arXiv:2602.15148v1 [math.OA] 16 Feb 2026

C^*-序数图的对应

BENJAMIN JONES

摘要。我们引入一族 C^*-对应 X_α，它们与每个序数图 Λ自然相关。当 Λ 是有向图时， X_0 与通常和图相关联的 C^*-对应同构。我们证明，满足一个较弱假设的序数图具有如下性质： $\Lambda_{\alpha+1}$ 的 C^*-代数与 X_α的Cuntz-Pimsner代数同构。因此， Λ 的 C^*-代数可从 $c_0(\Lambda_0)$出发，通过迭代应用Cuntz-Pimsner构造和归纳极限来构造。我们将这一结果用于加强作者先前的Cuntz-Krieger唯一性定理。

1. 引言

自 [4, 3], 引入Cuntz-Krieger代数以来，对这些 C^*-代数及其推广的研究蓬勃发展，这在很大程度上归功于这些代数所具有的强有力的唯一性定理。由于Cuntz-Krieger代数由生成元和关系泛地确定，构造表示只需找到满足这些关系的算子示例。原则上，人们不会认为能轻易证明如此庞大的这类代数（由上述方式定义）的表示是忠实的；但正如Cuntz和Krieger在其开创性论文中所证明的，通常只需检查少数几个生成元中是否有非零像即可。

Cuntz-Krieger代数问世后不久，Fujii 和 Watatani 在 [6, 7]中指出，用于构造Cuntz-Krieger代数的 0，1 矩阵可以解释为有向图的边关联矩阵，而该图的结构可用于研究相应的代数。在此基础上，Kumjian、Pask 和 Raeburn 后来在 [14] 中定义了行有限有向图的 C^*-代数 $C^*(E)$。此后，大多数推广 Cuntz 和 Krieger 原始代数的研究，都将它们视为相关图的代数。

Cuntz-Pimsner 代数在 [17] 中引入，并在 [9], 中加以完善，为在更抽象的框架下理解图代数的唯一性定理提供了途径。在 [10], 中，Katsura 展示了如何为拓扑图赋予一个 C^*-代数：拓扑图是图的连续类比，其中边和顶点都是拓扑空间；他通过构造适当的 C^*-对应并计算Cuntz-Pimsner代数来实现这一点。推广图的概念一直是拓展图 C^*-代数理论的一种常用方法。另一个例子是，Kumjian 和 Pask 在[13] 中将 k-图的 C^*-代数定义为相关群胚的 C^*-代数。与有向图中路径的长度为自然数不同， k-图定义为其路径范畴中的路径均带有一个取值于 $\mathbb{N}^k$的次数（或长度）的范畴。类似的构造还允许路径范畴中的长度取值于某个范畴 [2, 5]，或者允许任意选取一个左消去范畴作为路径范畴 [21]。

在 [8], 中，作者开启了对序数图的 C^*-代数的研究；序数图是路径长度为序数的路径范畴。本文旨在改进此前工作中的许多

日期：2026年2月16日。2000 数学主题分类。
46L05。

结果，方法是为序数图构造新的 C^*-对应，作者认为这些对应本身也具有独立的研究价值。由于序数加法具有左消去性，序数图也自动具有左消去性，因此我们研究Spielberg在 [21, 20]中利用群胚定义的Cuntz-Krieger代数。

序数的结构对序数图代数的研究有一些有趣的影响。最重要的是，序数加法不满足右消去律，因此许多自然的序数图实例都不满足右消去律。这意味着诸如 [20, 定理 10.12、定理 10.13] 和 [2, 推论 5.7]这样的唯一性定理并不适用。在推论 5.10 中，我们改进了作者此前针对序数图代数提出的 Cuntz-Krieger 唯一性定理。该定理在序数图上的成立表明，其他定理中的右消去假设或许可以放宽。有趣的是，本文中的方法很大程度上得益于序数加法不满足右消去律这一点。对于 $\alpha < \beta$， $\omega^\alpha + \omega^\beta = \omega^\beta$ 这一事实使我们能够在定义 4.1 中构造一个 C^*-对应的层级 X_α，其中 $\alpha \in$取遍序数类 Ord；每个对应都推广了通常为有向图定义的对应。同时，我们的主要结果定理 5.3 的证明主要依赖定义 6.1 中一个较弱的右消去概念，而决定 Katsura 理想的路径满足这一概念。Deaconu、Kaliszewski、Paulovicks 和 Quigg 也正在一项进行中的工作中运用由一系列 C^*-对应构成的塔来研究 k-图代数。

在第2节中，我们确立约定，并给出一些预备定义和定理。随后，我们在第3节介绍序数图代数的一些基本定义和结果。第4节致力于定义 C^*-对应 X_α，并刻画左作用的像与紧算子之间的交集。第5节包含我们的主要结果定理 5.3，以及其在推论 5.10——Cuntz-Krieger唯一性定理——中的应用。定理 5.3 的证明省略了一些完成归纳步骤所需的关键引理，因此我们在第6节证明这些更具技术性的结果。

2. 预备知识

本文中，我们使用序数算术。关于序数，我们主要参考 [19]。我们用 Ord 表示序数类。序数有许多种定义方式，其中一种直观的方法是将每个序数视为一个良序集的序同构类。若 $[A]$ 和 $[B]$ 是分别由良序集 A 和 B 表示的序数，则序数和 $[A] + [B]$ 是序数 $[A \sqcup B]$，其中 $A \sqcup B$ 的序关系满足：对所有 $a \in A$ 和 $b \in B$，均有 $a < b$。乘积 $[A] \cdot [B]$ 通过对 $A \times B$ 赋予良序得到，满足若 $b_1 \leq b_2$，或若 $b_1 = b_2$、$a_1 \leq a_2$，则 $(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2)$。我们定义的最后一种运算是幂运算 $[A]^{[B]}$，我们将其定义为以下对象的序同构类

$$Z([A],[B]) = \left\{ f \in A^B : \{x \in B : f(x) \neq \min A\} \text{ is finite} \right\}$$

其中，对于 f， $g \in Z([A], [B])$， $f \leq g$ 若存在 $b_0 \in B$ 使得 $f(b_0) \leq g(b_0)$，并且对于所有 $b_1 > b_0$，$f(b_1) = g(b_1)$。

我们用 ω 表示 $[\mathbb{N}]$，即自然数的序同构类。我们将 $\mathbb{N}$ 与有限序数的集合 $[0, \omega)$ 视为相同。序数类中成立除法算法；特别地，它可用于将序数按 ω进制展开。特别地，每个序数都可以写成康托尔标准形：

定理2.1（康托尔标准形 [19, 第XIV章 19.2]）。每个 $\alpha \in$序数类都可以唯一地表示为

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot \gamma_1 + \omega^{\beta_2} \cdot \gamma_2 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot \gamma_n$$

对于 $n, \gamma_k \in [0, \omega)$ 以及满足 $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \cdots \geq \beta_n$ 的 $\beta_k \in$ 序数类 。

应用此定理以及 $\omega^\alpha + \omega^\beta = \omega^\beta$ 对 $\alpha < \beta$ 成立这一事实，可以计算以康托尔标准形表示的任意序数之和。例如，若 $\alpha = \omega^\omega \cdot 2 + \omega \cdot 3 + 2$ 且$\beta = \omega^\omega + \omega^3$，则

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= \omega^\omega \cdot 2 + \omega \cdot 3 + \omega^0 \cdot 2 + \omega^\omega + \omega^3 \\ &= \omega^\omega + \omega^\omega + \omega + \omega + \omega + \omega^0 + \omega^0 + \omega^\omega + \omega^3 \\ &= \omega^\omega + \omega^\omega + \omega^\omega + \omega^3 \\ &= \omega^\omega \cdot 3 + \omega^3\end{aligned}$$

由于我们广泛使用 C^*-对应，现给出相关定义。关于希尔伯特模的参考资料，我们推荐 [15]。

定义 2.2。 设 C^*-代数 A ，则一个 C^*-对应 是一个有序对 (X, φ)，其中 X 是右希尔伯特 A-模，而 $\varphi\colon A \to \mathcal{L}(X)$ 是映入 X的可伴算子代数中的 *-同态。我们将向量 $\varphi(a)\ x$记作 $a \cdot x$ ，从而使 X成为左 A模。*Katsura* 理想 是 A 的闭双边理想 J_X ，定义如下:

$$J_X = (\ker \varphi)^\perp \cap \varphi^{-1}(\mathcal{K}(X))$$

对于 C^*-对应，我们通常写作 X ，而不是完整数据 (X, φ)。

定义 2.3。 若 X 是 A 上的 C^*-对应，则到 C^*-代数 B 中的一个表示是满足以下条件的一对 (ψ, π):
$\psi\colon X \to B$ 是线性的， $\pi\colon A \to B$ 是 *-同态，并且
(1) $\psi(x)\pi(a) = \psi(x \cdot a)$ (2) $\pi(a)\psi(x) = \psi(\varphi(a)\ x)$ (3) ${}^*\psi(y) = \pi(\langle x, y\rangle_A)$

我们将 $(\psi, \pi) : (X, A) \to B$ 记作，以表示 (ψ, π) 是从 X 到 B 的一个表示。

定义 2.4。 对于表示 $(\psi, \pi) : (X, A) \to B$，我们将由 $(\psi, \pi)^{(1)}$ 表示的 *-同态 $(\psi, \pi)^{(1)}\colon \mathcal{K}(X) \to B$ 记作，该同态由下式唯一确定:

$$(\psi, \pi)^{(1)}(\theta_{x,y}) = \psi(x)\psi(y)^*$$

定义 2.5. 表示 $(\psi, \pi) : (X, A) \to B$ 是协变的，如果对所有 $a \in J_X$，$(\psi, \pi)^{(1)}(\varphi(a)) = \pi(a)$。

定义 2.6 ([11, 定义 3.5])。 C^*-对应的*Cuntz-Pimsner*代数 $\mathcal{O}(X)$是一个 C^*-代数，对于 X的协变表示而言它是泛的。特别地，存在一个协变表示 $(\psi_u, \pi_u) : (X, A) \to \mathcal{O}(X)$，使得对于所有协变表示 $(\psi, \pi) : (X, A) \to B$，都存在唯一的 *-同态 $\psi \times \pi\colon \mathcal{O}(X) \to B$，满足 $\psi = \psi \times \pi \circ \psi_u$ 和 $\pi = \psi \times \pi \circ \pi_u$。

注2.7。 可以验证，若 (ψ, π) 是 X 与 $z \in \mathbb{T}$的协变表示，则 (ψ_z, π) 也是 X 的一个表示，其中 $\psi_z(x) = z\psi(x)$。因此存在一个作用 $\gamma\colon \mathbb{T} \to$ 自同构群 $(\mathcal{O}(X))$，其定义为 $\gamma_z(\pi_u(a)) = \pi_u(a)$ 且 $\gamma_z(\psi_u(x)) = z\psi_u(x)$，称为规范作用。

在本文余下部分，所有同态均为 *-同态，所有理想均为闭的双边理想。最后，在第4节中我们会简要用到乘子代数。值得一提的是，也可以借助希尔伯特模的相关理论来定义乘子代数（见 [15, 第2]章）。

3. 序数图

在下述定义中，我们将一个范畴视为其态射的集合。于是 $s, r : \Lambda \to \Lambda$ 映入恒等态射的集合，而恒等态射可视为该范畴中的对象。小范畴是指态射足够小、从而构成一个集合的范畴。

定义 3.1。一个序数图 是一个对 (Λ, d)，其中 Λ 是一个小范畴，且 $d : \Lambda \to$ 序数类是一个取值于序数的函子，并具有以下分解性质：

对于每个 $e \in \Lambda$ 和 $\alpha \in$ 序数类，若 $\alpha \leq d(e)$，则存在唯一的 $f, g \in \Lambda$ 使得$d(f) = \alpha$ 且 $e = fg$。

若 $e = fg$ 且 $d(f) = \alpha$，我们将 f 记作 $e(\alpha)$，将 g 记作 $e(\alpha)^{-1} e$。那么根据定义，我们有$e(\alpha)\, e(\alpha)^{-1} e = e$ 且 $d(e(\alpha)) = \alpha$。对于每个 $\alpha \in$ 序数类，定义

$$\Lambda^\alpha = \{f \in \Lambda : d(f) = \alpha\}$$
$$\Lambda_\alpha = \{f \in \Lambda : d(f) < \omega^\alpha\}$$
$$\Lambda^{\omega^*} = \{f \in \Lambda : d(f) = \omega^\alpha \text{ for some } \alpha \in \mathrm{Ord}\}$$

注意，若 $\alpha, \beta < \omega^\gamma$，则序数算术的性质蕴含 $\alpha + \beta < \omega^\gamma$。因此，若$f, g \in \Lambda_\alpha$ 且 $s(f) = r(g)$，则 $fg \in \Lambda_\alpha$。这使得 Λ_α成为一个序数图。另一方面，Λ^α 不是序数图，除非 $\alpha = 0$；在这种情况下，$\Lambda^0 = \Lambda_0$ 就是顶点集合。顶点集合也是映射 s, r的值域。一方面，观察到对于每个 $e \in \Lambda$，$s(e)\, s(e) = s(e)$ 且 $r(e) r(e) = r(e)$，即可得出这一点。因此 $d(s(e)) + d(s(e)) = d(s(e)) = 0$，对于 $r(e)$ 也同理。同样，若 $d(e) = 0$，则由于 $r(e)\, e = es(e)$，唯一分解蕴含$e = r(e) = s(r(e))$。

根据分解性质，每个序数图都是左消去范畴：如果 $ef = eg$ 是同一路径的两个分解，那么 $f = g$。于是，根据 [21, 定理 10，15]，C^*-代数 $\mathcal{O}(\Lambda)$ 有一个由生成元和关系给出的自然表示。$\mathcal{O}(\Lambda)$ 由元素 $\{T_e$ 生成：$e \in \Lambda\}$；特别地，$T_e T_f = T_{ef}$ 若 e 和 f 在 Λ 中可复合。由于每个序数都是 ω 的幂之和，对于满足 $d(e) \neq 0$ 的每个生成元 T_e，它都是若干生成元 T_{e_n} 的乘积，其中每个 e_n 的长度都是 ω 的幂。因此，$\mathcal{O}(\Lambda)$ 由 $\{T_e$ 生成：$e \in \Lambda^{\omega^\alpha}$，其中某个 $\alpha \in \mathrm{Ord}\} \cup \{T_v : v \in \Lambda_0\}$；这些生成元之间的关系由以下结果确定，这一结果对我们很有用。

定理 3.2 ([8, 命题 4.20])。$\mathcal{O}(\Lambda)$ 是满足下述关系的偏等距算子的泛对象

$$\bigcup_{\alpha \in \mathrm{Ord}} \left\{T_e : e \in \Lambda^{\omega^\alpha}\right\} \cup \{T_v : v \in \Lambda_0\}$$

它满足以下关系：

(1) $T_e^* T_e = T_{s(e)}$*(2)* $T_e T_f = T_{ef}$若 $s(e) = r(f)$ 且 $d(e) < d(f)$*(3)* $T_e^* T_f = 0$ 若 $e\Lambda \cap f\Lambda = \emptyset$

(4) $T_v = \sum_{e \in \Lambda^{\omega^\alpha}} T_e T_e^*$若 $v \in \Lambda_0$ 是 α-正则

我们将满足关系 (1) 至 (4) 的、关于 $\alpha \in$ 序数类$\} \cup \{S_v$ 的算子族 $\{S_e : e \in \Lambda^{\omega^\alpha}\ v \in \Lambda_0\}$ 称为 Λ 的 *Cuntz-Krieger* 族。关系 (2) 定义良好，因为如果 $d(e) = \omega^\alpha < \omega^\beta = d(f)$，则 $d(ef) = \omega^\alpha + \omega^\beta = \omega^\beta$。现在我们继续定义 α-正则顶点；特别需要注意的是，根据定义，关系 (4) 中的和非空且有限。

定义 3.3 ([8, 定义 4.1])。 对于 α ∈序数类，若顶点 $v \in \Lambda_0$ 对每个$e \in v\Lambda_\alpha$ 都存在 $f \in s(e)\,\Lambda^{\omega^\alpha}$，则称其为 α-源正则 。

特别地，如果 Λ 是一个有向图（这等价于 $d(\Lambda) \subseteq [0,\omega)$ ，那么如果 v 不是源， v 就是 0-源正则的。所谓源，是指满足以下条件的顶点 v：若 $r(f) = v$，则 $d(f) = 0$。

定义 3.4 ([8, 定义 4.3])。如果顶点 $v \in \Lambda_0$ 满足 $\left|\left\{f \in v\Lambda^{\omega^\alpha}\right\}\right| < \infty$，则称其对 $\alpha \in$ 序数类是 α-行有限的。若 v 是 α-源正则且 α-行有限的，则称 v 为 α-正则的。

事实上，顶点 $v \in \Lambda_0$ 的 α-正则性是一个相当强的条件，下面的引理将说明这一点。

引理 3.5。 如果 $v \in \Lambda_0$ 是 α-正则的，那么

(1) s（f）对每个 $f \in v\Lambda_\alpha$ 都是 α-正则

的 *(2)* v 对所有 $\beta < \alpha$ 都是 β-正则的

证明。设给定 α-正则的 $v \in \Lambda_0$ 和 $f \in v\Lambda_\alpha$。若 $g \in s(f)\,\Lambda_\alpha$，则 $d(fg) = d(f) + d(g) < \omega^\alpha$，因此由 v 的 α-源正则性可知， $s(fg)\,\Lambda^{\omega^\alpha} = s(g)\,\Lambda^{\omega^\alpha} \neq \emptyset$，且 $s(f)$ 是 α-源正则的。此外，若 $h \in s(f)\,\Lambda^{\omega^\alpha}$，则 $d(fh) = d(f) + \omega^\alpha = \omega^\alpha$，所以 $fh \in v\Lambda^{\omega^\alpha}$。由左消去可知，函数 $h \mapsto fh$ 是单射；又因 $v\Lambda^{\omega^\alpha}$ 有限， $s(f)\,\Lambda^{\omega^\alpha}$ 有限。因此 $s(f)$ 是 α-正则的。

现在我们将证明，当 $\beta < \alpha$ 时， v 是 β-正则的。如果 $g \in v\Lambda_\beta \subseteq v\Lambda_\alpha$，则存在 $h \in s(g)\,\Lambda^{\omega^\alpha}$，且 $h\left(\omega^\beta\right) \in s(g)\,\Lambda^{\omega^\beta}$。因此， v 是 β- 源正则的。此外，如果 $h \in v\Lambda^{\omega^\beta}$，则存在 $p_h \in s(h)\,\Lambda^{\omega^\alpha}$，且 $hp_h \in v\Lambda^{\omega^\alpha}$。根据定义 3.1 中的分解性质，从 $v\Lambda^{\omega^\beta}$ 到 $v\Lambda^{\omega^\alpha}$ 的映射 $h \mapsto hp_h$ 是单射，因此 $v\Lambda^\beta$ 是有限的。□

以下事实有助于利用关系 (3) 进行计算。

命题 3.6 ([8, 引理 3.17])。 对于一个序数图 Λ， $e\Lambda \cap f\Lambda \neq \emptyset$ 当且仅当 $e \in f\Lambda$ 或 $f \in e\Lambda$。

命题 3.7 ([8,推论 3.21])。 若 Λ 是一个序数图，则

$$\mathcal{O}(\Lambda) = \overline{\operatorname{span}}\left\{T_e T_f^* : e, f \in \Lambda\right\}$$

在本文中，我们将确定代数 $\mathcal{O}(\Lambda_\alpha)$之间的关系。尽管它们具有相似的生成元和关系，但我们很快就会看到，这些代数不一定彼此包含；尽管如此，无论 α的值如何，我们都用 $\{T_e : e \in \Lambda_\alpha\}$ 表示 $\mathcal{O}(\Lambda_\alpha)$的生成元。为避免混淆哪个代数 T_e 所属，我们会为所有涉及的映射明确指定定义域和陪域。

不过，当$\alpha \leq \beta$时，这些代数之间确实存在连接映射 ρ_α^β： $\mathcal{O}(\Lambda_\alpha) \to \mathcal{O}(\Lambda_\beta)$。要证明这一点，只需验证 Λ_α 中的关系 (1)-(4) 的每一种情况在 Λ_β中仍然成立。容易检查，关系 (1)、(2) 和 (4) 都成立，但验证关系 (3) 时有一个细微之处。设 e， $f \in \Lambda_\alpha$ 且 $e\Lambda_\alpha \cap f\Lambda_\alpha = \emptyset$。我们必须验证 $e\Lambda_\beta \cap f\Lambda_\beta = \emptyset$。根据命题 3.6，假设为反证，存在某个$g \in \Lambda$使得 $e = fg$。那么 $d(e) = d(f) + d(g)$，因此 $d(g) = -d(f) + d(e) < \omega^\alpha$，且 $g \in \Lambda_\alpha$。这与我们的假设矛盾； $f \in e\Lambda$ 的情形类似。我们总结这些观察，并在下一个结果中证明更多结论。

命题 3.8. 对于每个 $\alpha \leq \beta$，存在一个 *-同态 ρ_α^β： $\mathcal{O}(\Lambda_\alpha) \to \mathcal{O}(\Lambda_\beta)$ 使得$\rho_\alpha^\beta(T_e) = T_e$。此外，对于每个极限序数 $\beta > 0$，有如下结论：

$$\mathcal{O}(\Lambda_\beta) \cong \varinjlim \left(\mathcal{O}(\Lambda_\alpha), \rho_\alpha^\gamma\right)_{\alpha < \gamma < \beta}$$

证明。 ρ_α^β 的存在性由上述讨论可知，因此我们验证该同构。设β 为一个极限序数，也就是说，它不是形如 $\gamma+1$ 的序数。设 $\mathcal{A}$ 是一个 C^*-代数，且对每个 $\gamma<\beta$，都有 *-同态 ϵ_γ： $\mathcal{O}(\Lambda_\gamma)\to\mathcal{A}$ 。假设对每个 $\alpha<\gamma<\beta$，都有$\rho_\alpha^\gamma\circ\epsilon_\gamma=\epsilon_\alpha$。定义

$$S=\bigcup_{\gamma<\beta}\left\{\epsilon_\gamma\left(T_e\right):e\in\Lambda^{\omega^\alpha}\cup\Lambda_0 \text{ for some } \alpha\in\mathrm{Ord}\right\}$$

我们断言， S 是 Λ_β的 Cuntz-Krieger 族。令 S_e 表示$\epsilon_\gamma(T_e)$。定理 3.2 中的任一关系都只涉及有限个生成元，设 $\{S_{e_1},S_{e_2},\dots S_{e_n}\}$ 对应于 $e_n\in\Lambda_{\gamma_n}$，且 $\gamma_n<\beta$。于是$\gamma=\max\{\gamma_1,\dots\gamma_n\}<\beta$，并且该关系在 $\mathcal{O}(\Lambda_\gamma)$中对生成元 $\{T_{e_1},T_{e_2},\dots T_{e_n}\}$成立。由于$\epsilon_\gamma$是同态且 $\epsilon_{\gamma_k}=\rho_{\gamma_k}^\gamma\circ\epsilon_\gamma$，该关系对 $\{S_{e_1},\dots S_{e_n}\}$ 在 $\mathcal{A}$中也成立。因此存在一个 *-同态 ϵ： $\mathcal{O}(\Lambda_\beta)\to\mathcal{A}$，使得 $\epsilon(T_e)=S_e$。这尤其意味着$\rho_\gamma^\beta\circ\epsilon=\epsilon_\gamma$。若 $e\in\Lambda_\beta$，则 $d(e)<\omega^\beta$，特别地，对某个 $\gamma<\beta$有 $d(e)<\omega^\gamma<\omega^\beta$。于是 $\mathcal{O}(\Lambda_\beta)$是 $\cup_{\gamma<\beta}\rho_\gamma^\beta(\mathcal{O}(\Lambda_\gamma))$的闭包，因此由连续性可知， ϵ 是唯一满足对每个 $\gamma<\beta$均有 $\rho_\gamma^\beta\circ\epsilon=\epsilon_\gamma$ 的 *-同态。由于 $\mathcal{O}(\Lambda_\beta)$满足归纳极限的泛性质， $\mathcal{O}(\Lambda_\beta)$与该归纳极限同构。□

现在，我们给出序数图的边界路径的具体定义；事后看来，这一定义与 [21, 定义 10.2]一致。边界路径的定义必须足够宽泛，才能让我们构造出丰富的表示；若将范围限制为极大路径，我们就无法在引理 6.10 的证明中运用我们的策略。有向图的边界路径的原始定义被认为源自约定俗成；若想了解这些定义如何用于有向图，可参见例如 [18, 定义 3.3]。特别地，有向图的边界路径只允许终止于非正则顶点。在下述定义中，若边界路径遇到一个 α-正则顶点，则要求它至少再延长 ω^α。因此，若边界路径遇到一个 0-正则顶点，则要求它至少再多延长一条边；当 Λ 是有向图时，这一定义也与通常情况一致。

