射影余不变代数、杨不变量与塞格雷嵌入的双分次坐标环

SZENDRÓI BALÁZS

Abstract. 本文研究经典余不变代数 R_n的一种平坦退化 P_n。它是一种双分次阿廷-戈伦斯坦代数，源自射影直线的 n重自乘积的塞格雷嵌入的坐标环。通过对经典 Lusztig–Stanley 公式进行自然的双分次推广，计算了 P_n 的弗罗贝尼乌斯特征。 P_n 中的杨不变量与射影空间乘积的一般塞格雷嵌入的坐标环相关联；其双分次希尔伯特多项式则用多重集中的词的主降序生成函数表示。本文还探讨了它们与对角余不变代数的关系、包括量子上同调在内的上同调解释，以及 Garsia–Stanton 型基。

arXiv:2602.15017v1 [math.AG] 16 Feb 2026

1. Introduction

给定一个正整数 n，并在本文余下部分固定不变，令 S_n 表示作用在 $\{1,\dots,n\}$上的对称群。群 S_n 通过置换指标，以标准方式作用于自由多项式环 $\mathbb{C}[u_1\ \dots, u_n]$。经典的余不变代数

$$R_n = \mathbb{C}[u_1\ \dots, u_n]/\langle \mathbb{C}[u_1\ \dots, u_n]_+^{S_n}\rangle$$

是一个广为研究的阿廷分次完全交 $\mathbb{C}$-代数，其维数为 $n!$，希尔伯特级数为

$$\dim_q R_n = \sum_{\sigma\in S_n} q^{\mathrm{maj}(\sigma)} = [n]_q!, \tag{1}$$

其中 maj 表示 n 的排列上的主指标统计量（所有未定义术语见 2.1–2.2）。Garsia–Stanton $\mathbb{C}$-基 $\{\mathbf{b}_\sigma\colon\ \sigma\in S_n\}\subset R_n$ 来自 [11]，以如下方式体现公式 (1)：它为每个置换 $\sigma\in S_n$ 关联一个齐次基元素$\mathbf{b}_\sigma$，其分次为 maj(σ)。此外，代数 R_n 带有对称群 S_n的分次作用，因此作为未分次表示，它与 S_n 的正则表示同构。其分次（Frobenius）特征由 Lusztig–Stanley 公式 [23,Prop. 4.11]计算得出

$$\mathrm{char}_q R_n = \sum_{\lambda\vdash n}\left(\sum_{T\in \mathrm{SYT}(\lambda)} q^{\mathrm{maj}(T)}\right) s_\lambda, \tag{2}$$

它将不可约表示 s_λ 在 S_n 的 q 重数表示为对形状等于给定分拆 $\lambda\vdash n$ 的标准杨氏表（见 2.3）求和。

给定一个合成 $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_k)\vDash n$，即将 n 加法分解为正整数的结果，存在一个相应的杨子群

$$S_\alpha = S_{\alpha_1}\times\ldots\times S_{\alpha_k}\subset S_n.$$

对称群 S_n 在分次代数 R_n 上的作用限制为 S_α 的作用。不变代数

$$R_\alpha = R_n^{S_\alpha},$$

部分余不变代数 [3, （第 5], [18, 节，第 2], 节）是一个具有希尔伯特级数的分次有限维 $\mathbb{C}$ 代数

$$\dim_q R_\alpha = \begin{bmatrix} n \\ \alpha \end{bmatrix}_q, \tag{3}$$

一个 q 多项式系数 [5, 引理 2.1]。

本文研究上述构造的一种特定双分次退化，它与射影空间的乘积的 Segre 嵌入有关。主要研究对象是一种特定的双分次代数 P_n，我将其称为射影余不变代数。它至少曾在文献中被独立提出过三次，

但我认为相关研究尚未揭示它所有非凡的性质。下文将讨论以下一系列结果。

(a)（命题 3.1）代数 P_n 被定义为坐标环的某种双分次阿廷截断，该坐标环对应于射影直线 $\mathbb{C}[(\mathbb{P}^1)^n]$ 在其标准 Segre 嵌入下的 n 重积。它是一个双分次有限维戈伦斯坦代数，维数为 $n!$ 其双分次希尔伯特级数为

$$\dim_{t,q} P_n = \sum_{\sigma\in S_n} t^{\mathrm{des}(\sigma)} q^{\mathrm{maj}(\sigma)}, \tag{4}$$

其中 des 是 S_n 上的下降统计量。

(b)（定理 3.2）代数 P_n 是代数的一个自然二维族 $\mathcal{P}_n$ 在基底 $\mathbb{C}^2$ 上的中心纤维。该族带有环面 $(\mathbb{C}^*)^2$ 的作用，且此作用与环面对基底的标准作用相容。其双分次来自它是环面不动点 $(0,\ 0) \in \mathbb{C}^2$ 上方的纤维。对于点 $(s_0,\ 0),\ (0,\ s_1) \in \mathbb{C}^2$（其中 $s \neq 0$），该族的纤维 $\mathcal{P}_n$ 同构于标准余不变代数 R_n；其分次来自固定基底中该点的一维子环面 $\mathbb{C}^* \subset (\mathbb{C}^*)^2$ 。对于一般点 $(s_0,\ s_1) \in \mathbb{C}^2$（其中 $s_0,\ s_1 \neq 0$），该族的纤维 $\mathcal{P}_n$ 作为未分次代数同构于群代数 $\mathbb{C}S_n$ 。

(c)（定理 3.4）代数 P_n 是一个双分次 S_n-模，其弗罗贝尼乌斯特征为

$$\mathrm{char}_{t,q} P_n = \sum_{\lambda\vdash n} \left(\sum_{T\in \mathrm{SYT}(\lambda)} t^{\mathrm{des}(T)} q^{\mathrm{maj}(T)} \right) s_\lambda. \tag{5}$$

(d)（定理 4.10(i)-(ii)）杨子群 $S_\alpha \subset S_n$ 作用下的不变子代数 $P_\alpha = (P_n)^{S_\alpha}$ ，可识别为一般射影空间乘积 $\mathbb{C}[\mathbb{P}^{\alpha_1} \times \ldots \times \mathbb{P}^{\alpha_k}]$ 在其塞格雷嵌入下的坐标环的某种阿廷截断。它是一个双分次阿廷代数，其双分次希尔伯特级数为

$$\dim_{t,q} P_\alpha = \sum_{w\in W_\alpha} q^{\mathrm{maj}(w)} t^{\mathrm{des}(w)}, \tag{6}$$

其中， W_α 是与 α相关的多重集中的某个词集，配备标准的下降数和主指标统计量（再一次参见第 2.2 节）。

(e)（定理 4.10(iii)-(iv)）代数 P_α 还有一族以 $\mathbb{C}^2$为底空间的等变变形，其它纤维分别同构于部分余不变代数 R_α，以及一个维数等于多项式系数 $\binom{n}{\alpha}$的有限维非分次代数。

(b) 的退化图景尤其说明了二参数表达式 (4)–(5) 如何在 $t = 1$ 处特化为单参数表达式 (1)–(2)，而后者又进一步在 $q = 1$ 处特化为 $\dim \mathbb{C}S_n = n!$，分别对应正则表示 $\mathbb{C}S_n$ 分解为不可约表示的标准形式。对于（分次）维数，关于 S_α-不变量的情形也有类似的结论。

作为论证中的一个中间步骤，对于 n 的一个合成 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \vDash n$，我在定理 4.3 中建立了以下公式

$$\dim_{t,q} \mathbb{C}[\mathbb{P}^{\alpha_1} \times \ldots \times \mathbb{P}^{\alpha_k}] = \frac{\sum_{w\in W_\alpha} q^{\mathrm{maj}(w)} t^{\mathrm{des}(w)}}{\prod_{j=0}^{n} (1 - tq^j)}$$

该公式给出了一般射影空间乘积（在标准塞格雷嵌入下）的射影坐标环的双分次希尔伯特级数。它以组合方式细化了一个关于经典希尔伯特级数的公式（推论 4.4；仅涉及变量 t，其中 $q = 1$），该公式早已见于文献 [19], ，且也在 [20] 中得到隐式证明。

本文中的构造与早期研究之间还有以下联系。

(f) 人们似乎可以合理地认为，射影余不变代数 P_n与 Garsia–Haiman 对角余不变代数 D_n 之间应该存在某种联系（注 3.7）。确实存在这种联系，但结果发现它是平凡的（命题 3.6）。这一令人失望的事实背后的根本原因，我至今未能理解。

(g) 对于 $n = k \cdot m$，考虑合成 $\alpha = (m, \ldots\ldots, m) \vDash n$。对称群 S_k 在相应代数 P_α上有一个剩余作用。受本工作的早期版本启发，其双分次特征最近在 [16]中得到了计算；定理 4.11 回顾了由此得到的优美公式。

(h) Borel 同构是一个分次同构

$$R_n \cong H^*(F_n, \mathbb{C})$$

介于余不变代数 R_n 与旗簇 F_n的上同调代数之间。对于部分余不变代数，存在一个分次同构

$$R_\alpha \cong H^*(F_\alpha, \mathbb{C})$$

与部分旗簇 F_α的上同调代数之间。在此背景下，上文给出的结果可以解释为同时给出任意部分旗簇的（分次）上同调代数 $H^*(F_\alpha, \mathbb{C})$ 的一个（双分次）退化和一个（非分次）变形（光滑化）。对于一步旗簇（$k = 2$），单参数光滑化可等同于相应旗簇上同调的标准量子变形（命题 5.1 及随后的讨论）。我不知道双分次退化 P_n, P_α 能否从同调上加以解释，但如果确实如此，那将非常有趣。（第 5.1 节。）(i) 在第 5.2 节中，我回顾了已分别由 [4], 与 [21], 构造的 $\mathbb{C}$-基 $\{\mathbf{a}_\sigma : \sigma \in S_n\} \subset P_n$，以及 $\{\mathbf{a}_w : \sigma \in W_\alpha\} \subset P_\alpha$，它们以与 Garsia–Stanton 基见证 (1) 相同的意义见证公式 (4)-(6)。利用变形 (e)，我推出部分余不变代数 R_α中存在 Garsia–Stanton 型基，这可能是新的。

致谢。 我谨向 Erik Carlsson、Ionut Ciocan-Fontanine、Iain Gordon、Tam´as Hausel、Fabi´an Levic´an、Jun Ma、Anton Mellit、Konstanze Rietsch、Marino Romero 和 Dmitriy Rumynin 致谢，感谢他们参与讨论、提出意见并协助查找参考文献；同时也感谢 Praise Adeyemo，早先与他的合作促成了本研究。

