arXiv:2602.15081v1 [math.LO] 16 Feb 2026

勘误与补遗：*Visser* 主题的变体

Ali Enayat

2026年2月18日

1 引言

本文是对我的论文 [E] 的补充；撰写本文的缘由是 Piotr Gruza 和 Mateusz Łe-lyk 发现， [E 中定理 2.7] 所给出的 KM（Kelley–Morse 类理论）凝实性证明存在一个漏洞。本文撰写之际，KM 及其高阶变体是否为凝实理论仍未有定论；但如定理 2.7 的证明所述， [E] 中给出的证明适用于以类选择模式的片段 $\mathsf{CC}_{\mathsf{set}}$ （见定义 2.2）强化后的 KM。n 在适当的 $\mathsf{CC}_{\mathsf{set}}$ 类比公理补充后，KM[1] 高阶变体的凝实性也可以用类似方法证明，正如注 2.6 所示。我们假定读者手边备有 [E] 以供查阅。

还值得注意的是，关于 [E] 中研究的主题，已经取得了若干进展；相关参考文献见 [E-L-1] 和 [E-L-2]。

致谢。 我感谢 Piotr Gruza 和 Mateusz Łe-lyk 指出了 [E 定理 2.7] 证明中的漏洞。也向 Vika Gitman 致敬，感谢她对早期草稿提出的意见，这些意见对塑造定理 2.7 的证明起到了重要作用。

2 KM 的凝实性及其高阶变体

正如 [E 定理 2.7] 所述，KM 凝实性的证明分为两个阶段。第一阶段，重复 ZF 凝实性证明中的证明策略，在 KM 的两个模型的第一类之间构造某个同构；第二阶段，则将第一阶段构造的同构自然地提升为第二类对象之间的同构。我们将会看到， [E 定理 2.7] 证明的第一阶段存在一个微妙的漏洞；若将 KM 加强为 KM $+\mathsf{CC}_{\mathsf{set}}$，便可规避这一漏洞。第二阶段本身没有问题，尤其是那里不需要 $\mathsf{CC}_{\mathsf{set}}$ 。

我们借此机会介绍一种更清晰的证明变体，以证明 [E] 中所述的 ZF 的凝实性。随后，我们将利用这一新的表述，明确指出选择公理$_{\mathsf{set}}$ 在弥补 [E 中 KM 凝实性证明的漏洞时所起的作用，见定理 2.7]。

2.1. 定理。ZF是凝实的。

证明。 假设 $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}^*$ 和 $\mathcal{N}$ 都是 ZF 的模型，且 $\mathcal{M} \trianglerighteq_{\mathrm{par}} \mathcal{N} \trianglerighteq_{\mathrm{par}} \mathcal{M}^*$，并且存在一个 $\mathcal{M}$-可定义同构 $i_0 : \mathcal{M} \to \mathcal{M}^*$. 。利用“Scott 技巧”，不失一般性，我们可以假设上述 $\mathcal{N}$ 在 $\mathcal{M}$ 中的解释以及 $\mathcal{M}^*$ 在 $\mathcal{N}$ 中的解释都保恒等。[2] 我们将证明 $\mathcal{N}$ 与 $\mathcal{M}^*$ 之间存在一个 $\mathcal{N}$-可定义同构。由于 $\mathcal{M}$ 通过 i_0 将 M 单射到 M^* 中，且$M^* \subseteq N$，因此有：

[1]如定理 2.7 证明的第一段所述，如果所用的解释是保恒等的，就不需要选择公理。[2]用模型论语言来说，ZF 的这一性质表述为：ZF *eliminates imaginaries*。然而，许多基础理论（包括 KM）无法消去虚元；参见定理 2.4。

(1) 从 $\mathcal{M}$ 的角度看，N 是一个真类。
由于假设 $\mathcal{M} \trianglerighteq_{\text{par}} \mathcal{N}$ 和 $\mathcal{M} \models \left[i_0 : (\mathbf{V}, \in) \xrightarrow{\cong} \mathcal{M}^*\right]$，不难看出：

(2) $\mathcal{N}$ 将 $\in^{\mathcal{M}^*}$ 视为强意义上的良基：如果 X 是 M^* 的一个非空子集，且它是$\mathcal{N}$-可定义的，那么 X 就有一个 $\in^{\mathcal{M}^*}$-极小元。

