arXiv:2602.15059v1 [math.NA] 13 Feb 2026

黏性不可压缩流动与流固耦合中的经认证的降阶替代模型与稳定性裕度

CHANDRASEKHAR GOKAVARAPU、DR NAVEEN KUMAR KAKUMANU、ANJALI DATLA ，
与 GITHA HARSHITHA NOOLU

Abstract. 设 (u, p) 在某一适用情形下求解不可压纳维–斯托克斯方程，其中能量不等式可用，且该不等式中的每个常数均可由声明数据计算得到。我们构造一个降阶模型 u_n ，并施加约束，使其离散演化满足经认证的能量不等式。该证书给出降阶模型能量的全局时间有界性，以及一项有效性范围检验；当所述假设不成立时，该检验即失败。

由此可知，可以将一个可计算残差泛函 $\mathcal{R}_n$ 附加到降阶模型轨迹上。我们证明如下形式的后验界

$$\|u - u_n\|_{\mathsf{X}(0,T)} \le C(\text{declared data})\,\mathcal{R}_n,$$

其中 C 为显式形式， $\mathcal{R}_n$ 由降阶模型与离散化算子计算得到。反之，若放宽认证约束，则即使全阶动力学稳定，该界也可能失效，其显式失稳机制已在正文中给出。

随后，我们从简化几何中的严格能量与涡量平方预算推导出转捩指标。每个指标都是涉及外力范数、黏度、Poincar´e 型常数以及可计算的预解算子替代模型等已声明量的不等式。这些不等式给出可排除转捩的阈值，或者证明存在超过既定水平的瞬态增长。

最后，对于一类流固耦合模型，我们确定了一个可推出弱解存在性与唯一性的参数范围。我们推导出离散耦合能量估计，从而得到可计算的稳定性裕度。这些裕度给出了关于时间步长和网格参数的显式约束。它们以不等式形式表述，其中的常数由流体黏度、结构刚度、密度比和界面迹估计决定。

1. Primary proposition: certifiable surrogacy for dissipative flows

我们考察处于可获得能量不等式的适用情形中的黏性不可压流。只有当降阶模型继承了一个可证明的该不等式的离散类比时，我们才认为降阶模型是可接受的。许多广泛使用的降阶模型在其训练范围之外无法通过这一检验。这种失败并不隐晦：即使完整系统是耗散的，降阶模型动力学下的能量仍可能增长；此时便没有逻辑途径得到误差界。这是本领域首个经受住审查的命题；降阶模型文献中反复观察到这一点，并且它迫使当前的发展采取以证书为驱动的方式，而非启发式方式[21, 22, 11, 1]。

问题 1.1 （可认证的降阶替代模型）**.** 设 (u, p) 是在声明的区域及声明的边界条件下求解黏性不可压流模型的解。假设能量不等式成立，且其中的常数仅依赖于声明数据。构造降阶模型 $u_n(t) \in V_n$ ，使得：

(i) 其离散演化满足逻辑类型相同的可计算能量不等式；

2020 *Mathematics Subject Classification.* 76D05, 76F06, 76F20,65M12, 65M15,74F10, 74S05.
Key words and phrases. 降阶模型；纳维–斯托克斯；能量稳定性；后验误差界；残差估计器；涡量平方预算；转捩判据；预解算子范数；流固耦合；适定性；稳定性裕度；认证仿真。

(ii) 可根据沿降阶模型轨迹计算的量<毋style id='1'>判定 其可靠适用情形；(iii) 它具有可计算残差泛函 $\mathcal{R}_n$ ，可在指定范数下控制建模误差。

输出是一份证书。它可能无法通过验证。若未通过，则该降阶模型将被判定为不可靠。

坚持要求提供明确的证书并非出于文风上的选择。保结构降阶模型和能量稳定离散揭示了逻辑上可能实现的目标，但如果没有可计算估计量，它们本身并不能给出可用的误差界 [4, 14]。反过来，对降阶模型进行非侵入式学习可以在样本内生成准确的预测器，但除非将约束纳入学习算子，否则在逻辑上无法保证耗散[5, 15, 13, 23]。这使我们陷入两难：要么接受没有耗散证书的降阶模型，但这样就无法作出任何全局性论断；要么施加认证约束，此时分析就必须量化得失。

命题1.2 （目标保证）。 在后文所述的显式适用情形假设下，存在一个受约束的降阶模型演化 u_n 以及一个可计算的证书 S_n ，使得：

(i) 能量稳定性： $\mathcal{E}_n(t)$ 除去具有显式常数的已声明强迫项外，其值不增；*(ii)* 后验控制： 存在一个可计算残差 $\mathcal{R}_n$ 和一个显式常数 C，使得

$$\|u - u_n\|_{\mathsf{X}(0,T)} \le C\,\mathcal{R}_n;$$

(iii) 可 靠性检验： 如果 S_n 在某个时刻失效，则至少有一个已声明的假设在刻**笈败**。

第二个主题是转捩。关于湍流诊断，已有大量实证研究。本文不采用这些方法，而是使用不等式。能量稳定性方法已经通过可计算的界定出层流区域；它们也解释了为何某些诊断在逻辑上并不能给出决定性结论 [12]。即使线性稳定性成立，转捩仍可能通过瞬态增长发生。预解分析为这种增长提供了定量替代指标，但必须将该指标与明确给出的能量或涡量平方预算联系起来，才能使其成为判据，而非仅作说明 [19, 10, 17, 16, 24]。本文聚焦于其中每一项都可由明确给定的量计算得到的不等式。由此得到的阈值并不能在一般意义上预测湍流，而是在明确指定的适用情形下排除湍流。反过来说，当这些不等式不成立时，它们会指出一个明确的障碍。

第三个主题是流固耦合。流固耦合是一种具有竞争时间尺度的耦合演化过程。分区方法十分常见。附加质量效应或不相容离散都可能导致稳定性丧失。其逻辑要求很明确：首先需要一个能够推出存在性与唯一性的参数范围；随后需要一个离散耦合能量估计，以得到可计算的稳定性裕度，从而指导步长和网格的选取 [7, 6, 3, 9, 18]。

直截了当地说明创新之处。本文证明了三类结论。每类结论都以带有显式常数的定理形式表述。

- 针对黏性不可压流构建了一种受约束的降阶模型，其中能量稳定性是作为证书加以保证的，而非寄望于它自然成立。该证书兼容保结构降阶，也兼容在算子层面施加约束时的算子推断学习 [21, 22, 14, 5, 13]。
- 一种可计算的残差泛函，可导出后验误差界。许多非正式的降阶模型论证都在此处站不住脚，因为稳定性本身并不能保证在指定范数下得到误差估计 [11, 1, 15]。
- 由严格的能量与涡量平方预算推导出的转捩指标，并辅以用不等式表述的基于预解式的放大界。这些判据可在简化几何中计算；若其假设不成立，判据会明确失效 [12, 19, 16, 10]。

•一个流固耦合（FSI）状态定理（存在性与唯一性），以及一个离散耦合能量估计，可为时间步长和网格参数给出可计算的稳定性裕度[7, 6, 18, 3]。

备注 1.3。 一种常见的论证是：“降阶模型采用 Galerkin 方法，因此稳定。”姑且假设这一论断成立，那么仅凭正交性就能得到稳定性。但事实并非如此，因为截断、闭合模型或学习算子都会带来影响。降阶动力学可能注入能量。这样一来，无论是降阶模型还是误差，都无法保证有界。这正是促使我们引入认证约束[21, 1, 13]的具体失效模式。

篇章安排。 第 2 节确定模型类别和可验证情形。第3 节定义受约束降阶模型空间和容许闭合。第 4 节证明降阶模型能量证书。第 5 节证明后验界。第 6 节根据能量、涡量平方和预解算子不等式推导转捩指标。第 7–8 节讨论流固耦合适定性和可计算的稳定性裕度。第 9 节阐述验证规程。第 10节说明局限，并指出一条常见推理存在的具体错误。

2. Model class and regime assumptions

我们首先固定模型，随后固定适用情形，使后文所用的每个常数均可计算。一旦适用情形被明确，下文所有陈述均为标准结论；难点在于将其明确到足以使后续证书可判定。我们遵循严格Navier–Stokes分析以及转捩能量稳定性研究中所用的能量方法规范 [8, 12]。

2.1. 控制方程与边界条件。 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 为有界利普希茨区域， $d \in \{2,3\}$，其边界为 $\partial\Omega$。设 $\nu > 0$ 为运动黏度。设$f\colon (0,T) \to V'$为给定体力。我们考虑不可压Navier–Stokes方程组

$$\partial_t u + (u\cdot\nabla)u - \nu\Delta u + \nabla p = f, \qquad \operatorname{div} u = 0 \quad \text{in } \Omega\times(0,T), \tag{1}$$

并辅以环面上的周期边界条件，或无滑移边界条件

$$u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega\times(0,T), \tag{2}$$

以及初始条件 $u(\cdot,0) = u_0$，且 $\operatorname{div} u_0 = 0$。

定义无散空间

$$V := \{v \in H^1_0(\Omega)^d : \operatorname{div} v = 0\}, \qquad H := \overline{V}^{L^2(\Omega)^d},$$

并记 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为 $L^2(\Omega)^d$ 内积， $\|\cdot\|$ 为相应的范数。

定义 2.1 （弱形式）。 一对 (u,p) 是 (1)–(2) 在 $(0,T)$ 上的弱解，如果

$$u \in L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;V), \qquad \partial_t u \in L^{4/3}(0,T;V'),$$

且对所有检验函数 $v \in V$以及几乎处处的 $t \in (0,T)$，

$$\langle \partial_t u(t), v\rangle + \nu\,\langle \nabla u(t), \nabla v\rangle + b(u(t),u(t),v) = \langle f(t), v\rangle, \tag{3}$$

其中 $b(\cdot,\cdot,\cdot)$是满足如下条件的对流三线性形式

$$b(w,v,v) = 0 \quad \text{for all } w \in V,\ v \in V. \tag{4}$$

压力以通常方式作为散度约束的拉格朗日乘子加以恢复。

注记 2.2。 条件（4）是后文的一条结构公理。在连续模型中，它通过周期或无滑移边界条件下的分部积分得以强制满足。在计算中，它通过对流项的反对称形式或旋转形式得以强制满足。若（4）在离散或降阶层面未被强制满足，能量方法将在第一步失效。这是最简单的逻辑失效模式。

2.2. **能量与涡量平方积分恒等式。** 我们以适合后续认证的形式陈述能量不等式。其证明是经典的，但我们引用明确追踪常数与适用情形的现代文献 [8, 12]。

引理 2.3（能量不等式）。 设 u 是定义 2.1 意义下的弱解。假设 $f \in L^2(0,\ T;\ V')$。则对于几乎处处的 $t \in (0,\ T)$，

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|^2 + \nu\int_0^t \|\nabla u(s)\|^2\, ds \le \frac{1}{2}\|u_0\|^2 + \int_0^t \langle f(s), u(s)\rangle\, ds. \tag{5}$$

此外，如果该解满足能量 等式，那么 (5) 对所有t都以等式成立。尺度不变条件下能量等式的判据已有所研究；我们将仅利用这些判据界定一个使 (5) 达到尖锐性的适用情形 [25, 2]。

备注 2.4。 不等式（5）在三个常数均可计算后即可计算。这三个常数分别是一个庞加莱´常数（或周期情形下的谱隙）、关于 $\|f\|_{V'}$的一个界，以及通过杨氏不等式将 $\langle f、\ u\rangle$ 与 $\|\nabla u\|$ 联系起来的一个界。能量方法中不使用其他隐藏常数 [8]。

现在，我们在一个既正确又可计算的设定下，明确给出一个涡量平方恒等式。完整的三维涡量平方平衡包含涡拉伸项，因此无法闭合。因此，我们固定一个简化几何和一种适用情形。这并非回避，而是对逻辑范围的声明。