2. Preliminaries

2.1. 约定与记号。 我们在域 $\mathbb{C}$ 上进行讨论。固定一个正整数 n。记作$[n] = \{1, \ldots, n\}$，并令 $S_n = \mathbf{Bij}[n]$ 为作用在 n 个字母上的对称群。 q-整数按通常方式定义为

$$[n]_q = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

q-阶乘定义为

$$[n]_q! = \prod_{j=1}^{n} [j]_q.$$

给定一个非负分次的 $\mathbb{C}$-代数 $R = \bigoplus_{d=0}^{\infty} R_d$，其分次分量均为有限维，定义其 q-维数（希尔伯特级数）为以下公式

$$\dim_q R = \sum_{d=0}^{\infty} (\dim R_d) q^d \in \mathbb{N}[\![q]\!].$$

类似地，对于双分次代数 $R = \bigoplus_{d,e=0}^{\infty} R_{d,e}$，记作

$$\dim_{t,q} R = \sum_{d,e=0}^{\infty} (\dim R_{d,e}) t^d q^e \in \mathbb{N}[\![q, t]\!].$$

如果 V 是对称群 S_n 的有限维表示，其不可约分解 $V = \oplus_{\lambda \vdash n} V_\lambda$ 由 n 的分拆 $\lambda \vdash n$ 索引，则将其（Frobenius）特征定义为

$$\operatorname{char} V = \sum_{\lambda \vdash n} (\dim V_\lambda) s_\lambda,$$

其中， s_λ 是 S_n的表示环中的标准（舒尔）基元素。当 V 是具有有限维分次分量的（双）分次表示时，这两种记号可以显而易见地结合使用。我们有时会使用标准的复合记号，以紧凑地表示

弗罗贝尼乌斯特征；例如参见 [2, 第3.8]节。对于一个分拆 $\lambda \vdash n$， h_λ， m_λ 表示标准的完全对称函数和单项式对称函数。

2.2. **多重集中的词与麦克马洪恒等式**。 回顾一下，合成 $\alpha \vDash n$是一个有序序列 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$，由总和为 n 的正整数组成，但不要求序列按递减顺序排列（分拆则要求如此）。给定一个合成 $\alpha \vDash n,$，令 $M_\alpha = \{1^{\alpha_1}, \dots, k^{\alpha_k}\}$ 为相应的多重集（允许元素重复的集合）。令 $\mathcal{P}(M_\alpha)$ 表示 M_α 的子集所构成的集合，即 M_α 中大小为 $|\mathcal{P}(M_\alpha)| = \prod_{i=1}^{k}(\alpha_i + 1)$ 的子多重集 $\{1^{\beta_1}, \dots, k^{\beta_k}\}$，其中 $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$。

令 W_α 表示多重集 M_α 中的全长词 $w = (i_1 i_2 \dots i_n)$ 所构成的集合。该集合的大小为

$$|W_\alpha| = \binom{n}{\alpha} = \frac{n!}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_k!},$$

一个多项式系数。对于一个词 $w = (i_1 i_2 \dots i_n) \in W_\alpha$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$ 是一个下降位置，当且仅当$i_k > i_{k+1}$。令 $\mathrm{Des}(w)$ 表示 w 中下降位置的集合，并定义下降指标 $\mathsf{des}(w)$ 和主指标 $\mathsf{maj}(w)$ 分别为 w 中下降位置的数量和总和：

$$\mathrm{des}(w) = |\operatorname{Des}(w)|, \quad \mathrm{maj}(w) = \sum_{i \in \operatorname{Des}(w)} i.$$

我们得到生成函数

$$A_\alpha(t, q) = \sum_{w \in W_\alpha} q^{\mathrm{maj}(w)} t^{\mathrm{des}(w)}.$$

特化

$$A_\alpha(1, q) = \begin{bmatrix} n \\ \alpha \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[\alpha_1]_q! \cdot \ldots \cdot [\alpha_k]_q!}$$

是一个 q-多项式系数。

对于集合 $\alpha = (1^n) \vDash n$, $M_\alpha = [n]$， W_α 是 n 的所有置换 $\sigma \in S_n$ 构成的集合，而 $\mathsf{des}(\sigma)$, $\mathsf{maj}(\sigma)$ 是置换的经典下降指标和主指标； $A_{(1^n)}(t, q)$ 是经典欧拉多项式 $A_{(1^n)}(t, 1)$ 按下降数枚举置换的 q-细化形式。对于 $\alpha = (n) \vDash n$, $M_\alpha = \{1^n\}$， W_α 由单个元素 $(1 \dots 1)$ 构成，其下降指标和主指标均为 0，因此 $A_{(n)}(t, q) = 1$。更多示例见下文示例 4.5–4.6。

以下麦克马洪的组合恒等式将发挥重要作用。

定理 2.1. 对于任意合成 $\alpha \vDash n,$，我们有恒等式

$$\sum_{r=0}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{k} \begin{bmatrix} r + \alpha_i \\ \alpha_i \end{bmatrix}_q \right) t^r = \frac{A_\alpha(t, q)}{\prod_{j=0}^{n}(1 - q^j t)}. \tag{7}$$

证明. 麦克马洪在 [17, 第 2 卷第 IX 节]证明了此恒等式；现代参考资料见 [12,第 3] 节。当 $\alpha = (1^n)$ 时，对应于排列的情形，这就是所谓的卡利茨恒等式 [6]。 □

2.3. **标准杨氏表**。 给定 n 的一个分拆 $\lambda \vdash n$，按惯例用 $\mathsf{SYT}(\lambda)$ 表示形状为 λ 的标准杨氏表集合，即将对应于λ 的杨氏图中的格子 T 一一填入 $[n]$，使得每行和每列中的条目均递增。标准杨氏表 $T \in \mathsf{SYT}(\lambda)$ 的下降数和主指标分别记为 $\mathsf{des}(T)$ 和 $\mathsf{maj}(T)$，其定义分别为满足以下条件的所有 $1 \leqslant i \leqslant n-1$ 的数量和总和： $i+1$ 在 T 中位于 i的下方。

2.4. **精细化埃尔哈特理论**。 设 $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ 为 n 维凸格点多面体，即 $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ 中有限多个格点的凸包。对于非负整数 r，令 $r\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ 表示 Σ 的 r 倍膨胀。固定一个由整数权重构成的 n 元组 $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$。对于 $k \in \mathbb{Z}$，按照 Chapoton [8],，考虑如下量

$$L_\Sigma^{\mathbf{a}}(r, k) = \#\{v \in r\Sigma \cap \mathbb{Z}^n : \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = k\}.$$

从几何上看，这相当于用垂直于方向$\mathbf{a}$的超平面切割多面体 Σ，并统计各切片中的格点数。令

$$L_{\Sigma,r}^{\mathbf{a}}(q) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} L_\Sigma^{\mathbf{a}}(r, k) q^k,$$

为变量 q的一个劳朗多项式，并考虑级数

$$E^{\mathbf{a}}_{\Sigma}(t,q)=\sum_{r=0}^{\infty}t^{r}L^{\mathbf{a}}_{\Sigma,r}(q).$$

令 $q=1$, $L^{\mathbf{a}}_{\Sigma,r}(1)$ 和 $E^{\mathbf{a}}_{\Sigma}(t,1)$ 分别为 Σ的埃尔哈特多项式和埃尔哈特级数。考虑 Σ的多面体代数，即 $\mathbb{C}$-代数

$$T_{\Sigma}=\mathbb{C}[x_{\mathbf{v},r}\mid r\geqslant 0,\mathbf{v}\in r\Sigma\cap\mathbb{Z}^{d}]/\langle x_{\mathbf{v},r}\cdot x_{\mathbf{v}',r'}-x_{\mathbf{v}+\mathbf{v}',r+r'}\rangle.$$

这是一个自然的双分次代数，其中生成元 $x_{\mathbf{v},r}$ 的双次数为 $(r,\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})$。仅考虑第一分次时， T_{Σ} 是非负分次的，而 $\operatorname{Proj}A_{\Sigma}$ 是由多面体 Σ定义的射影托里克簇。根据定义，

$$\dim_{t,q}T_{\Sigma}=E^{\mathbf{a}}_{\Sigma}(t,q).$$

稍后将需要这个设置的一个简单例子；参见 [1]。令 $\Sigma=\Delta_{n}\subset\mathbb{R}^{n}$为 n维空间中的基本长方形单纯形，其顶点为原点以及标准正交基向量端点。令 $\mathbf{a}=(1,\ldots,n)\in\mathbb{Z}^{n}$。相应的多面体代数为 $T_{\Delta_{n}}\cong\mathbb{C}[\mathbb{P}^{n}]\cong\mathbb{C}[z_{0},\ldots,z_{n}]$，按 $\deg(z_{j})=(1,j)$分次。

引理 2.2. 在此双分次下， $\mathbb{C}$-代数 $\mathbb{C}[\mathbb{P}^{n}]$的双分次希尔伯特级数为

$$E^{\mathbf{a}}_{\Delta_{n}}(t,q)=\dim_{t,q}\mathbb{C}[\mathbb{P}^{n}]=\prod_{j=0}^{n}(1-tq^{j})^{-1}=\sum_{r\geqslant 0}t^{r}\begin{bmatrix}r+n\\ n\end{bmatrix}_{q}. \tag{8}$$

因此， r次膨胀中格点的 q 计数为

$$L^{\mathbf{a}}_{\Delta_{n},r}(q)=\begin{bmatrix}r+n\\ n\end{bmatrix}_{q}.$$

证明。 由于 $\mathbb{C}[\mathbb{P}^{n}]$ 由变量 z_{i}自由生成，第二个等式显然成立。第三个等式来自负二项式定理。□

2.5. **代数族**。 本文的一个关键主题是仿射平面上的代数族的出现。这样的族是有限生成（通常为有限维） $\mathbb{C}$-代数 $\mathbb{C}[s_{0},s_{1}]\to\mathcal{A}$之间的平坦同态，对应于仿射簇的一个平坦族

$$\pi\colon\operatorname{Spec}\mathcal{A}\to\operatorname{Spec}\mathbb{C}[s_{0},s_{1}]\cong\mathbb{A}^{2}.$$

对于某个固定的 $(t_{0},t_{1})\in\mathbb{A}^{2}$，记

$$\mathcal{A}_{(t_{0},t_{1})}=\mathcal{A}\otimes_{\mathbb{C},(t_{0},t_{1})}\mathbb{C}[s_{0},s_{1}]$$