接下来，令

$$I = \left\{\alpha \in \mathbf{Ord}^{\mathcal{N}} \mid \mathcal{N} \models \left[\exists \beta \in \mathbf{Ord}^{\mathcal{M}^*}\ \exists f : (V_\alpha, \in) \xrightarrow{\cong} (V_\beta, \in)^{\mathcal{M}^*}\right]\right\},$$

and

$$J = \left\{\beta \in \mathbf{Ord}^{\mathcal{M}^*} \mid \mathcal{N} \models \left[\exists \alpha \in \mathbf{Ord}^{\mathcal{N}}\ \exists f : (V_\alpha, \in) \xrightarrow{\cong} (V_\beta, \in)^{\mathcal{M}^*}\right]\right\}.$$

I 和 J 非空，因为 $0^{\mathcal{N}} \in I$ 和 $0^{\mathcal{M}^*} \in J$。显然，I 和 J 对前驱封闭。也很容易证明，I 和 J 对直接后继封闭。为验证这一点，假设 $\alpha \in I$，那么存在相应的 $\beta \in J$ 以及某个 $f_\alpha \in N$，使得：

$$\mathcal{N} \models \left[f_\alpha : (V_\alpha, \in) \xrightarrow{\cong} (V_\beta, \in)^{\mathcal{M}^*}\right].$$

我们希望证明，可以将 f_α 扩展为某个 $f_{\alpha+1} \in N$，使得：

$$\mathcal{N} \models \left[f_{\alpha+1} : (V_{\alpha+1}, \in) \xrightarrow{\cong} (V_{\beta+1}, \in)^{\mathcal{M}^*}\right].$$

在 $\mathcal{N}$中进行推理，$f_{\alpha+1}(a)$ 对 $a \in V_{\alpha+1}$ 的定义如下。给定 $a \in V_{\alpha+1}$, $a \subseteq V_\alpha$，因此$\{f_\alpha(x) : x \in a\}$ 在 $\mathcal{M}^*$ 中由唯一的 b_a 编码（利用假设 $\mathcal{M} \trianglerighteq_{\text{par}} \mathcal{N}$ 以及 $\mathcal{M}$ 与 $\mathcal{M}^*$之间存在 $\mathcal{M}$-可定义同构这一事实），因此，由替代公理[3] 在 $\mathcal{N}$ 中的成立性，存在某个 $u \in N$，使得 $\mathcal{N} \models u = \{\langle a, b_a\rangle : a \in V_{\alpha+1}\}$，于是我们可以在 $\mathcal{N}$ 中令 $f_{\alpha+1} := u$. 显然（同样，在 $\mathcal{N}$中进行推理，利用 f_α以及假设 $\mathcal{M} \trianglerighteq_{\text{par}} \mathcal{N}$ 和 $\mathcal{M}$ 与 $\mathcal{M}^*$之间存在 $\mathcal{M}$-可定义同构这一事实），每个 $b \in V_{\beta+1}^{\mathcal{M}^*}$ 都在 $f_{\alpha+1}$的像中。这说明 $\alpha + 1 \in I$和 $\beta + 1 \in J$.。因此我们有：

(3) I 是一个 无顶端的[4] 初始段 $\mathbf{序数类}^{\mathcal{N}}$，而 J 是一个无顶端的初始段 $\mathbf{序数类}^{\mathcal{M}^*}$.

根据 ZF 中序数的刚性，以及假设 $\mathcal{M} \trianglerighteq_{\text{par}} \mathcal{N}$ 和存在一个从 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{M}^*$的 $\mathcal{M}$-可定义同构，若 $\alpha \in I$，则存在唯一的 $\beta \in J$，以及唯一的 $f \in N$使得 $\mathcal{N} \models f : (V_\alpha, \in) \xrightarrow{\cong} (V_\beta, \in)^{\mathcal{M}^*}$。因此：

(4) $\mathcal{N} \models \forall \alpha \in I\ \exists! \beta \in \mathbf{Ord}^{\mathcal{M}^*}\ \exists! f \in \mathbf{Ord}^{\mathcal{M}^*}\ f_\alpha : (V_\alpha, \in) \xrightarrow{\cong} (V_\beta, \in)^{\mathcal{M}^*}$.

对于 $\alpha \in I$, , 令 f_α 为满足 (4) 的唯一 f。注意，(4) 蕴含：

(5) $\mathcal{N} \models \forall \alpha, \alpha' \in I\ (\alpha \leq \alpha' \to f_\alpha \subseteq f_{\alpha'})$.

