arXiv:2602.15170v1 [math.OA] 16 Feb 2026

自由群的部分作用与群胚同调

本杰明·斯坦伯格

Abstract. 我们给出了半饱和偏作用（按照 Exel 的定义）的群胚的平凡模的一个长度为一的投射分解，其中自由群作用在一个紧豪斯多夫且全不连通的空间上。由此，我们得以用初等方法计算这些群胚的同调；它们包括自由群作用的变换群胚，以及系统的 Deaconu-Renault 群胚 $(X,\ T)$，其中 X 是紧豪斯多夫且全不连通的，而 T 是定义在 X的开闭子集上的局部同胚。我们还证明，当空间第二可数时，此类偏作用群胚在域上的代数的全局维数至多为 2。

1. Introduction

给定空间 X 上的一族部分同胚 $\{\theta_a\colon\ X_{a^{-1}} \to X_a \mid a \in A\}$，Exel [8] 定义了自由群 F_A 在 X 上的一个偏作用：将约化字映射为相应部分同胚的复合；这类偏作用称为半饱和偏作用。群 G 在空间 X 上的偏群作用对应一个 ´étale 群胚，记作 $G \ltimes X$ [1]。本文给出了当 X 紧豪斯多夫且全不连通、且偏作用为半饱和时， $F_A \ltimes X$ 的平凡模 $\mathbb{Z}X$ 的一个显式长度为一的投射分解；若 X 仅为局部紧豪斯多夫且全不连通，该分解则是平坦的。由此，我们得以用完全初等的方法计算这类群胚的同调。此类群胚包括所有满足以下条件的 Deaconu-Renault 系统（$X,\ T$）的群胚： X 紧豪斯多夫且全不连通，并且 T 的定义域开闭；这一结论可由 G. de Castro 的一个论证得到。

更准确地说，我们的主要结果是以下三个定理。

定理 A。设自由群 F_A 在紧豪斯多夫全不连通空间 X上有一个半饱和偏作用。设 $\mathcal{G} = F_A \ltimes X$。那么

Date: 2026年2月16日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 20 J05,22A22,16E10。*Key words and phrases.* 群偏作用、群胚同调、全局维数、自由群。作者获得了美国国家科学基金会资助（DMS-2452324）、Simons 基金会合作资助（编号 849561）、澳大利亚研究理事会资助（DP230103184）以及 Marsden 基金 MFP-VUW2411的支持。

存在一个投射分解

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{a\in A} \mathbb{Z}\mathcal{G}1_{X_a} \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}\mathcal{G} \xrightarrow{r_*} \mathbb{Z}X \longrightarrow 0$$

其中， ∂在 a分量上由 $\partial(f) = f\delta_a - f$定义，其中 δ_a是 $\{a\} \times X_{a^{-1}}$的特征函数

定理 B。 设 θ 是自由群 F_A在紧豪斯多夫全不连通空间 X上的半饱和偏作用。令 ι_a: $\mathbb{Z}X_a \to \mathbb{Z}X$为通过扩展而得（在外部取值为0），且 θ_a^*: $\mathbb{Z}X_a \to \mathbb{Z}X$ 为 $f \mapsto f \circ \theta_a$（在$X_{a^{-1}}$之外扩展为0）。那么，对于 $n \geq 2$，有 $H_n(F_A \ltimes X) = 0$，并且

$$H_0(F_A \ltimes X) = \operatorname{coker}\left(\bigoplus_{a\in A}(\iota_a - \theta_a^*)\right),$$
$$H_1(F_A \ltimes X) = \ker\left(\bigoplus_{a\in A}(\iota_a - \theta_a^*)\right).$$

由此可以计算 Deaconu-Renault 群胚的同调，而无需假设局部同胚是满射或处处有定义（但对 X有所限制）。参见推论 4.8 和注 4.9。

定理 C。 设自由群 F_A 在第二可数紧豪斯多夫全不连通空间 X上有一个半饱和偏作用。那么，对于任意域 K，代数$K[F_A \ltimes X] \cong KX \rtimes F_A$ 的全局维数至多为2。

定理 C 利用一个将 Ext 与群胚上同调联系起来的谱序列，由定理 A 推导而来；该谱序列本身也可能颇具价值。

致谢。 作者感谢 Gilles Gon˛calvesde Castro 允许使用他对定理 2.2 的证明。

2. Partial group actions

2.1. 偏作用的定义。 有关群偏作用的基础知识，参见 [12]或 [8]。

回顾一下，逆半群是一个半群 S，它满足：对于每个$s \in S$，存在唯一的 $s^* \in S$，使得 $ss^*s = s$ 和 $s^*ss^* = s^*$。若 S，T是逆幺半群，则对偶预同态 θ: $S \to T$ 是满足以下条件的映射：

(1) $\theta(1) = 1$；(2) $\theta(s^*) = \theta(s)^*$；(3) $\theta(s)\theta(t) \leq \theta(st)$。

这里我们回顾一下，逆半群可通过 $s \leq t$ if$ss^*t = s$ or（等价地，通过 $ts^*s = s$）定义偏序

若 X 是局部紧豪斯多夫全不连通空间，则 I_X 表示 X 上具有开闭定义域的部分同胚所构成的逆半群。

群 G 在 X 上的部分作用是一个对偶预同态 $\theta\colon G \to I_X$。这意味着，对于每个 $g \in G$，都有一个同胚 $\theta_g\colon X_{g^{-1}} \to X_g$，它是 X 的开闭子集之间的同胚，并且 $\theta_1 = 1_X$、$\theta_g^{-1} = \theta_{g^{-1}}$；此外，只要$\theta_g\theta_h(x)$有定义，它就等于 $\theta_{gh}(x)$。

设 F_A 是由 A 生成的自由群。Exel [8] 将 θ 在 F_A 上的部分作用称为半饱和，如果 $\theta_{uv} = \theta_u \circ \theta_v$ 每当 $|uv| = |u| + |v|$时成立；也就是说，形成乘积 uv 时没有消去。半饱和作用由一族部分同胚 θ_a 唯一确定：$X_{a^{-1}} \to X_a$，其中 $a \in A$。既约形式为 $w = a_1^{\epsilon_1} \cdots a_n^{\epsilon_n}$ 的元素所对应的作用必须定义为 $\theta_w = \theta_{a_1}^{\epsilon_1} \cdots \theta_{a_n}^{\epsilon_n}$。详情参见 [8, 命题 4.10]。

理解这一点的一种方法是注意到，这一族给出了一个同态 α：$FIM_A \to I_X$，其中 FIM_A 是由 A 生成的自由逆幺半群，它将 a 映到 θ_a。另一方面，有一个众所周知的对偶预同态 γ：$F_A \to FIM_A$，它将元素 $w \in F_A$ 映到 FIM_A 中由 w 的既约形式表示的元素，也就是说，该元素的Munn树 [13] 是一条由 w 标记的直线。于是，上述部分作用就是 $\alpha\gamma$。

我们将在全文中使用、且通常不加说明的半饱和作用的基本性质如下。

命题2.1. 设 $\theta\colon F_A \to I_X$ 是一个半饱和作用。

(1) 若 $w = uv$ 且 $|w| = |u| + |v|$，则 $X_w \subseteq X_u$。*(2)* $\theta_u(X_{u^{-1}} \cap X_v) \subseteq X_{uv}$，当且仅当 $|uv| = |u| + |v|$时取等号。

证明。第一条显然成立，因为 $\theta_w = \theta_u \circ \theta_v$。对于第二条，若$x \in X_{u^{-1}} \cap X_v$，写作 $x = \theta_v(y)$。于是 $\theta_u(x) = \theta_u(\theta_v(y)) = \theta_{uv}(y)$，因此 $\theta_u(x) \in X_{uv}$。若 $|uv| = |u| + |v|$，则 $\theta_{uv} = \theta_u \circ \theta_v$。因此，若 $z \in X_{uv}$，则 $z = \theta_{uv}(y) = \theta_u(\theta_v(y))$。所以，$\theta_v(y) \in X_{u^{-1}} \cap X_v$，从而 $z \in \theta_u(X_{u^{-1}} \cap X_v)$。□