该族的纤维代数，其中张量积通过代数同态$\mathbb{C}[s_{0},s_{1}]\to\mathbb{C}$ 定义，该同态是在 (t_{0},t_{1}) 处取值。于是显然

$$\mathcal{A}_{(t_{0},t_{1})}\cong\mathbb{C}[\pi^{-1}(t_{0},t_{1})],$$

π的相应几何纤维的坐标代数。

3. The projective coinvariant algebra and its deformations

3.1. **基本定义**。 考虑双分次 $\mathbb{C}$-代数

$$T_{n}=\mathbb{C}[x_{I}\colon I\subseteq[n]]/J_{n},$$

其中生成元 x_{I} 的双次数为 $(1,\ |I|)$ ，且 J_{n} 是双分次环面理想

$$J_{n}=\langle x_{I}x_{J}-x_{I\cap J}x_{I\cup J}\colon I,J\subseteq[n]\rangle.$$

T_{n} 上的双分次可以等价地看作二维环面 $(\mathbb{C}^{*})^{2}$在 T_{n} 上的作用，该作用定义为

$$(t_{0},t_{1})\circ x_{I}=t_{0}t_{1}^{|I|}x_{I}.$$

用第 2.4 节的术语来说，代数 T_{n} 是 n维单位超立方体的多面体代数，其生成元 x_{I} 与超立方体的顶点相对应。双分次对应于考察 q-埃尔哈特理论，其中 $\mathbf{a}=(1,\ldots,1)$。众所周知，仅按第一分量分次时，$\operatorname{Proj}T_{n}$ 是塞格雷嵌入的像

$$s_{n}\colon(\mathbb{P}^{1})^{n}\to\mathbb{P}^{2^{n}-1}.$$

事实上，塞格雷嵌入可以用坐标表示为

$$\begin{array}{rccc} s_n & : & (\mathbb{P}^1)^n & \to & \mathbb{P}^{2^n-1} \\ & & ([a_1:b_1],\dots,[a_n:b_n]) & \mapsto & \left[\dots:\prod_{i\in I}a_i\prod_{j\notin I}b_j:\dots\right] \end{array}$$

理想 J_n 记录了像坐标之间的所有关系。因此， T_n 可以看作塞格雷嵌入 s_n的像的射影坐标环，并配备了额外的分次。

有时，考虑这种代数的以下替代模型会很有用。考虑自由双分次交换代数 $\mathbb{C}[\zeta,\ \xi_1,\ \dots\dots,\ \xi_n]$，其中 $\mathsf{deg}(\zeta)=(1,\ 0)$ 且 $\mathsf{deg}(\xi_i)=(0,\ 1)$。众所周知， T_n 同构于 $\mathbb{C}[\zeta,\ \xi_1,\ \dots\dots,\ \xi_n]$的一个双分次子代数，即嵌入的像

$$\begin{array}{rcl} T_n & \hookrightarrow & \mathbb{C}[\zeta,\xi_1,\dots,\xi_n] \\ x_I & \mapsto & \zeta\cdot\prod_{i\in I}\xi_i. \end{array} \tag{9}$$

事实上，在此映射下， I， $J\subseteq[n]$ 的关系 $x_Ix_J=x_{I\cap J}x_{I\cup J}$ 会自动满足。对于 $0\leqslant k\leqslant n$，记

$$\widetilde{e}_k=\sum_{\substack{I\subseteq[n]\\|I|=k}}x_I\in T_n.$$

注意 $\widetilde{e}_0=x_\varnothing$、 $\widetilde{e}_n=x_{[n]}$，并且元素 $\widetilde{e}_k\in T_n$ 是双次数为 $(1,\ k)$的齐次元素。

以下结果已在 [1, 命题 2.7] 中证明；另请参见 [20, 第 4] 节。（这些陈述也出现在 [4], 中，但其中关于第一条陈述的论证并不完整。）

命题 3.1。 元素 $\widetilde{e}_0$、...、 $\widetilde{e}_n$ 在代数 T_n 中构成一个最大长度的正则序列。商

$$P_n=T_n/\langle\widetilde{e}_0,\dots,\widetilde{e}_n\rangle$$

是一个有限维的双分次 *Gorenstein* $\mathbb{C}$-代数，其双分次希尔伯特级数为

$$\dim_{t,q}P_n=A_{(1^n)}(t,q)=\sum_{\sigma\in S_n}t^{\mathrm{des}(\sigma)}q^{\mathrm{maj}(\sigma)}.$$

将双分次代数 P_n 称为射影余不变代数；该代数最初由 [4, 1] 独立引入（而在没有双分次结构的情况下，则由 [20] 引入）；这一名称将在下文定理 3.2 中得到解释。

3.2. **一族变形**。 引入 $\mathbb{C}[s_0,\ s_1]$-代数

$$\mathcal{T}_n=T_n[s_0,s_1]$$

and

$$\mathcal{P}_n=\mathcal{T}_n/\langle x_\varnothing-s_0,\widetilde{e}_1,\dots,\widetilde{e}_{n-1},x_{[n]}-s_1\rangle.$$

我们可以从几何角度理解映射

$$\pi_n\colon\operatorname{Spec}\mathcal{P}_n\to\operatorname{Spec}\mathbb{C}[s_0,s_1]=\mathbb{A}^2$$

由包含关系 $\mathbb{C}[s_0,\ s_1]\to\mathcal{P}_n$ 诱导而来，从而得到一个以仿射平面 $\mathbb{A}^2$为基底的代数（谱）二参数族，它是平凡族的一个子族

$$\tau_n\colon\operatorname{Spec}\mathcal{T}_n\to\operatorname{Spec}\mathbb{C}[s_0,s_1]=\mathbb{A}^2.$$

考虑环面 $(\mathbb{C}^*)^2$ 在 $\mathbb{C}[s_0,\ s_1]$ 上的作用，定义如下：

$$(t_0,t_1)\circ(s_0,s_1)=(t_0s_0,t_0t_1^ns_1).$$

这可以扩展为 $(\mathbb{C}^*)^2$ 在 $\mathcal{T}_n$ 和 $\mathcal{P}_n$ 上、定义于 $\mathbb{C}[s_0,\ s_1]$的相容作用。对称群 S_n 也作用在 $\mathcal{T}_n$ 上，因而也作用在 $\mathcal{P}_n$ 上；该作用结合了它在 $[n]$上的标准作用（由此诱导出对所有子集的作用）与它在 $\mathbb{C}[s_0,\ s_1]$上的平凡作用。

定理 3.2。 ***(i)*** 包含映射 $\mathbb{C}[s_0,s_1]\to\mathcal{P}_n$ 是代数的平坦映射，且具有等变性

关于环面 $(\mathbb{C}^*)^2$ 和对称群 S_n 的作用。***(ii)*** 中心纤维$(\mathcal{P}_n)_{(0,\ 0)}$ 与射影余不变代数 P_n 双分次 S_n-同构。***(iii)*** 在点 $(s_0,0)$ 和 $(0,s_1)$（其中 $s_i\neq0$）上，纤维 $(\mathcal{P}_n)_{(s_0,\ 0)}$, $(\mathcal{P}_n)_{(0,\ s_1)}$ 与经典余不变代数 R_n 分次 S_n-同构。***(iv)*** 在点 (s_0,s_1)（其中 $s_0s_1\neq0$）上，纤维 $(\mathcal{P}_n)_{(s_0,\ s_1)}$ 是一个维数为 $n!$ 的（未分次）有限维代数，且与群代数 $\mathbb{C}S_n$ S_n-同构。

证明。根据定义，中心纤维 $(\mathcal{P}_n)_{(0,\ 0)}$ 与射影余不变代数 P_n 同构。另一方面，成为正则序列是一个开性质，因此相应的元素在原点附近的纤维中构成正则序列；进而利用环面作用，这一结论在整个仿射平面上成立。

考虑点 $(s_0, 0)$ 上方的纤维 $(\mathcal{P}_n)_{(s_0,0)}$，其中 $s_0 \neq 0$。利用环面作用的第一个分量进行缩放后，我们可以假设 $s_0 = 1$。在这个代数 $(\mathcal{P}_n)_{(1,0)}$中，元素 $x_\varnothing$ 的像与单位元等同。定义一个 $\mathbb{C}$-代数同态

$$\psi_n \colon \mathbb{C}[u_1, \ldots, u_n] \to (\mathcal{P}_n)_{(1,0)}$$

由 $\psi_n(u_i) = (x_{\{i\}})_{(1,0)}$。于是对于 $i \notin I$，利用关系 $x_\varnothing x_{I\cup\{i\}} = x_{\{i\}} x_I$ 归纳地推得 e

$$\psi_n\left(\prod_{i\in I} u_i\right) = (x_I)_{(1,0)} \in (\mathcal{P}_n)_{(1,0)}.$$

特别地，若 $e_k(u_1, \ldots, u_n)$ 表示变量 $u_1, \ldots, u_n$的初等对称函数，则得到

$$\psi_n\left(e_k(u_1, \ldots, u_n)\right) = \sum_{\substack{I\subseteq[n]\\ |I|=k}} (x_I)_{(1,0)} = 0 \in (\mathcal{P}_n)_{(1,0)}.$$

这很容易 可以看出，这些元素生成了 ψ_n 的核。由此我们推出同构

$$(\mathcal{P}_n)_{(1,0)} \cong \mathbb{C}[u_1 \ldots, u_n]/\langle e_1(u_i), \ldots, e_n(u_i)\rangle = \mathbb{C}[u_1 \ldots, u_n]/\langle \mathbb{C}[u_1 \ldots, u_n]_+^{S_n}\rangle$$

与经典余不变代数 R_n 同构。子环面 $\{t_0 = 1\} \subset (\mathbb{C}^*)^2$ 固定点 $(1,\ 0) \in \mathbb{A}^2$，并作用于纤维代数 $(\mathcal{P}_n)_{(1,\ 0)}$，赋予其一种分次，该分次与余不变代数上的标准分次一致。因此，(iii) 中其余结论都是众所周知的。

利用整个构造的“外部”自同构（该自同构交换坐标 x_I 与坐标 $x_{[n]\setminus I}$，以及变形坐标 s_0 与 s_1，即超立方体的中心反射），点 $(0,\ s_1)$ 上方的纤维与点 $(s_0,\ 0)$ 上方的纤维同构。

最后，对于满足 $s_0 s_1 \neq 0$ 的一般纤维 $(\mathcal{P}_n)_{(s_0,\ s_1)}$，我们可以重新缩放，使其变为 $s_0 = s_1 = 1$。令 $v_i = (x_{\{i\}})_{(1,\ 1)} \in (\mathcal{P}_n)_{(1,\ 1)}$，前面几段中的大部分论证仍然成立，唯独最后一步例外：最后一个关系会因参数 $s_1 = 1$ 而发生变形。我们得到

$$(\mathcal{P}_n)_{(1,1)} \cong \mathbb{C}[v_1, \ldots, v_n] \Big/ \left\langle \sum_{i=1}^n v_i, \sum_{i<j} v_i v_j, \ldots, \prod_{i=1}^n v_i - 1 \right\rangle.$$