引理 2.5（简化几何中的涡量平方预算）。 假设满足以下任一条件：

（*i*） $d = 2$ 且Ω 是一个有界利普希茨区域，满足无滑移边界条件；或（*ii*） $d = 2$ 且$\Omega = \mathbb{T}^2$ 满足周期性边界条件。

设 u 为一个充分正则的解，并令 $\omega :=$ 旋度 u （ $2D$中的一个标量）。则对于几乎处处的$t \in (0,\ T)$，

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega(t)\|^2 + \nu\|\nabla\omega(t)\|^2 = \langle \operatorname{curl} f(t), \omega(t)\rangle\,. \tag{6}$$

因此，对于任意 $\varepsilon > 0$,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega(t)\|^2 + (\nu-\varepsilon)\|\nabla\omega(t)\|^2 \le \frac{1}{4\varepsilon}\|\operatorname{curl} f(t)\|^2\,. \tag{7}$$

注 2.6。 在 $3D$ 中有

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega\|^2 + \nu\|\nabla\omega\|^2 = \int_\Omega (\omega\cdot\nabla)u\cdot\omega\, dx + \langle \operatorname{curl} f, \omega\rangle\,,$$

且项 $\int(\omega\cdot\nabla)u\cdot\omega$ 不是定号的。忽略该项的判据不是定理，而是宣传噱头。我们不采用这种判据。这与转捩 [12] 的能量稳定性视角一致。

2.3. **工况选择与可验证性。** 现在，我们声明后续降阶模型认证和流固耦合裕度所适用的情形。这里“可验证”一词有明确含义：每个假设都可以通过声明数据和计算量进行检查，不使用任何未明示的正则性。

假设 2.7（可验证情形）。 固定 $T > 0$。假设如下。

(R1) 几何。 Ω 是 $\mathbb{R}^d$, $d \in \{2, 3\}$ 中的有界利普希茨区域，满足周期边界条件或无滑移边界条件。可用一个庞加莱常数 $C_P(\Omega)$。**(R2) 外力。** $f \in L^2(0,T;\ V')$。可用一个可计算的上界 $F := \|f\|_{L^2(0,T;V')}$。若使用涡量平方积分判据，则假设 $d = 2$ 以及旋度 $f \in L^2(0,T;\ L^2)$，且具有可计算的上界。**(R3) 初始数据。** $u_0 \in H$，满足 $\operatorname{div} u_0 = 0$，且具有可计算的 $\|u_0\|$。

(R4) **能量约束**。 对流项由满足斜对称约束（4）的形式表示。全阶离散和降阶模型中均施加了这一约束。

(R5) **离散稳定性条件**。 采用空间离散时，它提供：(i) 一个带有可计算常数的离散 Poincar´é 不等式；(ii) 与（4）相匹配的离散斜对称性；若存在压力，还需一个 inf–sup 稳定对。这些是认证所需的假设，而非结论。

后文引入的所有常数都是 (ν， C_P， F， $\|u_0\|$， T) 以及所声明的离散类比的函数。

注 2.8。 假设 2.7 并未声称湍流不存在，而是提出了一个较弱且可用的主张：能量方法可以导出带有显式常数的不等式。只有在这种情形下，降阶模型认证才能成为定理，而非数值观察 [21, 22, 14]。

3. ROM construction with structural constraints

降阶模型只有在最宽泛的意义上才是一种投影。决定性的问题在于，降阶演化是否保留了使完整模型具有意义的耗散机制。若未能保留，则任何误差陈述都无法成立。因此，我们将降阶模型视为受不等式约束的对象。这一观点隐含于能量稳定的降阶模型构造和保结构超降阶中 [21, 22, 14]。在约束算子学习中，一旦约束是在算子层面而非事后施加，这一观点同样隐含其中 [5, 15, 13]。

3.1. **试验空间设计**。 我们固定一个满足假设2.7中结构公理的全阶离散。令 H_h 表示速度的离散 L^2空间，其内积为$\langle\cdot,\ \cdot\rangle_h$ 范数为 $\|\cdot\|_h$。令 $V_h \subset H_h$ 为离散无散空间。令A_h: $V_h \to V_h$ 表示离散斯托克斯算子（对称半正定），并令B_h（$\cdot$， $\cdot$）： $V_h \times V_h \to V_h$为离散对流算子，其写法使得

$$\langle \mathsf{B}_h(w,v), v\rangle_h = 0 \quad \text{for all } w, v \in V_h. \tag{8}$$

这是（4）的离散版本。它是一个假设。它在离散层面通过斜对称形式或旋转形式来强制实现。建立在间断伽辽金或有限体积框架上的能量稳定降阶模型明确体现了这一约束 [22, 21]。

我们通过提升函数表示非齐次边界数据。设 $u = g$ 在 $\partial\Omega$上为给定的边界值，其可能依赖于时间。选取提升函数 $\ell(t) \in H^1(\Omega)^d$，使得 $\ell|_{\partial\Omega} = g$。令 $u = v + \ell$。随后，降阶动力学针对满足齐次边界条件的 v 来建立。这消除了虚假能量注入的一个持续来源。它还将边界贡献分离为一个已知的强迫项。若希望获得证书，这一步骤并非可选项。

定义 3.1 (受约束降阶模型空间)。 固定一个整数 $n \geq 1$。设 $\{\varphi_i\}_{i=1}^n \subset V_h$ 线性无关。定义降阶模型空间

$$V_n := \operatorname{span}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subset V_h.$$

我们施加以下约束。

(i) **无散性**。 每个 φ_i 都属于 V_h。因此，对所有 $u_n \in V_n$，$\operatorname{div} u_n = 0$ 在离散意义下成立。(ii) **能量内积**。 基底在 $\langle\cdot,\cdot\rangle_h$中是正交归一的，否则我们会显式使用格拉姆矩阵 $G_{ij} = \langle\varphi_i, \varphi_j\rangle_h$。不允许进行不受控的重新正交化。(iii) **边界提升**。 如果边界数据是非齐次的，那么降阶模型针对齐次变量 v 建立，约化空间也在该变量中构造。

(iv) **压力处理**。 我们要么 (a) 在离散无散空间上工作，从而消去压力；要么 (b) 使用满足约化 inf–sup 条件的速度–压力约化对。情形 (a) 为默认选项。仅当压力观测量属于认证输出的一部分时，才使用情形 (b)。

注3.2。若不强制无散性，则无法使对流项在能量内积下呈反对称。能量方法会在一行之内失效。这是由通用快照组装而成的降阶模型中最常见的隐蔽缺陷。保结构降阶模型从构造上避免了这一问题 [4, 14]。

3.2. **将闭合与稳定化作为定理驱动对象**。现在，我们将闭合形式化为一个受约束的设计变量。文献中提出了许多闭合模型，但目录并非定理。关键在于，某个闭合模型能否给出可验证的能量不等式，以及能否导出可计算的误差估计器。正则化约化模型和闭合综述揭示了失效模式及其补救措施，但它们本身并不能确立证书逻辑 [11, 1]。算子推断提供了一种学习机制，但若要保证耗散，也必须对其加以约束 [5, 15, 13]。

将全阶半离散动力学写为 V_h

$$\dot{u}_h + \nu\,\mathsf{A}_h u_h + \mathsf{B}_h(u_h, u_h) = f_h. \tag{9}$$

将 (9) 投影到 V_n 上可得到一个 Galerkin 约化模型。无法保证该约化模型在长时间范围内或训练区域之外保持稳定。因此，我们引入一个作用于 C_n的闭合算子 V_n。该闭合可以是线性的、非线性的，也可以通过学习获得。唯一的可接受性检验是后文施加的认证不等式。

问题 3.3 （认证约束下的闭合选择）。 构造一个形式如下的演化方程$u_n(t) \in V_n$

$$\dot{u_n} + \nu\,\Pi_n\mathsf{A}_h u_n + \Pi_n\mathsf{B}_h(u_n, u_n) + \mathsf{C}_n(u_n) = \Pi_n f_h, \tag{10}$$

其中 Π_n: $V_h \to V_n$ 是 H_h-正交投影算子，并满足以下条件。 （i）**耗散约束**。对所有 $v \in V_n$,

$$\langle \mathsf{C}_n(v), v\rangle_h \geq 0. \tag{11}$$

（ii）**可计算性**。映射 $v \mapsto \mathsf{C}_n(v)$ 可在指定的复杂度下求值，且其对 n 和离线数据的依赖关系明确。

（iii）**常数的可辨识性**。存在一个可计算常数 L_C ，使得在指定的状态区间集合 $\mathcal{K} \subset V_n$上，

$$\|\mathsf{C}_n(v) - \mathsf{C}_n(w)\|_h \leq L_C\,\|v - w\|_h \qquad \forall v, w \in \mathcal{K}. \tag{12}$$

如果 L_C 不可计算，则后续误差常数不可计算。

（iv） **与学习的相容性**。 若 C_n 是学习得到的，则学习参数受到约束，使得（11）精确成立，而非近似成立。这是物理一致的算子推断中所使用的算子层约束 [13, 23]。

注记 3.4。 条件（11）由形如 C_n（v） $=\nu_t$（v） $\Pi_n\mathsf{A}_h v$ 且 ν_t（v） ≥ 0 的涡黏性型闭合所满足。线性阻尼 C_n（v） $= \alpha v$ 在 $\alpha \geq 0$ 下同样满足该条件。若将算子表示约束为在 H_h 内积下耗散，则学习算子也可满足该条件。这正是仅在样本内准确的模型与逻辑稳定 [15, 13]的模型之间的决定性区别。

3.3. **具有显式常数的离线/在线分离**。 现在，我们将一次性计算的内容与时间步进过程中计算的内容分开。除非记录显式常数和显式复杂度参数，否则这种分离毫无意义。稳定但无法评估的降阶模型不是降阶模型。可评估但不稳定的降阶模型不是模型。

假设基底 $\{\varphi_i\}$ 固定。表示 $u_n(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t)\varphi_i$。那么（10）就成为关于 $\mathbb{R}^n$ 的常微分方程，

$$\dot{a} = F(a) := f^{(n)} - \nu A^{(n)} a - N^{(n)}(a) - C^{(n)}(a), \tag{13}$$

以及显式系数对象：

$$A_{ij}^{(n)} = \langle \mathsf{A}_h \varphi_j, \varphi_i \rangle_h , \qquad f_i^{(n)} = \langle f_h, \varphi_i \rangle_h , \qquad N_i^{(n)}(a) = \langle \mathsf{B}_h(u_n, u_n), \varphi_i \rangle_h .$$

如果使用超降阶，那么 $N^{(n)}$ 将由降阶求积或采样算子近似。只有在能量守恒超降阶保留了（8）的离散类比时，才允许采用；否则证书将失效 [14]。如果使用算子推断，那么F 将在约束条件下从数据中学习；只有当学习算子满足与（11）相容的耗散性不等式时，才允许采用 [5, 13]。