对于 $\alpha \in \mathbf{序数类}^{\mathcal{N}}$和 $\beta \in \mathbf{序数类}^{\mathcal{M}^*}$，令 $\mathcal{N}_\alpha$ 为 $\mathcal{N}$的子模型，其全域为 $N_\alpha := \{a \in N : \mathcal{N} \models a \in V_\alpha\}$; 令 $\mathcal{M}^*_\beta$为 $\mathcal{M}^*$的子模型，其全域为 $M^*_\beta := \{b \in M^* : \mathcal{M}^* \models b \in V_\beta\}$。接下来，令：

$$\mathcal{N}_I := \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{N}_\alpha, \text{ and } \mathcal{M}^*_J := \bigcup_{\beta \in J} \mathcal{M}^*_\beta.$$

定义 $F : \mathcal{N}_I \longrightarrow \mathcal{M}^*_J$，如下：

$$F(a) = b \leftrightarrow \mathcal{N} \models [\exists \alpha \in I\ (a \in V_\alpha \wedge f_\alpha(a) = b)].$$

[3]在 KM 语境中相应的凝实性证明的这一步里，选择公理 $\mathsf{CC}_{\mathsf{set}}$ 在 $(\mathcal{N}, \mathcal{B})$ 中被调用，以获得$f_{\alpha+1} \in \mathcal{B}$. 更明确地说：$I$ 没有最大元。

F 根据 (4) 和 (5) 可知其定义良好，因此我们有：

(6) $\sim F\colon \mathcal{N}_I \xrightarrow{=} \mathcal{M}^*_J$ 和 F 是 $\mathcal{N}$可定义的。

此时，我们区分以下四种情形：

情形 1。 I 在**序数类**$^{\mathcal{N}}$中有界，且 J 在**序数类**$^{\mathcal{M}^*}$.中有界

情形 2。 I 在**序数类**$^{\mathcal{N}}$中有界，且 $J =$ **序数类**$^{\mathcal{M}^*}$.

情形 3。 $I =$ **序数类**$^{\mathcal{N}}$，且 J 在**序数类**$^{\mathcal{M}^*}$.中有界

情形 4。 $I =$ **序数类**$^{\mathcal{N}}$，且 $J =$ **序数类**$^{\mathcal{M}^*}$.

若情形 4 成立，则由 (6) 可知， G 是 $\mathcal{N}$可定义的 $\mathcal{N}$ 与 $\mathcal{M}^*$之间的同构。因此，只要排除情形 1 至 3，定理的证明便告完成。

若情形 1 成立，则令 $\alpha :=$ min(**序数类**$^{\mathcal{N}} \setminus I$)，且 $\beta :=$ min(**序数类**$^{\mathcal{M}^*} \setminus J$)。 α的定义良好性显而易见，而 (2) 保证了 β 的定义良好性。由 (3)， α 是 $\mathcal{N}$ 的一个极限序数，且β 是 $\mathcal{M}^*$的一个极限序数。由于在 $\mathcal{N}$中替代公理[5] 成立，存在某个 $v \in N$ 使得$\mathcal{N} \models [v = \{f_\alpha\colon \alpha \in I\}]$，因此存在 $f_\alpha \in N$使得 $\mathcal{N} \models \left[f_\alpha = \bigcup_{\alpha\in\alpha} f_\alpha\right]$.。由于 α和 β分别是各自模型中的极限序数，这表明f_α 是$\mathcal{N}_\alpha$ 与 $\mathcal{M}^*_\beta$ 之间的同构。因此 $\alpha \in I$，这与 α.的定义矛盾。

现在假设情形 2 成立，那么由 (6)， F 是 $\mathcal{N}$-可定义同构，连接 $\mathcal{N}_\alpha$ 与 $\mathcal{M}^*$，其中α与情形 1(b) 中相同。由于 $\mathcal{N}_\alpha$ 的满足谓词是 $\mathcal{N}$-可定义的，我们可以利用假设$\mathcal{M} \trianglerighteq_{\mathrm{par}} \mathcal{N}$和 $\mathcal{M} \models \left[i_0^{-1}\colon \mathcal{M}^* \xrightarrow{\cong} (\mathbf{V} \in)\right]$，证明 $\mathcal{M}$的满足谓词是 $\mathcal{M}$-可定义的，这与塔斯基真理不可定义定理矛盾。

最后，如果情形 3 成立，那么由 (7)， F 是 $\mathcal{N}$-可定义同构，连接 $\mathcal{N}$与 $\mathcal{M}^*_\beta$，其中 β与情形 1(b) 中相同。利用假设 $\mathcal{M} \trianglerighteq_{\mathrm{par}} \mathcal{N}$和 $\mathcal{M} \models \left[i_0^{-1}\colon \mathcal{M}^* \xrightarrow{\cong} (\mathbf{V} \in)\right]$，显然 N是 $\mathcal{M}$中的一个集合，这与 (1) 矛盾。□

现在我们可以讨论 [E 定理 2.7] 中所述 KM 凝实性证明的漏洞了。回想一下，KM 的模型可以表示为如下形式的双排序结构：$(\mathcal{M}, \mathcal{A})$，其中$\mathcal{M} \models$ ZF； $\mathcal{A}$是 M 的子集的一个集合；并且 $(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ 满足完全概括模式。