后一个代数是点

$$(1, \eta, \eta^2, \ldots, \eta^{n-1}) \in \mathbb{A}^n = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[v_1, \ldots, v_n]$$

对应于本原的 n 次单位根 η 的自由轨道的坐标代数。因此，这个（未分次）代数确实与 S_n 的正则表示 S_n 同构。

最后，仿射映射 π_n 是有限映射，且目标光滑、纤维长度恒定，因此包含映射 $\mathbb{C}[s_0,\ s_1] \to \mathcal{P}_n$ 确实是平坦的。□

注 3.3。未分次群代数 $\mathbb{C}S_n$ 退化为（分次）余不变代数 R_n，这是 Garsia–Haiman 轨道调和方法 [10] 的一个特别简单的例子。其中，前者实现为仿射 n 空间中 S_n 的自由轨道的坐标环。从这个角度看，定理 3.2 表明，还存在一种具有几何和组合学意义的进一步双分次退化。

3.3. 射影余不变代数的分次特征。如上所述，射影余不变代数 P_n 是对称群 S_n 正则表示的双分次版本。其双分次特征由以下公式计算；该公式右侧的表达式最初出现在 [21, 命题 3.14] 中，当时的背景与此密切相关但略有不同。

定理 3.4。我们有

$$\operatorname{char}_{t,q} P_n = \sum_{\lambda\vdash n} \left(\sum_{T\in \mathrm{SYT}(\lambda)} t^{\mathrm{des}(T)} q^{\mathrm{maj}(T)} \right) s_\lambda.$$

证明。[1] 考虑分解 $T_n = \bigoplus_{r\geqslant 0}(T_n)_r$，其中我们使用第一分次。每个分次分量 $(T_n)_r$ 仍按第二分次分级；用记号 $\dim_q$ 表示相应的分次维数。在式 (9) 中引入的代数 (T_n) 的替代模型中，我们有一个 S_n-等变同构

$$(T_n)_r \cong \mathbb{C}[\xi_1, \ldots, \xi_n]_{\leqslant r},$$

其中，下标 $()_{\leqslant r}$ 表示次数小于等于 r 的项，且只涉及每个指定的变量； S_n 的作用是右侧所述的标准作用。

由于我们将使用 S_n-不变理论中的标准结果，因此在此证明中，我们将用分拆来标记 S_n 的杨子群。对于一个分拆 $\lambda = (\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_k \geqslant 1) \vdash n$，记 $S_\lambda = S_{\lambda_1} \times \ldots \times S_{\lambda_k}$ 为 S_n 的标准杨子群。于是有

$$\operatorname{char}_q(T_n)_r = \sum_{\lambda\vdash n} \dim_q((T_n)_r)^{S_\lambda} \cdot m_\lambda.$$

此外，显然

$$(\mathbb{C}[\xi_1, \ldots, \xi_n]_{\leqslant r})^{S_\lambda} \cong \mathbb{C}[\xi_1, \ldots, \xi_{\lambda_1}]_{\leqslant r}^{S_{\lambda_1}} \otimes \ldots \otimes \mathbb{C}[\xi_{\lambda_1+\ldots+\lambda_{k-1}+1}, \ldots, \xi_n]_{\leqslant r}^{S_{\lambda_k}}.$$

对于一组变量，例如第一组，有

$$\begin{aligned} \dim_q \mathbb{C}[\xi_1, \ldots, \xi_{\lambda_1}]_{\leqslant r}^{S_{\lambda_1}} &= \sum_{0\leqslant a_1\leqslant\ldots\leqslant a_k\leqslant r} q^{a_1+\ldots+a_k} \\ &= h_{\lambda_1}(1, q, \ldots, q^r). \end{aligned}$$

因此我们推得

$$\begin{aligned} \dim_q((T_n)_r)^{S_\lambda} &= \prod_{i=1}^{k} h_{\lambda_i}(1, q, \ldots, q^r) \\ &= h_\lambda[[r+1]_q], \end{aligned}$$

因此

$$\operatorname{char}_q(T_n)_r = \sum_{\lambda\vdash n} h_\lambda[[r+1]_q] \cdot m_\lambda.$$

另一方面，将$\mathbf{z}$ 作为复合代入的一组新哑变量，利用标准恒等式，我们得到

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda\vdash n} h_\lambda[[r+1]_q] \cdot m_\lambda(\mathbf{z}) &= h_n\left[[r+1]_q\mathbf{z}\right] \\ &= \sum_{\lambda\vdash n} s_\lambda\left([r+1]_q\right) s_\lambda(\mathbf{z}). \end{aligned}$$

我们得到

$$\operatorname{char}_q(T_n)_r = \sum_{\lambda\vdash n} s_\lambda([r+1]_q) s_\lambda$$

从而，对所有 r求和，

$$\operatorname{char}_{t,q} T_n = \sum_{r\geqslant 0} t^r \sum_{\lambda\vdash n} s_\lambda([r+1]_q) s_\lambda.$$

对于有限维商 P_n，我们因此得到

$$\operatorname{char}_{t,q} P_n = \prod_{j=0}^{n}(1-tq^j)\left(\sum_{r\geqslant 0} t^r \sum_{\lambda\vdash n} s_\lambda([r+1]_q) s_\lambda\right).$$

按照 [21, 命题3的证明14]中的标准代数运算即可完成证明 . □

请注意，这一结果与定理 3.2 的特化图景十分契合，为经典的 Lusztig–Stanley 公式 (2) 关于余不变代数的（单）分次特征给出了双分次细化。

推论 3.5. 我们有

$$T_n^{S_n} \cong \mathbb{C}[\widetilde{e}_0, \ldots, \widetilde{e}_n].$$

[1]谨此感谢 Anton Mellit 为我讲解以下计算的细节。

证明。这些元素 $\tilde{e}_0$、……、$\tilde{e}_n$ 是 S_n-不变的。它们在 T_n 中也构成一个正则序列，因此生成一个自由多项式子代数。另一方面，商

$$P_n = T_n/\langle \tilde{e}_0, \dots, \tilde{e}_n \rangle$$

根据定理 3.4，仅有一个一维的 S_n-不变子空间，即常数子空间。因此$\mathbb{C}[\tilde{e}_0，\dots\dots，\tilde{e}_n]$ 包含 T_n中所有的 S_n-不变元。□

3.4. 与对角余不变代数的联系。本节将讨论射影余不变代数 P_n 与Garsia–Haiman对角余不变代数 D_n 之间一种“非平凡地平凡”的联系。回顾对角余不变代数是双分次代数

$$D_n = \mathbb{C}[a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n]/\langle \mathbb{C}[a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n]_+^{S_n} \rangle,$$

其中对称群 S_n 通过同时置换两组变量作用于 $\mathbb{C}[a_1，\dots\dots，a_n，b_1，\dots\dots，b_n]$。双分次由$\deg a_i = (1, 0)$ 与$\deg b_j = (0，1)$定义。代数 D_n 具有维数为 $(n+1)^{n-1}$ [14]的双分次 S_n-模结构。

下面的陈述以略带诙谐的方式表述，但要点是，(i) 简单且自然，而 (ii) 则是一个非平凡的陈述。

命题 3.6。 *(i)* 存在一个自然的 S_n-等变双分次代数同态

$$\varphi_n \colon P_n \to D_n.$$

(ii) 该同　态 φ_n 是平凡的，可分解为合成 $P_n \to P_n/(P_n)_+ \cong \mathbb{C} \hookrightarrow D_n$.

证明。同态 φ_n 在本文前文中实际上已经定义过：对于 $I \subseteq [n]$，令

$$\tilde{\varphi}_n \colon x_I \mapsto \prod_{i \in I} a_i \prod_{j \notin I} b_j.$$

I_n 中的关系在 $\mathbb{C}[a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n]$ 中成立（这又是塞格雷嵌入！），因此我们得到一个代数同态 $\tilde{\varphi}_n$: $T_n \to \mathbb{C}[a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n]$，在对 T_n上的双分次重新缩放后，该同态是双分次的。元素 $\tilde{e}_i$ 被映射为目标中的 S_n-不变元素，因此 $\tilde{\varphi}_n$ 下降为一个 S_n-等变的双分次态射 φ_n: $P_n \to D_n$，从而证明了 (i)。

非平凡的部分是 (ii)，即这个自然同态实际上是平凡的这一论断：对于 $I \subseteq [n]$，形如 $\prod_{i \in I} a_i \prod_{j \notin I} b_j$ 的元素在对角余不变代数 D_n中全都为零。我看不出这个事实有什么显而易见的理由；它最初是通过计算机计算观察到的[2]。

为简单起见，我们可以假设 $I = \{1、\dots\dots、k\}$。主要结论是，若将 D_n 视为 $\mathbb{C}[a_1、\dots\dots、a_n]$上的一个模，则由 $b_{k+1} \cdot \dots \cdot b_n$ 张成的子模同构于通常的余不变代数 R_n 中由生成元 $\{a_1、\dots\dots、a_n\}$ 上的 $a_{k+1} \cdot \dots \cdot a_n$所张成的子模。于是，消失性结论随之成立，因为若用 $a_1 \cdot \dots a_k$乘以该子模，显然结果为 0。

这一结论的理由是，乘积 $b_{k+1} \cdot \dots \cdot b_n$ 是次数为 $n-k$ 且在 Garsia–Stanton 下降序中最低的单项式。该陈述由 [7, 定理 B，c)], 应用于 $F_a = F_{(0、\dots\dots、0，1、\dots\dots、1)}$即可得出。□

注 3.7. 这三个有限维代数 R_n，P_n，D_n 由下列示意图连接

$$R_n \rightsquigarrow P_n \xrightarrow{\varphi_n} D_n,$$

其中 $\rightsquigarrow$ 表示特化。这些代数分别来源于 $(\mathbb{A}^1)^n$、$(\mathbb{P}^1)^n$ 和 $(\mathbb{A}^2)^n$的 S_n-等变坐标几何。因此，它们之间存在关联是合乎情理的。然而，自然同态 φ_n 为何是平凡的，我仍感到困惑。

