arXiv:2602.15180v1 [quant-ph] 16 Feb 2026

用于$SU(n)$高维表示与拉马努金量子扩展器的高效量子电路

Vishnu Iyer[1],Siddhartha Jain[1,2],Stephen Jordan[2],和 Rolando D. Somma[2]

[1]德克萨斯大学奥斯汀分校，美国得克萨斯州奥斯汀 78712[2]Google Quantum AI，美国加利福尼亚州威尼斯 90291

2026年2月18日

摘要

我们提出了高效量子电路，可实现 $SU(n)$ 的高维酉不可约表示（不可约表示），其中 $n \geq 2$ 为常数。对于维数 N 和误差 ϵ，我们电路中的量子门数量关于 $\log(N)$ 和 $\log(1/\epsilon)$ 呈多项式增长。我们的构造依赖于 Jordan-Schwinger 表示，它使我们能够在 n 个量子谐振子的希尔伯特空间中实现 $SU(n)$ 的不可约表示。结合近期提出的高效量子厄米变换（它可以将计算基态映射到量子谐振子的本征态），我们便能高效实现这些不可约表示。我们的量子电路可用于构造显式拉马努金量子扩展器，这是一个长期悬而未决的问题。它们还可用于快速前向模拟某些量子系统的演化。

目录

1 引言
31.1 问题陈述 .61.2 结果概述 .81.3 相关工作 .101.3.1 Zalka构造 .101.3.2 Schur 变换 .111.3.3 李群表示的基于哈密顿量的方法 .121.3.4 近似拉马努金量子扩展器 .132 $SU(n)$ 的振子表示 **13**2.1 Jordan-Schwinger映射 .132.2 $SU(n)$ 在振子表示中的快速前向模拟 .153 离散量子谐振子 **17**3.1 离散化误差 .18

4 等距映射 **23**
4.1 降序字典序.234.2 量子厄米变换.245 量子算法**25**5.1 复杂度.266 应用**26**6.1 显式拉马努金量子扩展器.266.2 量子模拟快进.287 结论与开放问题**29**A 李代数的不可约表示 $\mathfrak{su}(n)$使用玻色算符**30**A.1 高维表示 $\mathfrak{su}(2)$ .31B 降序字典序中的排名**32**B.1 从索引到字典序排列.32B.2 从字典序排列到索引.32C 基于 $SU(2)$ 构造拉马努金量子扩展器**34**

1 引言

特殊酉群 $SU(n)$, $n \geq 2$, 是物理学和量子信息理论的基石（参见 [18, 36]）。一方面，这些群决定了物质的基本对称性： $SU(2)$ 由角动量算符代数生成，支配着自旋系统和电弱相互作用的物理学 [29], ，而 $SU(3)$ 是量子色动力学（QCD）的基础，并自然地出现在核物理中 [3]。另一方面，群 $SU(n)$ 对研究希尔伯特空间的复杂度至关重要：特定的高维$SU(n)$ 酉算符子集可作为量子扩展器，这类操作能迅速将信息扩散到整个系统 [38, 25]。这些“快速扰乱器”对于模拟量子热化、混沌和黑洞动力学至关重要 [44], ，并且与酉设计有着内在联系 [26]。因此，高效实现这些高维酉算符的量子实现是量子信息领域的优先事项；正如我们将讨论的，这在量子模拟及其他领域具有重要的基础性和实际应用价值。

形式上， $SU(n)$ 群由行列式为 1 的 $n \times n$ 酉矩阵张成。这些矩阵确定了 $SU(n)$ 的基本表示。然而，在考察高维表示时，群的结构会变得更为重要，因为高维表示能够提供更丰富的物理学模型（例如，自旋不为 1/2）以及其他重要的量子信息任务。为了描述这类表示，我们从李代数 $\mathfrak{su}(n)$ 出发，定义 $SU(n)$。按照物理学家的约定， $\mathfrak{su}(n)$ 的基本表示由迹为零且满足以下对易关系的 $n \times n$厄米矩阵$\{T_1, \ldots, T_{n^2-1}\}$ 给出：

$$[T_a, T_b] = T_a T_b - T_b T_a = \mathrm{i} \sum_{c=1}^{n^2-1} f_{abc} T_c \,. \tag{1}$$