2.2. 定义。 令 $\mathcal{L}_{\mathsf{KM}}$ 为 KM 的双排序语言。

(a)CC（类收集）由以下形式公式的全称闭包构成：

$$[\forall x\ \exists X\ \varphi(x, X)] \to [\exists Y\ \forall x\ \varphi(x, (Y)_x)]\,,$$

其中 $\varphi(x, X)$ 是一个 $\mathcal{L}_{\mathsf{KM}}$-公式，其中 Y 不自由出现，并且允许带有集合或类参数。这里，$(Y)_x$ 是由 Y 编码的 $\mathbf{V}^2$ 子类的“x阶截面”，即：

$$(Y)_x = \{y \in \mathbf{V} : \langle x, y\rangle \in Y\},$$

其中 $\langle x, y\rangle$ 是 x 和 y 的 Kuratowski 有序对。[6]

(b) 选择公理$_{\text{set}}$ 是由以下形式的公式的全称闭包构成的选择公理片段：

$$[\forall x \in s\ \exists X\ \varphi(x, X)] \to [\exists Y\ \forall x \in s\ \varphi(x, (Y)_x)]\,.$$

[5]在 KM 语境中相应的凝实性证明的这一步里，会在（$\mathcal{N}$， $\mathcal{B}$）中调用 $\mathsf{CC}_{\mathsf{set}}$，以获得 $f_\alpha \in \mathcal{B}$. 我们沿用了 [GHJ] 的做法，采用 CC 来指称这一方案，而不是 AC（例如在 [AF] 和 [E-L-1] 中使用的术语）；因为在涉及集合的语境中，后者有可能与选择公理混淆。

(c) CR（类替换）是 CC 的一个片段，由以下形式的公式的全称闭包构成：

$$[\forall x\ \exists! X\ \varphi(x,X)] \to [\exists Y\ \forall x\ \varphi(x,(Y)_x)]\,.$$

2.3. 注记。 正如 Gitman、Hamkins 和 Karagila 所示， [GHK], 选择公理在 KM 中不可证。[7] 此后，Gitman、Hamkins 和 Johnstone 的工作进一步细化了这一结果： [GHJ], 指出，KM 甚至无法证明选择公理$_{\mathsf{set}}$ 中那些满足 $s=\omega$ 的情形；参见 [GHJ] 的定理 18、19 和 20。相比之下，CR 在 KM 中可证，因为如果 $\forall x\ \exists! X\ \varphi(x,\ X)$ 成立，那么我们就可以对 $\psi(x,\ y)$ 应用概括：$=\exists X\,(\varphi(x,\ X)\ \wedge y\in X)$，从而得到类 $Y:=\{\langle x,y\rangle:\ \psi(x,\ y)\}$.然后，根据构造， $\forall x\ \varphi(x,\ (Y)x)$ 成立，正如所需。 [8]

2.4. 定理。 KM +选择公理 不能消去虚元。[9]

证明。 令 ZF$^-$ 为从一种 ZF 表述中去掉幂集公理后得到的理论；在该表述中，分离公理模式和收集公理模式取代了替代公理模式。此外，令：

$$T_1 := \mathsf{KM}+\mathsf{CC}, \text{ and } T_2 := \mathsf{ZF}^- + \exists\kappa\ (\kappa \text{ is inaccessible and } \forall x\ \ |x|\le\kappa).$$

根据以下事实即可得出这一结果：

(1) T_1 和 T_2 是序列理论。了解序列性的定义后，这一点显而易见。粗略地说，如果一个理论支持一定程度的编码机制，使其能够使用一种“β-函数”对论域中的对象的有限序列进行编码，那么该理论就是序列性的。[10]

(2) T_1 与 T_2双可解释，其中，证明 T_1 在 T_2 中的解释具有保恒等性质，但证明 T_2 在 T_1 中的解释不具有保恒等性质。这是一个众所周知的事实，其证明的主要要素由莫斯托夫斯基和 Marek 开创。有关清晰易懂的阐述，请参见 William 的博士论文第 2 章。

(3) 如果两个序列理论通过一对保等解释而双可解释，那么它们定义等价。此结果归功于 Friedman 和 Visser [FV]。

(4) T_1a nd T_2 并非定义等价；这一点已在 [E-L-1，定理 16]中得到证明。 [11]