F_A 的任意全作用当然都是半饱和偏作用。

半饱和偏作用的重要例子来自图。这里我们采用图的南半球约定：因此，一条边画作 $\boldsymbol{r}(e) \xleftarrow{e} \boldsymbol{s}(e)$。设 $E = (E^0, E^1)$ 是一个图，∂E 是边界路径空间。对每条边 e，令 $X_e = e\partial E$，并令 $X_{e^{-1}} = \boldsymbol{s}(e)\partial E$。于是 $\theta_e(z) = ez$。对于相应的 F_{E^1} 的半饱和作用，可以验证，只有形如 pq^{-1} 的约化字（其中 p，q 是满足 $\boldsymbol{s}(p) = \boldsymbol{s}(q)$ 的路径）才具有非空定义域。该元素的定义域为 $q\partial E$，值域为 $p\partial E$。

2.2. **偏群作用的群胚**。若拓扑群胚$\mathcal{G}$ 的源映射是局部同胚，且单位（或对象）空间 $\mathcal{G}^0$ 是局部紧豪斯多夫的，则称其为 *´étale*。此外，若 $\mathcal{G}^0$ 全不连通，则称该群胚为丰。回顾一下，$\mathcal{G}$的双截面是 U 的一个开子集，在其上源映射和值域映射均为单射。丰群胚的紧开双截面构成拓扑的一个基，并在乘法下构成一个逆半群。

Abadie [1]将偏群作用 G 在 X上的作用与一个豪斯多夫 ´étale群胚 $G \ltimes X$ 联系起来。对象空间为 X，箭头空间为 $\{(g,x) \mid x \in X_{g^{-1}}\} \subseteq G \times X$，赋予从积拓扑继承的子空间拓扑。有 $s(g,x) = x$, $r(g,x) = \theta_g(x)$, $(g,\theta_h(x))(h,x) = (gh,x)$以及$(g,x)^{-1} = (g^{-1},\theta_g(x))$。单位元为$(1,x)$，其中 $x \in X$。

若 E 是一个图，并且我们考虑 F_{E^1}在 ∂E上的半饱和偏作用，那么众所周知，$F_{E^1} \ltimes \partial E$ 通过映射$(pq^{-1},\ qz) \mapsto (pz,\ |p|-|q|,\ qz)$同构于通常的图群胚 $\mathcal{G}_E$。

更一般地，任意 Deaconu-Renault 系统$(X,\ T)$的群胚都是某个自由群的半饱和偏作用的群胚，其中X 紧致、全不连通且 T的定义域既开又闭。回想一下，Deaconu-Renault 系统由一个局部紧豪斯多夫空间 X 以及一个局部同胚 T: dom$(T) \to X$ 构成，其中 dom(T) 是 X的一个开子集。Deaconu-Renault 群胚 $\mathcal{G}_{(X,T)}$ 的对象空间为X，其箭头为

$$\{(x, m-n, y) \in \mathrm{dom}(T^m) \times \mathbb{Z} \times \mathrm{dom}(T^n) \mid T^m(x) = T^n(y)\}$$

其中 $s(x,\ k,\ y) = y$, $r(x,\ k,\ y) = x$。其拓扑以如下形式的双截面为基

$$(U,(m,n),V) = \{(x, m-n, y) \in U \times \mathbb{Z} \times V \mid T^m(x) = T^n(y)\}$$

其中 $U \subseteq$dom(T^m)、 $V \subseteq$dom(T^n) 为开集， $T|_U$， $T|_V$是单射，且 $T^m(U) = T^n(V)$。图群胚是边界路径空间 ∂E上移位映射的 Deaconu-Renault 系统。

若自由群 F_A 在空间 X 上的部分作用称为正交，则$X_a \cap X_b = \emptyset$ 对 $a \neq b \in A$ [9]成立。以下论证由 Gilles de Castro 告知（私人通信）。

定理 2.2。定义在紧致、豪斯多夫且全不连通空间 X 上、满足 T 为既开又闭的 *Deaconu-Renault* 系统(X,T) 的群胚，恰好是有限生成自由群在紧致、豪斯多夫且全不连通空间上的半饱和正交部分作用（其定义域为既开又闭）的群胚。

证明。若 A 是有限集，且 θ 是自由群 F_A 在紧致、豪斯多夫且全不连通空间 X 上的正交、半饱和部分作用，则利用该作用的正交性，可以定义一个定义域为既开又闭集 T 的局部同胚 $\bigcup_{a\in A} X_a \to X$，其定义为 $T|_{X_a} = \theta_{a^{-1}}$。于是 [9, 定理 9.6]表明 $F_A \ltimes X \cong \mathcal{G}_{(X,T)}$（另见 [4, 定理 4.1]）。

反过来，如果 (X,T) 是一个 Deaconu-Renault 系统，且 T 的定义域 dom(T) 既开又闭（因此是紧致的），那么我们可以将 dom(T) 划分为有限个既开又闭的集合 $U_1 \sqcup \cdots \sqcup U_n$，使得 $T|_{U_i}$ 与其像之间存在同胚 V_i。然后，我们可以通过设定 $X_{a_i} = U_i$、 $X_{a_i^{-1}} = V_i$ 和 $\theta_{a_i} = (T|_{U_i})^{-1}$，利用命题 4.10]，在 X 上定义自由群在 $a_1,\ldots,a_n$ 上的半饱和正交部分作用。注意，此时 $T = \bigcup_{i=1}^n \theta_{a_i^{-1}}$，因此根据上一段可得 $F_A \ltimes X \cong \mathcal{G}_{(X,T)}$。□

现在我们证明，半饱和偏作用的群胚 $F_A \ltimes X$ 恰好是自由逆幺半群 FIM_A 在 A 上作用所对应的芽群胚 $FIM_A \ltimes X$。关于自由逆幺半群的更多内容，参见 [13] ；关于芽群胚，参见 [7]。

命题 2.3。设 $\{\theta_a\colon X_{a^{-1}} \to X_A\colon a \in A\}$ 是局部紧豪斯多夫全不连通空间 X 上的一族同胚，且 X_a 既开又闭。则 $F_A \ltimes X \cong FIM_A \ltimes X$，其中芽群胚$FIM_A \ltimes X$是相对于 FIM_A在 X上由$a \mapsto \theta_a$给出的作用定义的。

证明。我们使用的关键事实是， FIM_A是一个 F-逆幺半群。更确切地说，若 $\sigma\colon FIM_A \to F_A$是典范投影，且将 $w \in F_A$视为 A上的约化字，则在 FIM_A 中计算得到的 w 是 $\sigma^{-1}(w)$的最大元。因此， $FIM_A \ltimes X$ 的每个芽都由一个芽 $[w,x]$唯一表示，其中 w是约化的；这是因为若 $[u,x] = [v,x]$，则$\sigma(u) = \sigma(v)$。此外， $FIM_A \ltimes X$ 中的基本邻域可以取为如下形式： $D(w, U) = \{[w,u] \mid u \in U\}$，其中 w是一个约化字， U 是 $X_{w^{-1}}$的一个开子集。将约化字视为 F_A 的元素和视为 FIM_A 的元素时，其作用相同。由此直接可得，$(w, x) \mapsto [w,x]$是拓扑群胚 $F_A \ltimes X \to FIM_A \ltimes X$的一个同构。□

3. Groupoid algebras and homology

3.1. 群胚代数。若 K 是交换环，且 X 是局部紧豪斯多夫且全不连通的空间，则 KX 表示紧支集局部常值函数 $f\colon X \to K$ 构成的 K-模。若 $\mathcal{G}$ 是豪斯多夫 ample 群胚，则关于卷积乘积， $K\mathcal{G}$ 成为一个 K- 代数 [19]

$$f * g(\gamma) = \sum_{\boldsymbol{r}(\alpha)=\boldsymbol{r}(\gamma)} f(\alpha)g(\alpha^{-1}\gamma).$$