系数 $f_{abc} \in \mathbb{R}$ 对于 $a, b, c \in \{1, \ldots, n^2 - 1\}$ 完全反对称，并构成 $\mathfrak{su}(n)$ 的结构因子。公式 (1) 是李代数的一项主要性质，即对易关系构成封闭关系。于是，(n) 的基本表示中的任意元素 U 都可以用 $n^2 - 1$ 实参数 θ_a表示，因此

$$U = \exp\left(\mathrm{i} \sum_{a=1}^{n^2-1} \theta_a T_a \right) \in \mathbb{C}^{n \times n} \,. \tag{2}$$

按照我们的约定，只需将范围限制为 $\theta_a \in [0, 4\pi)$。

一般来说，采用李代数 $\mathfrak{g}$ 的抽象定义，以及其李群 G 的抽象定义，会很有用；这种定义仅取决于结构因子，而非特定的矩阵表示。˜ ˜在我们的情形中，可以通过一组基 $\{\tilde{T}_1, \ldots\ldots, \tilde{T}_{n^2-1}\}$，以及一个李括号$[.,.]$： $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}$，来指定 $\mathfrak{g} \equiv \mathfrak{su}(n)$:

$$[\tilde{T}_a, \tilde{T}_b] = \mathrm{i} \sum_{c=1}^{n^2-1} f_{abc} \tilde{T}_c \,. \tag{3}$$

李括号是双线性的、反对称的，并满足雅可比恒等式。这与式（1）类似，只不过这里并未指涉向量或˜元素 T_a的任何特定矩阵表示。也就是说，虽然李括号规定了抽象李代数，但它并非某个特定的˜公式，例如式（1）中的对易子，因为 T_a 是抽象元素。接下来，在.....的背景下

˜表示论中，任意抽象元素 T_a 都对应于一个 $N \times N$维厄米矩阵 T_a，使得对易子定义为 $[T_a, T_b] := T_a T_b - T_b T_a$ 满足 $[T_a, T_b] = \mathrm{i} \sum_{c=1}^{n^2-1} f_{abc} T_c$。也就是说，李括号由表示中的矩阵之间的对易子取代，且二者都满足类似的规则。由于此时维数通常可以满足 $N \geq n$ ，因此抽象李代数 $\mathfrak{su}(n)$ 可以有更高维的表示，这正是本文所考虑的情形。它也允许群$SU(n)$有更高维的表示，只需令 $U = \exp(\mathrm{i} \sum_a \theta_a T_a) \in \mathbb{C}^{N \times N}$。关于李代数和李群的基础知识，参见文献 [16]。

用于说明表示论的一个简单例子是 $SU(2)$，其中抽象李˜ ˜ ˜代数 $\mathfrak{su}(2)$ 由元素 T_1、T_2和 T_3张成，它们与量子系统的角动量算符 J_x、 J_y和 J_z 相关。也就是说， $\mathfrak{su}(2)$ 的基本表示是“自旋 1/2”表示，可由泡利矩阵的一半构成，表示为 $T_a = \frac{1}{2}\sigma_a \in \mathsf{C}^{2\times 2}$。接下来的“自旋 1”表示为

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; T_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \; T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

本研究特别关注表示维数为 $N \gg n$ 的情形。事实上，我们主要考虑 n 为常数（例如 $n = 2$ 或 $n = 3$），而 N可随某个问题参数 r （例如 $N = 2^r$）呈指数级增长的情况[1]。我们还将考虑 $\mathfrak{su}(n)$ 的忠实表示，即每个˜基元素 T_a 与其矩阵表示 T_a之间一一对应；以及不可约表示（即不可约表示），其矩阵表示无法分解为较小矩阵的直和（也就是说，除整个空间 C^N外，不存在其他不变子空间）。

注意到 $SU(n)$ 的高维表示是酉矩阵，因此自然会考虑它们在量子算法中的实现与应用。也就是说，对于群 $SU(n)$ 的一个表示中的酉算子$U = \exp\left(\mathrm{i} \sum_{a=1}^{n^2-1} \theta_a T_a\right) \in \mathsf{C}^{N \times N}$，我们可以将 U 视为作用于希尔伯特空间 C^N 上的量子线路，例如该空间由 $r = \log_2 N$ 个量子比特构成。对于量子信息任务，我们希望此类量子线路的复杂度具有良好的标度，尤其是相对于维数 N 和精度 ϵ而言。这是一个长期悬而未决的问题，也是我们的主要成果。具体而言，我们将证明， U 可以通过复杂度关于 $\mathsf{log}(N)$ 和 $\mathsf{log}(1/\epsilon)$ 呈多项式关系的量子线路实现，且误差可任意小至 $\epsilon > 0$ 。