定义 3.9 （参见 [21, 定义 10.2]）。 若 Λ 是一个序数图，定义

$$\Lambda^*=\left\{f\in\prod_{\beta<\alpha}\Lambda^\beta:\alpha\in\mathrm{Ord},\alpha>0,\text{ and }f(\beta)\in f(\gamma)\Lambda\text{ for all }\gamma\le\beta\right\}$$

F对每个 $f\in\Lambda^*\cap\prod_{\beta<\alpha}\Lambda^\beta$，定义 $L(f)=\alpha$。此外，将边界路径的集合定义为

$$\partial\Lambda=\{f\in\Lambda^*:\text{for all }\gamma<L(f),\text{ if }s(f(\gamma))\text{ is }\alpha\text{-regular, then }L(f)>\gamma+\omega^\alpha\}$$

如果 Λ 是有向图，那么 Λ^* 可以看作所有有限和无限“路径”的集合。然而，序数图通常本身就包含无限长的路径（$e\in\Lambda$，其中 $d(e)\ge\omega$）。在此背景下，将 Λ^* 看作所有可能有源顶点、也可能没有源顶点的“路径”的集合会更有帮助。这样，我们便可以通过将 $f\in\Lambda$ 映射到由 $g(\beta)=f(\beta)$ 定义的 $g\in\Lambda^*$，自然地将 Λ 识别为 Λ^* 的子集，其中对所有 $\beta<L(g)=d(g)+1$ 均成立。由于当将 $f\in\Lambda$ 视为 Λ^*的一个成员时， $f(\beta)$ 的记号保持一致，因此我们不区分 Λ 的成员与其在 Λ^*中的像。

我们可以将 Λ^*中成员 f的值域定义为 $f(0)$。于是，若 $s(e)=r(f)$且 $e\in\Lambda$，我们定义 $ef\in\Lambda^*$，使得对 $\beta\ge d(e)$有 $L(ef)=d(e)+L(f)$以及$(ef)(\beta)=ef(-d(e)+\beta)$。由于对 $\gamma<\beta$有$(ef)(\gamma)=(ef)(\beta)(\gamma)$，这唯一地确定了 $ef\in\Lambda^*$。同样，若 $f\in\Lambda^*$，并且对某个满足 $d(e)<L(f)$的 $e\in\Lambda$有 $f(d(e))=e$，则我们如下定义 $e^{-1}f\in\Lambda^*$

$L\left(e^{-1}f\right) = -d(e) + L(f)$以及 $\left(e^{-1}f\right)(\beta) = e^{-1}f(d(e) + \beta)$。 Λ^*中成员的这一记法与 Λ中路径所用的记法相容。例如，由此可知，若 $e, f \in \Lambda$满足 $d(f) \geq d(e)$且 $g \in \Lambda^*$，则 $e^{-1}(fg) = \left(e^{-1}f\right)g$。

Λ^*也具有自然的偏序，其中 $f \leq g$若 $L(f) \leq L(g)$，且对每个$\beta < L(f)$， $f(\beta) = g(\beta)$。正如我们将在下一个结果中看到的，这个偏序为我们提供了一种构造边界路径的方法。

引理 3.10. 若 $f \in \Lambda^*$ 是极大的，则 $f \in \partial\Lambda$。此外，对每个 $v \in \Lambda_0$ ，存在一个在 Λ^*中极大的 $f \in v\partial\Lambda$ 。

证明。假设 $f \in \Lambda^*$是极大的， $\beta < L(f)$， $w = s(f(\beta))$ 是 α-正则的，且 $L(f) \leq \beta + \omega^\alpha$。定义函数 $h\colon [0, -\beta + L(f)) \to \mathbb{N}$，使得 $h(\epsilon) = \left|f(\beta + \epsilon)\,\Lambda^{\omega^\alpha}\right|$。那么 h是递减的，因为若 $p\Lambda^{\omega^\alpha} \subseteq q\Lambda^{\omega^\alpha}$ ，则 p、 $q \in \Lambda_\alpha$ 且 $p \in q\Lambda$。因此，对于输入 $\epsilon \geq \eta$， h 最终为常值。于是 $\eta < -\beta + L(f) \leq \omega^\alpha$，且 $f(\beta)^{-1} f(\beta + \eta) \in w\Lambda_\alpha$。因此，由 w 的 α- 源正则性可知，$f(\beta + \eta)\,\Lambda^{\omega^\alpha}$ 非空，且 $h(\eta) \geq 1$。任意选取 $g \in f(\beta + \eta)\,\Lambda^{\omega^\alpha}$，并注意到$f \leq g$，因为对于 $\epsilon \geq \eta$， $h(\epsilon)$ 为常值。然而， $L(g) = d(g) + 1 = \beta + \eta + \omega^\alpha + 1 = \beta + \omega^\alpha + 1 > L(f)$，这与 f的极大性矛盾。因此，若 $s(f(\beta))$ 是 α-正则的，则 $L(f) > \beta + \omega^\alpha$，且 $f \in \partial\Lambda$。

现在，给定 $v \in \Lambda_0$，我们可以利用佐恩引理从 $v\Lambda^*$ 中选取一个极大元，从而构造出 $v\partial\Lambda$ 的一个元素。若 $C \subseteq v\Lambda^*$ 是一条链，则令 $\alpha = \sup_{f \in C} L(f)$。定义 $g \in \Lambda^*$，使得对于任意满足 $L(f) > \epsilon$ 的 $f \in C$，都有 $L(g) = \alpha$，且 $g(\epsilon) = f(\epsilon)$。由于 C 是全序的， g 定义良好，并且我们构造了 g ，使其成为 C 的上界。因此，存在一个极大元 $f \in v\Lambda^*$；由上述论证可知，它也属于 $\partial\Lambda$。□

Le引理 3.11. 若 $e \in \Lambda$ 和 $f \in \Lambda^*$ 满足 $r(f) = s(e)$，则 $ef \in \partial\Lambda$ 当且仅当 $f \in \partial\Lambda$。

证明。由于每个序数都是 ω 的幂的有限和，每条路径 $e \in \Lambda$ 要么是一个顶点，要么是若干条长度为 ω 的幂的路径的复合。因此，只需考虑这样的情形：对于某个 $\beta \in \in$序数类，有 $d(e) = \omega^\beta$ 。我们先证明正向蕴含。令$\gamma < L(ef) = d(e) + L(f)$，使得 $v = s((ef)(\gamma))$ 是 α-正则的。我们希望证明 $L(ef) > \gamma + \omega^\alpha$。

我们将分情况验证。首先，假设 $\gamma \geq d(e)$。于是 $(ef)(\gamma) = f(-d(e) + \gamma)$，因此 $s(f(-d(e) + \gamma))$ 是 α-正则的。由于 $f \in \partial\Lambda$，这意味着 $L(f) > -d(e) + \gamma + \omega^\alpha$；在两边加上 $d(e)$ 后，可得 $L(ef) > \gamma + \omega^\alpha$。接下来，考虑 $\gamma < d(e)$ 且 $\beta \geq \alpha$ 的情形。于是 $L(ef) \geq d(e) + 1 = \omega^\beta + 1 = \gamma + \omega^\beta + 1 > \gamma + \omega^\alpha$。最后，若 $\gamma < d(e)$ 且 $\beta < \alpha$，则 $(ef)(\gamma) = e(\gamma)$，并且 $v = s(e(\gamma))$ 是 α-正则的。由于 $e \in \Lambda_\alpha$，引理 3.5 推出 $s\left(e(\gamma)^{-1} e\right) = s(e) = r(f)$ 是 α-正则的，而 $f \in \partial\Lambda$ 推出 $L(ef) \geq L(f) > \omega^\alpha = \gamma + \omega^\alpha$。

对于另一个方向，我们假设 $ef \in \partial\Lambda$ 与 $\gamma < L(f)$，且 $s(f(\gamma))$为 α-正则。于是$s(f(\gamma)) = s((ef)(d(e) + \gamma))$，因此 $L(ef) = d(e) + L(f) > d(e) + \gamma + \omega^\alpha$，再从两边减去 $d(e)$，得 $L(f) > \gamma + \omega^\alpha$。□

命题 3.12. 对于每个序数图 Λ，都存在一个表示 $\tau\colon \mathcal{O}(\Lambda) \to B\left(\ell^2(\partial\Lambda)\right)$，其定义如下

$$\tau(T_e)\,\xi_f = \begin{cases} \xi_{ef} & s(e) = r(f) \\ 0 & s(e) \neq r(f) \end{cases}$$

证明。我们验证算子 $\{\tau(T_e)\colon e\in\Lambda\}$ 满足定理 3.2 中的关系；根据泛性质，这已足够。首先注意，伴随定义为

$$\tau(T_e)^*\xi_f=\begin{cases}\xi_{e^{-1}f} & f\in e\partial\Lambda\\ 0 & f\notin e\partial\Lambda\end{cases}$$

关系 (1) 成立，因为对于所有 $f\in s(e)\ \partial\Lambda$，$e^{-1}ef=f$。类似地，对于 $e\in r(f)\ \Lambda$、$f\in r(g)\ \Lambda$ 以及 $g\in\partial\Lambda$，$(ef)\ g=e(fg)$，因此关系 (2) 成立。对于关系 (3)，注意若 $e\notin f\Lambda$ 且 $d(e)\leq d(f)$，则对于 $g\in s(f)\ \partial\Lambda$，$fg\notin e\partial\Lambda$；否则，$(fg)(d(e))=f(d(e))=e$。最后，关系 (4) 根据 $\partial\Lambda$ 的定义成立。若 $v\in\Lambda_0$ 是 α-正则且 $f\in v\partial\Lambda$，则 $L(f)>\omega^\alpha$。因此，$f=f(\omega^\alpha)\ f(\omega^\alpha)^{-1}f$，且 $\tau\left(T_{f(\omega^\alpha)}\right)\tau\left(T_{f(\omega^\alpha)}\right)^*\xi_f=\xi_f$。□

接下来，我们证明一些涉及 Λ 中路径分解的恒等式。

引理 3.13。若 $e,f\in\Lambda$，则

(1) $(ef)(\alpha)=e(\alpha)$ *if* $\alpha\leq d(e)$.
(2) $(ef)(\alpha)=ef(-d(e)+\alpha)$ *if* $\alpha\geq d(e)$.

证明。设给定 $e,f\in\Lambda$，并假设 $\alpha\leq d(e)$。则有

$$e(\alpha)\,e(\alpha)^{-1}ef=ef$$

其中 $d(e(\alpha))=\alpha$。根据定义 3.1，这意味着 $(ef)(\alpha)=e(\alpha)$。现在假设 $\alpha\geq d(e)$，此时

$$ef(-d(e)+\alpha)\,f(-d(e)+\alpha)^{-1}f=ef$$

and

$$d(ef(-d(e)+\alpha))=d(e)+d(f(-d(e)+\alpha))=d(e)-d(e)+\alpha=\alpha$$

因此 $(ef)(\alpha)=ef(-d(e)+\alpha)$。□

本节最后，我们指出存在某些作用，它们推广了图代数的规范作用。

引理 3.14. 对于 $\alpha\in$ 序数类，存在一个作用 $\Gamma_\alpha\colon\mathbb{T}\to$ 自同构群 $(\mathcal{O}(\Lambda_{\alpha+1}))$ 使得

$$\Gamma_{\alpha,z}(T_e)=\begin{cases}zT_e & d(e)=\omega^\alpha\\ T_e & d(e)<\omega^\alpha\end{cases}$$

此外，对于每个 $a\in\mathcal{O}(\Lambda_{\alpha+1})$，$z\mapsto\Gamma_{\alpha,z}(a)$ 都是连续的。

证明. 令 $\left\{T_e\colon e\in\Lambda^{\omega^\beta},\beta<\alpha+1\right\}\cup\{T_v\colon v\in\Lambda_0\}$ 为定理 3.2 中 $\mathcal{O}(\Lambda_{\alpha+1})$ 的生成元。令 $z\in\mathbb{T}$，并对 $e\in\Lambda^{\omega^\alpha}$，定义 $S_e=zT_e$。同样，若 $\beta<\alpha$ 且 $e\in\Lambda^{\omega^\beta}\cup\Lambda_0$，则定义$S_e=T_e$。我们断言 $\left\{S_e\colon e\in\Lambda^{\omega^\beta},\beta<\alpha+1\right\}\cup\{S_v\colon v\in\Lambda_0\}$ 是 $\Lambda_{\alpha+1}$ 的 Cuntz-Krieger 族。关系 (1)、(3) 和 (4) 显然成立。关系 (2) 成立，这是因为如果对于某个$e\in\Lambda^{\omega^\beta}$，$d(e)<d(f)$，且 $d(f)$ 是 ω 的幂，那么 $\beta<\alpha$ 当且仅当 $ef\in\Lambda^{\omega^\alpha}$，也当且仅当 $f\in\Lambda^{\omega^\alpha}$。由泛性质可得自同构 $\Gamma_{\alpha,z}$，它们满足所需条件。

要证明 $z\mapsto\Gamma_{\alpha,z}(a)$ 是连续的，只需证明对于由 $\left\{T_e\colon e\in\Lambda^{\omega^*}\right\}\cup\{T_v\colon v\in\Lambda_0\}$ 生成的 $b$in the $*$-子代数中的每个 b，$z\mapsto\Gamma_{\alpha,z}(b)$ 都是连续的，并应用标准的 $\varepsilon/3$ 论证。由于当 b 是这些生成元之一时，此映射是连续的，而且 $\Gamma_{\alpha,z}$ 是一个自同构，因此每个这样的 $z\mapsto\Gamma_{\alpha,z}(b)$ 都是连续的。□

4. C^*-对应

在本文余下部分中，(Λ, d) 将是一个固定的序数图。对于每个 $\alpha \in$ 序数类，存在一个相应的 C^*-对应，我们将由以下希尔伯特模构造它。

定义 4.1。令 X_α 表示 $\mathcal{O}(\Lambda_\alpha)$ 上的希尔伯特模，它是以下模的完备化

$$X_\alpha^\circ = \left\{ f \in c_c\left(\Lambda^{\omega^\alpha}, \mathcal{O}\left(\Lambda_\alpha\right)\right) : T_{s(e)} f\left(e\right) = f\left(e\right) \text{ for all } e \in \Lambda^{\omega^\alpha} \right\}$$

其关于 $a \in \mathcal{O}\left(\Lambda_\alpha\right)$ 和 $x,\ y \in X_\alpha^\circ$ 的运算定义如下

$$\left(x \cdot a\right)\left(e\right) = x\left(e\right) a$$

$$\left\langle x, y \right\rangle = \sum_{e \in \Lambda^{\omega^\alpha}} x\left(e\right)^* y\left(e\right)$$

对于 $e \in \Lambda^{\omega^\alpha}$，定义 $\delta_e \in X_\alpha^\circ$ 如下

$$\delta_e\left(f\right) = \begin{cases} T_{s(e)} & e = f \\ 0 & e \neq f \end{cases}$$

若 $x \in X_\alpha^\circ$，则 $\left\langle x,\ x \right\rangle$ 是正元素之和，当且仅当 $x = 0$时该和为零。因此，$\left\langle \cdot,\ \cdot \right\rangle$ 是一个内积，而完备化确实是一个希尔伯特模。通过赋予 X_α 以下由 $\mathcal{O}(\Lambda_\alpha)$ 给出的左作用，我们可以构造一个 C^*-对应。

命题 4.2. 存在一个 *-同态 $\varphi_\alpha \colon \mathcal{O}\left(\Lambda_\alpha\right) \to \mathcal{L}(X_\alpha)$，使得对于 $e \in \Lambda^{\omega^\alpha}$、$g \in \Lambda_\alpha$ 和 $x \in X_\alpha^\circ$,

$$\left(\varphi_\alpha\left(T_g\right) x\right)\left(e\right) = \begin{cases} x\left(g^{-1} e\right) & e \in g\Lambda \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$\left(\varphi_\alpha\left(T_g^*\right) x\right)\left(e\right) = \begin{cases} x\left(ge\right) & s\left(g\right) = r\left(e\right) \\ 0 & s\left(g\right) \neq r\left(e\right) \end{cases}$$

证明。首先，注意到 $\left\langle \varphi_\alpha(T_g)\ x, \varphi_\alpha(T_g)\ x \right\rangle \leq \left\langle x, x \right\rangle$，因此 $\varphi_\alpha(T_g)$ 在 X_α° 上有界，并可延拓到 X_α。根据上述公式，我们还得到

$$\varphi_\alpha\left(T_g\right)\delta_e = \begin{cases} \delta_{ge} & s\left(g\right) = r\left(e\right) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\varphi_\alpha\left(T_g^*\right)\delta_e = \begin{cases} \delta_{g^{-1}e} & e \in g\Lambda \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

现在我们检验 $\varphi_\alpha(T_g)^* = \varphi_\alpha\left(T_g^*\right)$。由于 X_α° 是 $\mathcal{O}(\Lambda_\alpha)$-span $\left\{\delta_e \colon e \in \Lambda^{\omega^\alpha}\right\}$，只需检验对所有 $e, f \in \Lambda^{\omega^\alpha}$，有 $\left\langle \varphi_\alpha(T_g)\ \delta_e, \delta_f \right\rangle = \left\langle \delta_e, \varphi_\alpha\left(T_g^*\right)\delta_f \right\rangle$。若 $f = ge$，则确实有

$$\left\langle \varphi_\alpha\left(T_g\right)\delta_e, \delta_f \right\rangle = \left\langle \delta_e, \varphi_\alpha\left(T_g^*\right)\delta_f \right\rangle = T_{s(e)}$$

否则，两个内积都为零。因此，每个 $\varphi_\alpha(T_g)$ 都是可伴随的，接下来只需验证 $\{\varphi_\alpha(T_g) \colon g \in \Lambda_\alpha\}$ 是一个 Cuntz-Krieger Λ_α-族。为此，我们将验证定理 3.2 中的关系。对于关系 (1)，我们必须验证 $\varphi_\alpha\left(T_e\right)^* \varphi_\alpha\left(T_e\right) = \varphi_\alpha\left(T_{s(e)}\right)$。如果$g \in s(e)\ \Lambda^{\omega^\alpha}$，那么

$$\varphi_\alpha\left(T_e\right)^* \varphi_\alpha\left(T_e\right)\delta_g = \varphi_\alpha\left(T_e\right)^* \delta_{eg} = \delta_g = \varphi_\alpha\left(T_{s(e)}\right)\delta_g$$

a并且该关系成立。关系 (2) 由此可得，因为如果 $s(e) = r(f)$ 且 $g \in s(f)\ \Lambda^{\omega^\alpha}$ ，

$$\varphi_\alpha(T_e)\varphi_\alpha(T_f)\delta_g = \varphi_\alpha(T_e)\delta_{fg} = \delta_{efg} = \varphi_\alpha(T_{ef})\delta_g$$

现在我们验证关系 (3)。设 $e, f \in \Lambda_\alpha$ 满足 $e\Lambda_\alpha \cap f\Lambda_\alpha = 0$。必要时取伴随并应用命题 3.6 后，我们可以不失一般性地假设 $d(e) \leq d(f)$。此外，只有当存在 $g \in s(g)\ \Lambda^{\omega^\alpha}$ 和 $fg \in e\Lambda$时，$\varphi_\alpha(T_e)^*\varphi_\alpha(T_f)$ 才非零，此时

$$\varphi_\alpha(T_e)^*\varphi_\alpha(T_f)\delta_g = \delta_{e^{-1}fg}$$

由于 $d(e) \leq d(f)$，这意味着 $f \in e\Lambda_\alpha \cap f\Lambda_\alpha$，矛盾。因此 $\varphi_\alpha(T_e)^*\varphi_\alpha(T_f) = 0$，关系 (3) 得证。最后，我们证明关系 (4) 成立。设对于某个 $\beta < \alpha$， $v \in \Lambda_0$ 是 β-正则的。那么对于 $e \in \Lambda^{\omega^\beta}$ 和 $g \in e\Lambda^{\omega^\alpha}$，

$$\varphi_\alpha(T_e)\varphi_\alpha(T_e)^*\delta_g = \varphi_\alpha(T_e)\delta_{e^{-1}g} = \delta_g$$

如果 $g \notin e\Lambda^{\omega^\alpha}$，那么 $\varphi_\alpha(T_e)\ \varphi_\alpha(T_e)^*\delta_g = 0$。由于每个 $g \in \Lambda^{\omega^\alpha}$ 都属于 $g\left(\omega^\beta\right)\Lambda^{\omega^\alpha}$，我们有

$$\sum_{e \in v\Lambda^{\omega^\beta}} \varphi_\alpha(T_e)\varphi_\alpha(T_e)^* = \varphi_\alpha(T_v)$$

并且关系 (4) 得到满足。 □

例 4.3. 假设 $\Lambda = \Lambda_1$，即 Λ 是一个有向图。那么 X_0 是一个关于$\mathcal{O}(\Lambda_0)$的 C^*-对应。 Λ_0 是 Λ的顶点集合，因此 $\mathcal{O}(\Lambda_0)$ 是由每个顶点对应的两两正交投影族所生成的泛 C^*-代数。因此， $\mathcal{O}(\Lambda_0)$ 与 $c_0(\Lambda_0)$ 同构。此外， X_0° 由满足 $f(e) = T_{s(e)}f(e)$ 的函数 $f \in c_c\left(\Lambda^1, c_0(\Lambda_0)\right)$ 张成。因此， $f(e)$ 的支集包含于 $\{e\}$。定义一个 $c_0(\Lambda_0)$-对应 Y，使其为 $c_c\left(\Lambda^1\right)$的闭包，并对 $f, g \in c_c\left(\Lambda^1\right)$ 和 $h \in c_0(\Lambda_0)$ 定义如下运算

$$\begin{aligned}(h \cdot f)(e) &= h(r(e))f(e)\\ (f \cdot h)(e) &= f(e)h(s(e))\\ \langle f, g\rangle(v) &= \sum_{s(e)=v} \overline{f(e)}g(e)\end{aligned}$$

定义 $\psi : X_0 \to Y$如下

$$\psi(\delta_e)(f) = \begin{cases}1 & e = f\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

应用条件 $f(e) = T_{s(e)}f(e)$，不难看出， ψ 是 $c_0(\Lambda_0)$-对应的同构。特别地， X_0 与为有向图定义的通常的 C^*-对应同构，并且根据 [9, 命题 3.10]， $\mathcal{O}(X_0)$与图代数 $\mathcal{O}(\Lambda)$同构。

对应 X_α 的构造使得存在以下从 X_α到 $\mathcal{O}(\Lambda_{\alpha+1})$的表示。

命题 4.4. 存在映射 $\psi_\alpha :\ X_\alpha \to \mathcal{O}(\Lambda_{\alpha+1})$ 使得对于 $x \in X_\alpha^\circ$,

$$\psi_\alpha(x) = \sum_{e \in \Lambda^{\omega^\alpha}} T_e\rho_\alpha^{\alpha+1}(x(e))$$

此外， $\left(\psi_\alpha, \rho_\alpha^{\alpha+1}\right) : X_\alpha \to \mathcal{O}(\Lambda_{\alpha+1})$ 是对应 $(X_\alpha, \varphi_\alpha)$的表示 Mor .