备注 3.5。 我们记录后续常数和计算成本所涉及的参数。

(i) 状态维数。在线状态为 $a(t) \in \mathbb{R}^n$。所有在线计算成本均取决于 n以及所选的非线性评估方法。(ii) 非线性评估。如果精确组装 $N^{(n)}$ ，对于一般二次型，每步的成本通常为 $\mathcal{O}(n^3)$。如果使用超降阶，成本将降至 $\mathcal{O}(n^2 m)$，其中 m 是采样自由度的数量，但此时证书要求采用保结构采样规则 [14]。(iii) 闭合项评估。 $C^{(n)}(a)$的成本取决于闭合项的类别。如果 $C^{(n)}$ 是线性阻尼，成本为 $\mathcal{O}(n^2)$。如果它是学习得到的，成本取决于模型，但可用性约束与架构无关，即不等式 (11) [13, 23]。(iv) 利普希茨常数。要得到显式误差常数，需要 $\mathrm{Lip}(F|\mathcal{K})$ 的可计算上界。该上界由 ν、 $\|A^{(n)}\|$的上界、 $\mathcal{K}$上的二次型 $N^{(n)}$ 的界，以及式 (12) 中的闭合项利普希茨界 L_C 构造。如果未记录这些量，后续的后验定理便无法计算。(v) 训练与适用情形。如果快照定义了 V_n，那么适用情形集 $\mathcal{K}$ 就不能是“训练集”，而必须是由可计算范数上的不等式描述的集合。只有采用这种形式，证书才能在发生外推时判定失效[21, 11]。

4. Energy stability certificate for the ROM

现在我们施加证书逻辑。只有当能够根据所声明的假设证明离散能量不等式时，才接受该降阶模型。这是“稳定性”作为定理而非数值印象的唯一形式 [21, 22, 14]。时间离散是模型的一部分。如果它注入能量，那么即使连续时间降阶模型常微分方程具有耗散性，该降阶模型仍然是不稳定的。因此，我们对<style id='2'>降阶模型动力学与时间步进的组合进行认证。

4.1. 认证时间步进。 设 $\Delta t > 0$ 和 $t^k := k\Delta t$。令 $u_n^k \in V_n$ 表示时间 t^k时的降阶模型状态。令 Π_n 表示到 V_n上的 H_h-正交投影算子。我们使用离散内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_h$ 和范数 $\|\cdot\|_h$。

我们将降阶模型写成结构形式

$$\dot{u_n} + \nu\, \Pi_n \mathsf{A}_h u_n + \Pi_n \mathsf{B}_h(u_n, u_n) + \mathsf{C}_n(u_n) = \Pi_n f_h, \tag{14}$$

满足斜对称约束（8）和耗散性约束（11）。这两条公理使能量估计成为可能。它们是非线性稳定的降阶模型构造和保结构降阶中的标准做法 [21, 14]。一旦采用耗散参数化，它们也是物理一致的算子推断所施加的约束 [13, 23]。

定义 4.1 （认证格式）。 固定 $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$。定义 $u_n^{k+\theta} := \theta u_n^{k+1} + (1-\theta) u_n^k$。从 u_n^k 到 u_n^{k+1} 的时间步长若满足 $u_n^{k+1} \in V_n$ ，则称为认证的

$$\frac{u_n^{k+1} - u_n^k}{\Delta t} + \nu\, \Pi_n \mathsf{A}_h u_n^{k+\theta} + \Pi_n \mathsf{B}_h(u_n^{k+\theta}, u_n^{k+\theta}) + \mathsf{C}_n(u_n^{k+\theta}) = \Pi_n f_h^{k+\theta}, \tag{15}$$

其中， $f_h^{k+\theta}$ 是对 $f_h(t^{k+\theta})$的已声明近似。证书条件由以下各项共同构成：

(i) **离散斜对称性：**对所有 $v \in V_n$,

$$\langle \Pi_n \mathsf{B}_h(v, v), v \rangle_h = 0; \tag{16}$$

(ii) **闭合耗散性：**对所有 $v \in V_n$,

$$\langle \mathsf{C}_n(v), v \rangle_h \geq 0; \tag{17}$$

(iii) **黏性的强制性：** $\langle \mathsf{A}_h v,\ v \rangle_h = \|\nabla v\|_h^2$ 其中采用已声明的离散梯度范数。

若实现中任何一项不满足要求，则该步将被判定为未经认证。

备注 4.2. 这一限制 $\theta \geq \frac{1}{2}$ 并非无关紧要。正是在此处，时间离散通过单调性论证实现能量稳定。隐式中点法（$\theta = \frac{1}{2}$）和后向欧拉法（$\theta = 1$）是认证情形的极限。对于选择对流形式使其具有反对称性，这就是其离散类比。这两种选择都能消除虚假能量产生。能量稳定的降阶模型构造将这些问题置于首要位置[22, 21]。

定理 4.3 (降阶模型能量稳定性**).** 假设假设条件 2.7成立。假设证书条件 (16)–(17)成立。令 $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$。则任何认证格式步骤 (15) 均满足离散能量不等式

$$\frac{1}{2}\left\|u_n^{k+1}\right\|_h^2 - \frac{1}{2}\left\|u_n^k\right\|_h^2 + \nu\,\Delta t\left\|\nabla u_n^{k+\theta}\right\|_h^2 + \Delta t\left\langle \mathsf{C}_n(u_n^{k+\theta}), u_n^{k+\theta}\right\rangle_h \leq \Delta t\,\langle f_h^{k+\theta}, u_n^{k+\theta}\rangle. \tag{18}$$

因此，对于任意 $\varepsilon > 0$,

$$\frac{1}{2}\left\|u_n^{k+1}\right\|_h^2 - \frac{1}{2}\left\|u_n^k\right\|_h^2 + (\nu - \varepsilon)\,\Delta t\left\|\nabla u_n^{k+\theta}\right\|_h^2 \leq \frac{\Delta t}{4\varepsilon}\left\|f_h^{k+\theta}\right\|_{V_h'}^2, \tag{19}$$

其中， $\|\cdot\|_{V_h'}$ 是由离散梯度范数诱导的指定对偶范数。特别地，若 $\varepsilon \in (0,\ \nu)$ 固定且 $\sum_{j=0}^{K-1} \Delta t \left\|f_h^{j+\theta}\right\|_{V_h'}^2$ 有限，则

$$\sup_{0\leq k\leq K}\left\|u_n^k\right\|_h^2 + 2(\nu-\varepsilon)\sum_{j=0}^{K-1}\Delta t\left\|\nabla u_n^{j+\theta}\right\|_h^2 \leq \|u_n^0\|_h^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\sum_{j=0}^{K-1}\Delta t\left\|f_h^{j+\theta}\right\|_{V_h'}^2. \tag{20}$$

一旦声明了离散范数和外力项界，所有常数便都是显式的。

证明。 取 H_h 内积，即（15）与 $u_n^{k+\theta}$作内积。使用极化恒等式

$$\left\langle u_n^{k+1} - u_n^k, u_n^{k+\theta}\right\rangle_h = \frac{1}{2}\Big(\left\|u_n^{k+1}\right\|_h^2 - \left\|u_n^k\right\|_h^2\Big) + \Big(\theta - \tfrac{1}{2}\Big)\left\|u_n^{k+1} - u_n^k\right\|_h^2,$$

其对 $\theta \geq \frac{1}{2}$ 非负。利用（16）消去对流项。利用（17）使闭合项保持非负。利用强制性来识别 $\left\langle \mathsf{A}_h u_n^{k+\theta},\ u_n^{k+\theta}\right\rangle_h = \left\|\nabla u_n^{k+\theta}\right\|_h^2$。由此得到（18）。对 $\langle f_h^{k+\theta},\ u_n^{k+\theta}\rangle$ 应用杨氏不等式，其形式为

$$\langle f_h^{k+\theta}, u_n^{k+\theta}\rangle \leq \varepsilon\left\|\nabla u_n^{k+\theta}\right\|_h^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\left\|f_h^{k+\theta}\right\|_{V_h'}^2,$$

以获得（19）。对 k 求和可得（20）。 □

注释 4.4。 该证书仅使用两个恒等式：离散斜对称性和闭合耗散性。去掉其中任意一个，（18）就可能不成立。以下是一种典型的失效情形。如果超降阶或学习算子破坏了（16），那么离散对流项就可能注入能量。即使全阶格式稳定，能量界仍然不成立。能量稳定降阶模型文献已记录了这一机制，这也是将能量守恒超降阶视为结构约束而非效率技巧的原因 [14, 21]。第二种失效更为直接。如果闭合在能量内积下不具有耗散性，它就可能表现为负黏性，因此预期会出现不稳定性。正则化降阶模型研究反复记录了这一现象 [11, 1]。

5. A posteriori and a priori error bounds

现在我们从稳定性转向误差。仅有稳定性并不构成估计。还需要可计算残差和可计算常数。许多非正式的降阶模型论证正是在这一点上失效 [11, 1, 15]。

在全文中， V 和 H 的定义同第2节。我们在能量空间

$$\mathsf{X}(0,T) := L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;V), \qquad \|w\|^2_{\mathsf{X}(0,T)} := \operatorname{ess\,sup}_{t\in(0,T)} \|w(t)\|_H^2 + \int_0^T \|\nabla w(t)\|_{L^2}^2 \, dt.$$

下文所有常数都是假设2.7中声明的参数范围数据以及第3节引入的可计算降阶模型常数的显式函数。

5.1. **基于残差的估计量**。设 $u_n:\ [0,T]\to V_n$ 为经认证的降阶模型轨迹，其定义方式可以是通过（14）给出的连续时间形式，也可以是定义4.1中的认证格式给出的离散时间形式。我们用对偶范数定义残差。这是能量方法[8]所要求的。

令 $P_n:\ H\to V_n$ 表示 H-正交投影算子。定义斯托克斯算子 $A:\ V\to V'$，使得 $\langle Au, v\rangle := \langle \nabla u, \nabla v\rangle$。令 $B(u,v)\in V'$ 表示对流算子，其定义满足：当存在反对称结构（连续或离散）时，$\langle B(w,u)\ u\rangle = 0$，如式 (4) [8, 12]所示。令 $C_n:\ V_n\to V'$ 为闭合算子，假设其在能量内积下具有耗散性（如式 (11) 所示），并且在指定的状态区间集合 $\mathcal{K}\subset V_n$ 上满足利普希茨条件（如式 (12) [11, 13]所示。

定义 5.1（可计算残差）。 假设对于 $t\in[0,T]$， $u_n(t)\in\mathcal{K}$。定义降阶模型残差 $r_n(t)\in V'$ 为

$$r_n(t) := \partial_t u_n(t) + \nu A u_n(t) + B(u_n(t),u_n(t)) + C_n(u_n(t)) - P_n f(t). \tag{21}$$

定义估计量

$$\eta_n(T) := \|r_n\|_{L^2(0,T;V')} + \nu\ \|(I-P_n)u_0\|_H\,. \tag{22}$$

在实际应用中， $\|r_n(t)\|_{V'}$ 通过在V中求解一个已声明的离散Riesz映射问题来计算，或者使用与所选离散化一致且可计算的等效替代模型。如果采用超降阶，则使用超降阶算子构造 r_n ；证书要求超降阶保留第4[14]节中使用的反对称／耗散恒等式。

备注5.2。残差不是在 H中取的。能量方法将方程与e 作测试：$=u-u_n\in V$，并产生形如 $\langle r_n,\ e\rangle$的项。因此，自然的估计量是V'范数。这种选择是耗散型偏微分方程后验分析中的标准做法 [8]。

定理 *5.3*（后验界）。假设假设 *2.7*。设 u 是满足定义 *2.1*意义下的方程 *(1)–(2)* 的弱解。设 $u_n\in L^\infty(0,T;\ V_n)\cap L^2(0,T;\ V_n)$是满足定理 *4.3*能量证书的经认证的降阶模型轨迹。假设在包含 $u_n([0,T])$的适用情形集合 $\mathcal{K}$ 上，以下常数均可计算：

(i) 一个界 $M_n :=$ 本质上确界$_{t\in(0,T)}\ \|u_n(t)\|_V$;

(ii) 一个 *Lipschitz* 型界 L_n，使得对所有 $v \in \mathcal{K}$ 和所有 $w \in V$，

$$|\langle B(u,u) - B(v,v), w\rangle| \le L_n \, \|u - v\|_H \, \|w\|_V \, ; \tag{23}$$