4. Young subgroups and general Segre embeddings

4.1. **一般塞格雷嵌入的双分次坐标环**。考虑一个合成$\alpha \vDash n$, 并令 $\mathbb{P}_\alpha = \mathbb{P}^{\alpha_1} \times \dots \times \mathbb{P}^{\alpha_k}$ 其中 $\mathbb{P}^{\alpha_i} = \operatorname{Proj} \mathbb{C}\left[z_0^{(i)}，\dots，z_{\alpha_i}^{(i)}\right]$。另设

$$N_\alpha = |\mathcal{P}(M_\alpha)| - 1 = \prod_{i=1}^{k} (\alpha_i + 1) - 1$$

[2]感谢 Erik Carlsson 为我讲解这个证明。

and

$$\mathbb{P}^{N_\alpha} = \operatorname{Proj} \mathbb{C}\left[y_I \colon I \subset M_\alpha\right],$$

变量由多重集 M_α的子集 $\mathcal{P}(M_\alpha)$ 来索引。塞格雷嵌入

$$s_\alpha \colon \mathbb{P}_\alpha = \mathbb{P}^{\alpha_1} \times \ldots \times \mathbb{P}^{\alpha_k} \to \mathbb{P}^{N_\alpha}$$

由坐标环上的对偶映射定义为

$$y_I \mapsto z^{(1)}_{j_1} z^{(2)}_{j_2} \ldots z^{(k)}_{j_k} \text{ for } I = \{1^{j_1} \ldots k^{j_k}\} \subset M_\alpha \text{ with } 0 \leqslant j_i \leqslant \alpha_i.$$

Let

$$T_\alpha = \mathbb{C}\left[y_I \colon I \subset M_\alpha\right] / \langle y_{I_1} y_{I_2} - y_{I_3} y_{I_4} \colon (I_1, I_2) \sim (I_3, I_4) \rangle$$

设其为塞格雷嵌入 s_α 的像的射影坐标代数。对于满足 $I_m = (1^{j_{1,m}} \ldots k^{j_{k,m}}) \subset M_\alpha$ 的多重集对，等价关系 $(I_1, I_2) \sim (I_3, I_4)$ 定义如下：对所有 $1 \leqslant i \leqslant k$，我们要求 $\{j_{i,1}, j_{i,2}\} = \{j_{i,3}, j_{i,4}\}$ 在多重集的意义下成立。参见 [20, 第 4] 节。

代数 T_α 可以按如下方式赋予双分次：目标 $\mathbb{P}^{N_\alpha}$ 中的塞格雷坐标 y_I 的双次数为 $(1, |I|)$。显然，这个双分次与塞格雷嵌入像的定义理想相容。

注释 4.1。一种或许更熟悉的塞格雷变量索引方式是

$$\mathbb{P}^{N_\alpha} = \operatorname{Proj} \mathbb{C}\left[y_{j_1 \ldots j_k} \colon 0 \leqslant j_i \leqslant \alpha_i\right],$$

其中塞格雷嵌入由下式给出

$$\left([z^{(1)}_0 : \ldots : z^{(1)}_{\alpha_1}], \ldots, [z^{(k)}_0 : \ldots : z^{(k)}_{\alpha_k}]\right) \mapsto \left[\ldots : \left(z^{(1)}_{j_1} z^{(2)}_{j_2} \ldots z^{(k)}_{j_k}\right) : \ldots\right]_{0 \leqslant j_i \leqslant \alpha_i}.$$

容易看出，这与上述形式体系等价，且更符合本文的精神。

同样，拥有该代数的一个替代模型将是有用的，类似于（9）中为 T_n所给出的模型。给定合成 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \vDash n,$，考虑自由双分次交换代数 $\mathbb{C}[\zeta, \xi_{i,l} \colon \ 1 \leqslant i \leqslant k, 1 \leqslant l \leqslant \alpha_i]$，其中$\mathsf{deg}(\zeta) = (1, 0)$ 且$\mathsf{deg}(\xi_{i,l}) = (0, 1)$。于是同样，双分次代数 T_α 同构于 $\mathbb{C}[\zeta,\xi_{i,l}]$的一个双分次子代数，即该嵌入的像

$$\begin{aligned} T_\alpha &\hookrightarrow \mathbb{C}[\zeta, \xi_{i,l}] \\ y_I &\mapsto \zeta \cdot \prod_{i=1}^{k} \xi_{i,j_i} \text{ for } I = (1^{j_1} \ldots k^{j_k}) \subset M_\alpha, \end{aligned} \tag{10}$$

其中，若 $j_i = 0$，我们令$\xi_{i,0} = 1$ 。事实上，对于 $(I_1, I_2) \sim (I_3, I_4)$ 的关系$y_{I_1} y_{I_2} = y_{I_3} y_{I_4}$ 在该映射下再次自动成立。

例 4.2. 考虑第一个非平凡情形 $\alpha = (2,\ 1) \vDash 3$, 对应于 $\mathbb{P}_{(2,\ 1)} = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$。那么 $M_{(2,\ 1)} = \{1,\ \mathbf{1},\ 2\}$。于是得到熟知的 $\mathbb{C}$-代数

$$T_{(2,1)} = \mathbb{C}[y_\varnothing, y_{\{1\}}, y_{\{1,1\}}, y_{\{2\}}, y_{\{1,2\}}, y_{\{1,1,2\}}] \Big/ \left\langle \operatorname{rank} \begin{vmatrix} y_\varnothing & y_{\{1\}} & y_{\{1,1\}} \\ y_{\{2\}} & y_{\{1,2\}} & y_{\{1,1,2\}} \end{vmatrix} \leqslant 1 \right\rangle,$$

即标准塞格雷嵌入 $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^5$的著名坐标代数。其中一个关系是 $y_{\{1\}} y_{\{1,\ 1,\ 2\}} = y_{\{1,\ 1\}} y_{\{1,\ 2\}}$, 它对应于多重子集的等价对 $(\{1\},\ \{1^2,\ 2\}) \sim (\{1^2\},\ \{1,\ 2\})$，这些多重子集取自 $M_\alpha = \{1^2,\ 2\}$。

4.2. **双分次希尔伯特级数**。

定理 4.3. 对于任意合成 $\alpha \vDash n,$，代数 T_α 的双分次希尔伯特级数为

$$\dim_{t,q} T_\alpha = \frac{A_\alpha(t, q)}{\prod_{j=0}^{n} (1 - tq^j)},$$

分子是多重集 M_α中词 W_α 的 (des,maj)-生成函数。

证明。使用精细化埃尔哈特理论。乘积空间 $\mathbb{P}_\alpha$ 的射影坐标环是乘积多胞体 $\Delta_\alpha = \Delta_{\alpha_1} \times \ldots \times \Delta_{\alpha_k} \subset \mathbb{R}^n$ 的多面体代数 T_{Δ_α}。我们有

$$\dim_{t,q} T_\alpha = E^{\mathbf{a}}_{\Delta_\alpha}(t,q)$$

对于分次向量

$$\mathbf{a} = (1, \ldots, \alpha_1, 1, \ldots, \alpha_2, \ldots, 1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{Z}^n.$$

另一方面，显然有

$$r\Delta_\alpha = (r\Delta_{\alpha_1}) \times \ldots \times (r\Delta_{\alpha_k}) \subset \mathbb{R}^n,$$

因此，利用 引理 2.2，我们还可以看出， $r\Delta_\alpha$ 中格点数的 q-计数为 其表示为

$$L^{\mathbf{a}}_{\Delta_\alpha, r}(q) = \prod_{i=1}^{k} \begin{bmatrix} r+\alpha_i \\ \alpha_i \end{bmatrix}_q.$$

因此我们得到

$$\dim_{t,q} T_\alpha = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{k} \begin{bmatrix} r+\alpha_i \\ \alpha_i \end{bmatrix}_q \right) t^r.$$

由麦克马洪恒等式 (7)，可得结论。 □

令 $q = 1$，我们得到塞格雷嵌入的经典希尔伯特级数，其中每个塞格雷变量的次数为 1。因此可推出以下公式，该公式此前由 Morales 在未发表的 [19]，中证明，也可由 [20] 推出。

推论 4.4。对于任意合成 $\alpha \vDash n,$，一般塞格雷嵌入 s_α: $\mathbb{P}_\alpha \to \mathbb{P}^{N_\alpha}$ 的坐标代数 T_α的（经典）希尔伯特级数由以下公式给出

$$\dim_t T_\alpha = \frac{\sum\limits_{w \in W_\alpha} t^{\mathrm{des}(w_\alpha)}}{(1-t)^{n+1}}.$$

分子中得到的系数有时称为西蒙·纽科姆数。

例 4.5。让我们继续讨论例 4.2，其中 $\alpha = (2,\ 1) \vDash 3$ 和 $M_{(2,\ 1)} = \{1,\ \mathbf{1},\ 2\}$。这个多重集中的词集为

$$W_{(2,1)} = \{112, 121, 211\}.$$

我们得到生成函数

$$A_{(2,1)}(t,q) = 1 + tq + tq^2.$$

因此，嵌入 $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^5$ 的双分次希尔伯特函数为

$$\dim_{t,q} T_{(2,1)} = \frac{1 + tq + tq^2}{(1-t)(1-tq)(1-tq^2)(1-tq^3)}.$$

相应的单分次表达式为

$$\dim_t T_{(2,1)} = \frac{1+2t}{(1-t)^4} = \frac{1-3t^2+2t^3}{(1-t)^6},$$

对应于 希尔伯特–伯奇形式中的余维 2 行列式嵌入 $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^5$ at.

例 4.6. 考虑 $\alpha = (2,\ 2) \vDash 4$ 的情形。那么 $M_{(2,\ 2)} = \{1,\ \mathbf{1},\ 2,\ 2\}$ 以及

$$W_{(2,2)} = \{1122, 1212, 1221, 2112, 2121, 2211\}.$$

我们得到双分次希尔伯特函数

$$\dim_{t,q} T_{(2,2)} = \frac{1 + t(q + 2q^2 + q^3) + t^2 q^4}{(1-t)(1-tq)(1-tq^2)(1-tq^3)(1-tq^4)}$$

其分子为回文分子。单分次表达式为

$$\dim_t T_{(2,2)} = \frac{1+4t+t^2}{(1-t)^5} = \frac{1-9t^2+16t^3-9t^4+t^6}{(1-t)^9},$$

对应于标准的余维 4 嵌入 $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^8$。

我们需要命题 3.1 的一个推广。对于 $0 \leqslant l \leqslant n$，记

$$\widetilde{f}_l = \sum_{\substack{I \subset M_\alpha \\ |I|=l}} y_I \in T_\alpha.$$

~ ~ ~注意，$f_0 = y_\varnothing$、$f_n = y_{M_\alpha}$，并且元素 $f_l \in T_\alpha$ 是双次数为 $(1,\ l)$ 的齐次元素。

~ ~**命题 4.7**。对于任意合成 $\alpha \vDash n,$，元素 f_0、……、f_n 在双分次代数 T_α 中构成一个最大长度的正则序列。

证明。见 [20，第 4] 节。[1, 命题 2.7] 的具体证明经过最小修改后同样适用。 □

定义

$$P_\alpha = T_\alpha / \langle \widetilde{f}_0, \ldots, \widetilde{f}_n \rangle,$$

一个双分次 Arti nian Cohen–Macaulay代数（不考虑其双分次）最早在 [20 中进行了研究].