证明。我们先根据上述公式在 X_α° 上定义 ψ_α。为了将 ψ_α 的定义域扩展到 X_α，我们证明 ψ_α 是连续的。若 $x,y\in X_\alpha^\circ$，则

$$\left\|\psi_\alpha(x)^*\psi_\alpha(y)\right\|=\left\|\sum_{e,f\in\Lambda^{\omega^\alpha}}\rho_\alpha^{\alpha+1}(x(e))^*T_e^*T_f\rho_\alpha^{\alpha+1}(y(f))\right\|=\left\|\sum_{e\in\Lambda^{\omega^\alpha}}\rho_\alpha(x(e))^*T_{s(e)}\rho_\alpha(y(e))\right\|$$
$$=\left\|\rho_\alpha^{\alpha+1}(\langle x,y\rangle)\right\|\le\|\langle x,y\rangle\|$$

特别地，$\|\psi_\alpha(x)\|\le\|x\|$，且 ψ_α 通过连续性延拓为映射 $\psi_\alpha\colon X_\alpha\to\mathcal{O}(\Lambda_{\alpha+1})$。现在我们证明 $\left(\psi_\alpha,\ \rho_\alpha^{\alpha+1}\right)$ 是一个表示。若 $x\in X_\alpha$ 且 $a\in\mathcal{O}(\Lambda_\alpha)$，则

$$\psi_\alpha(x)\rho_\alpha^{\alpha+1}(a)=\sum_{e\in\Lambda^{\omega^\alpha}}T_e\rho_\alpha^{\alpha+1}(x(e)a)=\psi_\alpha(x\cdot a)$$

$$\rho_\alpha^{\alpha+1}(T_e)\psi_\alpha(\delta_f)=\rho_\alpha^{\alpha+1}(T_e)T_f=\psi_\alpha(\varphi_\alpha(T_e)\delta_f)$$

因此，由线性性可知，ψ_α 尊重左作用。 □

这些对应的表示稍后将成为我们的有力工具。我们希望知道，何时 $\left(\psi_\alpha,\ \rho_\alpha^{\alpha+1}\right)$ 是 X_α的万有共变表示。特别是，这将意味着 $\mathcal{O}(\Lambda_{\alpha+1})$与Cuntz-Pimsner代数 $\mathcal{O}(X_\alpha)$同构。下面的例子表明，情况并非总是如此。

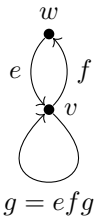


图 4.1. 由两个对象 v，w、两个态射 e，f以及一个满足 $g=efg$的态射 g 生成的范畴

例 4.5. 考虑图 4.1 所示的范畴 Λ；它由两个对象 v 和 w、两个态射 e 和 f，以及一个满足 $g=efg$ 的态射 g 生成。若定义 $d(v)=d(w)=0$、$d(e)=d(f)=1$，且 $d(g)=\omega$，则 Λ 是一个序数图。因此，长度为 ω 的路径只有 g 和 fg，所以 v 和 w 是 1-正则的。由于 g 是 $v\Lambda^\omega$ 的唯一元素，我们有 $T_gT_g^*=T_v$ 属于 $\mathcal{O}(\Lambda)$。因此

$$T_{ef}=T_{ef}T_gT_g^*=T_{efg}T_g^*=T_gT_g^*=T_v$$

另一方面，Λ_1 是一个有向图，它只有一个长度为 2 的圈 ef。设 S_e、S_f、S_v 和 S_w 是 $\mathcal{O}(\Lambda_1)$ 的生成元。则 $\mathcal{O}(\Lambda_1)\cong M_2(C(\mathbb{T}))$，并且存在一个规范作用 $\gamma\colon\mathbb{T}\to\mathrm{Aut}(\mathcal{O}(\Lambda_1))$，使得 $\gamma_z(S_e)=zS_e$、$\gamma_z(S_f)=zS_f$，且 $\gamma_z(S_v)=S_v$。直接在 $M_2(C(\mathbb{T}))$ 中计算即可验证 $S_eS_f\neq S_v$ 属于 $\mathcal{O}(\Lambda_1)$，但我们也可以利用规范作用看出这一点。若 $S_eS_f=S_v$，则对所有 $z\in\mathbb{T}$，都有 $\gamma_z(S_eS_f)=z^2S_eS_f=\gamma_z(S_v)=S_v$。特别地，$S_eS_f=-S_eS_f$，这将推出 $S_eS_f=0$。然而，序数图代数的生成元 T_h 永远不为零，因此这是不可能的。由此可知，$S_eS_f-S_v\in\ker\rho_1^2\setminus\{0\}$，特别是，$\rho_1^2$ 不是单射。因此，表示 $\left(\psi_1,\ \rho_1^2\right)$ 不是单射，故它不是万有共变表示。

注意，关系 $T_{ef} = T_v$ 推出 $T_e^* T_{ef} = T_f = T_e^*$，因此 $\mathcal{O}(\Lambda)$ 实际上由 T_f 和 T_g 生成。此外，关系 $T_e T_f T_g = T_g$ 可由 $T_e T_f = T_f^* T_f = T_v$ 推出，因此 $\mathcal{O}(\Lambda)$ 同构于图 4.2 中所示的 $C^*(F) \cong M_2(C(\mathbb{T}))$。我们有从 $\mathcal{O}(\Lambda_1)$ 和 $\mathcal{O}(\Lambda)$ 到 $M_2(C(\mathbb{T}))$ 的显式同构，其定义如下：

$$S_e \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix} \qquad S_f \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$T_e \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad T_f \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad T_g \mapsto \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中，z 表示 $C(\mathbb{T})$ 中的恒等函数。在这些同构下，$\rho_1 : \mathcal{O}(\Lambda_1) \to \mathcal{O}(\Lambda)$ 是映射

$$\begin{pmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} \\ f_{2,1} & f_{2,2} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_{1,1}(1)\,1_{\mathbb{T}} & f_{1,2}(1)\,1_{\mathbb{T}} \\ f_{2,1}(1)\,1_{\mathbb{T}} & f_{2,2}(1)\,1_{\mathbb{T}} \end{pmatrix}$$

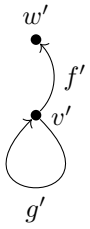


图 4.2. 一个有向图 F，其顶点为 v'、w'，边为 f'、g'

在前面的例子中，ρ_1 不是单射，因为存在路径 g；这是一条长度为 ω、值域为 1-正则值域的路径，且可分解为经过圈 ef。更一般地，经过非平凡环且终止于 $\alpha+1$-正则顶点的长度为 $\omega^{\alpha+1}$ 的路径，会妨碍 $\rho_{\alpha+1}$的单射性，正如我们将在下一个结果中所示。

命题 4.6. $\rho_{\alpha+1} : \mathcal{O}(\Lambda_{\alpha+1}) \to \mathcal{O}(\Lambda)$ 是单射的，当且仅当不存在路径 $f \in \Lambda^{\omega^{\alpha+1}}$ 使得 $r(f)$ 是 $\alpha+1$-正则的，且对于某个 $g \in \Lambda_{\alpha+1} \backslash \Lambda_\alpha$，$f = gf$。

证明。设 $f \in \Lambda^{\omega^{\alpha+1}}$ 和 $g \in \Lambda_{\alpha+1} \backslash \Lambda_\alpha$ 满足：$r(f)$ 是 $\alpha+1$-正则的，且 $f = gf$。于是特别地，g 是一个以 $\alpha+1$-正则顶点 $v = r(f)$ 为基点的圈。由于 v 是 $\alpha+1$-行有限的，对每个 $h \in v\Lambda^{\omega^{\alpha+1}}$，集合 $\{h, gh, g^2h, \dots\}$ 都是有限的。特别地，存在互不相同的 $m_h, k_h \in \mathbb{N}$，使得 $m_h > k_h$ 且 $g^{k_h} h = g^{m_h} h$。在左边消去后，我们得到对 $n_h = m_h - k_h$有 $g^{n_h} h = h$。由于 $v\Lambda^{\omega^{\alpha+1}}$ 是有限的，我们可以选取 $\left\{n_h \text{ 的一个公倍数 } n : h \in \Lambda^{\omega^{\alpha+1}}\right\}$。于是对每个$h \in \Lambda^{\omega^{\alpha+1}}$，都有 $g^n h = h$。由关系 (4)，这意味着

$$T_g^n = T_g^n T_v = T_g^n \sum_{h \in v\Lambda^{\omega^\alpha}} T_h T_h^* = \sum_{h \in v\Lambda^{\omega^\alpha}} T_h T_h^* = T_v$$

由于 $g \in \Lambda_{\alpha+1} \backslash \Lambda_\alpha$，根据康托尔标准形，存在某个 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $m > 0$ 且 $d(g) \in [\omega^\alpha \cdot m, \omega^\alpha \cdot (m+1))$。令 $\{S_e : e \in \Lambda_{\alpha+1}\}$ 为 $\mathcal{O}(\Lambda_{\alpha+1})$ 中的生成元。由引理 3.14，对于每个 $z \in \mathbb{T}$，存在自同构 $\Gamma_{\alpha,z} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{O}(\Lambda_{\alpha+1}))$，使得 $\Gamma_{\alpha,z}(S_g) = z^m S_g$ 且 $\Gamma_{\alpha,z}(S_v) = S_v$。注意，$S_g^n \neq S_v$ 属于 $\mathcal{O}(\Lambda_{\alpha+1})$；否则 $\Gamma_{\alpha,z}\left(S_g^n\right) = z^{nm} S_g = \Gamma_{\alpha,z}(S_v) = S_v$

对所有 $z \in \mathbb{T}$ 都成立。选取一个 $2nm$ 次单位根，这将推出 $S_g = -S_g$，或 $S_g = 0$，但事实并非如此。因此 $S_g^n - S_v \in$ 核 $\rho_{\alpha+1} \setminus \{0\}$，且 $\rho_{\alpha+1}$ 不是单射。□

本节余下部分，我们着重构造一种刻画映像中紧算子$\mathcal{K}(X_\alpha)$的方法，稍后会用到。我们希望在希尔伯特空间 H 上构造 $\mathcal{O}(\Lambda_\alpha)$的表示 σ，使得存在向量 ξ_e，对于 $e \in \Lambda^{\omega^\alpha}$ 和 $\sigma(T_e)\xi_f = \xi_{ef}$，若$f \in s(e)\ \Lambda^{\omega^\alpha}$，则.....。由于这类似于这样的事实：当 $f \in s(e)\Lambda^{\omega^\alpha}$时，$\varphi_\alpha(T_e)\ \delta_f = \delta_{ef}$，我们可能会预期，$\varphi_\alpha(a) \in \mathcal{K}(X_\alpha)$ 当且仅当 $\sigma(a) \in K(H)$。下文将对此作出精确定义，并证明确实如此。

命题 4.7。对于每个 $v \in \Lambda_0$，令$H_{\alpha,v} = \ell^2\left(\Lambda^{\omega^\alpha} v\right)$。存在一个忠实表示$\kappa_\alpha\colon \bigoplus_{v\in\Lambda_0}^{\ell^\infty} B(H_{\alpha,v}) \to \mathcal{L}(X_\alpha)$ 以及一个表示 $\sigma_\alpha\colon \mathcal{O}(\Lambda_\alpha) \to \bigoplus_{v\in\Lambda_0}^{\ell^\infty} B(H_{\alpha,v})$，使得

(1) 对每个 $f, g \in \Lambda^{\omega^\alpha} v$,

$$\kappa_\alpha\left(\theta_{\xi_f,\xi_g}\right) = \theta_{\delta_f,\delta_g}$$

其中 ξ_f, ξ_g是 $H_{\alpha,v}$和 θ_{ξ_f,ξ_g}的典范正交基向量，ξ_g是将 ξ_g映射到 ξ_f的秩一算子。特别地，$\kappa_\alpha(K(H_{\alpha,v})) \subseteq \mathcal{K}(X_\alpha)$。

(2) 交换图可交换:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(\Lambda_\alpha) & \xrightarrow{\ \sigma_\alpha\ } & \bigoplus_{v\in\Lambda_0}^{\ell^\infty} B(H_{\alpha,\ v}) \\ & {\scriptstyle\varphi_\alpha}\searrow & \downarrow{\scriptstyle\kappa_\alpha} \\ & & \mathcal{L}(X_\alpha) \end{array}$$

证明。首先我们构造 $\kappa_{\alpha,v}\colon K(H_{\alpha,v}) \to \mathcal{L}(X_\alpha)$，然后利用乘子扩张以构造$\kappa_\alpha$。回想一下，$K(H_{\alpha,v})$对于满足关系式的（秩一）算子 $\left\{\theta_{\xi_f,\xi_g}\colon f, g \in \Lambda^{\omega^\alpha} v\right\}$ 是泛的

$$\theta_{\xi_f,\xi_g}\theta_{\xi_h,\xi_k} = \begin{cases} \theta_{\xi_f,\xi_k} & g = h \\ 0 & g \neq h \end{cases}$$
$$\theta_{\xi_f,\xi_g}^* = \theta_{\xi_g,\xi_f}$$

因此，只需在 $\mathcal{L}(X_\alpha)$ 中找出这样一组算子。注意，对于 $f, g \in \Lambda^{\omega^\alpha} v$，算子$\theta_{\delta_f,\delta_g}$满足所需的关系式，因为我们可以计算:

$$\theta_{\delta_f,\delta_g}\theta_{\delta_h,\delta_k} x = \delta_f \langle \delta_g, \delta_h \langle \delta_k, x\rangle\rangle = \delta_f \langle \delta_g, \delta_h\rangle \langle \delta_k, x\rangle$$

若 $g = h$，则 $\langle \delta_g, \delta_h\rangle = T_v \in \mathcal{O}(\Lambda_\alpha)$，又因为 $\delta_f T_v = \delta_f$，我们得出$\theta_{\delta_f,\delta_g}\theta_{\delta_h,\delta_k} = \theta_{\delta_f,\delta_k}$。否则 $\langle \delta_g, \delta_h\rangle = 0$，且$\theta_{\delta_f,\delta_g}\theta_{\delta_h,\delta_k} = 0$。因此，我们构造了$\kappa_{\alpha,v}\colon K(H_{\alpha,v}) \to \mathcal{L}(X_\alpha)$，由于 $K(H_{\alpha,v})$的单纯性，它必然是单射，并满足$\kappa_{\alpha,v}\left(\theta_{\xi_f,\xi_g}\right) = \theta_{\delta_f,\delta_g}$。

如果$\kappa_{\alpha,v}$是非退化的，那么我们可以立即将$\kappa_{\alpha,v}$扩展为 $B(H_{\alpha,v})$的忠实表示；然而，$\kappa_{\alpha,v}$通常是退化的。相反，注意到对于每个 $f, g, h, k \in \Lambda^{\omega^\alpha}$满足$s(g) \neq s(h)$，有$\theta_{\delta_f,\delta_g}\theta_{\delta_h,\delta_k} = 0$，因为 $\langle \delta_g, \delta_h\rangle = 0$。因此，我们有一个单射的 $*$-同态

$$\kappa_\alpha : \bigoplus_{w\in\Lambda_0} K\left(H_{\alpha,w}\right) \to \mathcal{L}\left(X_\alpha\right)$$

由 $\kappa_{\alpha,v}$ 在每个直和项上给出。我们断言 κ_α 是非退化的。注意到对于每个 $f,g\in\Lambda^{\omega^\alpha}v$和 $a,b\in\mathcal{O}(\Lambda_\alpha)$,

$$\theta_{\delta_f,\delta_f}\theta_{\delta_f a,\delta_g b}=\theta_{\delta_f a,\delta_g b}$$

由于 X_α° 在 X_α 中稠密，对于有限的 $F\subseteq\Lambda^{\omega^\alpha}$ ，由 s_F 定义的网

$$s_F=\sum_{f\in F}\theta_{\delta_f,\delta_f}$$

是 $\mathcal{K}(X_\alpha)$ 的一个近似单位，且包含在 κ_α 的像中，从而证明了非退化性。由于 κ_α 是单射，其到乘子的扩张

$$\kappa_\alpha:\bigoplus_{w\in\Lambda_0}^{\ell^\infty}B\left(H_{\alpha,w}\right)\to\mathcal{L}\left(X_\alpha\right)$$

也是单射。

现在我们构造表示 $\sigma_{\alpha,v}:\mathcal{O}(\Lambda_\alpha)\to B(H_{\alpha,v})$。对于每个 $e\in\Lambda_\alpha$ 和 $f\in\Lambda^{\omega^\alpha}$，定义

$$\sigma_{\alpha,v}\left(T_e\right)\xi_f=\begin{cases}\xi_{ef} & s(e)=r(f)\\ 0 & s(e)\neq r(f)\end{cases}$$

接下来只需验证定理 3.2 中的关系。计算过程与命题 4.2 几乎完全相同，因此这次略去。然后我们定义 $\sigma_\alpha=\bigoplus_{v\in\Lambda_0}^{\ell^\infty}\sigma_{\alpha,v}$。

剩下的只需验证陈述 (2) 中的等式。由于 $\kappa_\alpha\circ\sigma_\alpha$ 和 φ_α 是 $*$-同态，我们只需对 $a=T_e$ 且 $e\in\Lambda_\alpha$ 的情形检验等式，以证明 $(\kappa_\alpha\circ\sigma_\alpha)(a)=\varphi_\alpha(a)$。固定 $f\in\Lambda^{\omega^\alpha}$和 $e\in\Lambda_\alpha$。那么，如果 $s(e)=r(f)$,

$$\begin{aligned}\left(\kappa_\alpha\circ\sigma_\alpha\right)\left(T_e\right)\delta_f&=\left(\kappa_\alpha\circ\sigma_\alpha\right)\left(T_e\right)\theta_{\delta_f,\delta_f}\delta_f\\&=\kappa_\alpha\left(\sigma_\alpha\left(T_e\right)\theta_{\xi_f,\xi_f}\right)\delta_f\\&=\kappa_\alpha\left(\theta_{\xi_{ef},\xi_f}\right)\delta_f\\&=\delta_{ef}\\&=\varphi_\alpha\left(T_e\right)\delta_f\end{aligned}$$

如果 $s(e)\neq r(f)$，那么类似地有 $(\kappa_\alpha\circ\sigma_\alpha)(T_e)\ \delta_f=0=\varphi_\alpha(T_e)\ \delta_f$。 □

引理 4.8. 对每个 $v\in\Lambda_0$，定义 $C_v=$ 张成空间$_{\mathbb{C}}\left\{\delta_f:\ f\in\Lambda^{\omega^\alpha}v\right\}$。对每个 $\eta\in C_v$，我们有

$$\langle\eta,\eta\rangle=\|\eta\|^2T_v \tag{4.1}$$

此外，存在一个等距映射 $j_{\alpha,\ v}:\ C_v\to H_{\alpha,\ v}$，由 $j_{\alpha,\ v}(\delta_f)=\xi_f$ 定义，它交织了 φ_α 与命题 4.7 中定义的表示 σ_α :

$$j_{\alpha,v}\left(\varphi_\alpha\left(a\right)\eta\right)=\sigma_\alpha\left(a\right)j_{\alpha,v}\left(\eta\right) \tag{4.2}$$

证明。 我们在 $\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\left\{\delta_f:\ f\in\Lambda^{\omega^\alpha}v\right\}$ 中进行计算，然后由连续性可得这些恒等式。设 η 属于代数张成，则存在某个 $\lambda_f\in\mathbb{C}$，使得

$$\begin{aligned}\langle\eta,\eta\rangle&=\left\langle\sum_{f\in\Lambda^{\omega^\alpha}v}\lambda_f\delta_f,\sum_{f\in\Lambda^{\omega^\alpha}v}\lambda_f\delta_f\right\rangle\\&=\sum_{f,g\in\Lambda^{\omega^\alpha}v}\overline{\lambda_f}\lambda_g\left\langle\delta_f,\delta_g\right\rangle\\&=\sum_{f\in\Lambda^{\omega^\alpha}v}\left|\lambda_f\right|^2\left\langle\delta_f,\delta_f\right\rangle\\&=\sum_{f\in\Lambda^{\omega^\alpha}v}\left|\lambda_f\right|^2T_v\\&=\left\|\eta\right\|^2T_v\end{aligned}$$

由此可得

$$\left\|j_{\alpha,v}\left(\eta\right)\right\|^2=\sum_{f\in\Lambda^{\omega^\alpha}}\left|\lambda_f\right|^2=\left\|\eta\right\|^2$$

因此 $j_{\alpha,\ v}$ 是一个等距映射。由命题 3.7，只需在$a=T_gT_h^*$且 $\eta=\delta_f$的情形下验证公式（4.2），其中某个 g，$h\in\Lambda_\alpha$和 $f\in\Lambda^{\omega^\alpha}v$。若 $s(g)=s(h)$ 且 $f\in h\Lambda$，则

$$\begin{aligned}j_{\alpha,v}\left(\varphi_\alpha\left(T_gT_h^*\right)\delta_f\right)&=j_{\alpha,v}\left(\delta_{gh^{-1}f}\right)\\&=\xi_{gh^{-1}f}\\&=\sigma_\alpha\left(T_gT_h^*\right)j_{\alpha,v}\left(\delta_f\right)\end{aligned}$$

□

我们将 在需要使用或证明 $\varphi_\alpha(a)\in\mathcal{K}(X_\alpha)$ 时，经常会用到以下结果 .

推论 4.9 (紧性的判据)。 对每个 $v\in\Lambda_0$，令 Q_v 为 $\bigoplus_{w\in\Lambda_0}^{\ell^\infty}B(H_{\alpha,\ w})$在 $B(H_{\alpha,\ v})$ 直和项上的投影，并令 σ_α 为命题 4.7 中定义的表示。定义投影 $P_v\in\mathcal{L}(X_\alpha)$ 如下

$$P_v\delta_f=\begin{cases}\delta_f & s(f)=v\\0 & s(f)\neq v\end{cases}$$

那么对于每个 $a\in\mathcal{O}$（Λ_α），我们都有如下结论：

(1) 对所有 $v\in\Lambda_0$，$\varphi_\alpha(a)\ P_v\in\mathcal{K}(X_\alpha)$ 当且仅当 $\sigma_\alpha(a)Q_v\in K(H_{\alpha,v})$。 *(2)* $\varphi_\alpha(a)\in\mathcal{K}($ $X_\alpha)$ 当且仅当对于每个 $v\in\Lambda_0$，$\varphi_\alpha(a)P_v\in\mathcal{K}(X_\alpha)$，且映射 $v\mapsto\|\varphi_\alpha(a)P_v\|$ 属于 $c_0(\Lambda_0)$。 *(3)* 如果 $T=\varphi_\alpha(a)$ 或 $T=\varphi_\alpha(a)P_v$，则 $T\in\mathcal{K}(X_\alpha)$ 当且仅当对于每个 $\varepsilon>0$，存在有限的 $F\subseteq\Lambda^{\omega^\alpha}$，使得如果 $\eta\in$ 张成$_{\mathbb{C}}\left\{\delta_f:\ f\in\Lambda^{\omega^\alpha}\backslash F\right\}$ 以及 $\|\eta\|\leq1$, $\|\varphi_\alpha(a)\ \eta\|<\varepsilon$。

注记 4.10. 稍后我们会看到，η 在第（3）部分中特别属于向量 $\left\{\delta_f:\ f\in\Lambda^{\omega^\alpha}\backslash F\right\}$ 的 $\mathbb{C}$-张成空间，而非这类向量的 $\mathcal{O}(\Lambda_\alpha)$-张成空间。

证明。 我们首先证明（1）。设 $\sigma_\alpha(a)Q_v\in K(H_{\alpha,\ v})$。于是根据命题 4.7，$\kappa_\alpha(K(H_{\alpha,\ v}))\subseteq\mathcal{K}(X_\alpha)$，因此

$$\varphi_\alpha\left(a\right)P_v=\kappa_{\alpha,v}\left(\sigma_{\alpha,v}\left(a\right)Q_v\right)\in\mathcal{K}\left(X_\alpha\right)$$

反过来，设 $\varphi_\alpha(a)P_v \in \mathcal{K}(X_\alpha)$，并令 $\varepsilon > 0$。由于 X_α° 在 X_α 中稠密，我们可以选取有限秩

$$S = \sum_{k=1}^{n} \theta_{\delta_{f_k} a_k, \delta_{g_k} b_k}$$

使得 $\|\varphi_\alpha(a)\ P_v - S\| < \varepsilon$。定义 $F = \{g_k\colon\ 1 \le k \le n, s(g_k) = v\}$，并注意到对 $\eta \in$张成 $\overline{\mathbb{C}\{\delta_f\colon\ f \in \Lambda^{\omega^\alpha} v \backslash F\}}$，$S\eta = 0$。因此若 $\|\eta\| \le 1$，则

$$\|\varphi_\alpha(a)\eta\| = \|(\varphi_\alpha(a) - S)\eta\| < \varepsilon$$

因此我们可以应用公式（4.2）看出

$$\|\sigma_\alpha(a)\, j_{\alpha,v}(\eta)\| < \varepsilon$$

因此，我们已经证明，对所有 $\varepsilon > 0$ 存在有限 $F \subseteq \Lambda^{\omega^\alpha} v$，使得若 $\xi \in$张成 $\{\xi_f\colon\ f \in \Lambda^{\omega^\alpha} v \backslash F\}$，其中 $\|\xi\| \le 1$，$\|\sigma_{\alpha,v}(a)\ \xi\| < \varepsilon$。这等价于 $\sigma_\alpha(a)\ Q_v \in K(H_{\alpha,v})$。对于（2），首先假设 $\varphi_\alpha(a) \in \mathcal{K}(X_\alpha)$。则显然 $\varphi_\alpha(a)P_v \in \mathcal{K}(X_\alpha)$，因此我们只需证明$v \mapsto \|\varphi_\alpha(a)P_v\|$ 是一个 $c_0(\Lambda_0)$ 函数。给定 $\varepsilon > 0$，并且由于 $\varphi_\alpha(a) \in \mathcal{K}(X_\alpha)$ 且 X_α° 在 X_α 中稠密，选取有限秩

$$S = \sum_{k=1}^{n} \theta_{\delta_{f_k} a_k, \delta_{g_k} b_k}$$

使得 $\|\varphi_\alpha(a) - S\| < \varepsilon$。定义有限的 $F = \{s(g_k)\colon\ 1 \le k \le n\} \subseteq \Lambda_0$，并注意，对于所有$1 \le k \le n$和 $f \in \Lambda^{\omega^\alpha}$，若 $s(f) \notin F$，则 $f \ne g_k$，因此 $\langle \delta_{g_k},\ \delta_f \rangle = 0$。因此，若 $v \in \Lambda_0 \backslash F$，则 $SP_v = 0$，从而

$$\|\varphi_\alpha(a)P_v\| = \|(\varphi_\alpha(a) - S)P_v\| < \varepsilon$$

这证明了命题 (2) 的一个方向。对于另一个方向，假设每个 $\varphi_\alpha(a)P_v$ 都是紧的，且 $v \mapsto \|\varphi_\alpha(a)\ P_v\|$ 是 $c_0(\Lambda_0)$。那么，根据命题 4.7，κ_α 的单射性推出$\|\varphi_\alpha(a)\ P_v\| = \|\kappa_\alpha(\sigma_\alpha(a)\ Q_v)\| = \|\sigma_\alpha(a)\ Q_v\|$，因此 $\sigma_\alpha(a) \in \bigoplus_{v\in\Lambda_0} K(H_{\alpha,\ v})$。再次应用命题 4.7，可得 $\varphi_\alpha(a) = (\kappa_\alpha \circ \sigma_\alpha)(a) \in \mathcal{K}(X_\alpha)$。