(iii) 闭包 *Lipschitz* 常数 L_C 在 $\mathcal{K}$，即 (12)。

那么，对所有 $T > 0$,

$$\|u - u_n\|_{\mathsf{X}(0,T)} \le \left(\frac{2}{\nu}\right)^{1/2} \exp\!\Big(\frac{L_n + L_C}{\nu}\, T\Big)\, \eta_n(T), \tag{24}$$

其中 $\eta_n(T)$ 在(22)中定义。一旦根据已声明的量计算出 $\|r_n\|_{L^2(0,T;V')}$ 和 (L_n, L_C)，即可计算该界。

证明。令 $e := u - u_n$。从 u 的弱形式中减去降阶模型方程。用 $e(t) \in V$测试误差方程。与第 2 节一样，在能量恒等式中利用对流算子的反对称结构。利用 C_n 在能量内积中的耗散性，这是问题3.3中的要求。于是，对几乎处处的 t,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,\|e(t)\|_H^2 + \nu\,\|e(t)\|_V^2 \le \langle r_n(t), e(t)\rangle + |\langle B(u,u) - B(u_n,u_n), e(t)\rangle| + |\langle C_n(u) - C_n(u_n), e(t)\rangle| \, . \tag{25}$$

对右端的三个项作如下估计。

首先，利用对偶性，

$$\langle r_n(t), e(t)\rangle \le \|r_n(t)\|_{V'} \, \|e(t)\|_V \, .$$

其次，将 (23) 与 $v = u_n$ 和 $w = e$结合使用:

$$|\langle B(u,u) - B(u_n,u_n), e\rangle| \le L_n \, \|e\|_H \, \|e\|_V \, .$$

第三，根据 C_n 在 $\mathcal{K}$ 上的 Lipschitz 连续性以及连续嵌入 $V \hookrightarrow H$,

$$|\langle C_n(u) - C_n(u_n), e\rangle| \le \|C_n(u) - C_n(u_n)\|_{V'} \, \|e\|_V \le L_C \, \|e\|_H \, \|e\|_V \, .$$

对每个混合项应用参数为 $\nu/2$ 的杨氏不等式，得到

$$\frac{d}{dt}\,\|e\|_H^2 + \nu\,\|e\|_V^2 \le \frac{2}{\nu}\,\|r_n\|_{V'}^2 + \frac{(L_n + L_C)^2}{\nu}\,\|e\|_H^2 \, .$$

对时间积分并应用 Gr¨onwall 不等式。将初始失配 $\|e(0)\|_H = \|u_0 - u_n(0)\|_H$纳入其中，并在认证构造中使用 $u_n(0) = P_n u_0$，得到 (22)。由此得到 (24)。 □

注释 5.4。常数 L_n 并非抽象的存在性常数，而是根据 $\mathcal{K}$上明确给出的不等式计算得出。具体而言，它由 $\|u_n\|_V$的一个上界，以及由离散化和区域确定的离散 Sobolev 不等式或插值不等式计算得出。如果使用了超降阶，则此计算必须采用超降阶算子。否则，(24) 在逻辑上就与实际实现的降阶模型 [14]脱节。如果C_n 是通过学习得到的， L_C则必须根据受约束算子表示计算；否则，该估计就不是证书 [13, 23]。

5.2. 适用情形相关的先验收敛速率。 只有在确定适用情形后，先验收敛速率才有意义。因此，我们在声明对 V_n的逼近假设后给出该速率。我们不声称存在普适速率，而是声称存在一个由明确假设推导出的条件性速率。这是唯一不带猜测的形式。

我们采用最佳逼近误差

$$\epsilon_n := \inf_{v \in V_n} \|u - v\|_{L^2(0,T;V)} \, .$$

如果 V_n 是由稳定离散化的快照构建的 POD空间，那么 ϵ_n 受被忽略的POD特征值控制。我们在此不将这一事实作为定理使用，而仅在快照集合被指定 [21, 20]后，将其作为一个可计算输入使用。

定理 5.5 （所选适用情形下的先验收敛速率）。 假设 2.7成立。假设降阶模型已获得认证，并且如定理4.3所述具有耗散性。假设存在一个可计算常数 L_{reg} ，使得在指定的状态区间集合 $\mathcal{K}$上，

(26)
$$|\langle B(v,v)-B(w,w),z\rangle|+|\langle C_n(v)-C_n(w),z\rangle| \le L_{\mathrm{reg}}\,\|v-w\|_V\,\|z\|_V \quad \forall v,w\in\mathcal{K},\ \forall z\in V.$$

进一步假设解 u 在 $(0,T)$ 上始终属于 $\mathcal{K}$，且降阶模型以 $u_n(0)=P_nu_0$ 为初值。则存在一个显式常数 $C_{\mathrm{pr}}(\nu,L_{\mathrm{reg}},T)$，使得

(27)
$$\|u-u_n\|_{L^2(0,T;V)} \le C_{\mathrm{pr}}(\nu,L_{\mathrm{reg}},T)\,\epsilon_n,$$

with

$$C_{\mathrm{pr}}(\nu,L_{\mathrm{reg}},T) := \exp\Big(\frac{L_{\mathrm{reg}}}{\nu}\,T\Big).$$

特别地，若对于所声明的逼近族 V_n，当 $n\to\infty$ 时有 $\epsilon_n\to 0$，则 $u_n\to u$ 在 $L^2(0,T;V)$ 上的收敛速率相同。

证明。令 $v_n(t)\in V_n$ 为满足 $\|u-v_n\|_{L^2(0,T;V)}=\epsilon_n$ 的最佳逼近（可测选取）。记 $e=u-u_n=(u-v_n)+(v_n-u_n)$。设 $\delta:=u-v_n$，且 $\rho:=v_n-u_n$。通过从 v_n 的投影方程中减去降阶模型方程，推导出关于 ρ 的演化不等式。在 V 中以 ρ 为测试函数。利用耗散性和 (26)，将非线性差界定为 $L_{\mathrm{reg}}\|\rho\|_V^2+L_{\mathrm{reg}}\|\delta\|_V\|\rho\|_V$。应用杨氏不等式，将 $\|\rho\|_V^2$ 吸收到黏性项中。由此得到

$$\frac{d}{dt}\|\rho\|_H^2+\nu\|\rho\|_V^2 \le \frac{L_{\mathrm{reg}}^2}{\nu}\|\delta\|_V^2+\frac{2L_{\mathrm{reg}}}{\nu}\|\rho\|_H^2.$$

积分并应用 Gr¨onwall。不变初始化 $u_n(0)=P_nu_0$ 使初始 $\rho(0)$ 项受到控制 $\delta(0)$。这得到（27）。□

注 5.6： 估计式（27）是有条件的。这一结论是诚实的。它将近似误差（ϵ_n）与稳定性（指数因子）区分开来。如果适用情形使得 $L_{\mathrm{reg}}T/\nu$ 很大，那么该速率就毫无用处。这并不是证明的缺陷，而是这样一个事实的解析表达：没有小量条件时，仅凭能量方法无法为降阶代理提供可认证性[12, 8]。

6. Transition indicators from energy/enstrophy and resolvent bounds

我们并不“检测湍流”，而是证明不等式。不等式可以在所声明的适用情形下排除转捩，也可以以明确的方式失效。这是转捩指标唯一诚实的形式。能量稳定性理论已经通过可计算的论证，在参数空间中划定了一条边界 [12, 8]。预解分析量化了瞬态增长，但只有在与带有显式常数的能量平衡联系起来之后，它才能成为判据[19, 17, 10, 16]。

本节始终在一个简化的设定下展开。我们在 Ω 上固定受迫纳维–斯托克斯方程的稳态层流解U。我们研究扰动 $v:=u-U$。我们假设边界条件使扰动能量方法能够闭合（周期性边界条件，或带有相容 U 的无滑移边界条件）。记 P 为勒雷投影算子。记 $\mathcal{L}_U$ 为在无散空间上关于 U 的线性化算子：

(28)
$$\mathcal{L}_Uv := -\nu P\Delta v - P\big((U\cdot\nabla)v+(v\cdot\nabla)U\big).$$

非线性余项为 $-P(v\cdot\nabla v)$。

6.1. 能垒判据。 第一个指标是能量屏障。它是充分条件，而非必要条件。它给出了一个能保证层流态持续存在的区域。一旦能够计算出庞加莱常数和 ∇U 的界，就可以计算该指标。这就是经典能量稳定性逻辑 [12, 8]。

命题 6.1（能量屏障）。 假设 U 是一个稳态解，且 v 满足扰动方程

$$\partial_t v + P\big((U\cdot\nabla)v + (v\cdot\nabla)U + (v\cdot\nabla)v\big) - \nu P\Delta v = 0.$$

假设存在一个可计算常数 $\gamma_U \geq 0$，使得对所有无散的 $v \in V$，

$$\left|\langle (v\cdot\nabla)U, v\rangle\right| \leq \gamma_U \, \|v\|_H \, \|v\|_V . \tag{29}$$

设 C_P 为一个可计算的庞加莱常数，使得 $\|v\|_H \leq C_P \|v\|_V$ 对所有 $v \in V$ 均成立。*If*

$$\nu > \gamma_U C_P, \tag{30}$$

则层流态是能量稳定的，即

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)\|_H^2 + \big(\nu - \gamma_U C_P\big)\,\|v(t)\|_V^2 \leq 0, \tag{31}$$

因此，$\|v(t)\|_H$ 单调不增，并且 $v(t) \to 0$ 在 $L^2(0,\infty;V)$ 内。

证明。 取扰动方程与 v 的 H 内积。利用在所述边界条件下的斜对称性质 $\langle (U\cdot\nabla)v,\ v\rangle = 0$。利用 $\langle (v\cdot\nabla)v,\ v\rangle = 0$。由此得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|_H^2 + \nu\,\|v\|_V^2 = -\,\langle (v\cdot\nabla)U, v\rangle .$$

应用（29），然后应用庞加莱不等式′，得到（31）。条件（30）使耗散系数为正。□

注 6.2。 条件（30）是一个可计算的充分条件。其逻辑形式为：耗散占主导，超过剪切产生项。它并未声称这是必要条件。能量稳定性理论明确指出了这种不对称性 [12]。

6.2. **涡量增长与涡量平方阈值**。 第二个指标使用涡量平方。在 $2D$ 中有意义；而在 $3D$ 中，只有在额外假设消除涡伸展的情况下才有意义。我们在 $2D$ 中陈述该指标，以避免推测性的闭合。

假设 $d = 2$ 且 $\Omega = \mathbb{T}^2$，或者区域为具有相容边界条件的有界区域。令 $\omega := $ 旋度 u。则涡量平方恒等式如引理 2.5 中所述成立。现在我们来导出一个阈值判据。

命题 6.3（涡量平方阈值）。 假设 $d = 2$，且满足引理 *2.5* 的假设。此外，假设存在一个可计算常数 $C_{P,\,\omega}$，使得

$$\|\omega\|_{L^2} \leq C_{P,\omega}\,\|\nabla\omega\|_{L^2} . \tag{32}$$

令 $G(t) := \|$旋度 $f(t)\|_{L^2}$，并假设 $G \in L^2(0,T)$ 具有可计算的 $\|G\|_{L^2(0,T)}$。固定 $\varepsilon \in (0,\nu)$。若数据满足逐点不等式

$$\frac{1}{4\varepsilon}\,G(t)^2 \leq \frac{\nu-\varepsilon}{2C_{P,\omega}^2}\,R^2 \quad \textit{for a.e. } t \in (0,T), \tag{33}$$

则任意满足 $\|\omega(0)\|_{L^2} \leq R$ 的解都满足

$$\|\omega(t)\|_{L^2} \leq R \quad \textit{for all } t \in [0,T]. \tag{34}$$

特别地，(33) 给出了一个可计算的不变涡量平方积分球。

证明。由引理 2.5 可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega\|^2 + (\nu-\varepsilon)\,\|\nabla\omega\|^2 \leq \frac{1}{4\varepsilon}G(t)^2.$$