推论 4.8。对于任意合成 $\alpha \vDash n,$，代数 P_α 的双分次希尔伯特级数为

$$\dim_{t,q} P_\alpha = A_\alpha(t, q).$$

4.3. 杨子群下的不变量。给定 $\alpha \vDash n,$，存在相应的杨子群

$$S_\alpha = S_{\alpha_1} \times \ldots \times S_{\alpha_k} \subset S_n.$$

对称群 S_n 在双分次代数 T_n 上的作用限制为 S_α 的作用。

引理 4.9。 S_n-不变元素 $\tilde{e}_0$、……、$\tilde{e}_n \in T_n$ 在不变子代数 $T_n^{S_\alpha} \subset T_n$ 中构成一个正则序列。商

$$P_n^{S_\alpha} \cong T_n^{S_\alpha} / \langle \tilde{e}_0, \ldots, \tilde{e}_n \rangle \subset P_n$$

是射影余不变代数 P_n 的不变子代数 $P_n^{S_\alpha}$。

证明。考虑由元素 $\tilde{e}_0$、……、$\tilde{e}_n \in T_n$ 构成的 Koszul 复形。由于在零特征下，对有限群取不变部分是正合函子，因此对该 Koszul 复形取不变部分，得到由 $\tilde{e}_0$、……、$\tilde{e}_n \in T_n^{S_\alpha}$ 构成的正合 Koszul 复形。因此，这些元素在 $T_n^{S_\alpha}$ 中也构成正则序列，而 $T_n^{S_\alpha}$ 对它们生成的理想取商，确实就是不变代数 $P_n^{S_\alpha} \subset P_n$。 □

S_α 的作用延拓到双分次代数 T_n 及其商 P_n 的变形族 $\mathcal{T}_n$、$\mathcal{P}_n$ 上。记作 $\mathcal{P}_\alpha = \mathcal{P}_n^{S_\alpha}$。映射 $\mathbb{C}[s_0,\ s_1] \to \mathcal{T}_n^{S_\alpha} \cong T_n^{S_\alpha}[s_0,\ s_1]$ 和 $\mathbb{C}[s_0,\ s_1] \to \mathcal{P}_\alpha$ 仍然是平坦的，前者显然如此，后者则由半连续性得出。同样，我们可以从几何角度来看待这些映射

$$\tau_\alpha \colon \operatorname{Spec} \mathcal{T}_n^{S_\alpha} \to \operatorname{Spec} \mathbb{C}[s_0, s_1] = \mathbb{A}^2$$

and

$$\pi_\alpha \colon \operatorname{Spec} \mathcal{P}_\alpha \to \operatorname{Spec} \mathbb{C}[s_0, s_1] = \mathbb{A}^2$$

从而得到仿射平面 $\mathbb{A}^2$ 上代数（的谱）的双参数族，并配备环面 $(\mathbb{C}^*)^2$ 的作用；该环面如前所述作用于底空间。

定理 4.10. 固定一个合成 $\alpha \vDash n$。

(i) 在点 $(0, 0) \in \mathbb{A}^2$ 上，族 $\mathcal{T}_n^{S_\alpha}$ 的中心纤维 $(\mathcal{T}_n^{S_\alpha})_{(0,0)}$ 同构于塞格雷嵌入 s_α： $\mathbb{P}_\alpha \to \mathbb{P}^{N_\alpha}$ 的双分次坐标代数 T_α。*(ii)* 族 $\mathcal{P}_\alpha$ 的中心纤维 $(\mathcal{P}_\alpha)_{(0,0)}$ 同构于有限维双分次代数 P_α。*(iii)* 在点 $(s,\ 0) \in \mathbb{A}^2$ 上，族 $\mathcal{P}_\alpha$ 的纤维 $(\mathcal{P}_\alpha)_{(s,0)}$ 同构于部分余不变代数 R_α。*(iv)* 在满足 $s_0 s_1 \neq 0$ 的点 $(s_0,\ s_1) \in \mathbb{A}^2$ 上，族 $\mathcal{P}_\alpha$ 的纤维 $(\mathcal{P}_\alpha)_{(s_0,s_1)}$ 同构于不变子代数 $(\mathbb{C}S_n)^{S_\alpha} < \mathbb{C}S_n$。

证明。在特征零时，对有限群取不变量与在平坦族中取纤维可以交换。回顾定理 3.2 以及 $R_n^{S_\alpha} = R_\alpha$，(iii) 立即成立，(iv) 也同样成立。我们还得到 $(\mathcal{T}_n^{S_\alpha})_{(0,\ 0)} \cong T_n^{S_\alpha}$，以及 $(\mathcal{P}_\alpha)_{(0,\ 0)} \cong P_n^{S_\alpha}$。

将族 $\mathcal{P}_\alpha$ 限制到一维底空间 $\mathbb{A}^1\times\{0\}\subset\mathbb{A}^2$。我们得到一个分次代数的平坦族，其中中心纤维 $(\mathcal{P}_\alpha)_{(0,\ 0)}\cong P_n^{S_\alpha}$ 按其第二分次分次。除同构外，借助环面作用，所有其他纤维都同构于 $(\mathcal{P}_\alpha)_{(1,\ 0)}\cong R_n^{S_\alpha}=R_{\alpha_\circ}$ 因此，由平坦性可得

$$\dim_q P_n^{S_\alpha}=\dim_q R_\alpha=\left[\begin{array}{c} n \\ \alpha \end{array}\right]_q, \tag{11}$$

第 q 个多项式系数。

T我们证明的关键步骤是定义一个双分次的单射代数同态 m

$$\chi_\alpha\colon T_\alpha\to T_n^{S_\alpha}$$

将正则序列 $\{\widetilde{f}_0、\ldots\ldots、\ \widetilde{f}_n\}\subset T_\alpha$ 映射到正则序列 $\{\tilde{e}_0、\ldots\ldots、\ \tilde{e}_n\}\subset T_n^{S_\alpha}$。首先假设这样的映射 χ_α 已经构造出来。于是它下降为双分次代数的单射映射

$$\bar{\chi}_\alpha\colon P_\alpha\to P_n^{S_\alpha}.$$

然而，将推论 4.8 特化到 q-分次，我们得到

$$\dim_q P_\alpha=\left[\begin{array}{c} n \\ \alpha \end{array}\right]_q. \tag{12}$$

比较 (11) 和 (12)，我们看到 $\bar{\chi}_\alpha$ 必须是一个同构，这意味着 χ_α 也是一个同构，从而证明了定理的 (i)–(ii) 条。

因此，接下来需要构造同态 χ_α，并证明其单射性。回顾

$$T_\alpha=\mathbb{C}\left[y_I\colon I\subset M_\alpha\right]/\langle y_{I_1}y_{I_2}-y_{I_3}y_{I_4}\colon (I_1,I_2)\sim(I_3,I_4)\rangle,$$

其中等价关系 $\sim$ 来自上文 4.1 节。定义

$$\tilde{\chi}_\alpha\colon\mathbb{C}\left[y_I\colon I\subset M_\alpha\right]\to\mathbb{C}\left[x_K\colon K\subset[n]\right]$$

在对应于 $I=(1^{j_1}\ldots k^{j_k})\subset M_\alpha$（其中 $0\leqslant j_i\leqslant\alpha_i$）的生成元上定义为

$$\tilde{\chi}_\alpha(y_I)=\sum_{J_1,\ldots,J_k}x_{J_1\sqcup\ldots\sqcup J_k},$$

其中，求和遍历所有由 $\{J_1、\ldots\ldots、\ J_k\}$ 组成的集合，这些集合中每个 $1\leqslant i\leqslant k$ 都有 $J_i\subset\{\alpha_1+\ldots+\alpha_{i-1}+1、\ldots\ldots、\ \alpha_1+\ldots+\alpha_i\}$，且集合大小为 $0\leqslant j_i\leqslant\alpha_i$。此映射保持双分次，并映到 $\mathbb{C}\left[x_K$ 中的元素：$K\subset[n]\right]$，这些元素在 S_α 的自然作用下保持不变。通过常规的组合验证可得，若 $(I_1,\ I_2)\sim(I_3,\ I_4)$，则

$$\tilde{\chi}_\alpha(y_{I_1}y_{I_2}-y_{I_3}y_{I_4})\in\left\langle x_{J_1}x_{J_2}-x_{J_1\cap J_2}x_{J_1\cup J_2}\colon J_1,J_2\subseteq[n]\right\rangle.$$

因此，我们得到一个诱导的双分次代数同态

$$\chi_\alpha\colon T_\alpha\to T_n^{S_\alpha}\subset T_n.$$

~根据定义，对于所有 $0\leqslant i\leqslant n$，我们得到 $\chi_\alpha(f_i)=\widetilde{e}_i$。剩下要证明同态 χ_α 是单射。

为此，我们将使用在（9）—（10）中引入的代数模型[3] 。在该图景中，我们的代数被实现为自由交换代数的显式子代数 $T_\alpha\subset\mathbb{C}[\zeta,\ \xi_{i,\ l}]$ 以及 $T_n\subset\mathbb{C}[\zeta,\ \xi_1,\ \ldots\ldots,\ \xi_n]$。我们声称，在这个模型中，映射 $\chi_\alpha\colon T_\alpha\to T_n$ 是一个 $\mathbb{C}$-代数同态的限制

$$\omega_\alpha\colon\mathbb{C}[\zeta,\xi_{i,l}]\to\mathbb{C}[\zeta,\xi_1,\ldots,\xi_n]$$

定义如下。令 $\omega_\alpha(\zeta)=\zeta$，并令

$$\omega_\alpha(\xi_{i,l})=e_l(\xi_{\alpha_1+\ldots+\alpha_{i-1}+1},\ldots,\xi_{\alpha_1+\ldots+\alpha_i})$$

对于 $1\leqslant l\leqslant\alpha_i$，其中 e_l 表示给定变量的第 l 个初等对称多项式。比较定义可知，容易看出确实有

$$\chi_\alpha=\omega_\alpha|_{T_\alpha}\colon T_\alpha\to T_n\subset\mathbb{C}[\zeta,\xi_1,\ldots,\xi_n].$$