通常我们将卷积乘积写成并置形式。

在 $G \ltimes X$ 的情形下， $K[G \ltimes X]$ 同构于部分斜群环 $KX \rtimes G$，其中 KX 采用逐点乘积；关于部分斜群环的更多内容，参见 [5]。

为简化讨论，从现在起我们假设 X 是紧致的，因此每个 X_g 都是紧致的。令 δ_g 为紧开双截面 $\{g\} \times X_{g^{-1}}$ 的特征函数。则闭开划分 $G \ltimes X = \bigsqcup_{g\in G}\{g\} \times X_{g^{-1}}$ 给出一个 K-模直和分解

$$K[G \ltimes X] = \bigoplus KX_g\delta_g.$$

也就是说，如果 f的支撑集包含于 $\{g\} \times X_{g^{-1}}$，我们可以写成 $f = (f\delta_{g^{-1}})\delta_g$，且$f\delta_{g^{-1}}$属于 KX_g。特别地，在直和分解 $\delta_g = 1_{X_g}\delta_g$中。

读者可以验证，如果 $\alpha_g\colon KX_{g^{-1}} \to KX_g$ 由 $\alpha_g(f) = f \circ \theta_{g^{-1}}$ 定义，那么

$$f\delta_g * f'\delta'_g = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(f)f')\delta_{gg'}$$

尽管我们不会经常使用这个公式。

命题3.1. 设 F_A 在 X 上有一个半饱和偏作用。设 $u, v \in F_A$。那么

$$(\{u\} \times X_{u^{-1}})(\{v\} \times X_{v^{-1}}) \subseteq \{uv\} \times X_{(uv)^{-1}}$$

当且仅当 $|uv| = |u| + |v|$ 时取等号。因此，若 $|uv| = |u| + |v|$，则 $\delta_u\delta_v = \delta_{uv}$。

证明。 由偏作用的定义可知，该包含关系显然成立。若 $|u| + |v| = |uv|$ 且 $x \in X_{(uv)^{-1}}$，则由半饱和性质，$\theta_{uv}(x) = \theta_u(\theta_v(x))$，因此 $(uv, x) = (u, \theta_v(x))(v, x) \in (\{u\} \times X_{u^{-1}})(\{v\} \times X_{v^{-1}})$。□

3.2. **充足群胚的同调与上同调**。设 $\mathcal{G}$ 是一个豪斯多夫 ample 群胚。那么 $K\mathcal{G}^0$ 是一个左 $K\mathcal{G}$-模，其作用定义为

$$f \cdot g(x) = \sum_{\boldsymbol{r}(\gamma)=x} f(\gamma)g(\boldsymbol{s}(\gamma)).$$

我们称其为平凡左 $K\mathcal{G}$-模。若 U 是一个紧开双截面，则 $1_U \cdot g = 1_U * g * 1_{U^{-1}}$。该作用限制在 $K\mathcal{G}_0$ 上，表现为左乘。平凡右模可对偶地定义。

$\mathcal{G}$ 的同调 取值于右 $\mathbb{Z}\mathcal{G}$-模 M 时，为

$$H_n(\mathcal{G}, M) = \operatorname{Tor}_n^{\mathbb{Z}\mathcal{G}}(M, \mathbb{Z}\mathcal{G}^0)$$

$\mathcal{G}$ 在左 $\mathbb{Z}\mathcal{G}$-模 M 中的上同调 定义为

$$H^n(\mathcal{G}, M) = \operatorname{Ext}^n_{\mathbb{Z}\mathcal{G}}(\mathbb{Z}\mathcal{G}^0, M).$$

令 $H_n(\mathcal{G}) = H_n(\mathcal{G}, \mathbb{Z}\mathcal{G}^0)$，且 $H^n(\mathcal{G}) = H^n(\mathcal{G}, \mathbb{Z}\mathcal{G}^0)$。关于群胚同调的一个很好的参考文献是 [3]。

$\mathcal{G}$ 的上同调维数 是 $\mathbb{Z}\mathcal{G}^0$的投射分解的最短长度；等价地，它是满足对所有 $\mathbb{Z}\mathcal{G}$-模 M均有 $H^{n+1}(\mathcal{G}, M) = 0$的最小 n。

著名的Stallings-Swan定理指出，自由群恰好是上同调维数为1的群。我们证明，自由群在紧豪斯多夫全不连通空间上的半饱和作用会导出上同调维数为1的群胚。

若 $f\colon X \to Y$ 是局部紧、全不连通的豪斯多夫空间之间的局部同胚，则有一个诱导同态 $f_*\colon \mathbb{Z}X \to \mathbb{Z}Y$，由 $f_*(g)(y) = \sum_{f(x)=y} g(x)$ 给出。

众所周知，$\boldsymbol{r}_*\colon \mathbb{Z}\mathcal{G} \to \mathbb{Z}\mathcal{G}^0$ 是一个 $\mathbb{Z}\mathcal{G}$-模同态。如果U 是一个紧开双截面，那么 $\boldsymbol{r}_*(1_U) = 1_{\boldsymbol{r}(U)}$。

4. Cohomological dimension and semi-saturated partial actions

本节固定一个自由群 F_A 在紧完全不连通豪斯多夫空间 X 上的半饱和偏作用 θ。令 $\mathcal{G} = F_A \ltimes X$。我们的目标是给出 $\mathbb{Z}\mathcal{G}^0 = \mathbb{Z}X$ 的长度为一的投射分解。

我们以 $\boldsymbol{r}_*$ 开始构造投射分解: $\mathbb{Z}\mathcal{G} \to \mathbb{Z}X$。理解此映射相对于直和分解$\mathbb{Z}\mathcal{G} = \bigoplus_{w\in F_A} \mathbb{Z}X_w\delta_w$的形式将会很有帮助。

命题4.1。 假设 $f \in \mathbb{Z}X_w$。那么 $\boldsymbol{r}_*(f\delta_w) = f$。

证明。 事实上, $\boldsymbol{r}_*(f\delta_w) = f\,\boldsymbol{r}_*(\delta_w)$, 这是利用了 $\boldsymbol{r}_*$ 是模同态以及 $\delta_w = 1_{\{w\}\times X_{w^{-1}}}$。 □

令 $P_0 = \mathbb{Z}\mathcal{G}$。下一个投射模取为 $P_1 = \bigoplus_{a\in A} \mathbb{Z}\mathcal{G}1_{X_a}\gamma_a$, 其中 γ_a 只是一个符号, 用来表示元素属于哪个直和项。

命题 4.2。有 $\mathbb{Z}X_w\delta_w 1_{X_a} = \mathbb{Z}[\theta_w(X_{w^{-1}} \cap X_a)]\delta_w$。因此 $\mathbb{Z}\mathcal{G}1_{X_a} = \bigoplus_{w\in F_X} \mathbb{Z}[\theta_w(X_w^{-1} \cap X_a)]\delta_w$。

证明。 注意, $(\{w\} \times X_{w^{-1}})(\{1\} \times X_a)$ 由所有满足 $x \in X_{w^{-1}} \cap X_a$ 的 (w, x) 组成, $(\{1\} \times \theta_w(X_{w^{-1}} \cap X_a))(\{w\} \times X_{w^{-1}})$ 也是如此。因此 $\delta_w 1_{X_a} = 1_{\theta_w(X_{w^{-1}}\cap X_a)}\delta_w$, 命题由此得证。 □

我们将 $f\delta_w\gamma_a$ 视为 F_A 的凯莱图中权重为 f的边 $w \xrightarrow{a} wa$。基于这一直观理解, 我们定义 ∂: $P_1 \to P_0$ 为

$$\partial(f\delta_w\gamma_a) = f\delta_{wa} - f\delta_w.$$

注意, 命题 4.2 和命题2.1(2)推出 $f \in \mathbb{Z}X_{wa}$。因此, 根据命题4.1, $\boldsymbol{r}_*\partial(f\delta_w\gamma_a) = f - f = 0$。