---

[7]在 Z_2 （二阶算术）的语境下，CC 的类比通常称为 AC。众所周知，Z_2 能够证明 AC 的片段 Σ^1_2-AC（在 Z_2中采用适当的舍恩菲尔德绝对性实现；参见 Simpson 专著 [S]的定理 VII.6.9.1），但无法证明完整的 AC。事实上，经典的 ZF Feferman-Levy 模型的标准模型 Z_2中， $\aleph_1$ 是可数个可数集的并，且在该模型中，对某个 Π^1_2-公式 φ，AC 不成立；参见 [L，定理 8]。相较之下，对变量 s 作简单归纳即可表明，Z_2能够证明 CC 的算术类比，其实例形式如下：

$$[\forall x<y\ \exists X\ \varphi(x,X)] \to [\exists Y\ \forall x<y\ \varphi(x,(Y)_x)]\,.$$

[8]感谢 Vika Gitman 指出了这一事实：它在。中是可证的 h CR bl KM

[9]如果对每个可定义等价关系 E，都存在一个可定义函数 f，使得对于所有 x 和 y， $xEy\leftrightarrow f(x)=f(y)$。那么理论 T 就称为消除虚元。在 ZF 中，这样的函数可以用所谓的“斯科特技巧”轻易描述出来；该技巧利用了全域分层为由集合构成的良序族这一特点，其中集合的形式为 V_α，而 α 在序数类中取值。关于这一概念的更多内容，请参阅 Hodges 教科书 [H] 的第4.4节。

[10]更准确地说，如果存在一个公式 $N(x)$，并且有适当的公式来提供对相等以及后继、加法和乘法运算的解释，使得满足 $N(x)$ 的元素具有这些运算；同时， T 能证明将 Q 的公理（罗宾逊算术）相对化到 $N(x)$ 后所得的翻译；此外，还存在一个公式 $\beta(x,\ i,\ w)$（其预期含义是 x 是序列 w 的第 i 个元素），使得 T 能证明每个序列都可以用论域中的任意给定元素加以扩展，那么理论 T 就称为具有序列性。

[11]Chen 和 Meadows [CM] 为 [E-L-1] 所提出的关于 T_1 和 T_2. 的算术对应物不具定义等价性的结论，给出了一个更简单的证明。他们的证明策略同样可以用来更简单地证明 T_1 和 T_2 不具定义等价性。

更明确地说，如果 KM $+$选择公理能够消除虚元，那么根据 (1)、(2) 和 (3)， T_1 和 T_2 就必须定义等价，这与 (4) 矛盾。□

2.5. 备注。 鉴于定理 2.4，在 KM 框架中讨论解释时，必须允许将相等解释为等价关系。为此，我们来明确两个被解释结构之间的可定义同构是什么意思。假设 $\mathcal{M}$ 是一个结构，它使用定义域公式 δ_i 和可定义等价关系 E_i，为 $i \in \{1,2\}$ 解释结构 $\mathcal{N}_i$。 $\mathcal{N}_0$ 与 $\mathcal{N}_1$ 之间的一个 $\mathcal{M}$-可定义同构，是指满足以下性质的 $\mathcal{M}$-可定义关系 $R \subseteq \delta_0^{\mathcal{M}} \times \delta_1^{\mathcal{M}}$:

1. R 的定义域和陪域分别是 $\delta_0^{\mathcal{M}}$ 和 $\delta_1^{\mathcal{M}}$。2. 如果 $x_0 R x_1$ 和 $y_0 E_0 x_0$ 且 $y_1 E_1 x_1$，那么 $y_0 R y_1$。
3. 函数 $F\colon N_0 \to N_1$，由 $F([x_0]_{E_0}) = [x_1]_{E_1} \iff x_0 R x_1$ 定义，是 $\mathcal{N}_0$ 与 $\mathcal{N}_1$. 之间的同构

- 如果 F 和 R 如上所述，那么我们将把关系 R 称为函数F的表示。

2.6. 注。 在 KM 的双排序框架中，如果 $(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ 和 $(\mathcal{N}, \mathcal{B})$ 是 KM 的模型，那么在断言

$$(\mathcal{M}, \mathcal{A}) \trianglerighteq_{\text{par}} (\mathcal{N}, \mathcal{B}),$$

时，我们允许解释中的类型相互交织。结合定理 2.4，我们基于上面显示的断言，关于 $\mathcal{N}$ 所能推断的全部内容是存在：(i) 一个 $(\mathcal{M}, \mathcal{A})$-可定义子集$D \subseteq M \cup \mathcal{A}$，$(ii)$ 一个 $(\mathcal{M}, \mathcal{A})$-可定义等价关系 E，定义在 D上，以及 (iii) 一个 $(\mathcal{M}, \mathcal{A})$-可定义二元关系 F，定义在 D 上，使得:

$$\mathcal{N} \cong (D/E, F).$$

正如我们将要说明的，不失一般性，在 (i) 中我们可以假设 $D \subseteq \mathcal{A}$；本质上，这是因为 $\mathcal{A}$ 与 $M \cup \mathcal{A}$之间存在一个无参数的 $(\mathcal{M}, \mathcal{A})$-可定义双射，因此我们可以不失一般性地假设 $D \subseteq \mathcal{A}$.[12] 。为此，我们首先注意到，在 ZF 中，全域 V 可以写为 $\mathrm{V}_1 \cup \mathrm{V}_2,$，其中 V_1 和 V_2 不相交，并且 V 与 V_i 之间存在一个可定义双射，其中 $i \in \{1,2\}.$。例如，可以令 V_1 为所有单元素集合构成的集合，并令 $\mathrm{V}_2 := \mathrm{V} \backslash \mathrm{V}_1.$。显然，由 $f_1(x) = \{x\}$ 定义的函数 $f_1 : \mathrm{V} \to \mathrm{V}_1$ 是$f_1 : \mathrm{V} \to \mathrm{V}_1.$ 之间的可定义双射。利用类版本的 Schr¨oder-Bernstein 定理，还存在一个双射$f_2 : \mathrm{V} \to \mathrm{V}_2,$，因为包含映射是从 V_2 到 V 的单射，而映射 $x \longmapsto \{x, \{x\}\}$ 是从 V 到 $\mathrm{V}_2.$ 的单射。随后可以利用 f_1 和 f_2，再结合由 $g(x) = X$给出的从 V 到类的集合 C 的单射 g （其中 X 仅包含 x），在 KM 中构造一个可定义双射 $g : \mathrm{C} \to \mathrm{V} \cup \mathrm{C}$，它将 V $\cup$ C 与 C 对应起来:

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{if } x \notin i(\mathbf{V}) \\ f_1(i(x)) & \text{if } x \in i(\mathbf{V}_1) \\ f_2(i(x)) & \text{if } x \in i(\mathbf{V}_2) \end{cases}.$$

2.7. 定理。KM $+$ 选择公理$_{\text{set}}$ 是可靠的。

证明。 假设 $(\mathcal{M}, \mathcal{A})$、$(\mathcal{M}^*, \mathcal{A}^*)$ 和 $(\mathcal{N}, \mathcal{B})$ 都是 KM 的模型，且满足:

$$(\mathcal{M}, \mathcal{A}) \trianglerighteq_{\text{par}} (\mathcal{N}, \mathcal{B}) \trianglerighteq_{\text{par}} (\mathcal{M}^*, \mathcal{A}^*),$$

[12]在 KM 的单排序设定中，这显然成立，因为所有集合都被视为类。相比之下，在双排序表述中，不同类型的对象之间没有重叠。利用注释 2.2 中描述的双射 g，可以很容易地验证 KM 的两种表述是双可解释的；对于弱得多的 GB 理论（G¨odel-Bernays 类理论），也可以轻松地进行同样的论证。

并且存在一个 $(\mathcal{M},\mathcal{A})$-可定义同构 $\widehat{i_0}:(\mathcal{M},\mathcal{A}) \xrightarrow{\cong} (\mathcal{M}^*,\mathcal{A}^*)$。正如 Vika Gitman 所指出的，如果所使用的解释是保恒等的，那么 [E，定理 2.7] 的证明没有问题，也不需要额外的 $\mathsf{CC}_{\mathsf{set}}$ 假设，基本上是因为 KM 中类替换可证（如注 2.3 所述）。事实上，只要见证 $(\mathcal{N},\mathcal{B}) \trianglerighteq_{\mathrm{par}} (\mathcal{M}^*,\mathcal{A}^*)$ 的解释是保恒等的就足够了。

为处理一般情形，即所涉及的解释未必把相等翻译为相等，进一步假设选择公理$_{\mathsf{set}}$ 在 $(\mathcal{N},\mathcal{B})$ 中成立。我们希望重复 ZF 情形的论证，以表明存在一个 $(\mathcal{N},\mathcal{B})$-可定义同构 $j:\ \mathcal{N}\to\mathcal{M}^*$. 注意，若我们成功做到这一点，则利用 [E 的证明中的论证，定理 2.7] j 便可自然地提升为一个 $(\mathcal{N},\mathcal{B})$-可定义同构

$$\widehat{j}:(\mathcal{N},\mathcal{B}) \xrightarrow{\cong} (\mathcal{M}^*,\mathcal{A}^*)\,.$$