另一方面，显然，自由多项式代数之间的映射 ω_α 是单射。因此， χ_α也如此，我们的证明至此完成。□

[3]我谨向 Fabi´an Levic´an 致谢，感谢他就这一问题进行的关键讨论。

4.4. 另一个分次特征公式。 </style}给定，考虑合成，……， $m) \vDash n$。相应的杨子群为 $S_\alpha = (S_m)^{\times k} \subset S_n$。在 S_n 中，该群由对称群 S_k 正规化，后者同时置换 m 元组的指标。因此，相应的不变代数 $P_\alpha = P_n^{S_\alpha}$具有对称群 S_k的剩余双分次作用。其弗罗贝尼乌斯特征的公式再次用复合记号表达最为简洁。

定理 4.11。 [16, 推论 5,8，例 5。10] 对于 $n = k \cdot m$ 和 $\alpha = (m, \ldots\ldots m) \vDash n,$

$$\operatorname{char}_{t,q} P_\alpha = \prod_{j=0}^{n} (1 - tq^j) \left(\sum_{i \geqslant 0} t^i \sum_{\mu \vdash k} s_\mu \left(\begin{bmatrix} i+m \\ m \end{bmatrix}_q \right) s_\mu \right)$$

作为对称群 S_k 的双分次特征。

[16]，的作者以及我本人都不知道，这个特征是否存在一个求和公式，使其对一个自然的有限组合集合求和，类似于 (5)，尽管这似乎很有可能。请比较 [16, 命题 5。21] 以及相关讨论。

5. Further directions

5.1. 上同调解释。令 $F_n = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/B$ 为所有旗标 $U_\bullet = (U_1 \subset \ldots \subset U_{n-1} \subset \mathbb{C}^n)$ 的旗簇，其中 $\dim U_i = i$，而 $B < \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 是标准博雷尔子群。于是，Borel 同构是分次环的同构

$$R_n \cong H^*(F_n, \mathbb{C})$$

旗簇的余不变代数与复上同调之间（右侧的次数加倍）。由此可得等式

$$\dim_q H^*(F_n, \mathbb{C}) = [n]_q!$$

旗簇的 Poincar´e 多项式。

此外，对于一个合成 α , n ，可以关联一个抛物子群 $P_\alpha < \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$，使得商 $F_\alpha = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/P_\alpha$ 是部分旗簇，即由满足 $\dim V_i = \alpha_1 + \ldots + \alpha_i$ 的子空间滤过$(V_1 \subset \ldots \subset V_{k-1} \subset \mathbb{C}^n)$ 构成的空间。包含映射 $B \leqslant P_\alpha$ 导出一个投影映射

$$\pi_\alpha \colon F_n \to F_\alpha$$

该映射会忘掉完整旗 $U_\bullet$ 中维数不是某个 i 对应的 $\alpha_1 + \ldots + \alpha_i$ 形式的子空间。拉回映射

$$\pi_\alpha^* \colon H^*(F_\alpha, \mathbb{C}) \to H^*(F_n, \mathbb{C}) \cong R_n$$

是单射，并给出如下同一性

$$H^*(F_\alpha, \mathbb{C}) \cong R_\alpha = R_n^{S_\alpha}$$

部分旗簇的上同调与部分余不变代数 R_α [3, （推论 5.4，定理 5.5]）之间。由此可得等式

$$\dim_q H^*(F_\alpha, \mathbb{C}) = \begin{bmatrix} n \\ \alpha \end{bmatrix}_q$$

部分旗簇的 Poincar´e 多项式。特别地，对于合成 $\alpha = (m, \ n - m)$, n，我们有 $F_\alpha = \mathrm{Gr}(m, \ n)$ 即格拉斯曼流形，而前一个等式便成为众所周知的

$$\dim_q H^*(\mathrm{Gr}(m, n), \mathbb{C}) = \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q .$$

一个自然的问题是，定理 3.2–4.10 中代数 R_n, R_α 的变形族 $\mathcal{P}_n$, $\mathcal{P}_\alpha$ 是否具有任何上同调解释。我们先写出从该族得到的代数 R_α 的变形（光滑化）。

命题 5.1. 给定一个合成 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$， n，代数 $(\mathcal{P}_\alpha)_{(1,0)} \cong R_\alpha$ 的一参数变形族 $(\mathcal{P}_\alpha)_{(1,s)}$ 可由以下生成元与关系描述。

设变量 $u_1^{(1)},\dots,u_1^{(\alpha_1)},u_2^{(1)},\dots,u_2^{(\alpha_2)},\dots,u_k^{(1)},\dots,u_k^{(\alpha_k)}$ 的次数为 次数 $\left(u_i^{(j)}\right)=j$，另设一个次数为 次数 $s=n$的变量 s。那么

$$(\mathcal{P}_\alpha)_{(1,s)}\cong\mathbb{C}\left[u_1^{(1)},\dots,u_{\alpha_k}^{(k)}\right]\Big/J_\alpha,$$

其中 J_α 是给定多项式环中由多项式里的次数齐次项生成的理想

$$\prod_{i=1}^{k}\left(1+\sum_{j=1}^{\alpha_i}u_i^{(j)}\right)-(1+s).$$

证明。这可由定理 3.2 的证明通过展开定义得到。 □

注意，对于 $s=0$，我们确实恢复了部分旗簇 F_α 上同调的标准显式构造，该构造用泛丛的陈类表示，其中变量 $u_j^{(i)}$ 表示第 j 个泛商丛的第 i 个陈类。

对于二项合成 $\alpha=(m,\ n-m)$，n，对应的部分旗簇 $F_\alpha=\mathbf{Gr}(m,\ n)$，上同调环 $H^*(\mathbf{Gr}(m,\ n),\ \mathbb{C})$ 的这种变形对应于（小）量子上同调 $QH^*(\mathbf{Gr}(m,\ n),\ \mathbb{C})$，其量子参数为 s，例如参见 [22, Thm.0.1]。对于更一般的部分旗簇，特别是旗簇 F_n，这种变形似乎与任何已知的（等变）上同调环量子变形 [13, 9, 15]都不匹配[4] $H^*(F_\alpha,\ \mathbb{C})$。

由此讨论引出了两个问题。

(1) 能否对命题 5.1 中部分旗簇（其旗包含多个步骤）的上同调环 $H^*(F_\alpha,\mathbb{C})$ 的变形（光滑化）给出一种自然的上同调解释？**(2)** 能否对定理 4.10(i) 中任意部分旗簇的上同调环 $H^*(F_\alpha,\mathbb{C})$ 的退化给出一种自然的上同调解释?

例 5.2。 让我们最后一次考察 $\alpha=(2,1)\vDash 3$，继续例 4.2–4.5。我们有 e

$$T_{(2,1)}=\mathbb{C}[y_\varnothing,y_{\{1\}},y_{\{1,1\}},y_{\{2\}},y_{\{1,2\}},y_{\{1,1,2\}}]\Big/\left\langle\operatorname{rank}\begin{vmatrix}y_\varnothing & y_{\{1\}} & y_{\{1,1\}}\\ y_{\{2\}} & y_{\{1,2\}} & y_{\{1,1,2\}}\end{vmatrix}\leqslant 1\right\rangle,$$

相应 P_α 的变形族的一般纤维为

$$(\mathcal{P}_{(2,1)})_{(s_0,s_1)}\cong T_{(2,1)}\Big/\left\langle y_\varnothing-s_0,y_{\{1\}}+y_{\{2\}},y_{\{1,1\}}+y_{\{1,2\}},y_{\{1,1,2\}}-s_1\right\rangle.$$

在 $(s_0,s_1)=(1,0)$处，按照定理 3.2 证明中所述的步骤，并取杨不变量，我们得到代数

$$R_{(2,1)}=(\mathcal{P}_{(2,1)})_{(1,0)}\cong\mathbb{C}[u_1,u_2,v_1]/\langle u_1+v_1,u_2+u_1v_1,u_2v_1-s\rangle\cong\mathbb{C}[u_1]/\left\langle u_1^3\right\rangle,$$

为简化记号，我们将 $\{u_1^{(1)},u_1^{(2)},u_2^{(1)}\}$记作 $\{u_1,u_2,v_1\}$。这个分次代数与相应旗簇 $F_{2,1}\cong\mathbb{P}^2$的上同调同构。对于一般的变形，我们得到

$$(\mathcal{P}_{(2,1)})_{(1,s)}\cong\mathbb{C}[u_1,u_2,v_1]/\langle u_1+v_1,u_2+u_1v_1,u_2v_1-s\rangle\cong\mathbb{C}[u_1]/\left\langle u_1^3+s\right\rangle,$$

它确实与 $\mathbb{P}^2$ 的（小）量子上同调 $QH^*(\mathbb{P}^2)$ 同构，其中量子参数为 s。

中心纤维的双分次维数为

$$\dim_{t,q}(\mathcal{P}_{(2,1)})_{(0,0)}=\dim_{t,q}P_{(2,1)}=1+tq+tq^2, \tag{13}$$

它在 $t=1$ 处特化为 Poincar´e 多项式

$$\dim_q(\mathcal{P}_{(2,1)})_{(q,0)}=\dim_q R_{(2,1)}=1+q+q^2=\dim_q H^*(\mathbb{P}^2,\mathbb{C}).$$

那么，接下来要探讨的是，是否存在一种从 $\mathbb{P}^2$ 出发、与双分次表达式（13）相关的自然上同调解释。

[4]我谨此感谢 Konstanze Rietsch 就这一点所作的详细解释。

5.2. **射影与部分余不变代数中的 Garsia–Stanton 型基**。 固定 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, n。令 $\mathcal{L}_\alpha$ 表示从 $(0, \ldots, 0)$ 到 $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ 的递增格路集合，其中$\mathbb{N}^k$；换言之，它是满足以下性质的函数 ℓ: $\{0, \ldots, n\} \to \mathbb{N}^k$ 的集合:

(1) $\ell(0) = (0, \ldots, 0)$; **(2)** $\ell(n) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$; **(3)** 对于每个 $0 \leqslant i < n$，都有 $\ell(i+1) = \ell(i) + \mathbf{e}^j$，其中某个 $1 \leqslant j \leqslant k$ 满足条件，且 $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\} \subset \mathbb{N}^k$ 是标准单位向量。

引理 5.3。 存在一个自然双射

$$\delta_\alpha \colon W_\alpha \to \mathcal{L}_\alpha$$

在多重集 M_α 中的词 W_α 与递增格路 $\mathcal{L}_\alpha$ 的集合之间。

证明。 多重集 $M_\alpha = \{1^{\alpha_1}, \ldots, k^{\alpha_k}\}$ 中的一个词 $w \in W_\alpha$ 是一个有序数列，其中的数介于 1 和 k 之间，每个数 j 出现 α_j 次。这样的词恰好描述了如何构造一条递增格路 $\ell \in \mathcal{L}_\alpha$: 在（3）的每一步中，选择列表中的下一个数所对应的 j。□