利用 (32) 可得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega\|^2 + \frac{\nu-\varepsilon}{C_{P,\omega}^2}\,\|\omega\|^2 \leq \frac{1}{4\varepsilon}G(t)^2.$$

如果 $\|\omega\| = R$，则（33）蕴含 $-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega\|^2 \leq 0$ 在球的边界上成立。由此得到前向不变性（34），借助标准的屏障论证。□

注记 6.4。该结论是一个先验不变集。它不是湍流检测器。它给出一个可计算的适用情形，其中涡量不能超过所声明的水平。它与关于转捩的能量稳定性视角相容 [12, 8]。

6.3. **预解范数转捩代理量。** 能量稳定性可能过于保守。即使（30）不成立，也可能出现瞬态增长。预解分析通过算子范数来量化这种增长。我们将其用作代理指标。我们将该代理指标表述为一个不等式，并明确保留其依赖关系。关于预解分析的综述性介绍以及近期的阈值研究为这一构造提供了依据 [19, 17, 16]。

设 $\sigma \in \mathbb{R}$。假设 σ 属于 $\mathcal{L}_U$的预解集。定义预解算子

$$\mathcal{R}_U(\sigma) := (\sigma I - \mathcal{L}_U)^{-1} \colon H \to H,$$

及其诱导范数 $\|\mathcal{R}_U(\sigma)\|_{H\to H}$。在计算中，$\mathcal{L}_U$由指定的离散化替代，范数则通过离散预解矩阵的最大奇异值计算。存在数据驱动近似，但我们仅在其近似误差得到控制时才使用它们 [10]。

命题 6.5 (预解式代理指标)。假设线性化扰动方程 $\partial_t v = \mathcal{L}_U v$在 H上适定。固定 $\sigma > 0$。假设 $\mathcal{R}_U(\sigma)$ 存在且其范数可计算。那么，受迫线性系统

$$\partial_t v = \mathcal{L}_U v + g(t) \tag{35}$$

满足该界

$$\sup_{t\in[0,T]} \|v(t)\|_H \le \|v(0)\|_H + \|\mathcal{R}_U(\sigma)\|_{H\to H} \sup_{t\in[0,T]} \|g(t)\|_H , \tag{36}$$

前提是 g 在 H中有界。因此，若存在一个已声明的阈值 $\Theta > 0$，使得

$$\|\mathcal{R}_U(\sigma)\|_{H\to H} \sup_{t\in[0,T]} \|g(t)\|_H > \Theta, \tag{37}$$

那么，对于某种可容许强迫，线性化动力学允许出现超过 Θ 的认证放大。这是瞬态增长的一个可计算替代指标。

证明。形式上取拉普拉斯变换，或使用常数变易公式。记$v(t) = e^{t\mathcal{L}_U} v(0) + \int_0^t e^{(t-s)\mathcal{L}_U} g(s)\, ds$。对于 $\sigma > 0$，使用标准预解算子界，通过 σ处的预解算子范数控制半群范数。由此得到（36）。阈值结论显而易见。□

注 6.6。命题 6.5 并未声称会发生非线性转捩。它给出的是线性化系统中可计算的放大界。通向非线性转捩的桥梁并非自动成立；必须通过一项明确的估计来建立，并在已声明的集合上控制非线性项。近期研究将阈值瞬态增长与湍流平均剖面联系起来，但其逻辑方向颇为微妙 [16]。因此，我们仅将预解算子范数用作明确标注的替代指标 [19]。

备注 6.7。我们列出计算内容及成本参数。

(i) 能量屏障。 计算 (30) 中的 C_P 和 γ_U。C_P 是几何量。γ_U 根据对 ∇U 的一个声明界限计算，该界限采用使 (29) 成立的范数。计算成本主要来自 U 的计算和范数求值。**(ii) 涡量平方阈值。** 在 $2D$中，计算 $C_{P,\,\omega}$和 $G(t) = \|$旋度 $f(t)\|$。判据 (33) 是逐时刻的，因此可根据采样的强迫数据判定。**(iii) 预解式代理指标。** 计算离散预解矩阵 $(\sigma I - \mathcal{L}_{U,\,h})^{-1}$的最大奇异值。计算成本取决于离散化维数。只有在误差有界时，才允许采用低秩近似；数据驱动的预解算子分析对此进行了处理，但要使其成为证书，仍需给出误差陈述 [10]。

因此，每个指标都附有一个失败标志：如果无法计算其常数，就不启用该指标。这是“转变预测”符合数学标准的唯一形式 [12, 8]。

7. FSI: well-posedness in a verifiable parameter regime

我们固定一个界面功显式的耦合模型。随后，我们明确一个适用情形，在该情形下可通过能量方法得到存在性与唯一性。这是后续讨论“稳定性裕度”在逻辑上有意义的唯一适用情形。移动边界分析清楚地指出了这一点 [7]。耦合介质的变分公式也强调，强制性和迹控制是决定性的条件 [3]。

7.1. 耦合模型与界面条件。 我们考虑固定参考构形上的厚结构流固相互作用模型。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 为有界利普希茨区域，$d \in \{2,3\}$。假设存在如下分解

$$\Omega = \overline{\Omega_{\mathrm{F}}} \cup \overline{\Omega_{\mathrm{S}}}, \qquad \Omega_{\mathrm{F}} \cap \Omega_{\mathrm{S}} = \emptyset, \qquad \Gamma_{\mathrm{I}} := \partial\Omega_{\mathrm{F}} \cap \partial\Omega_{\mathrm{S}},$$

其中 Γ_{I} 为利普希茨界面。设 $u\colon \Omega_{\mathrm{F}} \times (0,T) \to \mathbb{R}^d$ 为流体速度，p 为压力，$\eta\colon \Omega_{\mathrm{S}} \times (0,T) \to \mathbb{R}^d$ 为结构位移。设 $\rho_f, \rho_s > 0$ 为常密度。设 $\nu > 0$ 为流体黏度。设 $\mathbb{C}$ 为 Ω_{S} 上的弹性张量。假设 $\mathbb{C}$ 对称且一致椭圆：

$$\exists\, c_{\mathbb{C}} > 0 \text{ s.t. } \int_{\Omega_{\mathrm{S}}} \mathbb{C}\varepsilon(\xi) : \varepsilon(\xi)\, dx \geq c_{\mathbb{C}} \, \|\varepsilon(\xi)\|^2_{L^2(\Omega_{\mathrm{S}})} \quad \forall \xi \in H^1(\Omega_{\mathrm{S}})^d, \tag{38}$$

其中 $\varepsilon(\xi) = (\nabla\xi + \nabla\xi^{\top})/2$。

我们采用能够体现解析难点的最简单耦合形式。流体在 Ω_{F} 上不可压缩：

$$\rho_f(\partial_t u + (u\cdot\nabla)u) - \nu\Delta u + \nabla p = f_f, \qquad \operatorname{div} u = 0 \quad \text{in } \Omega_{\mathrm{F}}. \tag{39}$$

结构在 Ω_{S} 上满足线性弹性动力学：

$$\rho_s \partial_{tt}\eta - \operatorname{div}(\mathbb{C}\varepsilon(\eta)) = f_s \quad \text{in } \Omega_{\mathrm{S}}. \tag{40}$$

在界面 Γ_{I} 处，我们施加运动学连续性和动力平衡条件，其形式在弱意义下适定：

$$u = \partial_t \eta \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{I}}, \qquad \big(-pI + \nu(\nabla u + \nabla u^{\top})\big)n_F = \big(\mathbb{C}\varepsilon(\eta)\big)n_S \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{I}}, \tag{41}$$

其中 $n_F = -n_S$。

定义 7.1 (流固相互作用弱公式)。 令

$$V_F := \{v \in H^1(\Omega_{\mathrm{F}})^d : v = 0 \text{ on } \partial\Omega_{\mathrm{F}} \setminus \Gamma_{\mathrm{I}}\}, \qquad V_S := \{\xi \in H^1(\Omega_{\mathrm{S}})^d : \xi = 0 \text{ on } \partial\Omega_{\mathrm{S}} \setminus \Gamma_{\mathrm{I}}\},$$

并令 $V_F^0 := \{v \in V_F : \operatorname{div} v = 0\}$。若三元组 (u, η, p) 是 $(0,T)$ 上的弱解，则：

(i) $u \in L^\infty(0,T;\, L^2(\Omega_{\mathrm{F}})^d) \cap L^2(0,T;\, V_F)$，$\partial_t u \in L^{4/3}(0,T;\, V_F')$；(ii) $\eta \in L^\infty(0,T;\, V_S)$，$\partial_t \eta \in L^\infty(0,T;\, L^2(\Omega_{\mathrm{S}})^d)$，$\partial_{tt}\eta \in L^2(0,T;\, V_S')$；(iii) 运动学耦合在迹意义下成立：

$$\operatorname{tr}_{\Gamma_{\mathrm{I}}} u = \operatorname{tr}_{\Gamma_{\mathrm{I}}} \partial_t \eta \quad \text{in } L^2(0,T; H^{1/2}(\Gamma_{\mathrm{I}})^d); \tag{42}$$

(iv) 对所有满足 $v \in V_F^0$、$\xi \in V_S$ 且满足相容性 $\operatorname{tr}_{\Gamma_{\mathrm{I}}} v = \operatorname{tr}_{\Gamma_{\mathrm{I}}} \xi$ 的测试对 (v,ξ)，对几乎处处的 $t \in (0,T)$，有

$$\begin{aligned} &\rho_f \,\langle \partial_t u(t), v\rangle_{\Omega_{\mathrm{F}}} + \rho_f \, b_{\Omega_{\mathrm{F}}}(u(t), u(t), v) + \nu \,\langle \nabla u(t), \nabla v\rangle_{\Omega_{\mathrm{F}}} \\ &\quad + \rho_s \langle \partial_{tt}\eta(t), \xi\rangle_{\Omega_{\mathrm{S}}} + \int_{\Omega_{\mathrm{S}}} \mathbb{C}\varepsilon(\eta(t)) : \varepsilon(\xi)\, dx = \langle f_f(t), v\rangle + \langle f_s(t), \xi\rangle, \end{aligned} \tag{43}$$

其中，$b_{\Omega_{\mathrm{F}}}$ 的选取应满足：当 $w \in V_F^0$ 时，$b_{\Omega_{\mathrm{F}}}(w,\ v,\ v) = 0$（反对称形式）。

压力没有出现在（43）中，因为检验函数是无散的；按照通常方式，它作为拉格朗日乘子被恢复。

备注 7.2。 上述表述是在固定的参考剖分上给出的。这是有意为之。移动界面的几何非线性是更深一层的问题。其适定性理论较为微妙，将在移动边界分析 [7]中讨论。对于本文所研究的稳定性裕度方案，只需固定一个使耦合能量方法精确成立的适用情形即可。

7.2. **存在性与唯一性**。 现在我们规定一个耦合能量泛函具有强制性并能控制耦合的适用情形。这一表述在思想上是经典的。其重点在于明确的适用情形，而不在于泛函本身的新颖性。分区格式和变分框架都指出，相同的结构不等式是决定性因素 [6, 3, 18]。

定义耦合能量

$$\mathcal{E}(t) := \frac{\rho_f}{2}\,\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega_{\mathrm{F}})} + \frac{\rho_s}{2}\,\|\partial_t\eta(t)\|^2_{L^2(\Omega_{\mathrm{S}})} + \frac{1}{2}\int_{\Omega_{\mathrm{S}}} \mathbb{C}\varepsilon(\eta(t)) : \varepsilon(\eta(t))\,dx. \tag{44}$$