命题 4.3。 对于 $f \in \mathbb{Z}\mathcal{G}1_{X_a}$, 有 $\partial(f\gamma_a) = f\delta_a - f$。因此, ∂ 是一个 $\mathbb{Z}\mathcal{G}$-模同态。

证明。 计算可得 $\delta_w\delta_a = 1_{\theta_w(X_{w^{-1}}\cap X_a)}\delta_{wa}$。因此, 若 $h\delta_w\gamma_a \in \mathbb{Z}\mathcal{G}1_{X_a}$, 则根据命题 4.2, $h\delta_{wa} = h1_{\theta_w(X_{w^{-1}}\cap X_a)}\delta_{wa} = h\delta_w\delta_a$, 于是 $\partial(h\delta_w\gamma_a) = h\delta_{wa} - h\delta_w = h\delta_w\delta_a - h\delta_w$, 证毕。 □

现在, 我们基于 X 为单元素集合这一特殊情形下的相应收缩同伦, 即自由群的平凡模的投射分解, 构造 $\mathbb{Z}$上的收缩同伦, 从而证明链复形 $0 \to P_2 \xrightarrow{\partial} P_1 \xrightarrow{\boldsymbol{r}_*} \mathbb{Z}X \to 0$ 是无环的

$$0 \to \bigoplus^{a\in A} \mathbb{Z}F_A\gamma_a \to \mathbb{Z}F_A \to \mathbb{Z} \to 0.$$

在该收缩同伦中, s_1: $\mathbb{Z}F_A \to \bigoplus_{a\in A} \mathbb{Z}F_A\gamma_a$ 会将一个词 w 映射为 F_A 的凯莱图中从**1**到 w 的测地路径上各条边的带符号和, 其中我们将 $g\gamma_a$ 视为边 $g \xrightarrow{a} ga$。我们将在当前语境中仿照这一收缩同伦。半饱和条件将

确保若 $f \in X_w$，则根据命题2.1，对于 w 的任意前缀 u，都有 $f \in X_u$，从而使我们能够进行这一同伦。

首先定义 $s_0\colon\ \mathbb{Z}X \to \mathbb{Z}\mathcal{G} = P_0$ 由 $s_0(f) = f\delta_1$给出。$s_1\colon\ P_0 \to P_1$ 的定义更为复杂，因为我们必须对边的带符号遍历进行编码。

设 $a \in A$ 和 $w \in F_A$。若 $f \in X_{wa}$ 和 $|wa| = |w| + 1$，则令

$$f[w, a] = f\delta_w\gamma_a.$$

若 $f \in X_{wa^{-1}}$ 满足 $|wa^{-1}| = |w| + 1$，则令

$$f[w, a^{-1}] = -f\delta_{wa^{-1}}\gamma_a.$$

（想象沿负方向遍历边 $wa^{-1} \xrightarrow{a} w$。）

引理4.4. 假设对 $a \in A,\ \ \epsilon = \pm 1$ 和 $f \in X_{wa^\epsilon},\ \ |wa^\epsilon| = |w| + 1$ 成立。

(1) $f[w, a^\epsilon] \in \mathbb{Z}\mathcal{G}1_{X_a}\gamma_a$.
(2) $\partial(f[w, a^\epsilon]) = f\delta_{wa^\epsilon} - f\delta_w$.

证明。我们先在 $\epsilon = 1$的情况下证明这两项。由命题2.1(2)可得 $f \in \mathbb{Z}[\theta_w(X_{w^{-1}} \cap X_a)]$。此外，$\partial(f[w, a]) = \partial(f\delta_w\gamma_a) = f\delta_{wa} - f\delta_w$。

现在假设 $\epsilon = -1$。那么 $f\delta_{wa^{-1}} = f\delta_w\delta_{a^{-1}} = f\delta_w\delta_{a^{-1}}1_{X_a} \in \mathbb{Z}\mathcal{G}1_{X_a}$，其中第一个等式由命题3.1得出。此外，

$$\partial(f[w, a^{-1}]) = -\partial(f\delta_{wa^{-1}}\gamma_a) = -(f\delta_w - f\delta_{wa^{-1}}) = f\delta_{wa^{-1}} - f\delta_w,$$

如所需。 □

现在我们定义 $s_1\colon\ P_0 \to P_1$ 如下。假设$w = a_1^{\epsilon_1} \cdots a_n^{\epsilon_n}$为既约形式，其中 $a_i \in A$、$\epsilon_i \in \{\pm 1\}$ 且 $n \geq 0$。对于 $f \in \mathbb{Z}X_w$，令

$$s_1(f\delta_w) = \sum_{i=1}^{n} f[a_1^{\epsilon_1} \cdots a_{i-1}^{\epsilon_{i-1}}, a_i^{\epsilon_i}],$$

这里注意到，由命题2.1(1)，对所有 $0 \leq i \leq n$，都有$f \in \mathbb{Z}X_{a_1^{\epsilon_1} \cdots a_i^{\epsilon_i}}$，因为 $f \in \mathbb{Z}X_w$。注意，若 $w = 1$，则 $s_1(f\delta_1) = 0$，因为此时求和为空。

命题4.5。映射 s_0、s_1 构成阿贝尔群链复形 $0 \to P_1 \to P_0 \to \mathbb{Z}X \to 0$的收缩同伦。

证明。显然，s_0、s_1 是阿贝尔群的同态。为证明它们构成阿贝尔群的收缩同伦，我们需要验证：$r_* s_0 = 1$；$\partial s_1 + s_0 r_* = 1$；以及 $s_1\partial = 1$。我们先从第一个性质开始。

如果 $f \in \mathbb{Z}X$，那么根据命题4.1，$r_* s_0(f) = r_*(f\delta_1) = f$。

接下来我们讨论第二个性质：$\partial s_1 + s_0 r_* = 1$。我们将左侧作用于 $f\delta_w$，其中 $f \in \mathbb{Z}X_w$。设 $w = a_1^{\epsilon_1} \cdots a_n^{\epsilon_n}$处于既约

形式，且 $n \geq 0$。注意，根据命题4.1， $s_0\, \boldsymbol{r}_*(f\delta_w) = f\delta_1$。因此，

$$\begin{aligned}(\partial s_1 + s_0\, \boldsymbol{r}_*)(f\delta_w) &= \sum_{i=1}^{n} \partial f[a_1^{\epsilon_1} \cdots a_{i-1}^{\epsilon_{i-1}}, a_i^{\epsilon_i}] + f\delta_1 \\ &= \sum_{i=1}^{n} (f\delta_{a_1^{\epsilon_1} \cdots a_i^{\epsilon_i}} - f\delta_{a_1^{\epsilon_1} \cdots a_{i-1}^{\epsilon_{i-1}}}) + f\delta_1 \\ &= f\delta_w\end{aligned}$$

由于该和是望远镜和，第二个等式用到了引理4.4(2)。

最后，我们证明第三个性质：等式 $s_1\partial = 1$ 成立。我们计算 $s_1\partial(f\delta_w\gamma_a)$。设 $w = a_1^{\epsilon_1} \cdots a_n^{\epsilon_n}$的既约形式为 $n \geq 0$。分两种情况。若 $a_n^{\epsilon_1} \neq a^{-1}$，则 $|wa| = |w| + 1$，我们计算

$$\begin{aligned}s_1\partial(f\delta_w\gamma_a) &= s_1(f\delta_{wa} - f\delta_w) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f[a_1^{\epsilon_1} \cdots a_{i-1}^{\epsilon_{i-1}}, a_i^{\epsilon_i}] + f[w, a] - \sum_{i=1}^{n} f[a_1^{\epsilon_1} \cdots a_{i-1}^{\epsilon_{i-1}}, a_i^{\epsilon_i}] \\ &= f\delta_w\gamma_a\end{aligned}$$