为证明 (3)，首先假设 $\varphi_\alpha(a) \in \mathcal{K}(X_\alpha)$（$T = \varphi_\alpha(a)P_v$ 的情形证明完全相同）。令 $\varepsilon > 0$，并注意到根据 (2)，存在有限的 $F \subseteq \Lambda_0$，使得对所有 $v \in \Lambda_0 \backslash F$，$\|\varphi_\alpha(a)P_v\|^2 < \varepsilon$。根据 (1)，每个 $\sigma_\alpha(a)\ Q_v$ 都是紧的，因此根据公式（4.2），对每个 $v \in F$，存在有限的 $G_v \subseteq \Lambda^{\omega^\alpha} v$，使得对所有 $\eta \in \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{\delta_f\colon\ f \in \Lambda^{\omega^\alpha} v \backslash G_v\}$，其中 $\|\eta\| \le 1$, $\|\varphi_\alpha(a)\eta\|^2 = \|\overline{\varphi_\alpha(a)}\ P_v\eta\|^2 < \varepsilon$。定义 $G = \cup_{v\in F} G_v$，它是有限的。于是，如果 $\eta \in \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{\delta_f\colon\ f \in \Lambda^{\omega^\alpha} \backslash G\}$，其中

$\|\eta\| \leq 1$,

$$\begin{aligned}
\|\varphi_\alpha(a)\eta\|^2 &= \left\| \left\langle \sum_{v\in\Lambda_0} \varphi_\alpha(a) P_v\eta, \sum_{v\in\Lambda_0} \varphi_\alpha(a) P_v\eta \right\rangle \right\| \\
&= \left\| \left\langle \sum_{v\in\Lambda_0} P_v\varphi_\alpha(a) P_v\eta, \sum_{v\in\Lambda_0} P_v\varphi_\alpha(a) P_v\eta \right\rangle \right\| \\
&= \left\| \sum_{v\in\Lambda_0} \langle \varphi_\alpha(a) P_v\eta, \varphi_\alpha(a) P_v\eta\rangle \right\| \\
&= \left\| \sum_{v\in\Lambda_0} \|\varphi_\alpha(a) P_v\eta\|^2 T_v \right\| && \text{by Equation (4.1)} \\
&= \sup_{v\in\Lambda_0} \|\varphi_\alpha(a) P_v\eta\|^2
\end{aligned}$$

对于每个 $v \in \Lambda_0$，要么是 $v \notin F$，此时 $\|\varphi_\alpha(a)\ P_v\eta\|^2 \leq \|\varphi_\alpha(a)\ P_v\|^2 < \varepsilon$；要么是 $v \in F$。对于$v \in F$，$P_v\eta \in$张成$_{\mathbb{C}}\left\{\delta_f \colon f \in \Lambda^{\omega^\alpha} v \backslash G_v\right\}$，因此 $\|\varphi_\alpha(a)\ P_v\eta\|^2 < \varepsilon$。无论哪种情况，我们都可以看到 $\|\varphi_\alpha(a)\ \eta\|^2 <\varepsilon$。为证明逆向结论，假设 $\varepsilon > 0$，且存在有限的$F \subseteq \Lambda^{\omega^\alpha}$，使得若 $\eta \in$张成$_{\mathbb{C}}\left\{\delta_f \colon f \in \Lambda^{\omega^\alpha}\backslash F\right\}$且 $\|\eta\| \leq 1$，则 $\|\varphi_\alpha(a)\ \eta\| < \varepsilon$。若 $\eta \in$张成$_{\mathbb{C}}\left\{\delta_f \colon \Lambda^{\omega^\alpha} v\backslash F\right\}$且 $\|\eta\| \leq 1$，则 $\|\varphi_\alpha(a)\ \eta\| = \|\sigma_\alpha(a) Q_v j_\alpha,\ v(\eta)\| < \varepsilon$，因此由 (1) 可知，每个 $\varphi_\alpha(a) P_v$ 都是紧的。定义有限的$G = \{s(f) \colon\ f \in F\}$。于是，对于每个 $v \in \Lambda_0\backslash G$ 和由 $\eta \in$ 张成的$_{\mathbb{C}}\left\{\delta_f \colon\ f \in \Lambda^{\omega^\alpha} v\right\}$，若 $\|\eta\| \leq 1$，则$\|\varphi_\alpha(a)\eta\| < \varepsilon$，所以 $\|\varphi_\alpha(a) P_v\| \leq \varepsilon$，并且由 (2) 得 $\varphi_\alpha(a) \in \mathcal{K}(X_\alpha)$。
□

推论 4.11. 假设 $\alpha < \zeta$, $a \in \mathcal{O}(\Lambda_{\alpha+1})$, $\left(\varphi_\zeta \circ \rho^\zeta_{\alpha+1}\right)(a) \in \mathcal{K}(X_\zeta)$, $h \in \Lambda_{\alpha+1}\backslash\Lambda_\alpha$ 且$s(h) = r(h)$, 并且 $g \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} h^n\Lambda^{\omega^\zeta}$。那么 $\left(\varphi_\zeta \circ \rho^\zeta_{\alpha+1}\right)(a)\ \delta_g = 0$，或者存在 $n > 0$ 使得 $g = h^n g$。

证明。 假设 $g \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} h^n\Lambda^{\omega^\zeta}$，并令 $a \in \mathcal{O}(\Lambda_{\alpha+1})$ 为如下形式的有限和

$$a = \sum_{p,q} \lambda_{p,q} T_p T_q^*$$

对于 $p, q \in \Lambda_{\alpha+1}$，其中 $s(p) = s(q)$。那么对于 $g \in \Lambda^{\omega^\zeta}$，其中 $s(g) = v$,

$$\left\| \left(\sigma_{\zeta,v} \circ \rho^\zeta_{\alpha+1}\right)(a)\, \xi_g \right\|^2 = \left\| \sum_{g\in q\Lambda, p, q} \lambda_{p,q} \xi_{pq^{-1}g} \right\|^2$$

假设 $p_1 q_1^{-1} g = p_2 q_2^{-1} g$ 对于指标 $p_1, q_1, p_2, q_2 \in \Lambda_{\alpha+1}$。那么 $g = q_1 p_1^{-1} p_2 q_2^{-1} g$，并且由于$d(h) \geq \omega^\alpha$，存在正的 $m \in \mathbb{N}$，使得 $d(h^m) = d(h) \cdot m$ 大于 $d(q_2) + d(p_1)$，特别地，$u = q_1 p_1^{-1} p_2 q_2^{-1} h^m$ 是定义良好的路径。若 $\beta = d(u)$，那么由于 $d(h) \geq \omega^\alpha$，$\beta + d(h) = d(h) \cdot k$对于某个 $k \in \mathbb{N}$成立。因此，$g(\beta + d(h))$ $= h^k = q_1 p_1^{-1} p_2 q_2^{-1} h^{m+1}$，并且

$$\begin{aligned}
h^{-1} q_1 p_1^{-1} p_2 q_2^{-1} h g &= h^{-1} q_1 p_1^{-1} p_2 q_2^{-1} h^{m+1} h h^{-m-1} g \\
&= q_1 p_1^{-1} p_2 q_2^{-1} h^{m+1} h^{-m-1} g \\
&= q_1 p_1^{-1} p_2 q_2^{-1} g \\
&= g
\end{aligned}$$

因此，$p_1q_1^{-1}hg = p_2q_2^{-1}hg$。同样的等式给出了反向蕴含，所以我们有$p_1q_1^{-1}g = p_2q_2^{-1}g$当且仅当$p_1q_1^{-1}hg = p_2q_2^{-1}hg$。特别地，对于所有 $n\in\mathbb{N}$，$\left\|\left(\sigma_{\zeta,v}\circ\rho_{\alpha+1}^{\zeta}\right)(a)\ \xi_g\right\| = \left\|\left(\sigma_{\zeta,v}\circ\rho_{\alpha+1}^{\zeta}\right)(a)\ \xi_{h^ng}\right\|$成立，并且由连续性可知 $a\in\mathcal{O}(\Lambda_{\alpha+1})$。现在假设 $\left(\varphi_\zeta\circ\rho_{\alpha+1}^{\zeta}\right)(a)\in\mathcal{K}(X_\zeta)$，且 $\varepsilon = \left\|\left(\varphi_\zeta\circ\rho_{\alpha+1}^{\zeta}\right)(a)\ \delta_g\right\|$为正。选取有限的 $F\subseteq\Lambda^{\omega^\zeta}$，使得对于所有$\eta\in\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\left\{\delta_f:\ f\in\Lambda^{\omega^\zeta}\backslash F\right\}$满足 $\|\eta\|\leq 1$, $\left\|\left(\varphi_\zeta\circ\rho_{\alpha+1}^{\zeta}\right)(a)\ \eta\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$。若 $\{h^mg:\ m\in\mathbb{N}\}$为有限集，则对某个 $m_1>m_2$有 $h^{m_1}g = h^{m_2}g$，由此可得 $h^{m_1-m_2}g = g$。因此，若不存在满足 $h^ng = g$的 $n>0$，则 $\{h^mg:\ m\in\mathbb{N}\}$ 为无限集，且存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $h^mg\notin F$。那么引理 4.8 和 F 的定义意味着

$$\varepsilon = \left\|\left(\varphi_\zeta\circ\rho_{\alpha+1}^{\zeta}\right)(a)\,\delta_g\right\| = \left\|\left(\sigma_{\zeta,v}\circ\rho_{\alpha+1}^{\zeta}\right)(a)\,\xi_g\right\| = \left\|\left(\sigma_{\zeta,v}\circ\rho_{\alpha+1}^{\zeta}\right)(a)\,\xi_{h^mg}\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

这与假设矛盾，因此 $\varepsilon = 0$。 □

5. 主要结果

我们的主要结果针对这样的情形：对于每个 $\alpha\in$序数，$\rho_\alpha^{\alpha+1}$都是单射。我们可以猜想，对于每个 α，当 Λ 不满足命题 4.6 的假设时，就会出现这种情况。我们称满足条件 (C) 的序数图具有条件 (C)。

定义 5.1. 若序数图 Λ 满足以下条件，则称其满足条件 *(C)*：对于每个 $\alpha\in$序数，若 $f\in\Lambda^{\omega^\alpha}$，且 $g\in\Lambda$满足 $r(f)$是 α-正则，则 $gf = f$蕴含 $d(g) = 0$。

注 5.2. 若 $\Lambda = \Lambda_1$，即 Λ 是有向图，则 Λ 自动满足条件 (C)。这是因为 $gf = f$蕴含 $d(g) + d(f) = d(f)$；对于有限的 $d(f)$ $d(g)$，这又蕴含 $d(g) = 0$。

定理 5.3. 若 Λ 是满足条件 *(C)* 的序数图，则对每个$\alpha\in$ 序数类，以下结论成立

> *(1)* ρ_α 是单射 *(2)* J_α是 $\mathcal{O}(\Lambda_\alpha)$ 中包含 $\{T_v:\ v\in\Lambda_0$的最小理想，v 是 α-正则 *(3)* $\left(\psi_\alpha,\rho_\alpha^{\alpha+1}\right)$ 是 X_α的共变表示 *(4)* $\psi_\alpha\times\rho_\alpha^{\alpha+1}$: $\mathcal{O}(X_\alpha)\to\mathcal{O}(\Lambda_{\alpha+1})$是同构

归纳步骤中用到的引理将在下一节的证明中给出。 n.

证明. 我们通过超限归纳法证明，并以 $\alpha = 0$为基例。若 $\alpha = 0$，则 $\mathcal{O}(\Lambda_\alpha)\cong c_0(\Lambda_0)$。由于 $\rho_0(T_v)\neq 0$，这意味着 ρ_0 是单射。于是，由例 4.3 可得 (2) 至 (4)，因为 Λ_1 是有向图。

现在假设我们已经证明了该结果对所有 $\alpha<\delta$ 都成立。由引理 6.10 可知，ρ_δ 是单射；又因为 $\rho_\delta = \rho_{\delta+1}\circ\rho_\delta^{\delta+1}$，$\rho_\delta^{\delta+1}$ 是单射。因此，由命题 6.25 可证得 (2)。对于 (3)，我们必须证明对每个 $\alpha\in J_\delta$，$\left(\psi_\delta,\ \rho_\delta^{\delta+1}\right)^{(1)}(\varphi_\delta(a)) = \rho_\delta^{\delta+1}(a)$。定义

$$\mathcal{I} = \left\{a\in J_\delta:\left(\psi_\delta,\rho_\delta^{\delta+1}\right)^{(1)}(\varphi_\delta(a)) = \rho_\delta^{\delta+1}(a)\right\}$$

那么，如果 $a\in\mathcal{I}$和 $b\in\mathcal{O}(\Lambda_\delta)$,

$$\left(\psi_\delta,\rho_\delta^{\delta+1}\right)^{(1)}(\varphi_\delta(ab)) = \left(\psi_\delta,\rho_\delta^{\delta+1}\right)^{(1)}(\varphi_\delta(a))\,\rho_\delta^{\delta+1}(b) = \rho_\delta^{\delta+1}(ab)$$

因此， $\mathcal{I}$ 是一个闭的双边理想。根据 (2)，为证明共变性，只需证明对于每个δ-正则的 $v \in \Lambda_0$ ，都有 $T_v \in \mathcal{I}$ 。这由定理 3.2 中的关系 4 得出。若令$\{S_e\colon\ e \in \Lambda_{\delta+1}\}$ 为 $\mathcal{O}(\Lambda_{\delta+1})$ 的生成元，则有

$$\varphi_\delta(T_v) = \sum_{e\in\Lambda^{\omega^\delta}} \theta_{\delta_e,\delta_e}$$

$$\left(\psi_\delta, \rho_\delta^{\delta+1}\right)^{(1)}(\varphi_\delta(T_v)) = \sum_{e\in\Lambda^{\omega^\delta}} \psi_\delta(\delta_e)\,\psi_\delta(\delta_e)^* = \sum_{e\in\Lambda^{\omega^\delta}} S_e S_e^* = S_v = \rho_\delta^{\delta+1}(T_v)$$

由共变性，我们有一个同态 $\psi_\delta \times \rho_\delta^{\delta+1}\colon\ \mathcal{O}(X_\delta) \to \mathcal{O}(\Lambda_{\delta+1})$，我们现在证明它是一个同构。满射性不难看出；我们只需像包含$\{S_e\colon\ e \in \Lambda_{\delta+1}\}$。根据康托尔标准型，每个 $e \in \Lambda_{\delta+1}$ 都是 Λ^{ω^δ} 与 Λ_δ中路径的有限复合。若 $e \in \Lambda^{\omega^\delta}$，则 $\psi_\delta(\delta_e) = S_e$，且若 $e \in \Lambda_\delta$，$\rho_\delta^{\delta+1}(T_e) = S_e$。关于单射性，注意由 (1) $\rho_\delta^{\delta+1}$ 是单射的，并且由引理 3.14，存在一个作用 $\Gamma_\delta\colon\ \mathbb{T} \to$ 自同构群 $(\mathcal{O}(\Lambda_{\delta+1}))$。若 γ_δ 是 $\mathcal{O}(X_\delta)$上的规范作用，(ι,π) 是 X_δ、 $z \in \mathbb{T}$与 $e \in \Lambda^{\omega^\delta}$的万有共变表示，则

$$\left(\psi_\delta \times \rho_\delta^{\delta+1} \circ \gamma_{\delta,z}\right)(\iota(\delta_e)) = zS_e = \Gamma_{\delta,z}(S_e) = \left(\Gamma_{\delta,z} \circ \psi_\delta \times \rho_\delta^{\delta+1}\right)(\iota(\delta_e))$$

同样，如果 $e \in \Lambda$，那么

$$\left(\psi_\delta \times \rho_\delta^{\delta+1} \circ \gamma_{\delta,z}\right)(\pi(\delta_e)) = S_e = \Gamma_{\delta,z}(S_e) = \left(\Gamma_{\delta,z} \circ \psi_\delta \times \rho_\delta^{\delta+1}\right)(\pi(\delta_e))$$

因此，规范不变唯一性定理 [11, 定理 6.4] 意味着 $\psi_\delta \times \rho_\delta^{\delta+1}$ 是单射的。 □

作为推论，我们将推广 [8, 定理 7.15] ，使 Λ 可以包含 1-正则顶点。为此，我们给出以下定义。

定义5.4 ([8, 定义 7.2])。如果对于某个 $n \in [0,\omega)$， $e \in \Lambda^{\omega^\alpha\cdot n}$ ，那么 e 是非返回的，即对于所有 $\gamma \in [\omega^\alpha, \omega^\alpha\cdot n)$ 和 $\beta \in [0,\omega^\alpha)$， $e(\gamma)\,e(\beta)^{-1}\,e \notin e\Lambda$。

注 5.5。这等价于 [8, 定义 7.2] ，因为如果 $fe(\beta)^{-1}e \in e\Lambda$ 且 $d(f) < d(e)$，那么 $f = e(d(f))$。令 $\gamma = d(f)$，我们有 $e(\gamma)\,e(\beta)^{-1}\,e \in e\Lambda$。还需注意，非返回的定义取决于 α 和 n，而它们由路径 e 唯一确定。

定义5.6。 令 $\sim$ 为满足以下条件的 Λ 上的极小等价关系：对所有 $f,g \in \Lambda$，若 $s(f) = r(g)$，则 $f \sim g$ 。 Λ 的一个连通分支 是 $\Lambda/\sim$中的一个等价类。

定义 5.7 ([8, 定义 7.11])。 若路径 $e \in \Lambda$ 满足以下条件，则称其为 α-满的： 对于与 $r(e)$ 位于 Λ_0 同一连通分支中的每个 $v \in \Lambda_0$ ，都存在 $\beta \in [0,\omega^\alpha)$ 和 $f \in \Lambda_\alpha$ ，使得 $s(f) = r(e(\beta))$ 且 $r(f) = v$。

定义 5.8。 若对每个满足 $\Lambda^{\omega^\alpha} \neq \emptyset$ 的 $\alpha \in$ 序数类、 Λ_α的每个连通分支 F以及每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在非返回的、 α-满的 $f \in \Lambda$ ，使得 $r(f) \in F$且 $d(f) \in [\omega^\alpha\cdot n, \omega^{\alpha+1})$，则称 Λ 满足条件 *(S)* 。

证明 [8, 定理 7.15] 需要我们知道 $\mathcal{O}(X_\alpha) \cong \mathcal{O}(\Lambda_{\alpha+1})$。在没有 1-正则顶点的情况下，作者能够利用 [16, 定理 3.9], 证明 $J_\alpha = 0$ ，这足以证明 $\mathcal{O}(X_\alpha) \cong \mathcal{O}(\Lambda_{\alpha+1})$。利用定理 5.3，我们可以通过证明满足条件 (S) 的序数图 Λ 也满足条件 (C)，来证明 $\mathcal{O}(X_\alpha) \cong \mathcal{O}(\Lambda_{\alpha+1})$。我们将在下一个引理中完成这一证明，随后得到 [8,定理 7.15] 的一个推论推广。

引理 5.9. 若 Λ满足条件 *(S)*，则 Λ 满足条件 *(C)*。

证明. 设 Λ 是一个不满足条件 (C) 的序数图。那么存在某些 $f \in \Lambda^{\omega^\beta}$ 和$g \in \Lambda_\beta$，使得 $r(f)$ 是 β-正则的，并且 $gf = f$。在证明 Λ不满足条件 (S) 之前，我们先简化问题。首先，我们将说明只需考虑 $d(g)$ 是 ω 的幂的倍数这一情形。假设对于某些 $\varepsilon < \omega^\alpha$ 和 $n \in [1, \omega)$，有 $d(g) = \omega^\alpha \cdot n + \varepsilon$。那么对于 $p = g(\omega^\alpha \cdot n)$ 和 $q \in \Lambda_\alpha$，有 $g = pq$。此外， $gf = g^2 f = pqf = pqpqf = f$，因此 $qf = qpqf$。特别地， $d(qp) = \varepsilon + \omega^\alpha \cdot n = \omega^\alpha \cdot n$。另外，由引理 3.5 可知， $r(qf) = s(p)$ 是 β-正则的，因为 $r(p)$ 是 β-正则的，并且 $d(p) < \omega^\alpha$。因此，从此处起，不失一般性地假设 $d(g) = \omega^\alpha \cdot n$。

反设 Λ 满足条件 (S)。那么存在 $m \in [1, \omega)$ 和非返回的、 α-满的 $h \in \Lambda^{\omega^\alpha \cdot m}$，使得 $m \geq n$ 和 $r(h)$ 在 Λ_α 的同一个连通分支中，且该分支包含 $r(g)$。由于 h 是 α-满的，存在 $u \in r(g)\Lambda_\alpha$ 和 $\delta < \omega^\alpha$，使得$s(u) = s(h(\delta))$。由于 $gf = f$，我们有 $\omega^\alpha \cdot n \leq \omega^\alpha \cdot m < \omega^\beta$。因为 $r(g)$ 是 β-正则的，且$uh(\delta)^{-1} h \in \Lambda_\beta$，由引理 3.5 可知 $s(h)$ 是 β-正则的。因此存在 $y \in s(h)\ \Lambda^{\omega^\beta}$，并且

$$\left\{ g^k uh(\delta)^{-1} hy : k \in \mathbb{N} \right\}$$

是有限的。定义 $w = uh(\delta)^{-1} hy$，并选取互不相同的 k_0， $k_1 \in \mathbb{N}$，使得 $g^{k_0} w = g^{k_1} w$。于是由左消去律，存在某个 $k > 0$，使得 $g^k w = w$。由于 $d\left(uh(\delta)^{-1} h\right) = d(u) - \delta + d(h) = \omega^\alpha \cdot m$，由引理 3.13 可知

$$w(\omega^\alpha \cdot n) = \left(uh(\delta)^{-1} h\right)(\omega^\alpha \cdot n) = u\left(h(\delta)^{-1} h\right)(-d(u) + \omega^\alpha \cdot n) = u\left(h(\delta)^{-1} h\right)(\omega^\alpha \cdot n)$$
$$= uh(\delta)^{-1}\left(h(\delta) h(\delta)^{-1} h\right)(\delta + \omega^\alpha \cdot n) = uh(\delta)^{-1} h(\omega^\alpha \cdot n)$$

因此 $uh(\delta)^{-1} h(\omega^\alpha \cdot n) = g$。我们的矛盾将由以下观察得出:

$$h(\omega^\alpha \cdot n) uh(\delta)^{-1} h \in h\Lambda$$

这与 h 是非返回的这一事实矛盾。通过将 k 替换为更大的倍数，我们不失一般性地假设 $d\left(g^k\right) = \omega^\alpha \cdot nk > d(h) = \omega^\alpha \cdot m$。于是，由于 $g^k w = w$,

$$\left(uh(\delta)^{-1} h(\omega^\alpha \cdot n)\right)^k w = uh(\delta)^{-1} hy$$
$$h(\delta) u^{-1} uh(\delta)^{-1} h(\omega^\alpha \cdot n) g^{k-1} w = hy$$
$$h(\omega^\alpha \cdot n) g^{k-1} w \in h\Lambda$$

由于 $d\left(h(\omega^\alpha \cdot n)\ g^{k-1}\right) = \omega^\alpha \cdot nk > d(h)$，引理 3.13 推出 $h(\omega^\alpha \cdot n)\ g^{k-1} \in h\Lambda$。取 $x, z \in \mathbb{N}$ 使得 $m = xn + z$，并注意到 $x > 0$，因为 $m \geq n$。于是

$$h(\omega^\alpha \cdot n) g^{k-1} = h(\omega^\alpha \cdot n) g^{x-1} g(\omega^\alpha \cdot z) g(\omega^\alpha \cdot z)^{-1} g^{k-x}$$
$$d\left(h(\omega^\alpha \cdot n) g^{x-1} g(\omega^\alpha \cdot z)\right) = \omega^\alpha \cdot n + \omega^\alpha \cdot n(x-1) + \omega^\alpha \cdot z$$
$$= \omega^\alpha \cdot (nx + z) = \omega^\alpha \cdot m = d(h)$$