在 KM 的语境中，定理 2.1 的证明中陈述 (1) 的对应命题断言句子$\neg\exists x\forall y(y\in x\leftrightarrow y\in N)$ 在 $(\mathcal{M},\mathcal{A})$ 中成立，而陈述 (2) 的对应命题断言 $\in^{\mathcal{M}^*}$ 在 $(\mathcal{N},\mathcal{B})$ 看来是良基的，其强意义是：M^* 的任一在 $(\mathcal{N},\mathcal{B})$ 中可定义的非空子集都有一个 $\in^{\mathcal{M}^*}$-最小元。上述两个对应命题都可在 KM 中（无需使用选择公理$_{\mathsf{set}}$）用与 ZF 情形本质上相同的证明轻易证得。然后，我们如下定义相关初始段 I（**序数类**$^{\mathcal{N}}$ 的）以及 J（**序数类**$^{\mathcal{M}^*}$ 的）：

$$I=\left\{\alpha\in\mathbf{Ord}^{\mathcal{N}} \mid (\mathcal{N},\mathcal{B})\models\left[\exists\beta\in\mathbf{Ord}^{\mathcal{M}^*}\ \exists f\in\mathcal{B}\ \ f:(V_\alpha,\in)\xrightarrow{\cong}(V_\beta,\in)^{\mathcal{M}^*}\right]\right\},$$

and

$$J=\left\{\beta\in\mathbf{Ord}^{\mathcal{M}^*} \mid (\mathcal{N},\mathcal{B})\models\left[\exists\alpha\in\mathbf{Ord}^{\mathcal{N}}\ \ \exists f\in\mathcal{B}\ \ f:(V_\alpha,\in)\xrightarrow{\cong}(V_\alpha,\in)^{\mathcal{M}^*}\right]\right\}.$$

请注意，与定理 2.1 的证明不同，在 I 和 J 的定义中，我们必须允许 f 是（$\mathcal{N},\mathcal{B}$）意义下的一个类，但 f不必严格来说是（$\mathcal{N},\mathcal{B}$）意义下某个函数 的图，，因为 $\mathcal{M}^*$ 的相等可能会被翻译为一个（$\mathcal{N},\mathcal{B}$）-可定义等价关系 E。相反，如果 E 充当输出的相等关系，那么 f应当是类函数的，即（$\mathcal{N},\mathcal{B}$）应满足：

$$\forall x\forall y\ \ [((x,y)\in f\wedge(x,z)\in f)\to yEz]\,.$$

考察定理 2.1 的证明策略，我们可以在 KM 中轻易完成定理 2.1 证明的所有步骤，但须满足以下条件。我们假设 E 是（$\mathcal{N},\mathcal{B}$）-可定义等价关系，且它是对 $\mathcal{M}^*$中相等关系的解释。

- 在证明定理 2.1 证明中命题（3）的类似命题时，为了证明 $f_{\alpha+1}\in\mathcal{B}$，（$\mathcal{N},\mathcal{B}$）中 $\mathsf{CC}^{\text{集合}}$ 成立这一点，起到了 $\mathcal{N}$满足替代公理的作用。
- 定理 2.1 的证明中断言 β和 f唯一的陈述 (4)，在 $(\mathcal{N},\ \mathcal{B})$ 中译为：若 $\alpha\in I$，且 $\beta\in J$，并且 $f\in\mathcal{B}$ 满足 $(\mathcal{N},\ \mathcal{B})\models\left[\ f\colon(V_\alpha,\ \in)\xrightarrow{\cong}(V_\beta,\ \in)^{\mathcal{M}^*}\right]$，且 β_1 和 β_2 是 $\mathcal{B}$ 中作为 β 代表元的元素，而 f_1 和 f_2 是 $\mathcal{B}$ 中作为 f 代表元的元素，则：

$$(\mathcal{N},\mathcal{B})\models[\beta_1E\beta_2\wedge\forall x_1\forall x_2\forall y_1\forall y_2\,(x_1Ex_2\to((\langle x_1,y_1\rangle\in f_1\wedge\langle x_2,y_2\rangle\in f_2)\to y_1Ey_2))]\,.$$

- 同样，定理 2.1 的证明中断言对于 $\alpha,\ \alpha'\in I$ 且满足 $\alpha\le\alpha'$，$f_\alpha\subseteq f_{\alpha'}$ 的陈述 (6)，在 $(\mathcal{N},\ \mathcal{B})$ 中译为：$[(x,\ y)\in f_\alpha]\wedge[(x,\ z)\in f_\beta]\to yEz.$
- $\mathcal{N}_I$和 $\mathcal{M}^*_J$的定义与定理 2.1 的证明中的定义相同，且 $(\mathcal{N},\ \mathcal{B})$-可定义同构$F:\ \mathcal{N}_I\longrightarrow\mathcal{M}^*_J$ 由下述内容给出，其中 $\langle\langle a,\ b\rangle\rangle$ 是适用于此上下文的有序对。[13]

$$F:=\{\langle\langle a,b\rangle\rangle \mid \exists f\in\mathcal{F}\ \ (\mathcal{N},\mathcal{B})\models\langle\langle a,b\rangle\rangle\in f\}\,,$$

[13]这里，a 是（$\mathcal{N},\ \mathcal{B}$）中的一个集合，但允许 b属于 $\mathcal{B}$，因此我们不能使用库拉托夫斯基有序对构造 $\langle a,\ b\rangle$，而可以使用 $\langle\langle a,\ b\rangle\rangle:=\{\langle x,0\rangle:\ x\in a\}\cup\{\langle y,1\rangle:\ y\in b\}$.