我们的结果并不能直接从标准量子算法中推出。例如，尽管 U可以视为量子系统在哈密顿量 $\sum_a \theta_a T_a$作用下的演化，但该表示中的厄米矩阵满足 $\|T_a\| = \Theta(N)$，因此，哈密顿量模拟 [10, 11, 37] 的通用方法会导致复杂度关于 N 而非 $\mathsf{log}(N)$ 呈多项式关系。然而，我们的主要结果表明，这些 $SU(n)$ 操作可以实现快速前向模拟。所谓快速前向模拟，是指任何能够绕过无快速前向定理的量子模拟方法；这些定理表明，模拟哈密顿量 H 演化时间 t [10, 4, 22, 21]的复杂度至少为 $\Omega(t\|H\|)$。

我们的解决方案采用了 $SU(n)$ 的振子实现。基本上，通过考虑作用于由 n 个量子谐振子或玻色模式构成的空间上的特定算符，可以构造 $\mathfrak{su}(n)$ 的一个 $N \times N$ 维不可约表示。更重要的是，我们展示了如何高效实现这些玻色系统中相应的 $SU(n)$ 酉算符，所需时间为

[1]我们的结果可以推广到 $n = \mathsf{polylog}(N)$ 的情形，并可直接应用于 $SU(n)$ 的子群。

关于 $\log(N)$ 和 $\log(1/\epsilon)$ 的多项式时间。然而，这并不能直接解决我们的问题，因为我们已经从由 $\mathbb{C}^N$ 个 r 量子比特构成的空间转到了由 n谐振子构成的空间，因此需要一种等距映射，以便在这两个空间之间高效转换。值得注意的是，我们利用近期提出的一种高效量子厄米特变换，成功构造了这种等距映射 [31], ，该变换将基态映射为厄米特态。这些厄米特态正是量子谐振子的本征态，也称为福克态 [19]。因此，我们用于实现 U 的量子电路作用于一个扩展空间，该空间是准确表示量子谐振子所必需的。

本质上，我们的方法与文献 [49]有一些相似之处。该文提出了一种用于实现高维 $SU(2)$ 酉算子的量子算法。他们的思路是使用球谐函数，而不是厄米特态。球谐函数同样可以导出 $SU(2)$ 的不可约表示。然而，文献 [49] 并未对算法的运行时间进行仔细分析，而且尚不清楚该方法是否高效——参见第1.3节。我们还要指出，在我们的情形中，维数 N 不能任意取值，而必须满足关系 $N = \binom{M+n-1}{n-1}$，其中 $M \geq 0$ 是任意整数。这是因为 $SU(n)$ 的振子表示只产生“全对称”的不可约表示，从而限制了可能的维数[2]。不过，这不会影响我们所考虑的应用，而且 N 仍然可以任意大。此外，当 N 满足 $n = 2$时，

一个直接推论是，我们针对 $SU(2)$ 酉算符提出的高效量子算法可用于构造显式拉马努金量子扩展器。这也是量子信息领域长期悬而未决的问题。参考文献 [38, 27, 25], 表明，存在一组有限且显式的 $SU(2)$ 酉算符，可产生最优量子扩展器，其谱隙相对于度数而言达到可能的最大值。因此，这类量子扩展器是量子信息的最优搅拌器。随后，我们便能高效地以任意精度构造这些扩展器 $\epsilon > 0$ 。另一项直接推论是，我们能够加速某些量子系统的演化，例如量子混沌中的量子踢顶，这也丰富了可加速演化的物理模型相关文献 [21]。最终，我们预期量子原语还将为其他新颖应用打开大门。