因此，定义 3.1 中的唯一分解推出 $h(\omega^\alpha \cdot n) g^{x-1} g(\omega^\alpha \cdot z) = h$。最后，我们直接计算:

$$h(\omega^\alpha \cdot n) uh(\delta)^{-1} h = h(\omega^\alpha \cdot n) uh(\delta)^{-1} h(\omega^\alpha \cdot n) g^{x-1} g(\omega^\alpha \cdot z)$$
$$= h(\omega^\alpha \cdot n) g^x g(\omega^\alpha \cdot z) = h(\omega^\alpha \cdot n) g^{x-1} g(\omega^\alpha \cdot z) g(\omega^\alpha \cdot z)^{-1} gg(\omega^\alpha \cdot z)$$
$$= hg(\omega^\alpha \cdot z)^{-1} gg(\omega^\alpha \cdot z) \in h\Lambda$$

而这直接与 h 是非返回的断言相矛盾。 □

推论 5.10. 若 Λ 满足条件 *(S)*，则每个对应关系 X_α 都满足 [16]中定义的条件 *(S)*。此外，若 $\pi: \mathcal{O}(\Lambda) \to \mathcal{A}$ 是到一个 C^*- 代数 $\mathcal{A}$ 的同态，则 π 是单射，当且仅当对每个 $v \in \Lambda_0$，$\pi(T_v) \neq 0$。

证明。 如果 Λ 满足条件 (S)，那么根据引理 5.9， Λ 满足条件 (C)。因此根据定理 5.3，对于每个 $\alpha \in$ 序数类 Ord， $\mathcal{O}(X_\alpha) \cong \mathcal{O}(\Lambda_{\alpha+1})$。 [8, 定理 7.15] 的证明仅使用了这样的假设： Λ 没有 1-正则顶点，以证明 $\mathcal{O}(X_\alpha) \cong \mathcal{O}(\Lambda_{\alpha+1})$，因此在这种情况下，同样的证明更一般地也成立。乍看之下，[8, 定理 6.1]中定义的、用于证明 [8, 定理 7.15]的对应似乎不同于我们在定义 4.1 中定义的对应，但实际上它们是同构的。事实上， [8, 定理 6.1] 中定义的对应是 $(\psi_\alpha(X_\alpha) \quad \rho_\alpha^{\alpha+1}(\mathcal{O}(\Lambda_\alpha)))$ 的像，并且由于 $(\psi_\alpha, \rho_\alpha^{\alpha+1})$ 是 X_α的单射表示，这些像与 X_α同构。□

6. 归纳步骤

本节中，我们完成定理 5.3 证明中的归纳步骤。令 Λ 为一个固定的序数图，并在本节余下部分作如下假设。

归纳假设。 假设我们有以下条件：

(1) Λ 满足定义 *5.1* 中的条件 *(C)*。*(2)* 对每个 $\alpha < \zeta$， $\rho_\alpha = \rho_\zeta \circ \rho_\alpha^\zeta$ 都是单射。特别地，每个 ρ_α^ζ*:* $\mathcal{O}(\Lambda_\alpha) \to \mathcal{O}(\Lambda_\zeta)$ 都是单射，并且我们将 $\mathcal{O}(\Lambda_\alpha)$ 视为 $\mathcal{O}(\Lambda_\zeta)$ 的一个 C^*-子代数。*(3)* 对每个 $\alpha < \zeta$，命题 *4.4* 中定义的表示 $(\psi_\alpha, \rho_\alpha^{\alpha+1}) : (X_\alpha, \mathcal{O}(\Lambda_\alpha)) \to \mathcal{O}(\Lambda_{\alpha+1})$ 是 X_α 的协变表示的泛表示。特别地，我们有一个由下式定义的同构 $\psi_\alpha \times \rho_\alpha^{\alpha+1}$*:* $\mathcal{O}(X_\alpha) \to \mathcal{O}(\Lambda_{\alpha+1})$

$$\psi_\alpha(\delta_e) = T_e \qquad \text{for } e \in \Lambda^{\omega^\alpha}$$
$$\rho_\alpha^{\alpha+1}(T_f) = T_f \qquad \text{for } f \in \Lambda_\alpha$$

因此，在这些同构下， $\mathcal{O}(X_\alpha)$上的规范作用就是引理 *3.14*中定义的 Γ_α 。*(4)* 对于每个 $\alpha < \zeta$，*Katsura* 理想 $J_\alpha =$(核 $\varphi_\alpha)^\perp \cap \varphi_\alpha^{-1}(\mathcal{K}(X_\alpha))$在 $\mathcal{O}(\Lambda_\alpha)$中由 $\{T_v$ 生成： $v \in \Lambda_0$ 是 α-正则的$\}$。特别地，当 $\alpha + 1 < \zeta$时， $J_{\alpha+1}$ 在规范作用 Γ_α下保持不变。此外，对于每个 $\beta < \alpha < \zeta$， $\mathcal{O}(\Lambda_\beta) \cap \left(J_\alpha + \psi_\beta^{(1)}(\mathcal{K}(X_\beta))\right) \subseteq J_\beta$，且$\mathcal{O}(\Lambda_0) \cap J_\alpha = \{T_v :$ $v \in \Lambda_0$ 是 α-正则的$\}$。

定义 6.1。 如果 $f \in \Lambda^*$，那么当对于每个 $0 \leq \varepsilon \leq \beta < \omega^{\alpha+1}$， $f = f(\beta) f(\varepsilon)^{-1} f$蕴含 $-\varepsilon + \beta < \omega^\alpha$时， f 是 α-可消去的 。定义 $C_\alpha = \{f \in \Lambda^* :$ f是 α-可消去的$\}$。

我们为 Λ^* 的成员定义 α-可消去，以便能将该定义应用于 Λ中的路径以及 $\partial\Lambda$的元素，而这些全都是 Λ^*的元素。我们选择这一名称，是因为 α-可消去是右消去的一种弱形式。例如，若 f 是 0-可消去的，则对每一条有限长路径$g, h \in \Lambda_1 r(f)$， $gf = hf$蕴含 $g = h$。此外， f可右消去，当且仅当对所有 $\alpha \in$序数类， f是 α-可消去的。不过，我们并不会用到这两个事实中的任何一个。

引理 6.2. 对每个 $f \in \Lambda^*$，我们有如下蕴含：

(1) 若 $L(f) > \omega^{\alpha+1}$，则 f是 α-可消去的当且仅当 $f(\omega^{\alpha+1})$ 是 α-可消去的。*(2)* 若 $L(f) < \omega^{\alpha+1}$，则 f是 α-可消去的。

证明。 要证明 (1)，注意对于所有 $\varepsilon \leq \beta < \omega^{\alpha+1}$, $f = f(\beta) f(\varepsilon)^{-1} f$，其等价于 $f(\omega^{\alpha+1}) = f(\beta) f(\varepsilon)^{-1} f(\omega^{\alpha+1})$。对于 (2)，假设 $f = f(\beta) f(\varepsilon)^{-1} f$。那么 $L(f) = \beta - \varepsilon + L(f)$，并且如果所有

值都小于 $\omega^{\alpha+1}$，那么两边 ω^{α} 的康托尔标准形中的系数必相等。特别是， β 的系数必须等于 ε 的系数，并且 $-\varepsilon+\beta<\omega^{\alpha}$。□

引理 6.3。如果 $f\in\Lambda^{*}$ 不是 α-可消去的，那么存在 $g,h\in\Lambda_{\alpha+1}$ 使得 $r(g)=r(f),s(g)=r(h)=s(h)$，$d(h)\geq\omega^{\alpha}$，并且 $hg^{-1}f=g^{-1}f$。

证明。假设 f 不是 α-可消去的。选取 $0\leq\varepsilon\leq\beta<\omega^{\alpha+1}$ 使得 $f(\beta)f(\varepsilon)^{-1}f=f$，但 $-\varepsilon+\beta\geq\omega^{\alpha}$。定义

$$g=f(\beta)\qquad\qquad h=f(\varepsilon)^{-1}f(\beta)$$

于是我们有

$$\begin{aligned}g^{-1}f&=f(\beta)^{-1}f\\&=f(\beta)^{-1}f(\beta)f(\varepsilon)^{-1}f\\&=f(\varepsilon)^{-1}f\\&=f(\varepsilon)^{-1}f(\beta)f(\beta)^{-1}f\\&=hg^{-1}f\end{aligned}$$

此外，$d(h)=-\varepsilon+\beta\geq\omega^{\alpha}$，如所需。 □

推论 6.4。对于 $f\in\Lambda^{*}$ 和 $p\in\Lambda_{\alpha+1}r(f)$，$pf$ 是 α-可消去的，当且仅当 f 是 α-可消去的。

证明。假设 pf 不是 α-可消去的。根据引理 6.3，取 g，$h\in\Lambda_{\alpha+1}$ 使得 $hg^{-1}pf=g^{-1}pf$。由于我们可以选择 $d(h)\geq\omega^{\alpha}$，因此将h替换为更大的幂 h^{n} 后，不失一般性地假设 $d(h)\geq d(p)+\omega^{\alpha}$。于是 $p^{-1}ghg^{-1}pf=f$。现在分两种情况讨论。

情况 1：若 $d(g)\geq d(p)$，定义 $\beta=d\left(p^{-1}gh\right)=-d(p)+d(g)+d(h)$ 以及 $\varepsilon=-d(p)+d(g)$。则 $f(\beta)f(\varepsilon)^{-1}f=p^{-1}ghg^{-1}pf=f$，但 $-\varepsilon+\beta=d(h)\geq\omega^{\alpha}$。情况 2：若 $d(g)<d(p)$，则 $p^{-1}ghg^{-1}p$ 是良定义的路径，因为 $d(p)<d(p)+\omega^{\alpha}\leq d(h)\leq d(gh)$。定义 $\beta=p^{-1}ghg^{-1}p$ 和 $\varepsilon=0$。则 $f(\beta)f(\varepsilon)^{-1}f=f$，但 $-\varepsilon+\beta=\beta\geq-d(p)+d(h)\geq\omega^{\alpha}$。

无论如何，我们可以看到 f 不是 α-可消去的。

另一方面，若 pf 是 α-可消去的，且 $0\leq\varepsilon\leq\beta<\omega^{\alpha+1}$ 满足 $f(\beta)f(\varepsilon)^{-1}f=f$，那么

$$\begin{aligned}pf&=pf(\beta)f(\varepsilon)^{-1}p^{-1}pf\\&=(pf)(d(p)+\beta)(pf)(d(p)+\varepsilon)^{-1}pf\end{aligned}$$

因此，$-\varepsilon-d(p)+d(p)+\beta=-\varepsilon+\beta<\omega^{\alpha}$，并且 f 是 α-可消去的。 □

引理 6.5. 若 $v\in\Lambda_0$ 是 α-正则的，则对每个 $g\in v\Lambda_{\alpha}\backslash\Lambda_0$，$s(g)\neq v$。

证明。假设 $v\in\Lambda_0$ 是 α-正则的，且 $g\in v\Lambda_{\alpha}\backslash\Lambda_0$ 满足 $s(g)=r(g)=v$。令 $f\in v\Lambda^{\omega^{\alpha}}$ 为任意元素。由于 $v\Lambda^{\omega^{\alpha}}$ 是有限的，$\{g^{n}f:n\in\mathbb{N}\}$ 是有限的。因此，存在互不相同的 $n_0,n_1\in\mathbb{N}$使得 $g^{n_0}f=g^{n_1}f$。在左侧消去后，我们得到对于某个 $n\in\mathbb{N}$，$g^{n}f=f$。这将意味着 Λ 不满足条件 (C)，与归纳假设矛盾。因此，这样的 g 不存在。□

推论 6.6. 如果 $v\in\Lambda_0$ 是 $\alpha+1$-正则的，那么每个 $f\in v\Lambda^{*}$ 都是 α-可消去的。

证明. 如果 $f \in v\Lambda^*$ 不是 α-可消去的，则存在 g，$h \in \Lambda_{\alpha+1}$ 使得 $hg^{-1}f = g^{-1}f$。由于 $r(g) = r(f)$ 是 $\alpha+1$-正则的，引理 3.5 推出 $s(g) = s(h) = r(h)$ 是 $\alpha+1$-正则的，但这与引理 6.5 矛盾。□

命题 6.7. 对每个 $v \in \Lambda_0$，存在 $f \in v\partial\Lambda$，使得对每个 $\alpha \in$ 序数类，要么 $L(f) \leq \omega^{\alpha+1}$，要么 f 是 α-可消去的。

证明. 定义如下序数集合：

$$S = \{\alpha \in \mathrm{Ord} : \exists g, h \in \Lambda_{\alpha+1} \text{ such that } r(g) = v, s(g) = r(h) = s(h), \text{ and } d(h) \geq \omega^\alpha\}$$

若 S 为空，则应用引理 3.10 构造 $f \in v\partial\Lambda$。然后由引理 6.3，对每个 $\alpha \in$ 序数类，f 是 α-可消去的，证明完毕。否则，S 有最小元素 α，且存在 g，$h \in \Lambda_{\alpha+1}$ 满足定义 S 的条件。现在我们定义 $h^\omega \in \Lambda^*$，使得 $L(h^\omega) = d(h)\cdot\omega = \omega^{\alpha+1}$。若 $\beta < \omega^{\alpha+1}$，则存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $\beta < \omega^\alpha \cdot n$，并且我们定义

$$h^\omega(\beta) = h^n(\beta)$$

则对所有 $m \in \mathbb{N}$，$h^{n+m}(\beta) = h^n(\beta)$，并且 h^ω 是 Λ^* 的一个良定义元素。

接下来我们证明 $h^\omega \in \partial\Lambda$。假设 $\beta < \omega^{\alpha+1}$ 与 $w = s(h^\omega(\beta)) = s(h^n(\beta))$ 是 ϵ-正则的。我们必须证明 $L(h^\omega) = \omega^{\alpha+1} > \beta + \omega^\epsilon$。若 $\epsilon \leq \alpha$，则 $\beta + \omega^\epsilon < \omega^{\alpha+1}$。因此我们假设 $\epsilon \geq \alpha+1$，并且由引理 3.5，w 是 $\alpha+1$- 正则的。通过选取 n 为极小，我们可不失一般性地假设存在 $\eta < d(h)$，使得 $\beta = d(h)\cdot(n-1) + \eta$。于是

$$h^n(\beta) = h^n(d(h)\cdot(n-1)+\eta) = \left(h^{n-1}h\right)\left(d\left(h^{n-1}\right)+\eta\right) = h^{n-1}h(\eta)$$

因此 $w = s(h(\eta)) = r\left(h(\eta)^{-1}h\right)$。由引理 3.5，由于 $h(\eta)^{-1}h \in \Lambda_{\alpha+1}$，$s\left(h(\eta)^{-1}h\right) = s(h)$ 是 $\alpha+1$- 正则的。由于 $s(h) = r(h)$ 且 $h \in \Lambda_{\alpha+1}$，这与引理 6.5 矛盾。因此 $\epsilon \leq \alpha$ 且 $h^\omega \in \partial\Lambda$。

由引理 3.11，$gh^\omega \in v\partial\Lambda$。此外，$L(gh^\omega) = d(g) + L(h^\omega) = d(g) + \omega^{\alpha+1} = \omega^{\alpha+1}$。如果 $\beta < \alpha$ 且 gh^ω 不是 β-可消去的，那么由引理 6.3，$\beta \in S$；然而，这将与 α 的极小性矛盾。因此，$f = gh^\omega$ 满足所需条件。□

引理 6.8。 存在一个函数 v：$\Lambda^* \to \mathbb{Z}^{[0,\zeta)}$，使得对所有 $\alpha \in [0,\zeta)$，

(1) 如果 $f \in \Lambda^*$ 且 $L(f) > \omega^{\alpha+1}$，$v(f)_\alpha = v\left(f\left(\omega^{\alpha+1}\right)\right)_\alpha$。*(2)* 如果 $f \in \Lambda$ 且 $d(f) \in [\omega^\alpha\cdot n, \omega^\alpha\cdot(n+1))$，$v(f)_\alpha = n$。特别地，$v(f)_\alpha = 0$ 当 $f \in \Lambda_\alpha$ 时。*(3)* 如果 $f \in \Lambda^*$ 是 α-可消去的，那么对每个 $\beta < \omega^{\alpha+1}$，$v(f)_\alpha = v(f(\beta))_\alpha + v\left(f(\beta)^{-1}f\right)_\alpha$。

证明。设给定 ζ 和 α。我们在 Λ^* 上定义等价关系 $\sim$：$f \sim g$ 当且仅当存在 $\beta,\gamma < \omega^{\alpha+1}$ 使得 $f(\beta)^{-1}f = g(\gamma)^{-1}g$。若 $f \sim g$ 且 $g \sim h$，则存在 $\beta_0,\beta_1,\gamma_0,\gamma_1 < \omega^{\alpha+1}$ 使得 $f(\beta_0)^{-1}f = g(\gamma_0)^{-1}g$ 且 $g(\gamma_1)^{-1}g = h(\beta_1)^{-1}h$。不失一般性地，假设 $\gamma_0 < \gamma_1$，由此可得

$$\begin{aligned} g(\gamma_0)f(\beta_0)^{-1}f &= g(\gamma_1)h(\beta_1)^{-1}h \\ f &= f(\beta_0)g(\gamma_0)^{-1}g(\gamma_1)h(\beta_1)^{-1}h \\ f(\beta_0-\gamma_0+\gamma_1)^{-1}f &= h(\beta_1)^{-1}h \end{aligned}$$

因此 $\sim$ 具有传递性，而自反性和对称性显然成立。对于每个 $f \in \partial\Lambda$，选取一个代表元 $c(f)$，使其长度 $L(c(f))$ 最小，并满足 $f \sim c(f)$ 且当 $f \sim g$ 时，$c(f) = c(g)$。特别地，对于每个 $f \in \Lambda_{\alpha+1}$，都有 $c(f) = s(f)$。

现在，令 $f \in \Lambda^*$ 为 α-可消去的。注意，这包含 $f \in \Lambda_{\alpha+1}$ 的情形。我们接下来定义 $v(f)_\alpha$。如果 $L(f) > \omega^{\alpha+1}$，则定义 $v(f)_\alpha = v\left(f\left(\omega^{\alpha+1}\right)\right)_\alpha$，使得 v 满足

性质 1。否则，定义 $g = c(f)$，并注意到 $g \sim f$。因此，我们选取 $\beta,\ \gamma < \omega^{\alpha+1}$，使得 $g(\beta)^{-1} g = f(\gamma)^{-1} f$。选取 $n,\ m \in \mathbb{N}$，使得 $\beta \in [\omega^\alpha \cdot n, \omega^\alpha \cdot (n+1))$ 且 $\gamma \in [\omega^\alpha \cdot m, \omega^\alpha \cdot (m+1))$，并定义 $v(f)_\alpha = m - n$。现在我们证明 $v(f)_\alpha$ 定义良好。设 $g(\beta_0)^{-1} g = f(\gamma_0)^{-1} f$ 且 $g(\beta_1)^{-1} g = f(\gamma_1)^{-1} f$，其中 $\gamma_0 < \gamma_1$。那么

$$g(\beta_0) f(\gamma_0)^{-1} f = g(\beta_1) f(\gamma_1)^{-1} f$$

$$g(\beta_1)^{-1} g(\beta_0) f(\gamma_0)^{-1} f(\gamma_1) f(\gamma_1)^{-1} f = f(\gamma_1)^{-1} f$$

若 $\beta_1 \leq \beta_0 - \gamma_0 + \gamma_1$，则 $g(\beta_1)^{-} g(\beta_0) f(\gamma_0)^{-} f(\gamma_1)$ 是定义良好的路径。因此，若我们设 $p = g(\beta_1)^{-1} g(\beta_0) f(\gamma_0)^{-1} f(\gamma_1)$ 且 $q = f(\gamma_1)^{-1} f$，则有 $pq = q$。由于 $d(p), \gamma_1 < \omega^{\alpha+1}$，推论 6.4 和定义 6.1 推出 $d(p) = -\beta_1 + \beta_0 - \gamma_0 + \gamma_1 < \omega^\alpha$。若 $\beta_j \in [\omega^\alpha \cdot n_j, \omega^\alpha \cdot (n_j+1))$ 且 $\gamma_j \in [\omega^\alpha \cdot m_j, \omega^\alpha \cdot (m_j+1))$，则有 $d(p) \geq \omega^\alpha \cdot (-m_1 + m_0 - n_0 + n_1)$。因此 $-m_1 + m_0 - n_0 + n_1 = 0$，且 $m_0 - n_0 = m_1 - n_1$。若 $\beta_1 > \beta_0 - \gamma_0 + \gamma_1$，则 $p = f(\gamma_1)^{-1} f(\gamma_0) g(\beta_0)^{-1} g(\beta_1)$ 定义良好，$pq = q$，且同样的论证推出 $-m_1 + m_0 - n_0 + n_1 = 0$。因此 $v(f)_\alpha$ 定义良好。

为验证性质 2，设 $f \in \Lambda_{\alpha+1}$ with $d(f) \in [\omega^\alpha \cdot m, \omega^\alpha \cdot (m+1))$. 那么 $g = c(f) = s(f)$，并且 $g(\beta)^{-1} g = f(\gamma)^{-1} f$ 当且仅当 $\beta = 0$ 且 $\gamma = d(f)$。因此 $v(f)_\alpha = m$，证毕。

对于性质 3，设 $f \in \Lambda^*$ such that f is α-可消去的。对于 $\beta < \omega^{\alpha+1}$，设 $e = f(\beta)$ and $g = f(\beta)^{-1} f$。假设对 $n \in \mathbb{N}$ 有 $\beta \in [\omega^\alpha \cdot n, \omega^\alpha \cdot (n+1))$。若 $h = c(f)$，则存在 $\gamma, \delta < \omega^{\alpha+1}$ 使得

$$h(\gamma)^{-1} h = f(\delta)^{-1} f$$

$$h(\gamma)^{-1} h = f(\delta)^{-1} f(\beta) g$$

若 $\beta < \delta$，则得到

$$h(\gamma)^{-1} h = g(-\beta + \delta)^{-1} g$$

因此，若 $\gamma \in [\omega^\alpha \cdot m, \omega^\alpha \cdot (m+1))$ 且 $\delta \in [\omega^\alpha \cdot k, \omega^\alpha \cdot (k+1))$，则

$$v(g)_\alpha = -n + k - m = -v(e)_\alpha + v(f)_\alpha$$

如所愿。当 $\beta \geq \delta$ 时，我们有

$$h = h(\gamma) f(\delta)^{-1} f(\beta) g$$

$$h(\gamma - \delta + \beta)^{-1} h = g$$

因此

$$v(g)_\alpha = -m + k - n = -v(e)_\alpha + v(f)_\alpha$$

最后，请注意，对于不是 α-消去的 $f \in \Lambda^*$，我们尚未定义 $v(f)_\alpha$。然而，性质 2 和 3 仅在 f 是 α-消去的情况下适用。因此，只要确保当 $L(f) > \omega^\alpha$ 时有 $v(f)_\alpha = v(f(\omega^\alpha))_\alpha$，我们就可以任意定义 $v(f)_\alpha$（当 f 不是 α-消去时）。□

命题6.9。令 v 表示命题 *6.8* 中构造的函数。对于每个序数图 Λ 以及 $\zeta \in$序数类，存在一个表示

$$\pi : \mathcal{O}(\Lambda) \to B\left(\ell^2\left(\partial\Lambda \times \mathbb{Z}^{[0,\zeta)}\right)\right)$$

定义为对于 $e \in \Lambda^{\omega^*}$，

$$\pi(T_e)\xi_{f,n} = \begin{cases} \xi_{ef,m} & s(e) = r(f) \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

其中

$$m_\alpha = \begin{cases} n_\alpha + v(e)_\alpha & L(ef) \le \omega^{\alpha+1} \\ n_\alpha + v(ef)_\alpha - v(f)_\alpha & L(ef) > \omega^{\alpha+1} \end{cases}$$

证明。 我们通过证明 $\{\pi(T_e) : e \in \Lambda^{\omega^*}\}$ 满足定理 3.2 中的关系来进行。首先我们计算伴随。注意函数 $(f,n) \mapsto (ef,m)$ 是单射，因此我们有

$$\pi(T_e)^* \xi_{g,m} = \begin{cases} \xi_{e^{-1}g,n} & g \in e\partial\Lambda \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

其中

$$n_\alpha = \begin{cases} m_\alpha - v(e)_\alpha & L(g) \le \omega^{\alpha+1} \\ m_\alpha - v(g)_\alpha + v\left(e^{-1}g\right)_\alpha & L(g) > \omega^{\alpha+1} \end{cases}$$