定理 7.3 （认证范围内的适定性）。 假设：

（*W1*）几何与迹。Ω_{F}、Ω_{S} 是利普希茨域，且到 Γ_{I} 上的迹映射在两侧均连续，并具有可计算常数 C_{tr} 。（*W2*）强制性。弹性张量满足（*38*），其中 $c_{\mathbb{C}} > 0$已知。（*W3*）数据。$f_f \in L^2(0,T;\, V_F')$和 $f_s \in L^2(0,T;\, V_S')$具有可计算界。初始数据满足 $u_0 \in L^2(\Omega_{\mathrm{F}})^d$、$\eta_0 \in V_S$、 $\eta_1 \in L^2(\Omega_{\mathrm{S}})^d$，并满足相容性$\mathrm{tr}_{\Gamma_{\mathrm{I}}}\, u_0 = \mathrm{tr}_{\Gamma_{\mathrm{I}}}\, \eta_1$。（*W4*）适用情形。或者 $d = 2$，或者 $d = 3$，且流体对流项的微小性由以下量度量

$$\rho_f\ \|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_{\mathrm{F}}))}\ \|\nabla u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_{\mathrm{F}}))} \le \kappa\,\nu \tag{45}$$

对于某个已声明的 $\kappa < 1$。

那么，按照定义*7.1*的意义，存在一个弱解。此外，该解满足能量不等式

$$\mathcal{E}(t) + \nu\int_0^t \|\nabla u(s)\|^2_{L^2(\Omega_{\mathrm{F}})}\,ds \le \mathcal{E}(0) + \int_0^t \langle f_f(s), u(s)\rangle\,ds + \int_0^t \langle f_s(s), \partial_t\eta(s)\rangle\,ds \tag{46}$$

对于几乎处处的 $t \in (0,T)$。此外，如果对流项不存在（斯托克斯–结构情形），或者适用情形 (45)具有严格余量且外力足够正则，那么该弱解在 $(0,T)$上唯一。

证明。 证明采用与耦合测试空间约束 $\mathrm{tr}_{\Gamma_{\mathrm{I}}}\, v = \mathrm{tr}_{\Gamma_{\mathrm{I}}}\, \xi$相一致的伽辽金逼近。用 $(v,\xi) = (u,\, \partial_t\eta)$ 对离散系统进行测试。利用对流项的斜对称性消除惯性能量产生项。利用强制性 (38) 控制弹性能量。由此在离散层面得到 (46)。通过弱紧性取极限。在 $2D$中，非线性项由标准紧性方法控制。在$3D$中，小量适用情形 (45) 抑制能量平衡中的缺陷项，并通过对两个解之差应用 Gr¨onwall 论证得到唯一性。一旦适用情形已声明，这些步骤便是标准的；相关文献已在移动边界和变分框架中讨论了相同机制 [7, 3]。 □

备注 7.4。 分区式流固耦合离散中最常见的病态性是附加质量效应。当 ρ_f/ρ_s 不小时，且界面耦合采用显式处理时，就会出现这种效应。此时，离散能量估计可能会出现一个负项，其大小与ρ_f/ρ_s 乘以迹常数成比例。可通过隐式耦合，或采用能在离散层面恢复强制性的 Robin 型界面条件来避免这一问题。这正是 Robin–Robin分区格式及其稳定性分析背后的分析内涵 [18, 9, 6]。本研究选择这一适用情形，是为了在讨论离散化之前，先使连续耦合能量方法得以闭合。

8. FSI: COMPUTABLE STABILITY MARGINS FOR DISCRETIZATION CHOICES

稳定性裕度并非主观判断，而是一个不等式，其中 Δt 和网格参数位于不等式一侧，可计算常数位于另一侧。如果不等式不成立，就不宣称稳定性。只有在确定了具体的耦合策略后，这类裕度才会存在。相关情形是分区方法，因为实践中失效的正是这类方法。现代针对时间自适应分区格式和 Robin 型分区格式的分析，展示了此类裕度应有的正确形式 [6, 18, 9]。

我们采用第 7 节中的厚结构模型。假设空间上采用协调的有限元离散。此处空间的具体细节并不重要，重要的只是它们满足的不等式。我们将流体离散空间记为 $V_{F,\,h} \subset V_F$ 和 $Q_h \subset L^2(\Omega_{\mathrm{F}})$，将结构空间记为 $V_{S,\,h} \subset V_S$。我们假设 $(V_{F,\,h},\ Q_h)$ 满足离散 inf–sup 条件，并将其常数记为 $\beta_h > 0$。我们用 tr_h 表示 Γ_{I} 上的离散迹，并用 $C_{\mathrm{tr},\,h}$表示离散迹不等式中的可计算常数

(47)
$$\|\mathrm{tr}_h\, v_h\|_{L^2(\Gamma_{\mathrm{I}})} \le C_{\mathrm{tr},h}\, \|v_h\|_{H^1(\Omega_{\mathrm{F}})} \quad \forall v_h \in V_{F,h}, \qquad \|\mathrm{tr}_h\, \xi_h\|_{L^2(\Gamma_{\mathrm{I}})} \le C_{\mathrm{tr},h}\, \|\xi_h\|_{H^1(\Omega_{\mathrm{S}})} \quad \forall \xi_h \in V_{S,h}.$$

我们强调：$C_{\mathrm{tr},\,h}$ 是一个可计算的、依赖于网格的常数。

8.1. 离散能量估计与 CFL 型约束。我们陈述一种典型的分区耦合。我们采用显式的流体到结构速度耦合和隐式的 Robin 界面稳定化。采用这种形式，可以实现无条件稳定，也可以在给出显式裕度 [18, 9] 的条件下保证稳定。

设 $(u_h^k, p_h^k, \eta_h^k, \dot\eta_h^k)$ 表示时间 t^k 的离散未知量。设 $\dot\eta_h^k$ 表示离散结构速度。设 $\alpha > 0$ 为待选取的 Robin 参数。典型的 Robin–Robin 分区步进如下：

(S1) 流体步。给定 $\dot\eta_h^k$，通过在 Ω_{F} 上对纳维–斯托克斯方程进行半隐式离散，并施加 Robin 界面条件，求解 (u_h^{k+1}, p_h^{k+1})

$$\big(\sigma_f(u_h^{k+1}, p_h^{k+1})n_F\big)\cdot v + \alpha \left\langle u_h^{k+1} - \dot\eta_h^k, v\right\rangle_{\Gamma_{\mathrm{I}}} = \langle f_f^{k+1}, v\rangle \quad \forall v \in V_{F,h}^0, \tag{48}$$

其中 $\sigma_f(u,p) := -pI + \nu(\nabla u + \nabla u^\top)$，对流项采用反对称形式，因此不会注入能量。

(S2) 结构步。给定 u_h^{k+1}，通过在 Ω_{S} 上施加 Robin 界面条件的隐式弹性动力学步，求出 $(\eta_h^{k+1}, \dot\eta_h^{k+1})$

$$\langle \rho_s \frac{\dot\eta_h^{k+1} - \dot\eta_h^k}{\Delta t}, \xi\rangle_{\Omega_{\mathrm{S}}} + a_S(\eta_h^{k+1}, \xi) + \alpha \left\langle \dot\eta_h^{k+1} - u_h^{k+1}, \xi\right\rangle_{\Gamma_{\mathrm{I}}} = \langle f_s^{k+1}, \xi\rangle \quad \forall \xi \in V_{S,h}, \tag{49}$$

where $a_S(\eta,\xi) := \int_{\Omega_{\mathrm{S}}} \mathbb{C}\varepsilon(\eta) : \varepsilon(\xi)\, dx$.

(48)–(49中的界面项会对不匹配量 $u_h - \dot\eta_h$ 进行惩罚。

稳定裕度源于以下问题：在惩罚项无法控制分区所产生的不匹配量之前，Δt 最大可以多大？附加质量效应正是在这里起作用。对 Robin 型分区格式的分析表明，若 α 和 Δt 满足一个可计算的不等式 [18, 9]，则不匹配项可以得到控制。

定理 8.1 (离散耦合能量稳定性)。假设空间离散满足迹不等式 (47)，且结构强制性 (38) 在离散形式下成立，其可计算常数为 $c_{\mathbb{C},\,h} > 0$。假设流体对流项采用能量斜对称形式进行离散，因此不会对离散动能产生项作出贡献。固定 $\alpha > 0$ 和 $\Delta t > 0$。假设分区罗宾–罗宾格式 (48)–(49)是良定义的。

那么，离散耦合能量

$$\mathcal{E}_h^k := \frac{\rho_f}{2}\left\|u_h^k\right\|^2_{L^2(\Omega_{\mathrm{F}})} + \frac{\rho_s}{2}\left\|\dot\eta_h^k\right\|^2_{L^2(\Omega_{\mathrm{S}})} + \frac{1}{2}a_S(\eta_h^k, \eta_h^k) \tag{50}$$

满足，对于 $k=0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ K-1,$

$$\mathcal{E}_h^{k+1}-\mathcal{E}_h^{k}+\nu\,\Delta t\,\left\|\nabla u_h^{k+1}\right\|_{L^2(\Omega_{\mathrm{F}})}^2+\alpha\,\Delta t\,\left\|u_h^{k+1}-\dot{\eta}_h^{k}\right\|_{L^2(\Gamma_{\mathrm{I}})}^2+\alpha\,\Delta t\,\left\|\dot{\eta}_h^{k+1}-u_h^{k+1}\right\|_{L^2(\Gamma_{\mathrm{I}})}^2$$

$$\le \Delta t\,\langle f_f^{k+1},u_h^{k+1}\rangle+\Delta t\,\langle f_s^{k+1},\dot{\eta}_h^{k+1}\rangle+\Delta t\,\mathfrak{R}_h^{k+1}, \tag{51}$$

其中余项 $\mathfrak{R}_h^{k+1}$ 是一个可计算的项，其形式为

$$\mathfrak{R}_h^{k+1}\le C_{\mathrm{am}}(\rho_f,\rho_s,C_{\mathrm{tr},h})\,\Delta t\,\left\|u_h^{k+1}-\dot{\eta}_h^{k}\right\|_{L^2(\Gamma_{\mathrm{I}})}^2, \tag{52}$$

其中 C_{am} 是一个显式的附加质量系数。特别是，如果

$$\alpha\ge 2\,C_{\mathrm{am}}(\rho_f,\rho_s,C_{\mathrm{tr},h}), \tag{53}$$

那么 $\mathfrak{R}_h^{k+1}$ 会被吸收，该格式满足真正的离散能量不等式，且没有正余项。

证明。用 $v=u_h^{k+1}$ 检验流体步。利用对流离散的斜对称性，从动能平衡中消去非线性项。用$\xi=\dot{\eta}_h^{k+1}$ 检验结构步。利用离散极化恒等式

$$\left\langle \dot{\eta}_h^{k+1}-\dot{\eta}_h^{k},\dot{\eta}_h^{k+1}\right\rangle=\frac{1}{2}\Big(\left\|\dot{\eta}_h^{k+1}\right\|^2-\left\|\dot{\eta}_h^{k}\right\|^2+\left\|\dot{\eta}_h^{k+1}-\dot{\eta}_h^{k}\right\|^2\Big),$$

并对弹性项使用类似的恒等式，以得到 $a_S(\eta_h,\ \eta_h)$的增量。将两个平衡式相加。Robin项在界面失配上产生非负惩罚项。唯一可能产生正余项的是 u_h^{k+1} 与 $\dot{\eta}_h^{k}$之间的分区失配。利用离散迹不等式（47）和杨氏不等式对其进行估计。由此得到形式为（52）的余项，其系数显式依赖于（$\rho_f,\ \rho_s,\ C_{\mathrm{tr},\ h}$）。该系数正是附加质量效应的解析表征。随后，吸收条件（53）导出（51）。这一结构遵循Robin型分区稳定性分析中确立的思路 [18, 9]。□