若 $a_n^{\epsilon_n} = a^{-1}$，令 $u = a_1^{\epsilon_1} \cdots a_{n-1}^{\epsilon_{n-1}}$，使得 $w = ua^{-1}$。于是我们有

$$\begin{aligned}s_1\partial(f\delta_w\gamma_a) &= s_1(f\delta_u - f\delta_{ua^{-1}}) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} f[a_1^{\epsilon_1} \cdots a_{i-1}^{\epsilon_{i-1}}, a_i^{\epsilon_i}] - \sum_{i=1}^{n-1} f[a_1^{\epsilon_1} \cdots a_{i-1}^{\epsilon_{i-1}}, a_i^{\epsilon_i}] - f[u, a^{-1}] \\ &= f\delta_{ua^{-1}}\gamma_a = f\delta_w\gamma_a,\end{aligned}$$

如所要求。 □

定理 *A* 的证明。 该预解式的正合性源于在 $\mathbb{Z}$ 上存在收缩同伦；参见命题4.5。由于 X 是紧致的， $\mathbb{Z}\mathcal{G}$ 有单位，因此作为 $\mathbb{Z}\mathcal{G}$-模是投射的。由于 1_{X_a} 是幂等元，每个 $\mathbb{Z}\mathcal{G}1_{X_a}$ 都是投射的。证明至此完成。□

推论 4.6。 设 F_A 在紧致全不连通豪斯多夫空间 X 上具有半饱和偏作用。那么 $\mathcal{G} = F_A \ltimes X$ 的上同调维数至多为 1。因此，对于任意 $\mathbb{Z}\mathcal{G}$-模 M，$H_n(\mathcal{G}, M) = 0$ 且 $H^n(\mathcal{G}, M) = 0$，其中 $n \geq 2$。

推论 4.7。 设 (X, T) 是一个 *Deaconu-Renault* 系统，其中 X 紧豪斯多夫且全不连通，并且 T 的定义域既开又闭。那么 $\mathcal{G}_{(X,T)}$ 的上同调维数至多为1。

现在我们可以证明定理 B。

定理 *B* 的证明。 将定理 A 中删去的投射分解与右模 $\mathbb{Z}X$ 进行张量积，得到链复形

$$\bigoplus_{a\in A}\mathbb{Z}X_a \xrightarrow{d} \mathbb{Z}X$$

在计算同调时， d 与 $1_{\mathbb{Z}X}\otimes\partial$ 通过同构 $\mathbb{Z}X\otimes_{\mathbb{Z}\mathcal{G}}\mathbb{Z}\mathcal{G}1_{X_A}\cong\mathbb{Z}X_a$ 和 $\mathbb{Z}X\otimes_{\mathbb{Z}\mathcal{G}}\mathbb{Z}\mathcal{G}\cong\mathbb{Z}X$相识别。若 $f\in\mathbb{Z}X_a$，则$d(f)$对应于$(1_{\mathbb{Z}X}\otimes\partial)(1_X\otimes f)$ $=1_X\otimes\partial f=1_X\otimes f\delta_a-1_X\otimes f=$ $\delta_{a^{-1}}f\delta_a\otimes 1_{X_{a^{-1}}}-f\otimes 1_{X_a}=f\circ\theta_a\otimes 1_{X_{a^{-1}}}-f\otimes 1_{X_a}$，而后者在这些同构下对应于 $\theta_a^*(f)-\iota_a(f)$。根据群胚同调的定义，结果便可由 $\mathrm{Tor}_\bullet^{\mathbb{Z}\mathcal{G}}(\mathbb{Z}\mathcal{G}^0,\ \mathbb{Z}\mathcal{G}^0)$ 得出。□

定理 B 可归结为关于 Deaconu-Renault 群胚的一个已知结果 [10,定理 6。7]，不过，该参考文献假设局部同胚处处有定义且为满射，而我们允许它定义在一个开闭子集上，且不要求它为满射。然而，我们要求 X 是紧致的，尽管这一条件可以在一定程度上放宽；见注 4.9。

推论 4.8. 设 (X,T) 是一个 *Deaconu-Renault* 群胚，其中 X 是紧豪斯多夫且全不连通的，并且 T 有开闭定义域。那么$H_n(\mathcal{G}_{(X,T)})=0$ 对于 $n\geq 2$ 成立，且

$$H_0(\mathcal{G}_{(X,T)})=\operatorname{coker}(\iota-T_*)$$
$$H_1(\mathcal{G}_{(X,T)})=\ker(\iota-T_*).$$

其中 $\iota\colon\mathbb{Z}U\to\mathbb{Z}X$ 是由 0 扩张得到的，而 $T_*\colon\mathbb{Z}U\to\mathbb{Z}X$ 是诱导同态。

证明。 定理 2.2 的证明表明，存在自由群 F_A 在有限集 A 上的正交半饱和部分作用 θ ，使得$U=\bigsqcup_{a\in A}X_a$、 $T=\bigcup_{a\in A}\theta_{a^{-1}}$且 $\mathcal{G}_{(X,T)}\cong F_A\ltimes X$。通过包含映射，我们可以将$\bigoplus_{a\in A}\mathbb{Z}X_a$ 与 $\mathbb{Z}U$ 等同；在此等同下，利用 $T=\bigcup_{a\in A}\theta_{a^{-1}}$，映射 $\bigoplus_{a\in A}(\iota_a-\theta_a^*)$变为 $\iota-T_*$。事实上， $T_*(f)(x)=\sum_{T(y)=x}f(y)=\sum_{a\in A}f(\theta_a(x))=\sum_{a\in A}\theta_a^*(f)(x)$。结论由定理 B 得出。□

注意到 $F_A\ltimes X$ 的各向同性群是 F_A 的子群，因此是自由群。由此可知，它们是无挠的，并满足鲍姆-康涅猜想。由于对于 $n\geq 2$， $H_n(F_A\ltimes X)=0$，Matui HK 猜想对 $F_A\ltimes X$ 成立，并且根据 [16, 的注 3.5]，当 $i=0$ 时，我们有 $K_i(C_r^*(F_A\ltimes X))\cong H_i(F_A\ltimes X)$，1。根据 Abadie 的结果 [1]， $C_r^*(F_A\ltimes X)$ 是约化部分交叉积$C(X)\rtimes_r F_A$。

备注 4.9。本文的大多数结果都可以推广到仅假设 X 局部紧豪斯多夫且全不连通的情形；不过，定理 A 中得到的将是平坦分解而非投射分解（因为 $\mathbb{Z}\mathcal{G}$ 及其直和项仅为平坦的），因此只能对同调而非上同调作出结论。

在此背景下， δ_g 只是一个开闭双截面的特征函数，但将它与紧支撑局部常值函数作卷积，仍会得到紧支撑局部常值函数，因此在调整论证时，与它相乘是有意义的。在局部紧豪斯多夫且全不连通的情形下，证明 Deaconu-Renault 群胚来自自由群的正交半饱和部分作用，需要 $\mathrm{dom}\, T$ 是仿紧的，以便将其划分为互不相交的紧开集，并且 T 在这些集合上是单射的。除此之外并无障碍，尤其是定理 B 和推论 4.8 在这些假设下仍然成立。

5. 全局维数

本节将证明，对于自由群 F_A的半饱和群部分作用，如果K 是一个域，且 X 是紧豪斯多夫、全不连通且第二可数的，那么代数 $K[F_A \ltimes X]$ 的全局维数至多为 2。我猜想这类代数实际上是遗传的。这将推广一个著名结论：有限图的 Leavitt 路代数是遗传的 [2]，自由群代数也是遗传的。