设 $f \in \partial\Lambda$、 $n \in \mathbb{Z}^{[0,\zeta)}$ 和 $\alpha < \zeta$ 固定。假设 $s(e) = r(f)$，我们看到 $\pi(T_e)^* \pi(T_e) \xi_{f,n} = \xi_{ef,m} = \xi_{f,n}$。因此 $\pi(T_e)^* \pi(T_e) = \pi\left(T_{s(e)}\right)$，且关系 (1) 成立。对于关系 (2)，设 e、 $g \in \Lambda^{\omega^*}$ 使得 $s(g) = r(e)$，$s(e) = r(f)$，且 $d(g) < d(e)$。则对某些 m、 $k \in \mathbb{Z}^{[0,\zeta)}$，有 $\pi(T_g)\pi(T_e)\xi_{f,n} = \pi(T_g)\xi_{ef,m} = \xi_{gef,k}$。若 $L(ef) > \omega^{\alpha+1}$，则 $L(gef) > \omega^{\alpha+1}$，并且

$$\begin{aligned} k_\alpha &= m_\alpha + v(gef)_\alpha - v(ef)_\alpha \\ &= n_\alpha + v(ef)_\alpha - v(f)_\alpha + v(gef)_\alpha - v(ef)_\alpha \end{aligned}$$

因此，如果 $\pi(T_{ge})\xi_{f,n} = \xi_{gef,p}$，我们有 $p_\alpha = k_\alpha$。另一方面，如果 $L(ef) \le \omega^{\alpha+1}$，那么$g$, $e \in \Lambda_{\alpha+1}$ 并且

$$k_\alpha = m_\alpha + v(g)_\alpha = n_\alpha + v(e)_\alpha + v(g)_\alpha$$

由于 e, $g \in \Lambda_{\alpha+1}$、 e 和 g 都是 α-消去的。因此根据命题 6.8， $v(ge)_\alpha = v(g)_\alpha + v(e)_\alpha$，且 $p_\alpha = k_\alpha$。因此，关系 (2) 成立。对于关系 (3)，设 e, $g \in \Lambda^{\omega^*}$，其中 $e\Lambda \cap g\Lambda = \emptyset$，且 $s(e) = r(f)$。那么 $ef \notin g\partial\Lambda$，所以 $\pi(T_g)^*\pi(T_e) = 0$。最后，设 $v \in \Lambda_0$ 是 α-正则的。那么根据定义 3.9，对每个 $f \in v\partial\Lambda$， $L(f) > \omega^\alpha$ 且 $f = f(\omega^\alpha)\, f(\omega^\alpha)^{-1} f$。因此

$$\pi(T_v) = \sum_{e \in v\Lambda^{\omega^\alpha}} \pi(T_e)\pi(T_e)^*$$

并且满足关系 (4)。 □

引理 6.10. $\pi \circ \rho_\zeta$ 是单射。特别地， ρ_ζ 是单射。

*P*证明。 对于每个 $\alpha < \zeta$，定义 H_α 为 $\ell^2\left(\partial\Lambda \times \mathbb{Z}^{[0,\zeta)}\right)$ 的以下闭子空间 :

$$H_\alpha = \overline{\operatorname{span}}\left\{\xi_{f,n} : \text{for each } \beta \ge \alpha, L(f) \le \omega^{\beta+1} \text{ or } f \text{ is } \beta\text{-cancellative}\right\}$$

注意， H_α 是 $\pi \circ \rho_{\alpha+1}$ 的不变子空间：对于 $e \in \Lambda_{\beta+1}$， $L(ef) \le \omega^{\beta+1}$ 当且仅当 $L(f) \le \omega^{\beta+1}$，并且根据推论 6.4， ef 是 β-可消去的当且仅当 f 是 β-可消去的。令 $\pi_\alpha : \mathcal{O}(\Lambda_{\alpha+1}) \to B(H_\alpha)$ 为 $\pi \circ \rho_{\alpha+1}$ 在此子空间上的限制。

我们将使用超限归纳来证明 π_α 是单射。假设对每个 $\beta < \alpha$， π_β 是单射。由于 $H_\beta \subseteq H_\alpha$，我们也有 $\pi_\alpha \circ \rho_{\beta+1}^{\alpha+1}$ 是单射。如果 α 是后继序数（即对某个 $\beta < \alpha$有$\alpha = \beta + 1$），则这表明 $\pi_\alpha \circ \rho_\alpha^{\alpha+1}$是单射。另一方面，如果 α是非零极限序数，则由命题 3.8， $\mathcal{O}(\Lambda_\alpha)$是映射$\rho_\beta^{\beta+1}$： $\mathcal{O}(\Lambda_\beta) \to \mathcal{O}(\Lambda_{\beta+1})$的归纳极限。根据归纳假设，这些映射中的每一个都是单射，并且$\mathcal{O}(\Lambda_\alpha) = \cup_{\beta<\alpha}\mathcal{O}(\Lambda_{\beta+1})$。因此每个 $\pi_\alpha \circ \rho_{\beta+1}^{\alpha+1}$ 都是等距映射，这意味着$\pi_\alpha \circ \rho_\alpha^{\alpha+1}$的单射性。最后，如果 $\alpha = 0$，则命题 6.7 表明对每个 $v \in \Lambda_0$ 存在$\xi_{f,n} \in H_0$

使得 $\pi_0(T_v)\xi_{f,n}=\xi_{f,n}$。特别地，对每个 $v\in\Lambda_0$有 $\pi_0(T_v)\neq 0$，并且由于 $\mathcal{O}(\Lambda_0)\cong c_0(\Lambda_0)$，$\pi_0\circ\rho_0^1$ 是单射。

无论如何，我们有 $\pi_\alpha\circ\rho_\alpha^{\alpha+1}$是单射的。根据归纳假设，$\left(\psi_\alpha,\rho_\alpha^{\alpha+1}\right)$ 是 X_α的万有共变表示，因此现在只需在 π_α的像上构造一个规范作用，并应用规范不变唯一性定理。为此，对每个 $z\in\mathbb{T}$，定义一个酉元$U_z\in\mathcal{U}(H_\alpha)$，使得

$$U_z\xi_{f,n}=z^{n_\alpha}\xi_{f,n}$$

那么，对于 $e\in\Lambda^{\omega^\alpha}$和 $\xi_{f,n}$，若 H_α的一个基向量满足 $r(f)=s(e)$，且 f是 α-可消去的，则 $v(ef)_\alpha-v(f)_\alpha=v(e)_\alpha=1$。若 f不是 α-可消去的，则 $L(f)\leq\omega^{\alpha+1}$，因此无论哪种情况，

$$U_z\pi_\alpha\left(T_e\right)U_z^*\xi_{f,n}=z^{-n_\alpha}U_z\pi_\alpha\left(T_e\right)\xi_{f,n}=z^{-n_\alpha}U_z\xi_{ef,m}=z\xi_{ef,m}=z\pi_\alpha\left(T_e\right)\xi_{f,n}$$

其中 $m_\alpha=n_\alpha+1$。类似地，若 $e\in\Lambda_\alpha$，则 $(\mathrm{Ad}\ U_z\circ\pi_\alpha)(T_e)=\pi_\alpha(T_e)$。因此 $\mathrm{Ad}\,U_z\circ\pi_\alpha=\pi_\alpha\circ\Gamma_{\alpha,z}$，又因 $\pi_\alpha\circ\rho_\alpha^{\alpha+1}$是单射的，规范不变唯一性定理 [11, 定理 6.4] 推出π_α 是单射的。

因此，对于每个 $\alpha<\zeta$，$\pi\circ\rho_{\alpha+1}$ 都是单射。如果 ζ 是后继序数，这就立即意味着 $\pi\circ\rho_\zeta$ 是单射。否则，ζ 是极限序数，并且 $\mathcal{O}(\Lambda_\zeta)$ 是映射 $\rho_\alpha^{\alpha+1}\colon\mathcal{O}(\Lambda_\alpha)\to\mathcal{O}(\Lambda_{\alpha+1})$ 的归纳极限；根据归纳假设，这些映射都是单射。因此，$\mathcal{O}(\Lambda_\zeta)=\cup_{\alpha<\zeta}\mathcal{O}(\Lambda_{\alpha+1})$，又由于每个 $\pi\circ\rho_\zeta\circ\rho_{\alpha+1}^\zeta=\pi\circ\rho_{\alpha+1}$ 都是等距的，$\pi\circ\rho_\zeta$ 是单射。由于 $\pi\circ\rho_\zeta$ 是单射，ρ_ζ 确实是单射。□

As ρ_ζ 是单射，因此在本节余下部分中，我们将 $\mathcal{O}(\Lambda_\zeta)$ 视为 $\mathcal{O}(\Lambda)$ 的子代数 .

推论 6.11。对于 $\alpha<\zeta$，定义

$$\mathcal{D}_{\alpha+1}=C^*\left(T_pT_q^*:p,q\in\Lambda_\zeta,p\in\Lambda_{\alpha+1}\ \textit{iff}\ q\in\Lambda_{\alpha+1},p\Lambda^*\cup q\Lambda^*\subseteq C_\alpha\right)$$

于是，对于每个生成元 $T_pT_q^*$和基向量 $\xi_{f,n}\in\ell^2\left(\partial\Lambda\times\mathbb{Z}^{[0,\zeta)}\right)$，$\pi\left(T_pT_q^*\right)\xi_{f,n}=\xi_{pq^{-1}f,m}$*for* $m\in\mathbb{Z}^{[0,\zeta)}$ 满足 $m_\alpha=n_\alpha-v(q)_\alpha+v(p)_\alpha$。此外，存在一个连续作用 $\Gamma_\alpha\colon\mathbb{T}\to$自同构群 $(\mathcal{D}_{\alpha+1})$，由 $\Gamma_{\alpha,z}\left(T_pT_q^*\right)=z^{v(p)_\alpha-v(q)_\alpha}T_pT_q^*$定义，且它在 $\mathcal{D}_{\alpha+1}\cap\mathcal{O}(\Lambda_{\alpha+1})$上与 Γ_α一致。

证明。对每个 $z\in\mathbb{T}$，定义 $H=\ell^2\left(\partial\Lambda\times\mathbb{Z}^{[0,\zeta)}\right)$ 上的一个酉元 U_z，使其满足$U_z\xi_{f,n}=z^{n_\alpha}\xi_{f,n}$。我们将证明

$$U_z\pi\left(T_pT_q^*\right)U_z^*=\pi\left(z^{v(p)_\alpha-v(q)_\alpha}T_pT_q^*\right)$$

对于定义 $\mathcal{D}_{\alpha+1}$中的 p,q。由于根据引理 6.10，π 在 $\mathcal{D}_{\alpha+1}\subseteq\mathcal{O}(\Lambda_\zeta)$ 上是单射，且$z^{v(p)_\alpha-v(q)_\alpha}T_pT_q^*\in\mathcal{D}_{\alpha+1}$，这就完成了对 Γ_α 定义良好的证明。任取基向量 $\xi_{f,n}$，我们有 $\pi\left(T_pT_q^*\right)\xi_{f,n}=0$，除非 $f\in q\partial\Lambda$；此时 f 是 α-可消去的。因此，只需证明当 f 是 α-可消去的时，这些算子在 $\xi_{f,n}$ 上相等。注意，p 和 q 要么都属于 $\Lambda_{\alpha+1}$，要么 p 和 q 都属于 $\Lambda\backslash\Lambda_{\alpha+1}$。我们分别处理这两种情况。若 $p,q\in\Lambda_{\alpha+1}$，则 $v\left(pq^{-1}f\right)_\alpha=v(p)_\alpha-v(q)_\alpha+v(f)_\alpha$，所以

$$\begin{aligned}U_z\pi\left(T_pT_q^*\right)U_z^*\xi_{f,n}&=z^{-n_\alpha}U_z\pi\left(T_pT_q^*\right)\xi_{f,n}\\&=z^{-n_\alpha}U_z\xi_{pq^{-1}f,m}\\&=z^{-n_\alpha+n_\alpha+v\left(pq^{-1}f\right)_\alpha-v(f)_\alpha}\xi_{pq^{-1}f,m}\\&=z^{v(p)_\alpha-v(q)_\alpha}\pi\left(T_pT_q^*\right)\xi_{f,n}\end{aligned}$$

若 p，$q \in \Lambda\backslash\Lambda_{\alpha+1}$，则 $v\left(pq^{-1}f\right)_\alpha = v(p)\alpha$，且由于 $f \in q\partial\Lambda$, $v(f)_\alpha = v(q)\alpha$。因此，同样的等式成立。最后，要证明 Γ_α 在 $D_\alpha \cap \mathcal{O}(\Lambda_{\alpha+1})$ 上与 Γ_α 一致，注意 $v(p)_\alpha = 1$ 对于 $p \in \Lambda^{\omega^\alpha}$ 成立。□

接下来，我们着手证明 J_ζ 由 $\{T_v$ 生成的问题：$v \in \Lambda_0$ 是 ζ-正则的$\}$。由于对每个 α，$\mathcal{O}(\Lambda_0)$ 都被 Γ_α 固定，由这些 ζ- 正则顶点生成的理想是规范不变的。我们的策略是证明 J_ζ 也是规范不变的，并利用 Cuntz-Pimsner 代数的规范不变理想分类。

引理 6.12. 若 $\alpha < \zeta$, $a \in \mathcal{O}(\Lambda_{\alpha+1})$、$\varphi_\zeta(a) \in \mathcal{K}(X_\zeta)$，且 $h \in \Lambda_{\alpha+1}\backslash\Lambda_\alpha$ 满足 $s(h) = r(h)$，那么 $(\varphi_\zeta(aT_h^n))_{n\in\mathbb{N}}$ 有一个收敛子列。

证明。只需证明，对于 $\varepsilon > 0$，存在正的 $n \in \mathbb{N}$，使得对所有正的 $m \in \mathbb{N}$,

$$\|\varphi_\zeta(aT_h^n) - \varphi_\zeta(aT_h^{mn})\| \le \varepsilon$$

为说明这一点，设 $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{R}_{>0}$ 中一个收敛到 0 的序列，并对每个 ε_k 选取满足上述不等式的 n_k。于是序列

$$\varphi_\zeta(aT_h^{n_0}), \varphi_\zeta(aT_h^{n_0 n_1}), \varphi_\zeta(aT_h^{n_0 n_1 n_2}), \dots$$

是柯西序列，因此在 $\mathcal{K}(X_\zeta)$ 中收敛。因此我们固定 $\varepsilon > 0$，并着重构造 n，使其对所有正的 $m \in \mathbb{N}$都满足所需的不等式。

设 $S = \varphi_\zeta\left(aT_{s(h)}\right)$。由推论 4.9，存在有限的 $F \subseteq \Lambda^{\omega^\zeta}$，使得如果

$$\eta \in \overline{\operatorname{span}}_{\mathcal{O}(\Lambda_\zeta)}\left\{\delta_g : g \in \Lambda^{\omega^\zeta}\backslash F\right\}$$

且 $\|\eta\| \le 1$、$\|S\eta\| < \frac{1}{2}\varepsilon$。由推论 4.11，若对所有 $k \in \mathbb{N}$均有 $f \in \cap_{k\in\mathbb{N}} h^k\Lambda$ 和 $h^k f \ne f$，则$S\delta_f = 0$。因此，不失一般性，我们可以假设 F 不包含这样的 f。我们还假设每个 $f \in F$都满足 $r(f) = s(h)$，否则 $S\delta_f = 0$。因此，对每个 $f \in F$，有以下两种可能之一：

(1) 存在 $k > 0$，使得 $f \notin h^k\Lambda$。(2) 对某个 $m \in \mathbb{N}$，有 $f \in \cap_{k\in\mathbb{N}} h^k\Lambda$ 和 $h^m f = f$。

假设对于 $f \in F$，(1) 成立。定义 $n_f > 0$，使得 $f \notin h^{n_f}\Lambda$。若对于 $f \in F$，(2) 成立，则定义 $n_f > 0$，使得 $h^{n_f} f = f$。选取 n 作为 $\{n_f$ 的一个正公倍数：$f \in F\}$。定义 $G = \{g \in F$：对于某个 $m > 0\}$，有 $h^m g = g$。现在我们作如下观察：

断言。对于 $g \in \Lambda^{\omega^\zeta}$，$g \in G$ 当且仅当 $h^n g \in G$。此外，若 $g \notin G$，则 $h^n g \notin F$。

首先假设对于 $m > 0$，$g \in G$ 且 $h^m g = g$。那么对于所有 $k \in \mathbb{N}$，都有 $h^{mk} g = g$，并且 $g \in \cap_{k\in\mathbb{N}} h^k\Lambda$。根据 n 的构造，$h^n g = g \in G$。现在假设 $g \notin G$ 且 $f = h^n g \in F$。由于 $f \in h^n\Lambda \subseteq h^{n_f}\Lambda$，根据 n $f \in \cap_{k\in\mathbb{N}} h^k\Lambda$ 的构造，我们必有，因此 $h^n f = f$。于是 $h^{2n} g = h^n g$，由左消去可得 $h^n g = g \in F$。然而，这与 G 的构造矛盾。由于 $G \subseteq F$，我们还有 $h^n g \notin G$，从而证明了该断言。

现在定义子空间

$$C = \overline{\operatorname{span}}_{\mathcal{O}(\Lambda_\zeta)}\{\delta_g : g \in G\}$$
$$D = \overline{\operatorname{span}}_{\mathcal{O}(\Lambda_\zeta)}\left\{\delta_g : g \in \Lambda^{\omega^\zeta}\backslash G\right\}$$

根据上述断言， C 和 D 是算子 $Q = \varphi_\zeta(T_h^n)$的闭正交不变子空间。对于满足 $\|\eta\| \leq 1$的 $\eta \in X_\zeta$，令 $\eta = \eta_1 + \eta_2$满足 $\eta_1 \in C$和 $\eta_2 \in D$。由于 $C \perp D$， $\|\eta_2\| \leq 1$。于是 $\|Q\eta_2\| \leq 1$，因为 $\|T_h^n\| \leq 1$，并且

$$\{Q\eta_2, Q^n\eta_2\} \subseteq \overline{\operatorname{span}}_{\mathcal{O}(\Lambda_\zeta)} \left\{\delta_g : g \in \Lambda^{\omega^\zeta} \backslash F\right\}$$

那么根据 F 的定义，

$$\begin{aligned} \|SQ\eta - SQ^n\eta\| &\leq \|SQ\eta_1 - SQ^n\eta_1\| + \|SQ\eta_2 - SQ^n\eta_2\| \\ &= \|SQ\eta_2 - SQ^n\eta_2\| \\ &\leq \|SQ\eta_2\| + \|SQ^n\eta_2\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

引理 6.13. 若 $\alpha < \zeta$ 和 $a \in \mathcal{O}(\Lambda_{\alpha+1}) \cap J_\zeta$，则对每个不是 α-可消去且满足 $z \in \mathbb{T}$ 的 $f \in \Lambda^{\omega^\zeta}$，都有 $(\varphi_\zeta \circ \Gamma_{\alpha,z})(a)\,\delta_f = 0$。

证明。设给定 $\alpha < \zeta$ 和 $a \in \mathcal{O}(\Lambda_{\alpha+1}) \cap J_\zeta$。取 $f \in \Lambda^{\omega^\zeta}$ 使得 f 不是 α-可消去的，并由引理 6.3 选取 $g, h \in \Lambda_{\alpha+1}$，使得 $d(h) \geq \omega^\alpha$ 且 $hg^{-1}f = g^{-1}f$。由于 $g \in \Lambda_{\alpha+1}$且 J_ζ 是一个理想，因此我们有 $aT_g \in \mathcal{O}(\Lambda_{\alpha+1}) \cap J_\zeta$。此外， $g^{-1}f$ 不是 α-可消去的，且$\varphi_\zeta(aT_g)\,\delta_{g^{-1}f} = \varphi_\zeta(a)\,\delta_f$。因此，只需证明当 $hf = f$时 $\varphi_\zeta(a)\,\delta_f = 0$，我们不失一般性地假设 $hf = f$。

应用引理 6.12，我们得到一个收敛序列 $\varphi_\zeta(aT_h^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$，其中 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 递增。由于 φ_ζ在 J_ζ上是单射，$(aT_h^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛到某个 $b \in \mathcal{O}(\Lambda_{\alpha+1})$。由于引理 3.14 中定义的 Γ_α 是连续的，我们有

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-1} \int_0^\varepsilon \Gamma_{\alpha,e^{it}}(b)\; dt = \Gamma_{\alpha,1}(b) = b \tag{6.1}$$

另一方面， $d(h) \geq \omega^\alpha$，因此存在正的 $m \in \mathbb{N}$ 使得

$$\begin{aligned} \int_0^\varepsilon \Gamma_{\alpha,e^{it}}(b)\; dt &= \int_0^\varepsilon \Gamma_{\alpha,e^{it}}\left(\lim_{k\to\infty} aT_h^{n_k}\right) dt = \int_0^\varepsilon \lim_{k\to\infty} e^{imn_kt}\Gamma_{\alpha,e^{it}}(a)\,T_h^{n_k}\, dt \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_0^\varepsilon e^{imn_kt}\Gamma_{\alpha,e^{it}}(a)\; dt\, T_h^{n_k} = 0 \end{aligned}$$

由于$\left\|e^{imn_kt}\Gamma_{\alpha,e^{it}}(a)\,T_h^{n_k}\right\| = \|a\|$，我们应用控制收敛定理将极限移到积分号外。最后一个等式由黎曼－勒贝格引理得出。因此，根据方程 (6.1)， $b = 0$。我们还有

$$0 = \Gamma_{\alpha,z}(b) = \lim_{k\to\infty} z^{mn_k}\Gamma_{\alpha,z}(a)\,T_h^{n_k}$$

因此，$(\Gamma_{\alpha,z}(a)\;T_h^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ 也收敛到 0，并且

$$(\varphi_\zeta \circ \Gamma_{\alpha,z})(a)\,\delta_f = \varphi_\zeta(\Gamma_{\alpha,z}(a)\,T_h^{n_k})\,\delta_f = 0$$

□

引理 6.14. 对于所有 $\alpha < \zeta$和 $V \subseteq [\alpha, \zeta)$， $\mathcal{O}(\Lambda_\alpha) \cap \bigcap_{\gamma\in V} J_\gamma$是 $\mathcal{O}(\Lambda_\alpha)$中包含 $\{T_v :\, v \in \Lambda_0$ 的最小理想；对于所有 $\gamma \in V\}$， $v \in \Lambda_0$ 都是 γ-正则的。

证明. 对于每个 $\delta<\zeta$，定义 $\mathcal{J}_\delta=\mathcal{O}(\Lambda_\delta)\cap\bigcap_{\gamma\in V}J_\gamma$。若 δ 是后继序数，则根据归纳假设，$\mathcal{O}(\Lambda_\delta)$ 是一个 Cuntz-Pimsner代数，且 $\mathcal{J}_\delta$ 规范不变。我们对规范不变理想的分类使用超限归纳，以证明 $\mathcal{J}_\alpha$ 是 $\mathcal{O}(\Lambda_\alpha)$ 中由 $\{T_v$ 生成的理想：对于所有 $\gamma\in V\}$，$v\in\Lambda_0$ 都是 γ-正则的。假设 $\beta\leq\alpha$，并且对于所有 $\delta<\beta$，$\mathcal{J}_\delta$ 是 $\mathcal{O}(\Lambda_\delta)$ 中包含 $\mathcal{J}_0$ 的最小规范不变理想。我们将证明 $\mathcal{J}_\beta$ 是 $\mathcal{O}(\Lambda_\beta)$ 中包含 $\mathcal{J}_0$ 的最小规范不变理想。

显然，当 $\beta=0$ 时结论成立，因此假设 $\beta>0$。若 β 是极限序数，则 $\mathcal{O}(\Lambda_\beta)=\overline{\bigcup_{\delta<\beta}\mathcal{O}(\Lambda_\delta)}$，故由 [1, II.8.2.4], $\mathcal{J}_\beta=\overline{\bigcup_{\delta<\beta}\mathcal{J}_\delta}$ 对于包含 $\mathcal{J}_0$ 的 $\mathcal{O}(\Lambda_\beta)$ 的理想 $\mathcal{I}$，对每个 $\delta<\beta$，都有 $\mathcal{J}_\delta\subseteq\mathcal{I}$。因此 $\mathcal{J}_\beta\subseteq\mathcal{I}$，且 $\mathcal{J}_\beta$ 在 $\mathcal{O}(\Lambda_\beta)$ 中由 $\mathcal{J}_0$ 生成。

否则，设 $\beta=\delta+1$ 是后继序数。由 [12, 定理 8.6], ，$\mathcal{O}(\Lambda_\beta)$ 的规范不变理想 $\mathcal{I}$ 由 $\mathcal{O}(\Lambda_\delta)\cap\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{O}(\Lambda_\delta)\cap\left(\mathcal{I}+\psi_\delta^{(1)}(\mathcal{K}(X_\delta))\right)$ 唯一确定。若 $\mathcal{I}$ 是规范不变的，则

$$J_\delta=\psi_\delta^{(1)}(\mathcal{K}(X_\delta))\cap\mathcal{O}(\Lambda_\delta)\subseteq\left(\mathcal{I}+\psi_\delta^{(1)}(\mathcal{K}(X_\delta))\right)\cap\mathcal{O}(\Lambda_\delta)$$