8.2. **将稳定性裕度表示为参数的显式函数**。Robin 参数α 可以选取为使分区格式稳定。若 α 受到限制（出于效率考虑或受实现方式约束），则会出现时间步长限制。现在我们将该限制表述为一个显式裕度。

我们将系数 C_{am} 表示为可计算的形式。一个有代表性的界为

$$C_{\mathrm{am}}(\rho_f,\rho_s,C_{\mathrm{tr},h}):=\frac{\rho_f}{\rho_s}\,C_{\mathrm{tr},h}^2\,\Lambda_h, \tag{54}$$

其中，Λ_h 是结构离散的一个可计算刚度质量比常数。对于协调离散，可以取 Λ_h 为离散弹性算子相对于结构质量矩阵的最大广义特征值。该值可计算，也是唯一可能导致真正网格依赖性的量。

命题 8.2（可计算的裕度）。假设定理*8.1*的假设成立。设$\alpha>0$ 固定。令 C_{am} 由（54）计算得到。若

$$\Delta t\le\frac{\alpha}{2\,C_{\mathrm{am}}(\rho_f,\rho_s,C_{\mathrm{tr},h})\,\alpha+1}, \tag{55}$$

则 *Robin–Robin*分区格式是能量稳定的，即（51）成立，且$\mathfrak{R}_h^{k+1}$ 已并入左端。等价地，对于固定的 Δt，一个充分的稳定化选取为

$$\alpha\ge\frac{1}{2\Delta t}\Big(\sqrt{1+8\,C_{\mathrm{am}}(\rho_f,\rho_s,C_{\mathrm{tr},h})\,\Delta t}-1\Big). \tag{56}$$

一旦计算出$(\rho_f,\rho_s,C_{\mathrm{tr},h},\Lambda_h)$，两个裕度都可以计算。

证明。 在该方案下，余项的形式为 $\Delta t\,\mathfrak{R}_h^{k+1} \le \Delta t^2 C_{\mathrm{am}} \left\| u_h^{k+1} - \dot{\eta}_h^k \right\|_{\Gamma_{\mathrm{I}}}^2$，经重新缩放以匹配离散增量后。(51) 的左端包含$\alpha\Delta t \left\| u_h^{k+1} - \dot{\eta}_h^k \right\|_{\Gamma_{\mathrm{I}}}^2$。因此，只要 $\Delta t\, C_{\mathrm{am}} \le \alpha/2$（至多相差极化恒等式带来的记账常数），就可以进行吸收。将吸收约束写成一个明确的不等式，可得 (55)，解出 α 即可得到 (56)。 □

备注 8.3。 该裕度随 ρ_f/ρ_s 和$C_{\mathrm{tr},\ h}^2$变化。这是附加质量的解析特征。它解释了为什么显式耦合在轻质结构或细网格情况下会变得不稳定。Robin 型稳定化将负担从 Δt 转移到 α。这正是现代分区稳定性分析所利用的机制 [18, 9, 6]。

9. Numerical protocols for verifiability

只有当计算中定理所涉及的常数以数值形式报告，并且能够追溯到明确列出的不等式时，该计算才是可验证的。图表不是证书。对训练数据的良好拟合也不是证书。因此，以下流程通过算法提取定理 4.3 和 5.3以及命题 6.1–6.5中使用的常数和检验。能量稳定的降阶模型框架和保结构超降阶为斜对称性与耗散性的必要检验提供了依据 [21, 14]。受约束算子推断研究则促使我们要求耗散性约束在表示中 精确 成立，而非近似成立 [13, 23]。流固耦合稳定性分析促使我们明确列出迹常数和密度比 [18, 9]。

9.1. 证书计算。 我们假设全阶离散已固定。我们假设降阶模型空间 V_n 和闭合 C_n 均已固定。以下所有计算均针对这些固定对象。

(P1) **定理 4.3 的能量证书常数。** 计算并记录：
(a) 离散内积 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_h$ 及其范数 $\|\cdot\|_h$；(b) 离散黏性强制性恒等式 $\langle \mathsf{A}_h v,\ v\rangle_h = \|\nabla v\|_h^2$，其中 $v \in V_n$；(c) 斜对称性缺陷

$$\delta_{\mathrm{skew}}(v) := \frac{|\langle \Pi_n \mathsf{B}_h(v,v), v\rangle_h|}{\|v\|_h^3 + \epsilon_{\mathrm{mach}}}, \tag{57}$$

在声明的降阶模型状态测试集上进行评估（例如，沿降阶模型轨迹取点，并在系数空间网格上取点）。证书要求 $\delta_{\mathrm{skew}}(v) = 0$ 在精确算术下成立。在浮点数计算中，报告观测到的最大值以及所用的机器精度。只有当该缺陷保持在舍入误差水平 [14] 时，才允许采用能量守恒超降阶。

(d) 闭合耗散缺陷

$$\delta_{\mathrm{diss}}(v) := \frac{\max\{0, -\langle \mathsf{C}_n(v), v\rangle_h\}}{\|v\|_h^2 + \epsilon_{\mathrm{mach}}}, \tag{58}$$

再次在声明的测试集上进行评估。对于约束算子推断，约束已内置于表示中，因此 $\delta_{\mathrm{diss}}(v)$ 应在精确算术下为零 [13]。

(e) 时间步进参数 $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$和步长 Δt，用于定义 4.1。如果任一缺陷超出声明容差，则该次运行将被判定为未经认证。这是一个失败标志，而非小小的不便。

(P2) **定理 5.3的残差计算。** 以与离散化一致的方式计算 $\|r_n(t)\|_{V'}$。一种标准选择是离散Riesz映射：求 $z(t) \in V_h$ 使得

$$\langle \nabla z(t), \nabla w\rangle_h = \langle r_n(t), w\rangle \quad \forall w \in V_h, \tag{59}$$

然后令 $\|r_n(t)\|_{V'} := \|\nabla z(t)\|_h$。记录：
(a) 用于（59）的线性求解器容差；(b) 是否使用超降阶或学习算子；若使用，则说明残差中所用的确切算子。针对某个算子计算的残差，不能认证另一个实际实现的算子 [14]。(c) 在（22）中计算得到的估计量 $\eta_n(T)$；(d)（24）中 Gr¨onwall 因子所用的常数。这包括（12）中的 L_C。如果C_n 是学习得到的，应根据受约束表示计算 L_C，而不是通过黑箱有限差分计算 [13, 23]。

(P3) **第 6 节的转变代理指标**。计算并记录：
(a) 进入（30）的能垒常数（C_P，γ_U）。说明计算 γ_U时所用的范数。不要隐去这一信息。能量稳定性对这一选择十分敏感 [12]。(b) 在 $2D$ 中，进入（33）的涡量平方积分常数（$C_{P,\,\omega}$，G（t））。如果 $d = 3$，除非通过明确声明的假设控制了涡拉伸项，否则不要报告这一代理指标。否则它就不是定理 [12]。(c) 预解式代理指标：固定 $\sigma > 0$，构造离散线性化算子 $\mathcal{L}_{U,\,h}$，并将其计算为最大奇异值。如果使用数据驱动近似，应报告用于证明其合理性的近似误差界 [10, 19]。

$$\|\mathcal{R}_{U,h}(\sigma)\|_2 = \|(\sigma I - \mathcal{L}_{U,h})^{-1}\|_2$$

(P4) **第 8 节的流固耦合裕度8**。计算并记录：
(a) 离散迹常数 $C_{\mathrm{tr},\,h}$，见（47）（或根据网格几何计算得出的显式上界）；(b) 结构刚度质量比 Λ_h，代入（54），并作为广义特征值计算；(c) 密度比 ρ_f/ρ_s 和所选的 Robin 参数 α；(d) 得到的裕度不等式（55）或（56）。若裕度条件不满足，则报告该模拟不在定理适用范围内。这是正确的分类方式 [18, 9, 6]。

9.2. **可复现报告检查清单**。这份检查清单的目的并非追求面面俱到，而是确保结果可证伪。

- **声明的模型与工况**。说明（ν、ρ_f、ρ_s）、几何类别、边界条件、外力正则性，以及是否为 $d = 2$ 或 $d = 3$。说明所采用的工况不等式。若使用了（45），请报告左侧的值以及所选的 κ。

- **结构恒等式**。报告最大值 $\delta_{\text{偏斜}}$和最大值 $\delta_{\text{耗散}}$，来自（57）–（58）。如果其中任一项超过容差，则将该次运行标记为“未经认证” [21, 14]。
- **界中的所有常数**。列出（20）和（24）中出现的每个常数。说明每个常数的获取方式。如果某个常数未计算，则不要给出该界。
- **残差与误差估计量**。报告 $\eta_n(T)$ 以及用于计算 $\|r_n\|_{V'}$ 的数值方法。报告求解器容差和条件性。

- **转变代理指标**。报告是否使用了能垒、涡量平方和预解算子代理指标。对于每一项，报告计算所得的阈值不等式，以及该不等式是否成立[12, 16]。

- **流固耦合稳定性裕度**。报告 $C_{\mathrm{tr}\,h}$，Λ_h，ρ_f/ρ_s，α，以及（55）是否成立。如果不成立，请说明该计算超出了认证范围 [18, 9]。
- **失效标志**。提供一张包含布尔标志的最终表格：skew-ok、diss-ok、margin-ok、residual-computed、regime-ok。没有失效标志的证书就不是证书。

10. Scope and limits

定理界定了已证明的内容，也界定了尚未证明的内容。本研究以证书为驱动，因此明确排除某些情形。能量方法虽功能强大，

但无法为充分发展的湍流提供证书。预解算子界能够量化瞬态增长，但其本身并不能推出非线性转捩。流固耦合能量方法可确定强制的适用情形，但在一般的移动界面情形下，无法消除几何非线性 [12, 7, 19]。

10.1. **定理未涵盖的内容**。

备注 10.1。 下面列出不在讨论范围内的情形，并说明每种情形为何被排除。

(i) 高雷诺数充分发展湍流。 降阶模型认证基于强制能量不等式构建。在耗散无法以可计算的方式压过产生项的适用情形下，证书常数会变得很大，或者无法计算。因此无法得到有效界限。这并非证明的缺陷，而是能量稳定性仅为充分判据且具有保守性的解析体现 [12]。

(ii)不附加假设的三维基于涡量平方的转捩判据。 在 $3D$ 中，涡量平方平衡包含涡伸展，而涡伸展并非定号。忽略涡伸展的判据并不是定理。因此，我们仅在涡量平方预算能够闭合的简化情形下陈述涡量平方阈值 [12, 8]。

(iii)缺少可计算的庞加莱′／迹常数的复杂几何。 证书常数显式依赖于 C_P，而在流固耦合中，还依赖于 $C_{\mathrm{tr},\,h}$。如果这些量未被计算或界定，那么这些不等式在数值上便无法判定。在这种情况下，仍然可以计算降阶模型，但不得声称已获得认证。

(iv) 超出所声明对偶空间范围的非光滑外力或分布型强迫。 后验估计量是在 V' 中表述的，因为能量方法自然会用 V 检验残差。如果外力不属于所声明的对偶空间，那么定理中的残差范数便没有定义。在提出 [8] 方面的主张之前，必须先改变函数空间框架。

(v) 存在大幅界面运动或几何非线性、但未明确给出几何条件范围的流固耦合。 移动边界问题需要控制几何映射和界面正则性。这些是彼此独立的解析约束。我们的适定性定理是在固定的参考剖分上陈述的。这是有意为之。移动边界情形将在专门的分析中讨论 [7]。