回忆一下，如果每个左理想都是投射模，那么一个环称为（左）遗传的 。众所周知，一个环是遗传的，当且仅当投射模的任意子模都是投射模。

环 R 的（左）全局维数 是其（左）模的投射维数的上确界。一个环是遗传的，当且仅当其全局维数至多为 1。Auslander [17,定理 8.16] 指出，R 的全局维数等于其循环模的投射维数的上确界 R/L ，其中 L 是左理想。特别地，考虑正合列 $0 \to L \to R \to R/L \to 0$可知，如果每个左理想的投射维数至多为 n，那么 R 的全局维数至多为 $n+1$。

下面我们介绍一些预备知识。首先，在下文中，我们假设 $\mathcal{G}$ 是一个单位空间紧致的豪斯多夫 ample 群胚。如果 X 是一个局部紧且全不连通的豪斯多夫空间，且 K 是一个交换环，那么根据 [14, 推论 2.3]，有 $K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}X \cong KX$ 。我们用 $\mathrm{pd}_R M$ 表示环 R上的模的投射维数。

引理 5.1。 设 K 是一个交换环。那么$\mathrm{pd}_{K\mathcal{G}} K\mathcal{G}^0 \le \mathrm{pd}_{\mathbb{Z}\mathcal{G}} \mathbb{Z}\mathcal{G}^0$。

证明。 首先注意，由于 $K\mathcal{G} \cong K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}\mathcal{G}$，标量扩张保持投射性。设 $P_\bullet \to \mathbb{Z}\mathcal{G}^0$ 是一个长度为 $\mathrm{pd}_{\mathbb{Z}\mathcal{G}} \mathbb{Z}\mathcal{G}^0$的投射分解。则 $K \otimes_{\mathbb{Z}} P_\bullet \to K\mathcal{G}^0$ 是由投射的 $K\mathcal{G}$-模组成的链复形。由于$\mathbb{Z}\mathcal{G}$ 作为阿贝尔群是无挠的， $P_\bullet \to \mathbb{Z}\mathcal{G}^0$ 是$\mathbb{Z}$ 上的平坦分解，其对象为无挠、因而平坦的阿贝尔群 $\mathbb{Z}\mathcal{G}^0$。因此， $H_n(K \otimes_{\mathbb{Z}} P_\bullet) \cong \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(K, \mathbb{Z}\mathcal{G}^0) = 0$。由此可知， $K \otimes_{\mathbb{Z}} P_\bullet \to K\mathcal{G}^0$ 是一个长度为 $\mathrm{pd}_{\mathbb{Z}\mathcal{G}} \mathbb{Z}\mathcal{G}^0$的投射分解，从而证明了结论。□

令 S 为 $\mathcal{G}$的紧开双截面所构成的逆幺半群。则$K\mathcal{G} \cong KS/I$ 经由 $1_U \leftrightarrow U$ ，其中 I 由所有差集 $U + V$ –生成

（$U \cup V$），其中 U，$V \subseteq \mathcal{G}^0$ 互不相交且为紧开 [18, 定理 3.11]。此外，S的任意幂等元，例如 ss^*，都会映射到 $K\mathcal{G}^0$

设 M, N 为左 $K\mathcal{G}$-模。我们希望证明 $M \otimes_{K\mathcal{G}^0} N$ 是一个$K\mathcal{G}$-模。首先注意，$M \otimes_K N$ 以标准方式构成一个 KS-模：$s(m \otimes n) = sm \otimes sn$。注意，$M \otimes_{K\mathcal{G}^0} N$是 $M \otimes_K N$关于由满足 $e = 1_U$ 的元素 $em \otimes n - m \otimes en$ 所生成的 K-模 A的商，其中$U \subseteq \mathcal{G}^0$ 为紧开。若 $s = 1_V$，且 V 为紧开双截面，则 $ses^* = 1_{VUV^{-1}}$。因此，$s(em \otimes n - m \otimes en) = ses^*s \otimes sn - sm \otimes ses^*sn$属于 A。由此可知，$M \otimes_{K\mathcal{G}^0} N$ 是一个 KS-模。为证明它是一个 $K\mathcal{G}$-模，我们必须证明：若 $m \otimes n \in M \otimes_{K\mathcal{G}^0} N$是一个基本张量，且 $U, V \subseteq G^0$ 为互不相交的紧开集，则 $(1_U + 1_V)(m \otimes n) = 1_{U\cup V}(m \otimes n)$。事实上，我们有

$$\begin{aligned} 1_{U\cup V}(m \otimes n) &= 1_{U\cup V}m \otimes 1_{U\cup V}n = m \otimes 1_{U\cup V}n = m \otimes (1_U + 1_V)n \\ &= m \otimes 1_U n + m \otimes 1_V n = 1_U m \otimes 1_U n + 1_V m \otimes 1_V n \\ &= 1_U(m \otimes n) + 1_V(m \otimes n) = (1_U + 1_V)(m \otimes n) \end{aligned}$$

因为张量积取在 $K\mathcal{G}^0$上。

显然可以验证，自然同构 $(L \otimes_{K\mathcal{G}^0} M) \otimes_{K\mathcal{G}^0} N \cong L \otimes_{K\mathcal{G}^0} (M \otimes_{K\mathcal{G}^0} N)$ 是一个 $K\mathcal{G}$-模同构。

注意，S在平凡模 $K\mathcal{G}^0$ 上的作用是 $(s, f) \mapsto sfs^*$。

命题 5.2. 对任意 $K\mathcal{G}$-模 M，存在一个自然同构 $KG^0 \otimes_{K\mathcal{G}^0} M \to M$。

证明。作用映射诱导出一个 $K\mathcal{G}^0$-模同构 $f \otimes m \mapsto fm$。我们来验证这是一个 $K\mathcal{G}$-模同构。事实上，若 $s \in S$ 和 $e = 1_U$，且 $U \subseteq \mathcal{G}^0$ 是紧致开集，则 $s(e \otimes m) = ses^* \otimes sm \mapsto ses^*sm = ss^*sem = sem$。□

我们也可以类似地将 $\mathrm{Hom}_{K\mathcal{G}^0}(M, N)$ 构造成一个 $K\mathcal{G}$-模，其中 $K\mathcal{G}$ 是模M, N。作用定义为 $(sf)(m) = sf(s^*m)$。为证明它是 $K\mathcal{G}^0$-线性的，设 $e = 1_U$，其中 $U \subseteq \mathcal{G}^0$ 是紧致开集，并设 $s \in S$。那么 $(sf)(em) = sf(s^*em) = sf(s^*ess^*m) = ss^*esf(s^*m) = esf(s^*m) = e(sf)(m)$。这使得 $\mathrm{Hom}_{K\mathcal{G}^0}(M, N)$ 成为一个 KS-模。为验证它是一个 $K\mathcal{G}$-模，取不相交的紧致开集 $U, V \subseteq \mathcal{G}^0$ 和 $f\colon M \to N$，一个 $K\mathcal{G}^0$-模同态，并验证 $1_{U\cup V}f = 1_U f + 1_V f$。事实上，

$$\begin{aligned} (1_{U\cup V}f)(m) &= 1_{U\cup V}f(1_{U\cup V}m) = f(1_{U\cup V}m) = f((1_U + 1_V)m) \\ &= f(1_U m) + f(1_V m) = 1_U f(1_U m) + 1_V f(1_V m) \\ &= (1_U f)(m) + (1_V f)(m) = ((1_U + 1_V)f)(m). \end{aligned}$$

命题 5.3. 若 M 是一个 $K\mathcal{G}$-模，则 $\mathrm{Hom}_{K\mathcal{G}^0}(K\mathcal{G}^0, M) \cong M$ 关于 M 自然成立。

证明。存在一个 $K\mathcal{G}^0$-模同构，将 $f\colon \mathcal{G}^0 \to M$映射到 $f(1)$。我们来证明它是一个 $K\mathcal{G}$-模同构。事实上，若 $s \in S$，则 $(sf)(1) = sf(s^*1s) = sf(s^*s) = ss^*sf(1) = sf(1)$。□