其中：

$$\mathcal{F} := \left\{ f \in \mathcal{B} \mid (\mathcal{N}, \mathcal{B}) \models \exists \alpha \in I \; \exists \beta \in J \quad f : (V_\alpha, \in) \xrightarrow{\cong} (V_\alpha, \in)^{\mathcal{M}^*} \right\}.^{14}$$

- 在证明情形 1 不可能时，为了证明 $\mathcal{B}$ 中存在 f_α 的表示，假设 CC集合 在 $(\mathcal{N}, \mathcal{B})$ 中成立，所起的作用相当于替代公理在 $\mathcal{N}$ 中成立。

□

2.8. 注。 回顾 [E]，KM_n 是第 n 阶凯利–莫尔斯类理论；按此记法，KM 即 KM_1。仿照定理 2.7 的证明可知，$\mathrm{KM}_n + \mathrm{CC}_{n,\mathsf{set}}$ 是稳固的；其中 $\mathrm{CC}_{n,\mathsf{set}}$ 是 KM_n 中 $\mathrm{CC}_{\mathsf{set}}$ 的对应版本，由以下形式公式的全称闭包组成：

$$\left[\forall x \in s \; \exists^{n+1} X \; \varphi(x, X)\right] \to \left[\exists^{n+1} Y \; \forall x \in s \; \varphi(x, (Y)_x)\right],$$

其中 x 和 s 是一阶对象，X 和 Y 是 $(n+1)$ 阶对象，而 $\varphi(x, X)$ 是 KM_n 语言中的一个公式（省略了参数）。

参考文献

[AF] C. Antos 和 S.D. Friedman，《莫尔斯–凯利类理论中的超类强迫》，《符号逻辑杂志》，第 82 卷（2017年），第 549–575 页。[CM] J. Chen 和 T. Meadows，《剖析定义等价》，arXiv:2508.03956。[E] A. Enayat，《Visser 主题的变体》，载于《阿尔贝蒂纪念文集：致敬 Albert Visser》，J. van Eijk、R. Iemhoff 和 J. Joosten 编，College Publications，第 99–110 页，2016年；https://doi.org/10.48550/arXiv.1702.07093。[E-L-1] A. Enayat 和 M. Łełyk，《一阶领域中的类范畴性质》，《数学哲学杂志》，第 1 卷，第 63–98 页（2024年）；https://doi.org/10.36253/jpm-2934[E-L-2] A. Enayat 和 M. Łełyk，《〈一阶领域中的类范畴性质〉勘误与补遗》，即将发表。[FV] H. Friedman 和 A. Visser，《当双重可解释性蕴含同义性时》，《符号逻辑评论》第 18 卷，第 971–990 页（2025年）。[GHJ] V. Gitman、J.D. Hamkins 和 T. Johnstone，《类选择与凯利–莫尔斯集合论出人意料的弱性》，arXiv:2601.23165。[GHK] V. Gitman、J.D. Hamkins 和 A. Karagila，《凯利–莫尔斯集合论不能证明类福多尔原理》，Fund. Math. 第 254 卷（2021年），第 133–154 页。[H] W. Hodges，《模型论》，剑桥大学出版社，1993年。[L] A. Levy，《公理化集合论中的可定义性 II》，载于《数理逻辑与集合论基础》（1968年耶路撒冷国际研讨会论文集），North-Holland，阿姆斯特丹，1970年，第 129–145 页。[M] T. Meadows，《富有想象力的基础》，arXiv:2601.20057。[S] S. Simpson，《二阶算术的子系统》，施普林格，海德堡，1999年。[W] K. J. Williams，《二阶集合论模型的结构》，博士论文，2018年，arXiv:1804.09526。

[14] 在情形 3 和情形 4 中，当 $I =$ **序数类**$^{\mathcal{N}}$ 时，并不要求存在某个 $Z \in \mathcal{B}$ 来编码 F，因为我们只要求 F 是（$\mathcal{N}$，$\mathcal{B}$）-可定义的。不过，若（$\mathcal{N}$，$\mathcal{B}$）满足完全 CC，则这样的 Z 确实存在。