(vi) 无误差界的数据驱动的预解算子近似。 仅当近似误差受控时，数据驱动的预解算子分析才可容许。否则，所计算的“预解算子范数”并非所声明算子的范数。那么它就不是由定理驱动的代理 [10, 19]。

10.2. **常见论证中的一种特定失效模式**。

注记 10.2. 一种常见论证如下。

断言。 “该降阶模型是 Galerkin 的。对流项保持能量。因此该降阶模型是稳定的。”

我们暂且假定这一说法是正确的。那么稳定性将由两个代数事实推出：投影与斜对称性。这使我们面临一个两难。

要么所实现的降阶模型在与能量估计相同 的内积中保持斜对称性。要么并非如此。

如果并非如此，该论证在第一行即告崩溃。离散对流算子可以注入能量。这至少发生在三种标准情形中。

(i) 非无散基。 如果降阶模型基并非严格无散，则离散对流项在动能内积下不具有斜对称性。因此，恒等式$\langle B(v,\ v)\ v\rangle = 0$不成立。即使全阶模型具有耗散性，能量仍可能增长。这正是保结构降阶模型通过构造强制满足无散性的原因[4, 14]。

(ii) **破坏结构的超降阶。** 即使全阶对流离散格式具有能量守恒性，采样或求积近似仍可能破坏斜对称恒等式。此时，降阶非线性项不再满足 $\langle B_n(v,\ v)\ v\rangle = 0$。能量稳定性随之丧失。能量守恒超降阶正是为避免这一缺陷而设计的 [14]。

(iii) 不受耗散性约束的学习算子。 算子推断可以拟合动力学，却可能产生在相关度量下不具耗散性的向量场。于是，降阶模型常微分方程便没有从偏微分方程继承而来的李雅普诺夫函数。它在样本内可能稳定，而在样本外不稳定。状态约束和保结构变体正是通过施加约束来消除这一逻辑漏洞 [15, 13]。

相反，如果实现的降阶模型 确实 保持斜对称性，且闭合具有耗散性，那么就能得到定理 4.3中的离散能量不等式。这才是对非正式说法的恰当替代：它以带有失败标志的不等式取代断言。

11. Conclusion

我们回到第 1 节的核心命题。只有具备耗散证书，耗散流的降阶模型才可接受。证书必须表述为含有可计算常数的不等式。只有采用这种形式，才能毫无歧义地判定超出适用范围的失效 [21, 14]。

第一个结果是能量证书。定义 4.1 确定了一类能够保持能量方法的时间步长。定理 4.3 随后给出一个离散能量不等式，其中明确体现了外力和黏度的影响。证明仅使用两个结构公理：对流项的斜对称性和闭合项的耗散性。若超降阶或学习过程违反了任一公理，该不等式就可能不成立。注 4.4 记录了这一失效机制 [11, 1, 13]。

第二个结果是由可计算残差驱动的误差界。定义 5.1确定了能量论证所要求的对偶范数下的残差。定理5.3给出了 $\mathsf{X}(0,T)$ 上的后验估计，并给出了一个显式的 Gr¨onwall 因子，该因子仅取决于指定的参数区域集上的可计算利普希茨常数。定理 5.5 在明确的适用情形利普希茨假设下，给出了一个条件性先验收敛速率。这两个结果都区分了近似误差与稳定性。这一区分正是许多非正式降阶模型主张失效之处 [8, 15]。

第 6 节的转捩指标并非检测器。命题6.1 给出了一个充分的能量屏障。命题 6.3 在涡量平方预算能够闭合的情形下，给出了一个不变涡量平方积分球。命题 6.5 给出了一个用于瞬态增长的预解算子范数代理指标。每条结论都是带有明确输入的不等式。每条结论都可能以已声明的方式失效。充分屏障与预测性诊断之间的区别得以保留。这与能量稳定性视角以及现代预解算子文献相一致[12, 19, 16]。

流固耦合结果也遵循相同的逻辑。定理 7.3 在耦合能量能够闭合的已声明适用情形下给出存在性，并在受限适用情形下给出唯一性。在讨论数值计算之前，这隔离出了一个可验证的参数类别 [7, 3]。定理 8.1 和命题 8.2 随后将耦合转化为一个带有明确附加质量系数和明确稳定性裕度的离散能量不等式。正如罗宾型分区分析所预期的那样，该裕度取决于密度比以及离散迹常数/刚度常数[18, 9, 6]。

最后，第 9 节陈述了报告规范。该规范是数学的一部分。缺少使其可判定的常数，就不能称为界限。没有给出反对称缺陷与耗散性缺陷的稳定性声明，算不上声明。超出裕度适用情形的计算不在定理适用范围内。第 10 节记录了排除情形，以及一种常见非正式论证的确切失效模式。

剩下的结论很明确：证书项目在常数可计算的适用情形下得出定理。在这些适用情形之外，正确的结果不是一个较弱的定理，而是明确的失败标志。

Acknowledgements

作者谨此感谢 Government College (Autonomous) 校长 Dr. Ramachandra R. K. 的鼓励，以及他为研究提供的良好环境。该学院位于印度安得拉邦拉贾蒙德里。作者声明，本研究未获任何资助，不存在利益冲突，不涉及人体或动物伦理审查，也没有相关数据集。

References

1. Shady E. Ahmed、Suraj Pawar、Omer San、Adil Rasheed、Traian Iliescu 和 Bernd R. Noack, *On closures for reduced order models—a spectrum of first-principle to machine-learned avenues*, 《流体物理》33（2021年），第9期，091301，doi：10.1063/5.0061577。2. Hugo Beir˜ao da Veiga 和 Jiaqi Yang, *The relations between hölder continuity assumptions on thedirection of vorticity and energy equality*, 《几何分析杂志》35（2025年），15，doi：10.1007/s12220-024-01848-7。3. B. Bene˘sov´a、M. Kampschulte 和 S. Schwarzacher, *Variational methods for fluid–structure in-teraction and porous media*, 《非线性分析：现实世界应用》71（2023年），103819，doi：10.1016/j.nonrwa.2022.103819。4. Peter Benner 和 Pawan Goyal, *Structure-preserving model order reduction for nonlinear systems*, 《SIAM科学计算杂志》44（2022年），第3期，A1820–A1845，doi：10.1137/21M1414555。5. Peter Benner、Pawan Goyal、Boris Kramer、Benjamin Peherstorfer 和 Karen Willcox, *Operator inference for non-intrusive model reduction of systems with non-polynomial nonlinear terms*, 《计算力学与工程方法》372（2020年），113433，doi：10.1016/j.cma.2020.113433。6. Martina Buka˘c、Guosheng Fu、Anyastassia Seboldt 和 Catalin Trenchea, *Time-adaptive partitionedmethod for fluid-structure interaction problems with thick structures*, 《计算物理学杂志》473（2023年），111708，doi：10.1016/j.jcp.2022.111708。7. Sun˘cica ˘Cani´c, *Moving boundary problems*, 《美国数学会通报》58（2021年），第1期，79–106，doi：10.1090/bull/1703。8. Charles R. Doering 和 John D. Gibbon, *Applied analysis of the navier–stokes equations*, 剑桥大学出版社（2022年），专著；用于严格的能量／涡量平方积分估计。9. Shihan Guo、Ping Lin、Yifan Wang、Xiaohe Yue 和 Haibiao Zheng, *An unconditionally stable explicit robin–robin partitioned scheme for fluid-structure interaction* 2025 10 48550 2510 13096 , , doi：。/arXiv.。。10. Benjamin Herrmann、Peter J. Baddoo、Richard Semaan、Steven L. Brunton 等, *Data-driven resolvent analysis* **918** 2021 10, 10 1017 2021 337 , 《流体力学杂志》（），A doi：。/jfm.。。11. Traian Iliescu 和 Zhu Wang, *Regularized reduced-order models for the navier–stokes equations*, 《SIAM评论》63（2021年），第2期，293–344，doi：10.1137/19M1248599。12. Rich R. Kerswell, *Energy stability and the transition to turbulence*, 《流体力学杂志》948（2022年），F1，doi：10.1017/jfm.2022.558。13. Hyeonghun Kim 和 Boris Kramer, *Physically consistent predictive reduced-order modeling by enhanc-ing operator inference with state constraints*, 《计算物理学杂志》（2025年），114418，doi：10.1016/j.jcp.2025.114418。14. P. B. Klein 和 B. Sanderse, *Energy-conserving hyper-reduction and temporal localization for reduced order models of the incompressible navier–stokes equations* **499** 2024 , 《计算物理学杂志》（），112697，doi：10.1016/j.jcp.2023.112697。15. Boris Kramer、Benjamin Peherstorfer 和 Karen Willcox, *Learning nonlinear reduced models from data with operator inference* **56** 2024 1, 521 548, , 《流体力学年度评论》（），第–期，doi：10.1146/annurev-fluid-121021-025220。16. Vilda K. Markevi˘ci – *Threshold transient growth as a criterion for turbulent mean profiles* **996** 2024 32, 10 1017 2024 671 ut´e 和 Rich R. Kerswell, , 《流体力学杂志》（），A doi：。/jfm.。。17. Beverley J. McKeon 和 Ati S. Sharma, *A critical-layer framework for turbulent pipe flow*, 《流体力学年度评论》52（2020年），43–69，doi：10.1146/annurev-fluid-010719-060409。18. Connor Parrow 和 Martina Buka˘c, *Stability and error analysis of a partitioned robin-robin methodfor fluid poroelastic structure interaction*, 《科学计算杂志》106（2026年），40，doi：10.1007/s10915-025-03143-1。19. Laura Victoria Rolandi、Jean H´elder Marques Ribeiro、Chi-An Yeh 和 Kunihiko Taira, *An invita-tion to resolvent analysis*, 《理论与计算流体力学》38（2024年），603–639，doi：10.1007/s00162-024-00717-x。

20. Clarence W. Rowley 和 Scott T. M., *Model reduction for fluids, using b alanced proper orthogonal decomposition*, 《流体力学年度评论》**49** （2017），387–417，基础参考文献；仅用于定义。21. B. Sanderse, *Non-linearly stable reduced-order models for incompressible flow with energy-conserving finite volume methods* **421** 2020 109736, 10 1016 2020 109736 , 《计算物理学杂志》（），doi：./j.jcp. . . 22. Markus Schlegel 和 Andreas Bach, *Energy-stable reduced-order models for incompressible flow using discontinuous galerkin methods*, 《计算机与流体》**215** （2020年），104789，doi：10.1016/j.compfluid.2020.104789。23. Harsh Sharma、David A. Najera-Flores、Michael D. Todd 和 Boris Kramer, *Lagrangian operator inference enhanced with structure-preserving machine learning for nonintrusive model reduction of mechanical systems*, 《计算力学与工程方法》**423** （2024年），116865，doi：10.1016/j.cma.2024.116865。24. Yifan Sun、Jian Gao 等, *Resolvent analysis of compressible laminar and turbulent open-cavity flows*, 《美国航空航天学会期刊》（2020年），doi：10.2514/1.J058633。25. Yanqing Wang、Jiaqi Yang 和 Yulin Ye, *Energy equality criteria in the navier–stokes equations involving the pressure* **27** 2025 14, 10 1007 00021 025 00917 3 （），doi：./s - - -。

Lecturer in Mathematics, Government College (Autonomous), Rajahmundry, AndhraPradesh, India*Email address*: chandrasekhargokavarapu@gmail.com*Email address*: chandrasekhargokavarapu@gcrjy.ac.in

Lecturer in Mathematics, Government College (Autonomous), Rajahmundry, Andhra Pradesh, India

M.Sc (Mathematics), 4th Semester Student, Regd.No:2024307111 Government College (Autonomous), Rajahmundry, Andhra Pradesh, India

M.Sc (Mathematics), 4th Semester Student, Regd.No:2024307111 Government College (Autonomous), Rajahmundry, Andhra Pradesh, India