现在我们证明，Hom-张量伴随在 $K\mathcal{G}$-模层面成立。

命题 5.4. 设 L、M、N 是 $K\mathcal{G}$-模。则存在如下 K-模之间的自然同构：$\mathrm{Hom}_{K\mathcal{G}}(L, \mathrm{Hom}_{K\mathcal{G}^0}(M, N)) \cong \mathrm{Hom}_{K\mathcal{G}}(L \otimes_{K\mathcal{G}^0} M, N) \cong \mathrm{Hom}_{K\mathcal{G}}(M, \mathrm{Hom}_{K\mathcal{G}^0}(L, N))$。

证明。 事实上，这三个 K-模都同构于由 $K\mathcal{G}^0$-双线性映射构成的 K-模 f：$L \times M \to N$ 满足 $f(s\ell, sm) = sf(\ell, m)$，其中 $s \in S$。

由于中间的 Hom 集显然成立，而第三个 Hom 集是第一个的对偶，我们只需处理第一个 Hom 集。若 f：$L \times M \to N$ 满足上述性质，定义 F：$L \to \mathrm{Hom}_{K\mathcal{G}}(M, N)$，使得 $F(\ell)(m) = f(\ell, m)$。则 $F(s\ell) = f(s\ell, m) = f(ss^*s\ell, m) = f(s\ell, ss^*m) = sf(\ell, s^*m) = sF(\ell)(s^*m) = (sF(\ell))(m)$，其中第三个等式用到了 f 关于 $K\mathcal{G}^0$ 是双线性的这一事实。

反之，如果 F：$L \to \mathrm{Hom}_{K\mathcal{G}^0}(M, N)$ 是一个同态，并且 $f(\ell, m) = F(\ell)(m)$，那么 $f(s\ell, sm) = F(s\ell)(sm) = (sF(\ell))(sm) = sF(\ell)(s^*sm) = ss^*sF(\ell)(m) = sF(\ell)(m) = sf(\ell, m)$。□

Hom-张量伴随的第一个推论如下。

推论 5.5。 如果 M、N 是 $K\mathcal{G}$-模，那么存在一个自然同构 $\mathrm{Hom}_{K\mathcal{G}}(M, N) \cong \mathrm{Hom}_{K\mathcal{G}}(K\mathcal{G}^0, \mathrm{Hom}_{K\mathcal{G}^0}(M, N))$。

证明。 根据命题 5.2 和 5.4，我们有同构 $\mathrm{Hom}_{K\mathcal{G}}(M, N) \cong \mathrm{Hom}_{K\mathcal{G}}(K\mathcal{G}^0 \otimes_{K\mathcal{G}^0} M, N) \cong \mathrm{Hom}_{K\mathcal{G}}(K\mathcal{G}^0, \mathrm{Hom}_{K\mathcal{G}^0}(M, N))$。□

Hom-张量伴随的另一个推论是，当 $\mathcal{G}$ 仿紧（且豪斯多夫）时，投射模的张量积是投射的。下面是对 [3, 引理 2.13]的一个小幅变体。

引理 5.6. 设 $\mathcal{G}$ 是一个仿紧的充足豪斯多夫群胚，且具有紧致单位空间。则 $K\mathcal{G}$ 是一个投射的 $K\mathcal{G}^0$-模。因此，任何投射的 $K\mathcal{G}$-模也是一个投射的 $K\mathcal{G}^0$-模。

证明。 由于 $\mathcal{G}$ 是一个仿紧、局部紧豪斯多夫且全不连通的空间，它有一个由两两不交的紧致开双截面 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$构成的覆盖。于是 $K\mathcal{G} \cong \bigoplus_{\alpha \in A} K\mathcal{G}^0 1_{U_\alpha} \cong \bigoplus_{\alpha \in A} K\mathcal{G}^0 1_{\boldsymbol{r}(U_\alpha)}$ 作为一个$K\mathcal{G}^0$-模。□

推论 5.7. 设 $\mathcal{G}$ 是一个具有紧致单位空间的丰群胚。设P, Q 是 $K\mathcal{G}$-模，其中 P 在 $K\mathcal{G}$ 上是投射的，而 Q 在 $K\mathcal{G}^0$上是投射的。则 $P \otimes_{K\mathcal{G}^0} Q$ 在 $K\mathcal{G}$上是投射的。

证明。 根据命题 5.4，我们有

$$\mathrm{Hom}_{K\mathcal{G}}(P \otimes_{K\mathcal{G}^0} Q, -) \cong \mathrm{Hom}_{K\mathcal{G}}(P, \mathrm{Hom}_{K\mathcal{G}^0}(Q, -)),$$

且右侧是正合的，因为 P 是关于 $K\mathcal{G}$ 的投射模，且 Q 是关于 $K\mathcal{G}^0$的投射模。□

现在假设 $\mathcal{G}$ 是一个仿紧豪斯多夫丰群胚，且具有紧单位空间。注意，若 M，N 是 $K\mathcal{G}$-模，且 $P_\bullet \to M$ 是关于 $K\mathcal{G}$的投射分解，那么根据引理 5.6，它也是关于 $K\mathcal{G}^0$的投射分解。因此，$H^n(\mathrm{Hom}_{K\mathcal{G}^0}(P_\bullet, N)) = \mathrm{Ext}^n_{K\mathcal{G}^0}(M, N)$，并且它具有 $K\mathcal{G}$-模结构。通过标准论证，很容易看出该结构与投射分解的选择无关。

现在我们构造一个将 Ext 与群胚上同调联系起来的谱序列。 [6], 中给出了一个用于计算霍赫希尔德上同调的类似谱序列，但他们研究的是紧开双截面所成逆半群的上同调。

定理 5.8。 设 $\mathcal{G}$ 是一个单位空间紧致的仿紧豪斯多夫丰群胚。那么存在一个收敛谱序列

$$\mathrm{Ext}^p_{K\mathcal{G}}(K\mathcal{G}^0, \mathrm{Ext}^q_{K\mathcal{G}^0}(M, N)) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_{K\mathcal{G}}(M, N)$$

对于 $K\mathcal{G}$-模 M、 N。

证明。设 $P_\bullet \to K\mathcal{G}^0$ 和 $Q_\bullet \to M$ 是 $K\mathcal{G}$上的投射分解。考虑双上链复形 $C^{p,q} = \mathrm{Hom}_{K\mathcal{G}}(P_p \otimes_{K\mathcal{G}^0} Q_q, N)$。我们来计算第一滤过对应的谱序列。我们有

$$C^{p,\bullet} = \mathrm{Hom}_{K\mathcal{G}}(P_p \otimes_{K\mathcal{G}^0} Q_\bullet, N) \cong \mathrm{Hom}_{K\mathcal{G}}(P_p, \mathrm{Hom}_{K\mathcal{G}^0}(Q_\bullet, N))$$

其上同调为 $\mathrm{Hom}_{K\mathcal{G}}(P_p, \mathrm{Ext}^q_{K\mathcal{G}^0}(M, N))$，因为对所有 p， P_p都是投射的。这个复形的上同调进而为 $\mathrm{Ext}^p_{K\mathcal{G}}(K\mathcal{G}^0, \mathrm{Ext}^q_{K\mathcal{G}^0}(M, N))$。

对于第二滤过，我们计算

$$C^{\bullet,p} = \mathrm{Hom}_{K\mathcal{G}}(P_\bullet \otimes_{K\mathcal{G}^0} Q_p, N) \cong \mathrm{Hom}_{K\mathcal{G}}(Q_p, \mathrm{Hom}_{K\mathcal{G}^0}(P_\bullet, N)).$$