利用这一对应，我们可以把格路 $\ell \in \mathcal{L}_\alpha$ 的下降位置集 $\mathrm{Des}(\ell)$ 定义为相应词 $w \in W_\alpha$ 的那些下降位置 $0 \leqslant i < n$ 所对应的格点集 $\ell(i) \in \mathbb{N}^k$。换言之，它是我们路径上这样的格点集 $p \in \mathbb{N}^k$： 路径中到达该格点的一步，其 j 值高于其后一步。

其次，注意，一个对所有 j 都满足 $0 \leqslant i_j \leqslant \alpha_j$ 的格点 $p = (i_1, \ldots, i_k) \in \mathbb{N}^k$，换言之，一个可被我们的某条格路经过的格点，可等同于元素 $I(p) = (i_1, \ldots, i_k) \in \mathcal{P}(M_\alpha)$，即多重集 M_α 的一个子集。因此，任一这样的格点 p 都可映射到一般塞格雷嵌入的坐标环 T_α 中的唯一单项式 y_{I_p}，参见 4.1。

给定多重集 M_α 中的一个词 $w \in W_\alpha$，我们终于可以定义一个元素

$$y_w = \prod_{p \in \mathrm{Des}(\delta(w))} y_{I_p} \in T_\alpha.$$

考察 定理 4.10 中讨论的族 $\mathcal{P}_\alpha$，我们可以考虑相应的元素

$$\mathbf{a}_w = [y_w]_{0,0} \in (\mathcal{P}_\alpha)_{(0,0)} \cong P_\alpha$$

在中心纤维中， T_α 的阿廷截断 P_α，其双次数为 $(\mathsf{des}(w), \mathsf{maj}(w))$。我们也可以考虑变形后的元素

$$\mathbf{b}_w = [y_w]_{1,0} \in (\mathcal{P}_\alpha)_{(1,0)} \cong R_\alpha$$

在部分余不变代数中，其次数为 $\mathsf{maj}(w)$。

定理 5.4。 [20, 定理 5。2] 元素集合

$$\{\mathbf{a}_w : w \in W_\alpha\} \subset P_\alpha$$

是有限维双分次代数 P_α 的双分次基，体现了希尔伯特级数恒等式 (6)。

这一结果的情形 $\alpha = (1^n)$ 对应于射影余不变代数本身，已由 [4,定理 4.1] 独立证明。

推论 5.5. 以下元素集合

$$\{\mathbf{b}_w : w \in W_\alpha\} \subset R_\alpha$$

是一个分次基 ，它是有限维分次代数 R_α 的分次基，体现了希尔伯特级数恒等式 (3).

证明。 这由定理 5.4 和定理 4.10 推出，因为在有限维代数的平坦族中构成一组基是一个开性质。□

例 5.6. 考虑情形 $\alpha = (1^n)$。在这种情形下，定理 5.4 中基底的元素仅由置换索引；根据引理 5.3, 这些置换可与单位超立方体中的递增格路对应。对照定义可知，基底元素 $\mathbf{a}_\sigma \in P_n$ 是单项式在商映射 $T_n \to P_n$ 下的像

$$\prod_{i \in \mathrm{Des}(\sigma)} x_{\{\sigma(1), \ldots, \sigma(i)\}} \in T_n,$$

其双次数为 $(\mathsf{des}(\sigma),\ \mathsf{maj}(\sigma))$。在 P_n 的变形 R_n 中，对应元素 $\mathbf{b}_\sigma \in R_n$ 是单项式在商映射 $\mathbb{C}[u_1,\ \ldots\ldots,\ u_n] \to R_n$ 下的像

$$\prod_{i\in \mathrm{Des}(\sigma)} \prod_{j=1}^{i} u_{\sigma(i)} \in \mathbb{C}[u_1,\ldots,u_n],$$

次数为 $\mathsf{maj}(\sigma)$。这些元素构成标准的 Garcia–Stanton下降基 [11]of R_n .

对于任意 α , n，Garcia–Stanton 风格的基 $\{\mathbf{b}w\ :\ w \in W_\alpha\}$of 部分余不变代数 R_α，其指标由多重集中的词给出，或者等价地，根据引理 5.3，由递增格路给出，这可能是新的。从一条格路出发，可以轻松地用命题 5.1 的生成集表示基元素。我们不写冗长的表达式，而是以最后一个例子作结。

例 5.7。 取 $\alpha = (2,2) \vDash 4,$ ，继续例 4.6。再次将 $\{u_1^{(1)}, u_1^{(2)}, u_2^{(1)}, u_2^{(2)}\}$替换为更易读的 $\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$，我们有

$$\begin{aligned} R_{(2,2)} &\cong \mathbb{C}[u_1,u_2,v_1,v_2]/\langle u_1+v_1,\, u_2+u_1v_1+v_2,\, u_2v_1+u_1v_2,\, u_2v_2\rangle \\ &\cong \mathbb{C}[u_1,u_2]/\left\langle u_1^3-2u_1u_2,\, u_1^2u_2-u_2^2\right\rangle, \end{aligned}$$

一个分次代数，其次数为 $(u_i) = i$、$(v_i) = i$ 和 q，维数为 $1+q+2q^2+q^3+q^4$，同构于上同调代数 $H^*(\mathsf{Gr}(2,\ 4),\ \mathbb{C})$。词的集合

$$W_\alpha = \{1122, 1212, 1221, 2112, 2121, 2211\}$$

给出分次 $\mathbb{C}$-基

$$\{1, u_1v_1, u_1v_2, v_1, u_1v_1v_2, v_2\} \subset R_{(2,2)};$$

对于每条格路，规则是在下降位置处将单项式相乘，如图 1 所示。用第二种表示方式，这变为

$$\{1, -u_1^2, u_1u_2, -u_1, -u_2^2, u_1^2-u_2\} \subset R_{(2,2)}.$$

即使在这个简单的例子中，且不考虑符号，这个基也不同于代数$R_{(2,\ 2)} \cong H^*(\mathsf{Gr}(2,\ 4),\ \mathbb{C})$的舒伯特基$\{1,\ u_1,\ u_1^2-u_2,\ u_2,\ u_1u_2,\ u_2^2\}$和标准单项式基 $\{1,\ u_1,\ u_1^2,\ u_2,\ u_1u_2,\ u_2^2\}$。

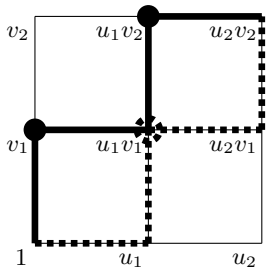

FIGURE 1. 与词 $w = 1212$ （虚线）和$w = 2121$ （实线）对应的格路，其下降位置已标出，由此得到基元素u_1v_1 和 $v_1 \cdot u_1v_2 = u_1v_1v_2$

REFERENCES

[1] P. Adeyemo 和 B. Szendr˝oi, *Refined Ehrhart series and bigraded rings*, 《Studia Sci. Math. Hung.》60（2023）, 97–108。[2] F. Bergeron, *Algebraic Combinatorics and Coinvariant Spaces*, CMS 数学专论丛书, 2009。[3] I. Bernstein、I. M. Gelfand 和 S. I. Gelfand, *Schubert cells, and the cohomology of the spaces G/P*, 《Uspekhi Mat. Nauk》28（1973）, 3–26。[4] B. Braun 和 M. Olsen, *Euler–Mahonian statistics and descent bases for semigroup algebras*, 《European Journal of Combinatorics》69（2018）, 237–254。[5] J. Brundan, *Symmetric functions, parabolic category $\mathcal{O}$, and the Springer fiber*, 《Duke Math. J.》143（2008）, 41–79。[6] L. Carlitz, *A combinatorial property of q-Eulerian numbers*, 《Amer. Math. Monthly》82（1975）, 51–54。[7] E. Carlsson 和 A. Oblomkov, *Affine Schubert calculus and double coinvariants*, arXiv:1801.09033。[8] F. Chapoton, *q-analogues of Ehrhart polynomials*, 《Proc. Edinb. Math. Soc. (2)》59（2016）, 339–358。[9] I. Ciocan-Fontanine, *Quantum cohomology of flag varieties*, 《IMRN》1995, 263–277。[10] A. M. Garsia 和 M. Haiman, *Orbit harmonics and graded representations*, UCSD 1991—92 年讲义。

[11] A. M. Garsia 和 D. Stanton, *Group actions of Stanley–Reisner rings and invariants of permutation groups*, 《Adv. Math.》51（1984）, 107–201。[12] I. Gessel, *A Historical Survey of P-Partitions*, 载于: 《The mathematical legacy of Richard P. Stanley》, 169–188, 美国数学学会, 普罗维登斯（罗得岛州）, 2016。[13] A. Givental 和 B. Kim, *Quantum cohomology of flag manifolds and Toda lattices*, 《Commun. Math. Phys.》168（1995）, 609–641。[14] M. Haiman, *Vanishing theorems and character formulas for the Hilbert scheme of points in the plane*, 《Invent. Math.》149（2002）, 371–407。[15] B. Kim, *Quantum cohomology of flag manifolds G/B and quantum Toda lattices*, 《Ann. Math.》149（1999）, 129–148。[16] F. Levic´ an 和 M. Romero, *Color rules for cyclic wreath products and semigroup algebras from projective toric varieties* 2504 19008, 《arXiv:》。[17] P.A. MacMahon, *Combinatory Analysis*, Dover Phoenix Editions, Dover Publications, Inc., 纽约州米尼奥拉, 2004, 重印 *An Introduction to Combinatory Analysis*（1920）和 *Combinatory Analysis*, 第 I、II 卷（1915、1916）。[18] I. Mirkovi´c 和 D. Rumynin, *Centers of reduced enveloping algebras*, 《Math. Z.》231（1999）, 123–132。[19] Morales, *Segre embeddings, Hilbert series and Newcomb's problem*, arXiv:1306.6910。[20] L. Oeding、C. Raicu 和 S. Sam, *On the (non-)vanishing of syzygies of Segre embeddings*, 《Algebraic Geometry》6（2019）, 571–591。[21] C. Raicu、S. Sam 和 J. Weyman, *On some modules supported in the Chow variety*, 《越南数学杂志》50（2022）, 501–521。[22] B. Siebert 和 G. Tian, *On quantum cohomology rings of Fano manifolds and a formula of Vafa and Intriligator*, 《Asian J. Math.》1（1997）, 679–695。[23] R. P. Stanley, *Invariants of finite groups and their applications to combinatorics*, 《Bull. Amer. Math. Soc.》1（1979）, 475–511。

University of Vienna, Austria*Email address*:
balazs.szendroi@univie.ac.at