根据归纳假设，

$$\mathcal{O}(\Lambda_\delta)\cap\left(\mathcal{J}_\beta+\psi_\delta^{(1)}(\mathcal{K}(X_\delta))\right)\subseteq J_\delta$$

因此，$\mathcal{O}(\Lambda_\delta)\cap\left(\mathcal{J}_\beta+\psi_\delta^{(1)}(\mathcal{K}(X_\delta))\right)$ 尽可能小，且 $\mathcal{J}_\beta$ 是包含 $\mathcal{J}_\beta\cap\mathcal{O}(\Lambda_\delta)=\mathcal{J}_\delta$ 的最小规范不变理想。由于 $\mathcal{J}_\delta$ 是$\mathcal{O}(\Lambda_\delta)$中包含 $\mathcal{J}_0$的最小规范不变理想，$\mathcal{J}_\beta$ 是包含 $\mathcal{J}_0$的最小规范不变理想，并且根据归纳假设，包含 $\{T_v$ 的最小规范不变理想：$v\in\Lambda_0$ 对所有 $\gamma\in V\}$都是 γ-正则的。该集合是规范不变的，因此 $\mathcal{J}_\beta$ 是由 $\mathcal{J}_0$生成的最小理想。然后由超限归纳，$\mathcal{J}_\alpha$ 由 $\{T_v$ 生成：$v\in\Lambda_0$ 对所有 $\gamma\in V\}$都是 γ-正则的。□

命题 6.15。对所有 $\alpha<\zeta$ 和 $V\subseteq[\alpha,\zeta)$，

$$\mathcal{O}(\Lambda_\alpha)\cap\bigcap_{\gamma\in V}J_\gamma=\overline{\operatorname{span}}\left\{T_pT_q^*:p,q\in\Lambda_\beta,s(p)=s(q)\ \textit{is }\gamma\textit{-regular for all }\gamma\in V\right\}$$

证明。令 $\mathcal{I}$ 为集合 $\operatorname{span}\{T_pT_q^*:\ p,\ q\in\Lambda_\beta,\ s(p)=s(q)$ 是 γ-正则$\}$。特别地，对于每个 $\gamma\in V$ 以及每个 γ-正则的 $v\in\Lambda_0$，我们有$T_v=T_v^*T_v\in\mathcal{I}$。由引理 6.14，$\mathcal{J}=\mathcal{O}(\Lambda_\beta)\cap\bigcap_{\gamma\in V}J_\gamma$ 是包含 $\{T_v$ 的 $\mathcal{O}(\Lambda_\beta)$ 的最小理想：$v\in\Lambda_0$，v 对所有 $\gamma\in V\}$ 都是 γ-正则，因此若证明 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{O}(\Lambda_\beta)$ 中的理想，就证明了 $\mathcal{J}\subseteq\mathcal{I}$。

令 $p,q,r\in\Lambda_\beta$ 满足 $s(p)=s(q)$ 是 γ-正则。若 $T_rT_pT_q^*\neq0$，则 $s(r)=r(p)$，$T_rT_pT_q^*=T_{rp}T_q^*$，且 $s(rp)=s(p)$ 是 γ-正则。同样，若 $T_pT_q^*T_r\neq0$，则 $r\in q\Lambda_\beta$ 或 $q\in r\Lambda_\beta$。假设对某个 $h\in\Lambda_\beta$ 有 $r=qh$。于是 $T_pT_q^*T_r=T_pT_h=T_{ph}$。又由于 $\Lambda_\beta\subseteq\Lambda_\gamma$，引理 3.5 推出 $s(ph)=s(h)$ 是 γ-正则。此外，若 $q=rh$，则 $T_pT_q^*T_r=T_pT_h^*$，且 $s(h)=s(q)$ 是 γ-正则。由于 $T_r^*T_pT_q^*=\left(T_qT_p^*T_r\right)^*$ 且 $T_pT_q^*T_r^*=\left(T_rT_qT_p^*\right)^*$，命题 3.7 推出 $\mathcal{I}$ 是一个理想，且 $\mathcal{J}\subseteq\mathcal{I}$。最后注意，对每个 $p,q\in\Lambda_\beta$，若 $s(p)=s(q)$ 是 γ-正则，则 $T_pT_q^*=T_pT_{s(p)}T_q^*$，因此 $\mathcal{I}\subseteq\mathcal{J}$。□

命题 6.16。对于固定的 $\alpha<\zeta$，对每个 $\beta\in(\alpha,\zeta]$，定义 $\mathcal{O}(\Lambda_\zeta)$ 的以下子代数

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_\beta=\overline{\operatorname{span}}\{&T_pT_q^*:p,q\in\Lambda_\zeta,v(p)_\theta=v(q)_\theta\ \textit{for all }\theta\in[\beta,\zeta),\\&p\Lambda^*\cup q\Lambda^*\subseteq C_\gamma\ \textit{for all }\gamma+1\in[\alpha+1,\zeta)\}\end{aligned}$$

那么，对所有 $\alpha < \gamma \leq \beta \leq \zeta$，存在相互对易的条件期望 E_γ^β： $\mathcal{A}_\beta \to \mathcal{A}_\gamma$，使其满足上述指定的 p, q

$$E_\gamma^\beta\left(T_pT_q^*\right) = \begin{cases} T_pT_q^* & \text{if } v(p)_\theta = v(q)_\theta \text{ for all } \theta \in [\gamma, \beta) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

证明。 我们发现，首先为 $\beta \in (\alpha, \zeta]$ 定义

$$\mathcal{B}_\beta = \overline{\operatorname{span}}\{T_pT_q^* : p, q \in \Lambda_\zeta, p \in \Lambda_\theta \text{ iff } q \in \Lambda_\theta \text{ for all } \theta \in [\beta, \zeta), \\ p\Lambda^* \cup q\Lambda^* \subseteq C_\gamma \text{ for all } \gamma + 1 \in [\alpha + 1, \zeta)\}$$

注意，对于推论 6.11 中定义的代数 $\mathcal{D}_{\beta+1}$， $\mathcal{B}_{\beta+1} \subseteq \mathcal{D}_{\beta+1}$。现在我们证明 $\mathcal{A}_\beta \subseteq \mathcal{B}_\beta$。设 $p, q \in \Lambda_\zeta$ 选取得使得 $T_pT_q^*$ 是 $\mathcal{A}_\beta$ 的生成元。那么对于所有 $\theta \in [\beta, \zeta)$， $v(p)_\theta = v(q)_\theta$。假设对于某个 $\theta \in [\beta, \zeta)$， $p \in \Lambda_\theta$ 且 $q \in \Lambda \backslash \Lambda_\theta$。那么存在 $\gamma \in [\theta, \zeta)$ 使得 $q \in \Lambda_{\gamma+1} \backslash \Lambda_\gamma$。于是 $v(p)_\gamma = 0 \neq v(q)_\gamma$，这与假设矛盾，因此 $\mathcal{A}_\beta \subseteq \mathcal{B}_\beta$。

现在我们证明 $\mathcal{A}_\beta$ 确实是一个 C^*-代数。设 p_1， q_1， p_2， $q_2 \in \Lambda_\zeta$ 如$\mathcal{A}_\beta$的定义中所给出。由前述论证， $p_1 \in \Lambda_{\theta+1}$ 当且仅当 $q_1 \in \Lambda_{\theta+1}$。不失一般性，假设$T_{p_1}T_{q_1}^*T_{p_2}T_{q_2}^* = T_{p_1q_1^{-1}p_2}T_{q_2}^*$。然后假设 $\theta + 1 < \zeta$，则 $p_2\Lambda^* \subseteq C_\theta$。因此 p_2是 θ-可消去的，并且由推论 6.4

$$v\left(p_1q_1^{-1}p_2\right)_\theta = \begin{cases} v(p_1)_\theta & p_1, q_1 \in \Lambda \backslash \Lambda_{\theta+1} \\ v(p_1)_\theta - v(q_1)_\theta + v(p_2)_\theta & p_1, q_1 \in \Lambda_{\theta+1} \end{cases}$$

在第一种情形中， $p_2 \in q_1\Lambda$，因此 $v(p_1)_\theta = v(q_1)_\theta = v(p_2)_\theta = v(q_2)_\theta$。否则， $v\left(p_1q_1^{-1}p_2\right)_\theta = v(p_2)_\theta = v(q_2)_\theta$。若 $\theta + 1 = \zeta$，则由引理 6.2，我们再次得到 $v\left(p_1q_1^{-1}p_2\right)_\theta = v(p_1)_\theta - v(q_1)_\theta + v(p_2)_\theta = v(q_2)_\theta$。由于 $p_1q_1^{-1}p_2C_\theta \subseteq p_1C_\theta$、 $T_{p_1}T_{q_1}^*T_{p_2}T_{q_2}^* \in \mathcal{A}_\beta$，且 $\mathcal{A}_\beta$是由这样的 $T_pT_q^*$稠密张成的 C^*-代数。

我们不在定义域 $\mathcal{A}_\beta$ 上定义每个 E_γ^β，而是先将其定义为映射 E_γ^β: $\mathcal{B}_\beta \to \mathcal{B}_\gamma$。我们从 α 开始，通过超限递归构造每个 E_γ^β。由于 $E_{\alpha+1}^{\alpha+1} = \mathrm{id}$，基例成立。假设对于某个 β，所有 $\alpha < \gamma \leq \theta < \beta$ 对应的 E_γ^θ 都存在。首先考虑 $\beta = \nu + 1$ 是后继序数且 $\beta < \zeta$ 的情形。此时 $\mathcal{B}_\beta \subseteq \mathcal{D}_\beta$，并且根据推论 6.11，存在作用 Γ_ν: $\mathbb{T} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{D}_\beta)$，其定义为 $\Gamma_{\nu,\, z}\left(T_pT_q^*\right) = z^{v(p)_\nu - v_{(q)^\nu}}T_pT_q^*$，因此我们可以定义

$$E_\nu^\beta(a) = \int_{\mathbb{T}} \overline{\Gamma}_{\nu,z}(a)\, dz$$

其中我们使用 $\mathbb{T}$ 上的正规化Haar测度。若 $\beta = \nu + 1 = \zeta$，则我们改为定义 $E_\nu^\beta(a) = \int_{\mathbb{T}} \Gamma_{\nu,\, z}(a)\ dz$，这里使用引理 3.14 中定义的通常规范作用。根据归纳假设，$\mathcal{O}(\Lambda_\zeta)$ 是一个 Cuntz-Pimsner代数，而这正是到不动点代数上的通常条件期望。注意， E_ν^β 确实映射到 $\mathcal{B}_\nu$ 中。为说明这一点，设 $T_pT_q^*$ 是 $\mathcal{B}_\beta$ 的一个生成元。那么，除非 $v(p)_\nu = v(q)_\nu$，否则 $E_\nu^\beta\left(T_pT_q^*\right) = 0$。在这种情况下，假设 $p \in \Lambda_\nu$，我们有 $v(p)_\nu = v(q)_\nu$。由于 $q \in \Lambda_{\nu+1}$，这意味着 $q \in \Lambda_\nu$，并且 $T_pT_q^* \in \mathcal{B}_\nu$。

现在处理 β 是极限序数的情形。若 $p, q \in \Lambda_\beta$，则存在 $\theta < \beta$ 使得 $p, q \in \Lambda_\theta$，因此 $\mathcal{B}_\beta = \cup_{\theta<\beta}\mathcal{B}_\theta$。对于 $\mathcal{B}_\theta$ 的生成元 $T_pT_q^*$， $\left(E_\gamma^\nu\left(T_pT_q^*\right)\right)_{\nu<\beta}$最终为常数，因此我们可以定义 $E_\gamma^\beta(a) = \lim_{\nu<\beta} E_\beta^\nu(a)$，其中 $a \in \cup_{\theta<\beta}\mathcal{B}_\theta$。对于生成元 $T_pT_q^*$ 的代数张成中的 a，存在 $\nu < \beta$ 使得 $E_\gamma^\beta(a) = E_\gamma^\nu(a)$。由于每个 E_γ^ν 都是压缩映射，因此 E_γ^β 是压缩映射，且 E_γ^β 可以扩展为定义在 $\mathcal{B}_\beta$ 上的映射。

现在我们已经定义了每个 E_γ^β，将 E_γ^β 的定义域限制为 $\mathcal{A}_\beta$。于是 E_γ^β 的值域为 $\mathcal{A}_\gamma$，且每个映射 $E_\beta^{\beta+1}$ 都是条件期望。由此可知，若 E_γ^β 是条件期望，则 $E_\gamma^{\beta+1}=E_\gamma^\beta\circ E_\beta^{\beta+1}$ 也是条件期望。最后，若 β 是极限序数，且对每个 $\theta<\beta$， E_γ^θ 都是条件期望，则对每个 $a\in\cup_{\theta<\beta}(\mathcal{B}_\theta\cap\mathcal{A}_\beta)$ 和 $b,\ c\in\mathcal{A}_\gamma$，

$$E_\gamma^\beta(bac)=\lim_{\nu<\beta}E_\gamma^\nu(bac)=\lim_{\nu<\beta}bE_\gamma^\nu(a)c=bE_\gamma^\beta(a)c$$

因此，对每一个 $\alpha<\gamma\leq\beta\leq\zeta$， E_γ^β 都是一个条件期望。 □

引理 6.17. 命题 *6.16* 中定义的条件期望 $E_\gamma^\beta\colon\mathcal{A}_\beta\to\mathcal{A}_\gamma$ 是忠实的。

证明. 由于形如 $E_\beta^{\beta+1}$ 的期望是通过对 $\mathbb{T}$ 的作用进行平均化而得到的，若非极限序数 β 的情形 E_γ^β，证明便已完成。相反，我们首先证明，对每一个 $\beta\in[\alpha+1,\zeta)$、$a\in\mathcal{A}_\beta$ 以及一对基向量 $\xi_{f,n},\xi_{g,m}\in\ell^2\left(\partial\Lambda\times\mathbb{Z}^{[0,\zeta)}\right)$，

$$\left\langle\xi_{f,n},\pi\left(E_\gamma^\beta(a)\right)\xi_{g,m}\right\rangle=\begin{cases}\langle\xi_{f,n},\pi(a)\xi_{g,m}\rangle & n_\theta=m_\theta\text{ for all }\theta\in[\gamma,\beta)\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}\tag{6.2}$$

显然，当 $\beta=\gamma=\alpha+1$ 时该等式成立。为了应用超限归纳，假设$\theta\in(\alpha,\zeta]$，并且对所有 $\alpha<\gamma\leq\beta<\theta$， E_γ^β 满足等式 (6.2)。由线性性与连续性，只需证明当 $a=T_pT_q^*$ 时等式 (6.2) 成立，其中 $p,q\in\Lambda_\zeta$ 满足 $v(p)\eta=v(q)\eta$ 对所有$\eta\in[\theta,\zeta)$，且 $p\Lambda^*\cup q\Lambda^*\subseteq C_\gamma$ 对所有 $\gamma+1\in[\alpha+1,\zeta)$。若 $\theta=\nu+1$，则由于 $\mathcal{A}_\theta\subseteq\mathcal{D}_\theta$，推论 6.11 蕴含

$$\begin{aligned}\left\langle\xi_{f,n},\pi\left(E_\nu^\theta\left(T_pT_q^*\right)\right)\xi_{g,m}\right\rangle&=\int_{\mathbb{T}}\left\langle\xi_{f,n},U_z\pi\left(T_pT_q^*\right)U_z^*\xi_{g,m}\right\rangle\,dz\\&=\int_{\mathbb{T}}z^{m_\nu}\left\langle U_z^*\xi_{f,n},\pi\left(T_pT_q^*\right)\xi_{g,m}\right\rangle\,dz\\&=\int_{\mathbb{T}}z^{m_\nu-n_\nu}\left\langle\xi_{f,n},\pi\left(T_pT_q^*\right)\xi_{g,m}\right\rangle\,dz\\&=\begin{cases}\left\langle\xi_{f,n},\pi\left(T_pT_q^*\right)\xi_{g,m}\right\rangle & m_\nu=n_\nu\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}\end{aligned}$$

并且由于 $E_\gamma^\theta=E_\gamma^\nu\circ E_\nu^\theta$，等式 (6.2) 对所有 E_γ^θ 都成立。若 θ 是极限序数，则由于 $p\in\Lambda_\theta$ 当且仅当 $q\in\Lambda_\theta$，存在一个后继序数 $\nu<\theta$，使得对于所有 $\eta\in[\nu,\theta)$， $p\in\Lambda_\eta$ 当且仅当 $q\in\Lambda_\eta$。因此，对所有这样的 η，都有 $T_pT_q^*\in\mathcal{D}_\eta$。由于 $\left(E_\gamma^\eta\left(T_pT_q^*\right)\right)_\eta$ 最终会保持不变，我们可以选取 η，使得 $E_\gamma^\eta\left(T_pT_q^*\right)=E_\gamma^\beta\left(T_pT_q^*\right)$；再应用归纳假设，可知等式 (6.2) 对 E_γ^β 也成立。

现在，根据等式 (6.2)，我们得到

$$\begin{aligned}\left\langle\xi_{f,n},\pi\left(E_\gamma^\beta(a^*a)\right)\xi_{f,n}\right\rangle&=\langle\xi_{f,n},\pi(a^*a)\xi_{f,n}\rangle\\&=\langle\pi(a)\xi_{f,n},\pi(a)\xi_{f,n}\rangle\end{aligned}$$

因此，若 $E_\gamma^\beta(a^*a)=0$，则 $\pi(a)=0$，从而由 π 的单射性可得 $a^*a=0$。剩下的只有 $\beta=\zeta$ 的情形。若 $\zeta=\nu+1$，则 $E_\gamma^\zeta=E_\gamma^\nu\circ E_\nu^\zeta$，且 E_ν^ζ 是忠实的。另一方面，若 ζ 是极限序数，则由与之前相同的论证可知等式 (6.2) 成立，且 E_γ^ζ 是忠实的。□

引理 6.18。 若 $\alpha<\zeta$ 且 $f\in\Lambda^{\omega^\zeta}$，则对于 $\eta\in\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{\delta_e:\ e\in\Lambda^{\omega^\alpha}r(f)\}$，

$$\|\eta\|=\|\varphi_\zeta(\psi_\alpha(\eta))\,\delta_f\|$$

证明。 任取 $f\in\Lambda^{\omega^\zeta}$。只需检验当 η 具有如下形式时等式成立

$$\eta=\sum_{e\in\Lambda^{\omega^\alpha}r(f)}\lambda_e\delta_e$$

其中 $\lambda_e\in\mathbb{C}$。于是

$$\|\eta\|=\left\|\sum_{e\in\Lambda^{\omega^\alpha}r(f)}\lambda_e\delta_e\right\|$$

$$\|\varphi_\zeta(\psi_\alpha(\eta))\,\delta_f\|=\left\|\sum_{e\in\Lambda^{\omega^\alpha}r(f)}\lambda_e\delta_{ef}\right\|$$

对于 $e_1,\ e_2\in\Lambda^{\omega^\alpha}$，注意到 $e_1f=e_2f$ 蕴含 $(e_1f)(\omega^\alpha)=e_1=(e_2f)(\omega^\alpha)=e_2$。因此，由引理 4.8 可知，两个范数都等于

$$\left(\sum_{e\in\Lambda^{\omega^\alpha}r(f)}|\lambda_e|^2\right)^{1/2}$$

□

注 6.19。 在上述证明中，关键在于 η 属于 $\{\delta_e$ 的 $\mathbb{C}$-张成空间：$e\in\Lambda^{\omega^\alpha}r(f)\}$，而不只是 $\mathcal{O}(\Lambda_\alpha)$-张成空间。

引理 6.20。 对于每个 $\alpha<\zeta$, $\mathcal{O}(\Lambda_\alpha)\cap\left(J_\zeta+\psi_\alpha^{(1)}(\mathcal{K}(X_\alpha))\right)\subseteq J_\alpha$。特别地，$\mathcal{O}(\Lambda_\alpha)\cap J_\zeta\subseteq J_\alpha$。

证明。设给定 $\varepsilon>0$，且对 $b\in J_\zeta$ 有 $a=b+c\in\mathcal{O}(\Lambda_\alpha)$，对 S 有 $c=\psi_\alpha^{(1)}(S)$。我们应用推论 4.9 的第 (3) 部分证明 $\varphi_\alpha(a)\,P_v\in\mathcal{K}(X_\alpha)$，然后应用第 (2) 部分证明 $\varphi_\alpha(a)\in\mathcal{K}(X_\alpha)$。选取有限的 $F\subseteq\Lambda^{\omega^\zeta}$，使得对所有 $\eta\in\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\left\{\delta_f:\ f\in\Lambda^{\omega^\zeta}\backslash F\right\}$ 满足 $\|\eta\|\le1,\ \|\varphi_\zeta(b)\,\eta\|<\frac12\varepsilon$。此外，选取有限的 $G\subseteq\Lambda^{\omega^\alpha}$，使得对所有 $\mu\in\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{\delta_g:\ g\in\Lambda^{\omega^\alpha}\backslash G\}$ 满足 $\|\mu\|\le1,\ \|S\mu\|<\frac12\varepsilon$。定义 $H=\{f(\omega^\alpha):\ f\in F\}$，并令 $\xi\in\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{\delta_h:\ h\in\Lambda^{\omega^\alpha}\backslash(G\cup H)\}$ 满足 $\|\xi\|\le1$。若 $v\in\Lambda_0$ 且 $v\Lambda^{\omega^\zeta}=\emptyset$，则对所有 $h\in\Lambda^{\omega^\alpha}v,\ T_h\in$ 属于 φ_ζ 的核。因此

$$\begin{aligned}\|\psi_\alpha(\varphi_\alpha(a)\,P_v\xi)\|&=\|(b+c)\,\psi_\alpha(P_v\xi)\|\\&=\|c\psi_\alpha(P_v\xi)\|\\&=\|\psi_\alpha(SP_v\xi)\|<\frac12\varepsilon\end{aligned}$$

另一方面，如果 $q\in v\Lambda^{\omega^\zeta}$，那么根据引理 6.18，

$$\begin{aligned}\|\varphi_\alpha(a)\,P_v\xi\|&=\|\varphi_\zeta(a\psi_\alpha(P_v\xi))\,\delta_q\|\\&\le\|\varphi_\zeta(b)\,\varphi_\zeta(\psi_\alpha(P_v\xi))\,\delta_q\|+\|\varphi_\zeta(c\psi_\alpha(P_v\xi))\,\delta_q\|\\&<\frac12\varepsilon+\|S\xi\|<\varepsilon\end{aligned}\tag{6.3}$$

因为 $\|\varphi_\zeta(\psi_\alpha(P_v\xi))\,\delta_q\|\le\|\xi\|\le1$。由于 $G\cup H$ 是有限的，$\varphi_\alpha(a)\,P_v\in\mathcal{K}(X_\alpha)$。

设 $V=\{s(g):\ g\in G\}\cup\{s(f(\omega^\alpha)):\ f\in F\}$，并假设 $v\in\Lambda_0\backslash V,\xi\in$张成 $\{\delta_h:\ h\in\Lambda^{\omega^\alpha}v\}$，且 $\|\xi\|\leq 1$。若 $v\Lambda^{\omega^\zeta}=\emptyset$，则与之前相同的论证表明 $\|\varphi_\alpha(a)\xi\|<\varepsilon$。此外，若$q\in v\Lambda^{\omega^\zeta}$且 $h\in\Lambda^{\omega^\alpha}v$，则 $hq\notin F$且 $h\notin G$。因此，由公式（6.3），$\|\varphi_\alpha(a)\xi\|<\varepsilon$。由于 V是有限的，我们有映射 $v\mapsto\|\varphi_\alpha(a)P_v\|$属于 $c_0(\Lambda_0)$，且 $\varphi_\alpha(a)\in\mathcal{K}(X_\alpha)$。

最后，设给定了 $p\in$核 φ_α。如果 $h\in\Lambda^{\omega^\zeta}$，那么

$$\|\varphi_\zeta(p)\delta_h\|=\left\|\varphi_\zeta\left(pT_{h(\omega^\alpha)}\right)\delta_{h(\omega^\alpha)^{-1}h}\right\|=\left\|\varphi_\zeta\left(\psi_\alpha\left(\varphi_\alpha(p)\delta_{h(\omega^\alpha)}\right)\right)\delta_{h(\omega^\alpha)^{-1}h}\right\|=0$$

因此 $p\in$核φ_ζ，并且由于 $b\in J_\zeta$，

$$ap=bp+cp=cp=\psi_\alpha^{(1)}\left(S\varphi_\alpha(p)\right)=0$$

根据定义，这说明 $a\in$(核φ_α)$^\perp$。 □

引理 6.21。设 $\alpha<\zeta$，并令 $\mathcal{A}_\zeta$ 为命题 *6.16* 中定义的代数。那么对于所有$a\in\mathcal{O}(\Lambda_{\alpha+1})\cap J_\zeta$和 $z\in\mathbb{T}$，$\Gamma_{\alpha,\ z}(a^*)\mathcal{O}(\Lambda_\zeta)\Gamma_{\alpha,\ z}(a)\subseteq\mathcal{A}_\zeta$以及$\Gamma_{\alpha,\ z}(a)\in\mathcal{A}_{\alpha+1}$。

