2} \text{ for } l \geq 0.$$

$(L_2 + p\Lambda_2)/p\Lambda_2$ 的 $\mathbb{F}_p$-维数至少为 2，否则

$$\frac{L_2 + p\Lambda_2}{p\Lambda_2} = \mathbb{F}_p[1_A] \quad \text{and thus} \quad \mathbb{F}_p[1_A] = \frac{L_2^{N_p} + p\Lambda_2}{p\Lambda_2} = \frac{\Lambda_2}{p\Lambda_2},$$

矛盾。因此 $N_p \leq n - 1$。我们得到

$$L_2^{N_p+l} + p\Lambda_2 = \Lambda_2 \text{ for } l \geq 0$$

并由中山引理

$$((L_2)_{(p)})^{N_p+l} = (\Lambda_2)_{(p)} \text{ for } l \geq 0.$$

该数

$$N_0 := \max_{p\in P_0} N_p \leq n - 1$$

满足

$$\begin{aligned} ((L_2)_{(q)})^{N_0+l} &= (\Lambda_2)_{(q)} \quad \text{for } l \geq 0 \text{ and each } q \in \mathbb{P}, \\ \text{so} \quad L_2^{N_0+l} &= \Lambda_2 \quad \text{for } l \geq 0. \qquad \square \end{aligned}$$

**定理 10.1 的证明：**设 $L \in \mathcal{L}(A)$。由定理 10.2，存在一个序 $\Lambda \supset \mathcal{O}(L)$，满足 $\Lambda L \in G(\Lambda)$。取这样一个序。由定理 10.3，存在一个满格 $L_2 \in \mathcal{L}(A)$ 和一个序 $\Lambda_2$，满足 $L_2 \sim_w L$和 $L_2^{n-1+l} = \Lambda_2$，对于 $l \geq 0$。由 (5.3) 和定理 5.7 (b)，$\Lambda_2 \supset \mathcal{O}(L_2) = \mathcal{O}(L)$。于是由 (4.4)

$$L^{n-1+l} \sim_w L_2^{n-1+l} = \Lambda_2 \quad \text{for } l \geq 0,$$

因此由定理 4.4 (c) 和定理 5.7 (b)，$L^{n-1+l}$ 对于$l \geq 0$ 是可逆的，且满足 $\mathcal{O}(L^{n-1+l}) = \Lambda_2$。$\square$

## References

[BSh73] Z.I. Borevich、I.R. Shafarevich：《数论》。Academic Press Inc. 1973.[Bo90] N. Bourbaki：《代数 II》。Springer，1990.[Co97] J.H. Conway：《感性的（二次）型》。Carus 数学专著 **26**。美国数学协会，1997.[CR62] C. W. Curtis、I. Reiner：《有限群表示论与结合代数》。Interscience Publishers 1962.[DTZ62] E.C. Dade、O. Taussky、H. Zassenhaus：论序理论，尤其是代数数域中代数的理想类半群与序的属。Math. Ann. **148**(1962), 31–64.[Fa64] D.K. Faddeev：论整数表示理论中的属半群。Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **28**(1964), 475–478（俄文）。Amer. Math. Soc. Transl (2)**64**(1967), 97–101（译文）。[Fa65] D.K. Faddeev：整表示模乘法理论导论。Trudy Mat. I nst. Steklov**80** (1965), 145–182（俄文）。Proc. Steklov Inst. Math. **80** ( 1965), 164–210（译文）。[Fa67] D.K. Faddeev：$\mathbb{Z}$-环的精确理想类数。Mat. Zametki **1** (1967), 625–632（俄文）。Math. Notes**1** (1967), 415–419（译文）。[Fa68] D.K. Faddeev：整数矩阵系统的等价性。Amer. Math. Soc. Transl. (2)**71** (1966), 43–48.[HL26] C. Hertling、K. Larabi：正规整数矩阵的共轭类。预印本，2026年2月，96页。[LMD33] C.G. Latimer、C.C. MacDuffee：理想类与矩阵类之间的对应。数学年刊 **34** (1933), 313–316.[Ne99] J. Neukirch：《代数数论》。数学科学基础丛书 322，Springer 1999.[Re03] I. Reiner：《极大序》。Clarendon Press 2003 或 Academic Press 1975。

[Si70] M.Singer：交换可分代数上理想的可逆幂与 overorders。Proc. Cambridge Philos. Soc. **67.2**(1970), 237–242.[Za38] H. Zassenhaus：关于有限整数代换群在模幺等价下类数有限性的一个新证明。Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **12** (1938), 276–288。

Claus Hertling, Lehrstuhl für algebraische Geometrie, Universität Mannheim, B6 26, 68159 Mannheim, Germany电子邮件地址: hertling@math.uni-mannheim.de电子邮件地址: khadija.larabi@outlook.com