由于 Q_p 是投射的，因此其上同调为 $\mathrm{Hom}_{K\mathcal{G}}(Q_p, \mathrm{Ext}^q_{K\mathcal{G}^0}(K\mathcal{G}^0, N))$，而后者的上同调为 $\mathrm{Ext}^p_{K\mathcal{G}}(M, \mathrm{Ext}^q_{K\mathcal{G}^0}(K\mathcal{G}^0, N))$。但是

$$\mathrm{Ext}^q_{K\mathcal{G}^0}(K\mathcal{G}^0, N) \cong \begin{cases} N, & \text{if } q = 0 \\ 0, & \text{if } q > 0 \end{cases}$$

由命题 5.3 得。因此，此谱序列在轴 $q = 0$ 上退化，从而我们得到总体复形的同调为 $\mathrm{Ext}^n_{K\mathcal{G}}(M, N)$。定理得证。□

接下来，当 X 是一个第二可数紧豪斯多夫全不连通空间时，我们需要关于 KX 的一个观察。回忆一下，一个环 R 被称为（冯·诺依曼）正则的 [11]，如果对于所有 $a \in R$，都存在 $b \in R$ 使得 $aba = a$。

定理 5.9。 设 X 是一个第二可数紧豪斯多夫全不连通空间。那么 KX 是遗传的（作为带逐点乘积的环）。

证明。首先注意， KX 是正则环。事实上，若 $f \in KX$ ，并定义$g \in KX$ 为

$$g(x) = \begin{cases} f(x)^{-1}, & \text{if } f(x) \neq 0 \\ 0, & \text{else,} \end{cases}$$

则 $fgf = f$。由于 X是第二可数的， KX在 K 上具有可数维数（由可数多个紧开集的特征函数张成）。因此， KX 中的所有理想都是可数生成的。Kaplansky 的一个定理指出，正则环中的任意可数生成左理想都是投射的 [11, 推论 2.15]。由此可知， KX 是遗传的。□

我们指出，这里需要满足第二可数性。存在全局维数 [15]任意的布尔环的例子。每个布尔环都具有如下形式： $\mathbb{F}_2X$ ，其中 X是紧豪斯多夫且全不连通的空间，而 $\mathbb{F}_2$ 是二元域。

现在我们可以证明定理 C。

定理 *C* 的证明。设 $\mathcal{G} = F_A \ltimes X$。注意， $\mathcal{G} = \bigcup_{w\in F_A}\{w\} \times X_{w^{-1}}$是 $\mathcal{G}$ 的一个覆盖，由两两不交的紧开双截面组成，因此可知 $\mathcal{G}$ 是仿紧的。设 L 是 $K\mathcal{G}$的一个左理想。我们证明 L的投射维数至多为 1；由此可得 $K\mathcal{G}$ 的全局维数至多为 2。首先注意到， L 是一个 KX-模上的投射模，因为根据定理 5.9，KX 是遗传的，并且根据引理 5.6， L 是一个投射KX-模的子模。因此，定理 5.8 中的谱序列（取 $M = L$）在轴 $q = 0$上退化，由此我们得出 $\mathrm{Ext}^n_{K\mathcal{G}}(L,\ N) \cong \mathrm{Ext}^n_{K\mathcal{G}}(K\mathcal{G}^0,\ \mathrm{Hom}_{K\mathcal{G}^0}(L,\ N))$ 。根据推论 4.6 和引理 5.1，我们有 $\mathrm{pd}_{K\mathcal{G}}\, K\mathcal{G}^0 \leq 1$。由此可知，对于所有模 N，$\mathrm{Ext}^2_{K\mathcal{G}}(L,\ N) = 0$。因此， L 的投射维数至多为 1。□

我猜想，在定理 C 的假设下，全局维数至多为一，即 $K[F_A \ltimes X]$ 是遗传的。

推论 5.10. 设(X, T) 是一个 *Deaconu-Renault* 系统，其中 X是第二可数、紧豪斯多夫且全不连通的，且$\mathrm{dom}\, T$ 既开又闭。那么，对于任意域 K， $K\mathcal{G}_{(X,T)}$ 的全局维数至多为2 。

以下关于自由逆幺半群的代数的结果似乎是新的。

推论 5.11. 域上的自由逆幺半群的代数的全局维数至多为2。

证明。 设 K 是一个域。对于任意逆幺半群 M，都有一个 $M\!\frown$ 在其幂等元的谱 $E(M)$ 上的作用；该谱是一个紧致、全不连通的豪斯多夫空间，使得 $KM \cong K[M \ltimes E(M)]$ [19, 定理 6.3]。将此应用于自由逆幺半群，并利用命题 2.3，我们得到$\frown$ $KFIM_A \cong K[F_A \ltimes E(FIM_A)]$ 是 $\frown F_A$ 在 $E(FIM_A)$ 上的一个半饱和偏作用。因此，根据定理 C， $KFIM_A$的全局维数至多为 2。□

我猜想 $KFIM_A$ 是遗传的。

References

[1] F. Abadie. 部分作用的包络作用与高井对偶。 *J. Funct. Anal.*, 197 1 14 67, 2003 ( ): – . [2] G. Abrams 、 P. Ara 和 M. Siles Molina。 *Leavitt path algebras*。《数学讲义》第 2191 卷。伦敦：施普林格，2017 年。[3] C. B¨onicke、C. Dell'Aiera、J. Gabe 和 R. Willett。动态渐近维数与 Matui 的 HK 猜想。 *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 126(4):1182–1253, 2023. [4] G. G. de Castro 和 E. J. Kang。部分动力系统中连续轨道等价的范畴论解释。 *Bulletin of the London Mathematical Society* 57 12 3637 3656, 2025 , ( ): – . [5] M. Dokuchaev 和 R. Exel。代数部分交叉积的理想结构。*Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 115(1):91–134, 2017. [6] M. Dokuchaev、M. Khrypchenko 和 J. Jacobo Sim´on。逆幺半群作用下交叉积与 Steinberg 代数的同调与上同调。 *arXiv e-prints*, 第 arXiv:2506.20321 页，2025 年 6 月。[7] R. Exel。逆半群与组合 C^* *Bull. Braz. Math. Soc.* 代数。 *(N.S.)* 39 2 191 313, 2008 , ( ): – . [8] R. Exel。 *Partial dynamical systems, Fell bundles and applications*, 《数学讲义》第 224 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2017 年。[9] R. Exel 和 B. Steinberg。子移位半群。 *ArXiv e-prints*, 2019 年 8 月。[10] C. Farsi、A. Kumjian、D. Pask 和 A. Sims。充足群胚：等价、同调与 Matui 的 HK 猜想。 *Münster J. Math.*, 12(2):411–451, 2019. [11] K. R. Goodearl。 *von Neumann regular rings*。Robert E. Krieger 出版公司，马拉巴尔，佛罗里达州，第二版，1991 年。[12] J. Kellendonk 和 M. V. Lawson。群的部分作用。 *Internat. J. Algebra Comput.* 14 1 87 114, 2004 , ( ): – . [13] M. V. Lawson。 *Inverse semigroups*。World Scientific Publishing Co. Inc.，新泽西州里弗埃奇，1998 年。《部分对称理论》。[14] X. Li。丰群胚、拓扑满群、代数 K 理论谱与无限循环空间。 *Forum of Mathematics, Pi*, 13:e9, 2025. [15] R. Pierce。布尔环的全局维数。 *Journal of Algebra* 7 1 91 99, , 1967 ( ): – . [16] V. Proietti 和 M. Yamashita。动力系统的同调与 K 理论 I。无挠充足群胚。 *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 42 2660, 2022 8 2630( ): – . [17] J. J. Rotman。 *An introduction to homological algebra*。Universitext。施普林格，纽约，第二版，2009 年。[18] B. Steinberg。离散逆半群代数的群胚方法。 http://arxiv.org/abs/0903.3456，2009 年 3 月。[19] B. Steinberg。离散逆半群代数的群胚方法。 *Adv. Math.*, 223 2 689( ): –727, 2010.

（B. Steinberg） Department of Mathematics, City College of New York, Convent Avenue at 138th Street, New York, New York 10031, USA*Email address*: bsteinberg@ccny.cuny.edu