证明。由于 $\mathcal{O}(\Lambda_\zeta)$由满足 $p_1,\ q_1\in\Lambda_\zeta$的元素 $T_{p_1}T_{q_1}^*$稠密张成，我们选取这样的路径并证明 $aT_{p_1}T_{q_1}^*a\subseteq\mathcal{A}_\zeta$。于是存在 $\gamma<\zeta$，使得 $p_1,\ q_1\in\Lambda_\theta$对于所有 $\theta>\gamma$，特别地，$v(p_1)_\theta=v(q_1)_\theta=0$。因此，当且仅当 $p_1\Lambda^*\cup q_1\Lambda^*\subseteq C_\gamma$对于所有 $\gamma+1\in[\alpha+1,\zeta$时，$T_{p_1}T_{q_1}^*\in\mathcal{A}_\zeta$。

对每个满足 $\gamma+1\in[\alpha+1,\zeta)$的 γ，由引理 6.20 得 $J_\zeta\cap\mathcal{O}(\Lambda_{\alpha+1})\subseteq J_{\gamma+1}$。因此$a\in\mathcal{O}(\Lambda_{\alpha+1})\cap\bigcap_{\gamma+1\in[\alpha+1,\zeta)}J_{\gamma+1}$，并且由引理 6.14，该理想由顶点投影生成。于是$\Gamma_{\alpha,z}(a)$也属于该理想，并且由命题 6.15，该理想对满足如下条件的 $p_2,q_2\in\Lambda_{\alpha+1}$由$T_{p_2}T_{q_2}^*$稠密张成：对所有 $\gamma+1\in[\alpha+1,\zeta)$，$s(p_2)=s(q_2)$是 $\gamma+1$-正则的。因此由对称性，只需证明对这样的 p_1,q_1,p_2,q_2，$T_{p_1}T_{q_1}^*T_{p_2}T_{q_2}^*=T_{p_3}T_{q_3}^*$，其中 $q_3\in\Lambda_\zeta$对所有 $\gamma+1\in[\alpha+1,\zeta)$满足 $q_3\Lambda^*\subseteq C_\gamma$。若 $T_{p_1}T_{q_1}^*T_{p_2}T_{q_2}^*\neq 0$，则要么 $p_2\in q_1\Lambda$，要么$q_1\in p_2\Lambda$。若 $p_2\in q_1\Lambda$，则 $T_{p_1}T_{q_1}^*T_{p_2}T_{q_2}^*=T_{p_1q_1^{-1}p_2}T_{q_2}^*$，并且对所有 $\gamma+1\in[\alpha+1,\zeta)$，$s(q_2)=s(p_2)$是 $\gamma+1$-正则的。由推论 6.6 和推论 6.4，对每个 $\gamma+1\in[\alpha+1,\zeta)$有 $q_2\Lambda^*\subseteq C_\gamma$。另一方面，若 $q_1\in p_2\Lambda$，则对每个$\gamma+1\in[\alpha+1,\zeta)$有 $T_{p_1}T_{q_1}^*T_{p_2}T_{q_2}^*=T_{p_1}T_{q_2p_2^{-1}q_1}^*$和 $q_2p_2^{-1}q_1\Lambda^*\subseteq q_2\Lambda^*\subseteq C_\gamma$。

为说明$\Gamma_{\alpha,\ z}(a)\in\mathcal{A}_{\alpha+1}$，注意，对于 $p,\ q\in\Lambda_{\alpha+1}$且 $s(p)=s(q)$ $\gamma+1$-正则的所有$\gamma+1\in[\alpha+1,\zeta)$，$p\Lambda^*\cup q\Lambda^*\subseteq C_\gamma$对每个 $\gamma+1\in[\alpha+1,\zeta)$都成立。由于 $p,\ q\in\Lambda_{\alpha+1}$，我们还有$v(p)_\theta=v(q)_\theta=0$对所有 $\theta\geq\alpha+1$都成立。因此 $T_pT_q^*\in\mathcal{A}_{\alpha+1}$，根据前面的评论，$\Gamma_{\alpha,\ z}(a)$可由此类 $T_pT_q^*$的线性组合逼近。□

引理 6.22。假设 $\alpha+1<\zeta$，并对每个 $z\in\mathbb{T}$ 和 $\theta\in[\alpha,\zeta)$ 酉元$U_{\theta,\ z}\in\mathcal{U}(X_\zeta)$定义为$U_{\theta,\ z}\delta_f=z^{v(f)_\theta}\delta_f$。那么对所有 $\theta+1<\zeta$ 和 $b\in\mathcal{A}_{\theta+1}$，

$$U_{\theta,z}\varphi_\zeta(b)U_{\theta,z}^*=\varphi_\zeta\left(\overline{\Gamma}_{\theta,z}(b)\right)$$

同样，如果 $b\in\mathcal{A}_\zeta\cap J_\zeta$和 $\theta+1=\zeta$，那么 $\mathrm{Ad}U_{\theta,\ z}\circ\varphi_\zeta=\varphi_\zeta\circ\Gamma_{\theta,\ z}$。此外，如果 $b\in\mathcal{A}_\zeta$为正且 $b\in$核 φ_ζ，那么 $E_{\alpha+1}^\zeta(b)\in$核φ_ζ。

证明。令 $\theta+1<\zeta$，并假设 $p,\ q\in\Lambda^{\omega^\zeta}$满足：$p\in\Lambda_{\theta+1}$当且仅当 $q\in\Lambda_{\theta+1}$且 $p\Lambda^*\cup q\Lambda^*\subseteq C_\theta$。若$p,q\in\Lambda_{\theta+1}$且 $\varphi_\zeta\left(T_pT_q^*\right)\delta_f\neq 0$，则 f是 θ-可消去的，并且 $v\left(pq^{-1}f\right)_\theta=v(p)_\theta-v(q)_\theta+v(f)_\theta$。

If $p,\ q\in\Lambda\backslash\Lambda_{\theta+1}$, 则 $v\left(pq^{-1}f\right)_\theta=v(p)_\theta$ 且 $v(f)_\theta=v\left(pq^{-1}f\right)_\theta=v(q)_\theta$。无论如何，

$$\begin{aligned}U_{\theta,z}\varphi_\zeta\left(T_pT_q^*\right)U_{\theta,z}^*\delta_f&=z^{-v(f)_\theta}U_{\theta,z}\varphi_\zeta\left(T_pT_q^*\right)\delta_f\\&=z^{v\left(pq^{-1}f\right)_\theta-v(f)_\theta}\varphi_\zeta\left(T_pT_q^*\right)\delta_f\\&=\varphi_\zeta\left(\overline{\Gamma}_{\theta,z}\left(T_pT_q^*\right)\right)\delta_f\end{aligned}$$

由此可得第一个断言。若 $\theta+1=\zeta$ 且 $b\in\mathcal{A}_\zeta\cap J_\zeta$, 则根据引理 6.13, $\varphi_\zeta(b)\,\delta_f=0$, 除非 f 是 θ-可消去的；相同的计算表明 $\mathrm{Ad}U_{\theta,\ z}\circ\varphi_\zeta=\varphi_\zeta\circ\Gamma_{\theta,\ z}$。

为证明最后一个断言，我们先用超限归纳证明：对每个 $b\in\mathcal{A}_\beta$ 和 $f,\ g\in\Lambda^{\omega^\zeta}$,

$$\left\langle\delta_f,\varphi_\zeta\left(E_\gamma^\beta(b)\right)\delta_g\right\rangle=\begin{cases}\langle\delta_f,b\delta_g\rangle & v(f)_\theta=v(g)_\theta\ \text{ for all }\theta\in[\gamma,\beta)\\0 & \text{otherwise}\end{cases}\tag{6.4}$$

显然，若 $\beta=\gamma$，则该断言成立。此外，若 $\beta=\nu+1$ 且该断言对 E_γ^ν 成立，则

$$\begin{aligned}\left\langle\delta_f,\varphi_\zeta\left(E_\gamma^\beta(b)\right)\delta_g\right\rangle&=\left\langle\delta_f,\varphi_\zeta\left(E_\gamma^\nu\circ E_\nu^\beta(b)\right)\delta_g\right\rangle\\&=\begin{cases}\left\langle\delta_f,\varphi_\zeta\left(E_\nu^\beta(b)\right)\delta_g\right\rangle & v(f)_\theta=v(g)_\theta\ \text{ for all }\theta\in[\gamma,\nu)\\0 & \text{otherwise}\end{cases}\end{aligned}$$

在第一种情况下计算 $\left\langle\delta_f,\ \varphi_\zeta\left(E_\nu^\beta(b)\right)\delta_g\right\rangle$，可得

$$\begin{aligned}\left\langle\delta_f,\varphi_\zeta\left(E_\nu^\beta(b)\right)\delta_g\right\rangle&=\int_{\mathbb{T}}\left\langle\delta_f,\varphi_\zeta\left(\overline{\Gamma}_{\nu,z}(b)\right)\delta_g\right\rangle\,dz\\&=\int_{\mathbb{T}}\left\langle\delta_f,U_{\nu,z}\varphi_\zeta(b)\,U_{\nu,z}^*\delta_g\right\rangle\,dz\\&=\int_{\mathbb{T}}\left\langle U_{\nu,z}^*\delta_f,\varphi_\zeta(b)\,U_{\nu,z}^*\delta_g\right\rangle\,dz\\&=\int_{\mathbb{T}}z^{v(g)_\nu-v(f)_\nu}\left\langle\delta_f,\varphi_\zeta(b)\,\delta_g\right\rangle\,dz\\&=\begin{cases}\langle\delta_f,\varphi_\zeta(b)\,\delta_g\rangle & v(g)_\nu=v(f)_\nu\\0 & \text{otherwise}\end{cases}\end{aligned}$$

因此 E_γ^β 满足方程 (6.4)。若 β 是极限序数，且 $T_pT_q^*$ 是 $\mathcal{A}_\beta$ 的生成元，则或者 $E_\gamma^\beta\left(T_pT_q^*\right)=0$, 此时方程 (6.4) 成立；或者 $\left(E_\gamma^\eta\left(T_pT_q^*\right)\right)_\eta$ 最终为常数。在这种情况下，我们可以选取 η 使得 $E_\gamma^\eta\left(T_pT_q^*\right)=E_\gamma^\beta\left(T_pT_q^*\right)$。因此，方程 (6.4) 对 $b=T_pT_q^*$ 成立，进而对任意 $b\in\mathcal{A}_\beta$ 成立。

令 $b\in\mathcal{A}_\beta\cap$ 核 φ_ζ 为正。则

$$\left\langle\delta_f,\varphi_\zeta\left(E_{\alpha+1}^\beta(b)\right)\delta_f\right\rangle=\langle\delta_f,\varphi_\zeta(b)\,\delta_f\rangle=0$$

对所有 $f\in\Lambda^{\omega^\zeta}$ 均成立。由于 $E_{\alpha+1}^\beta(b)$ 为正，这意味着 $E_{\alpha+1}^\beta(b)\ \in$ 核 φ_ζ。 □

命题 6.23。 对于每个 $\alpha<\zeta$, $\mathcal{O}\left(\Lambda_{\alpha+1}\right)\cap J_\zeta$ 都是 $\mathcal{O}(\Lambda_{\alpha+1})$的规范不变理想。

证明。 对于 $z\in\mathbb{T}$, 按照引理 6.22 的定义，令 $U_{\alpha,z}\in\mathcal{U}(X_\zeta)$ 为 $U_{\alpha,z}\delta_f=z^{v(f)_\alpha}\delta_f$。那么，由引理 6.21 可得，对于 $a\in\mathcal{O}(\Lambda_{\alpha+1})\cap J_\zeta$, $\Gamma_{\alpha,z}(a)\in\mathcal{A}_{\alpha+1}$, 因此 $U_{\alpha,z}\varphi_\zeta(a)\,U_{\alpha,z}^*=\varphi_\zeta(\Gamma_{\alpha,z}(a))$。于是 $\varphi_\zeta(\Gamma_{\alpha,z}(a))\in\mathcal{K}(X_\zeta)$, 因为 $\varphi_\zeta(a)\in\mathcal{K}(X_\zeta)$。

剩下只需证明，对于所有 $b \in \ker \varphi_\zeta$，$b\Gamma_{\alpha,z}(a) = 0$。令 (e_λ) 为 J_ζ 的一个近似单位，这等价于证明 $\Gamma_{\alpha,z}(a^* e_\lambda^*) b^* b \Gamma_{\alpha,z}(e_\lambda a) = 0$。应用引理 6.21，定义

$$\begin{aligned} c &= E_{\alpha+1}^{\zeta}\left(\Gamma_{\alpha,z}\left(a^* e_\lambda^*\right) b^* b \Gamma_{\alpha,z}\left(e_\lambda a\right)\right) \\ &= \Gamma_{\alpha,z}(a^*)\, E_{\alpha+1}^{\zeta}\left(\Gamma_{\alpha,z}\left(e_\lambda^*\right) b^* b \Gamma_{\alpha,z}\left(e_\lambda\right)\right) \Gamma_{\alpha,z}(a) \end{aligned}$$

并注意到，由于 $b \in$ 核 φ_ζ，引理 6.22 蕴含 $c \in$ 核 φ_ζ。因此 $\varphi_\zeta\left(\Gamma_{\alpha,z}(c)\right) = U_{\alpha,z}^* \varphi_\zeta(c) U_{\alpha,z} = 0$，且 $\Gamma_{\alpha,z}(c) \in$ 核 φ_ζ。然而，

$$\overline{\Gamma}_{\alpha,\overline{z}}(c) = a^* \overline{\Gamma}_{\alpha,\overline{z}}\left(E_{\alpha+1}^{\zeta}\left(\Gamma_{\alpha,z}\left(e_\lambda^*\right) b^* b \Gamma_{\alpha,z}\left(e_\lambda\right)\right)\right) a$$

由于 $a \in (\text{核}\,\varphi_\zeta)^\perp$，$\Gamma_{\alpha,z}(c) = 0$，且 $c = 0$。由于根据命题 6.16，$E_{\alpha+1}^{\zeta}$ 是忠实的，$\Gamma_{\alpha,z}(a^* e_\lambda^*) b^* b \Gamma_{\alpha,z}(e_\lambda a) = 0$，即为所求。□

引理 6.24. 对于 $v \in \Lambda_0$，$T_v \in J_\zeta$ 当且仅当 v 是 ζ-正则的。

证明. 首先假设 $v \in \Lambda_0$ 且 $T_v \in J_\zeta$。由推论 4.9，存在有限的 $F \subseteq \Lambda^{\omega^\zeta}$，使得对所有$\xi \in$张成 $\left\{\delta_f : f \in \Lambda^{\omega^\zeta} \backslash F\right\}$，其中 $\|\xi\| \leq 1$，$\|\varphi_\zeta(T_v)\ \xi\| < 1$。注意到对每个 $f \in v\Lambda^{\omega^\zeta}$，$\|\varphi_\zeta(T_v)\ \delta_f\| = \|\delta_f\| = \left\|T_{s(f)}\right\| = 1$，而这蕴含 $f \in F$。因此 $v\Lambda^{\omega^\zeta} \subseteq F$，且 v是 ζ-行有限的。现假设 $e \in v\Lambda_\zeta$。若 $s(e)\,\Lambda^{\omega^\zeta} = \emptyset$，则 $T_e \in$核 φ_ζ且 $T_v T_e = T_e = 0$，这是一个矛盾。因此 $s(e)\,\Lambda^{\omega^\zeta} \neq \emptyset$，且 v是 ζ-正则的。

对于另一方向的蕴含，设 $v \in \Lambda_0$ 为 ζ-正则。定义 $F = v\Lambda^{\omega^\zeta}$，它是有限的。注意到对所有 $f \in \Lambda^{\omega^\zeta} \backslash F$，$\varphi_\zeta(T_v)\ \delta_f = 0$。因此若 $\xi \in$ 张成 $\left\{\delta_f : f \in \Lambda^{\omega^\zeta} \backslash F\right\}$，$\varphi_\zeta(T_v)\ \xi = 0$，并且由推论 4.9，$\varphi_\zeta(T_v) \in \mathcal{K}(X_\zeta)$。现给定 $b \in$核 φ_ζ。则

$$\rho_\zeta(bT_v) = \rho_\zeta(b) \sum_{f \in v\Lambda^{\omega^\zeta}} T_f T_f^* = \sum_{f \in v\Lambda^{\omega^\zeta}} \psi_\zeta\left(\varphi_\zeta(b)\,\delta_f\right) T_f^* = 0$$

由于由引理 6.10，ρ_ζ 是单射的，我们有 $bT_v = 0$，并且 $T_v \in (\text{核}\,\varphi_\zeta)^\perp$。 □

Pro命题 6.25. J_ζ 是 $\mathcal{O}(\Lambda_\zeta)$ 中包含 $\{T_v : v \in \Lambda_0$ 为 ζ-正则$\}$的最小理想 .

证明。 我们用超限归纳证明 J_ζ 是 $\mathcal{O}(\Lambda_\zeta)$ 中包含 $J_\zeta \cap \mathcal{O}(\Lambda_0)$ 的最小理想，由引理 6.24 这已足够。设 $\beta \leq \zeta$，且对所有 $\alpha < \beta$，$J_\zeta \cap \mathcal{O}(\Lambda_\alpha)$ 是 $\mathcal{O}(\Lambda_\alpha)$ 中包含 $J_\zeta \cap \mathcal{O}(\Lambda_0)$ 的最小理想。我们将证明 $J_\zeta \cap \mathcal{O}(\Lambda_\beta)$ 是$\mathcal{O}(\Lambda_\beta)$ 中包含 $J_\zeta \cap \mathcal{O}(\Lambda_0)$ 的最小理想。若 $\beta = 0$，这显然成立，因此现在假设 $\beta > 0$。若 β是极限序数，则由命题 3.8，

$$\mathcal{O}(\Lambda_\beta) = \overline{\bigcup_{\alpha<\beta} \mathcal{O}(\Lambda_\alpha)}$$

因此根据 [1, II.8.2.4],

$$\mathcal{O}(\Lambda_\beta) \cap J_\zeta = \overline{\bigcup_{\alpha<\beta} J_\zeta \cap \mathcal{O}(\Lambda_\alpha)}$$

对于每个包含 $J_\zeta \cap \mathcal{O}(\Lambda_0)$ 的 $\mathcal{O}(\Lambda_\beta)$ 的理想 $\mathcal{I}$，归纳假设蕴含 $J_\zeta \cap \mathcal{O}(\Lambda_\alpha) \subseteq \mathcal{I} \cap \mathcal{O}(\Lambda_\alpha)$；因此 $\mathcal{O}(\Lambda_\beta) \cap J_\zeta \subseteq \mathcal{I}$，结论得证。现在假设 β 是一个后继序数，且 $\beta = \alpha + 1$。根据命题 6.23，$J_\zeta \cap \mathcal{O}(\Lambda_{\alpha+1})$ 是 $\mathcal{O}(\Lambda_{\alpha+1})$ 的规范不变理想。根据

[12, 定理 8.6]， $\mathcal{O}(\Lambda_{\alpha+1})$ 的规范不变理想 $\mathcal{I}$ 由 $\mathcal{I}\cap\mathcal{O}(\Lambda_\alpha)$ 和$\left(\mathcal{I}+\psi_\alpha^{(1)}(\mathcal{K}(X_\alpha))\right)\cap\mathcal{O}(\Lambda_\alpha)$ 决定。注意，对于 $\mathcal{O}(\Lambda_{\alpha+1})$ 的每个规范不变理想 $\mathcal{I}$，

$$J_\alpha=\psi_\alpha^{(1)}\left(\mathcal{K}\left(X_\alpha\right)\right)\cap\mathcal{O}\left(\Lambda_\alpha\right)\subseteq\left(\mathcal{I}+\psi_\alpha^{(1)}\left(\mathcal{K}\left(X_\alpha\right)\right)\right)\cap\mathcal{O}\left(\Lambda_\alpha\right)$$

此外，引理 6.20 告诉我们

$$\left(J_\zeta\cap\mathcal{O}\left(\Lambda_{\alpha+1}\right)+\psi_\alpha^{(1)}\left(\mathcal{K}\left(X_\alpha\right)\right)\right)\cap\mathcal{O}\left(\Lambda_\alpha\right)\subseteq J_\alpha$$

因此， $J_\zeta\cap\mathcal{O}(\Lambda_{\alpha+1})$ 是包含 $J_\zeta\cap\mathcal{O}\left(\Lambda_\alpha\right)$ 的最小规范不变理想。由于作为 $\mathcal{O}\left(\Lambda_\alpha\right)$ 的理想， $J_\zeta\cap\mathcal{O}\left(\Lambda_\alpha\right)$ 由 $J_\zeta\cap\mathcal{O}(\Lambda_0)$ 生成，且 $J_\zeta\cap\mathcal{O}\left(\Lambda_0\right)$ 在每个规范作用下都保持不变，因此， $J_\zeta\cap\mathcal{O}(\Lambda_{\alpha+1})$ 是包含 $J_\zeta\cap\mathcal{O}\left(\Lambda_0\right)$ 的最小理想。通过归纳，这就证明了 J_ζ 是 $\mathcal{O}(\Lambda_\zeta)$ 中包含 $J_\zeta\cap\mathcal{O}\left(\Lambda_0\right)$ 的最小理想。□

参考文献

[1] B. Blackadar。《算子代数》，《数学科学百科全书》第122卷。Springer-Verlag，柏林，2006年。 C^*代数与冯·诺依曼代数理论，《算子代数与非交换几何》第III卷。[2] Jonathan H. Brown 和 David N. Yetter。离散 Conduché 纤维化与 C^*代数。《落基山数学杂志》，47(3):711 – 756，2017年。[3] J. Cuntz。一类 C^*代数与拓扑马尔可夫链。II. 可约链与C^*代数的 Ext函子。《数学发明》，63(1):25–40，1981年。[4] Joachim Cuntz 和 Wolfgang Krieger。一类 C^*代数与拓扑马尔可夫链。《数学发明》，56(3):251–268，1980年。[5] Lydia de Wolf。Kumjian-Pask 纤维化、其路径群胚及其 C*-代数理论的发展。2023年。博士论文，堪萨斯州立大学。[6] Masatoshi Enomoto 和 Yasuo Watatani。 C^*代数图论。《日本数学》，25(4):435–442，1980年。[7] Masatoshi Fujii 和 Yasuo Watatani。与伴随图相关的 Cuntz-Krieger代数。《日本数学》，25(4):501–506，1980年。[8] Benjamin Jones。序数图及其 C^*代数。2025年。（arXiv:2411.00206）。[9] Takeshi Katsura。由 C^*对应构造 C^*代数。载于《量子动力学进展》（南哈德利，马萨诸塞州，2002年），《当代数学》第335卷，第173–182页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2003年。[10] Takeshi Katsura。一类 C^*代数，同时推广图代数与同胚 C^*代数。I. 基本结果。《美国数学会会刊》，356(11):4287–4322，2004年。[11] Takeshi Katsura。关于与 C^*对应相关的 C^*代数。《泛函分析杂志》，217(2):366–401，2004年。[12] Takeshi Katsura。与 C^*对应相关的 C^*代数的理想结构。《太平洋数学杂志》，230(1):107–145，2007年。[13] Alex Kumjian 和 David Pask。高秩图 C^*代数。《纽约数学杂志》，6:1–20，2000年。[14] Alex Kumjian、David Pask 和 Iain Raeburn。有向图的 Cuntz-Krieger代数。《太平洋数学杂志》，184(1):161–174，1998年。[15] E. C. Lance。Hilbert C^*模，《伦敦数学会讲义系列》第210卷。剑桥大学出版社，剑桥，1995年。算子代数学家的工具包。[16] Menevşe Eryüzlü Paulovicks 和 Mark Tomforde。Cuntz-Pimsner代数的 Cuntz-Krieger唯一性定理。《斯堪的纳维亚数学》，131(2):333–366，2025年。[17] Michael V. Pimsner。一类 C^*代数，同时推广 Cuntz-Krieger代数与由 Z 作用得到的交叉积。载于《自由概率论》（滑铁卢，安大略省，1995年），《菲尔兹研究所通讯》第12卷，第189–212页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1997年。[18] Kulumani M. Rangaswamy 和 Mark Tomforde。图 C*-代数与 Leavitt 路径代数的 Naimark 问题，2025年。（arXiv:2502.03743）。[19] Wacław Sierpiński。《基数与序数》，《数学专著》第34卷 /《数学专著》/。波兰国家科学出版社（PWN），华沙，修订版，1965年。

[20] Jack Spielberg。路径范畴的群胚与
C^*
366 11 5771 5819, 代数。《美国数学
2014
会会刊》， ( ): – 。[21] Jack Spielberg。左消去小范畴的群胚与 C^*代数。《印第安纳大学数学杂志》， 69(5):1579–1626，2020年。