本文随后组织如下。在第1.1节中，我们定义并形式化“高维$SU(n)$问题”，该问题旨在高效实现 $U \in SU(n)$，并在第 1.2 节中总结主要结果与推论。在第1.3节中，我们评述相关工作，包括文献 [49]，并评述针对一个不同但相关问题的量子 Schur 变换的高效量子算法。在第2节中，我们描述如何通过振子表示或Jordan-Schwinger表示，即通过 n 量子谐振子或玻色系统，获得 $SU(n)$ 的高维不可约表示。在那里，我们还展示如何对相应的 $SU(n)$酉算符进行快速前向模拟并高效实现。此外，由于量子谐振子定义在连续情形和无穷维空间中，我们需要通过离散化来近似它们，因此在第3节中描述其有限维版本。特别地，在第3.1节中，我们证明可以考虑一个维数足够高的离散量子谐振子，以任意精度复现连续情形中的结果。接下来，我们在第5节中构造空间之间的等距映射，并在那里给出高维 $SU(n)$酉算子的完整高效量子算法。我们在第6节讨论量子扩张器与快速前向模拟的潜在应用，并在第7节作出结论。

[2]这些对称不可约表示由单行杨图刻画。

1.1 问题陈述

为清晰起见，我们以一种与全对称表示或振子表示直接相关的方式，形式化实现 $SU(n)$的高维不可约表示这一问题，并将其称为高维 $SU(n)$问题。也就是说，存在无穷多个维数N 的表示（例如，总可以用任意酉算子对 T_a进行共轭并得到另一种表示），但我们将选择由Jordan-Schwinger映射确定的标准表示。这保证了矩阵 T_a 是稀疏的并具有简单结构，以及其他特性。

对于 $n \geq 2$ 和 $N \geq n$，我们令 $U \in \mathbb{C}^{N\times N}$ 为 $SU(n)$ 对应的 N 维不可约表示中的一个酉算子。我们的目标是在 $N \gg 1$时，使用尽可能少的量子门，通过量子电路逼近 U 。为此，我们需要谨慎指定 U 的方式。最终，我们将把 U 描述为一组矩阵的指数函数，这些矩阵构成李代数 $\mathfrak{su}(n)$ 的一个表示；为此，我们将使用标准 Cartan-Weyl基。在此基中，Cartan子代数 $\mathfrak{g}_D$ 由向量 $\{H_i\}_i$ 张成，其中 $1 \leq i \leq n-1$；这些向量对应于一组极大元素，其李括号为零，即对于所有 i 和 i'，都有 $[H_i, H_{i'}] = 0$ 。我们还定义了某些升降元，或称为“根”向量 $\{E_{j,k}\}_{j,k}$，其中 j、$k \in \{1,\ldots,n\}$ 和 $j \neq k$；以及相应的厄米形式 $\tilde{S}_{j,k} := \frac{1}{2}(\tilde{E}_{j,k} + (\tilde{E}_{j,k})^\dagger)$ 和 $\tilde{A}_{j,k} := \mathrm{i}\,2\,(\tilde{E}_{j,k} - (\tilde{E}_{j,k})^\dagger)$，其中 $(\tilde{E}_{j,k})^\dagger = \tilde{E}_{k,j}$。$\mathfrak{su}(n)$ 的李括号为 $[E_{j,k}, E_{l,m}] = \delta_{kl}E_{j,m} - \delta_{jm}E_{l,k}$，而 $[E_{j,k}, H_i]$ 与 $E_{j,k}$ 成正比。因此，算子总数为 $(n-1) + 2n(n-1)/2 = n^2 - 1$，这与 $\mathfrak{su}(n)$ 的维数相符；事实上，抽象李代数 $\mathfrak{su}(n)$ 的一组基为 $\{H_i, S_{j,k}, A_{j,k}\}$。

在我们所考虑的 $\mathfrak{su}(n)$的全对称不可约表示中，维数满足

$$N = \binom{M+n-1}{n-1}, \tag{5}$$

对任意整数 $M \geq 0$成立。也就是说， N 不能对 $n \geq 3$任意取值，但不存在约束施加于 N （针对情形 $n = 2$）。 H_i的表示由对角矩阵给出，而$E_{j,k}$的表示由1-稀疏矩阵给出，其中非零元位于非对角线上。具体而言，我们可以通过考虑$\mathbb{C}^N$的基向量的适当标记来构造所需的不可约表示。标准做法是采用大小为 n的降序字典序： $|0\rangle \equiv |M, 0, 0, \ldots, 0\rangle$ $|1\rangle \equiv |M-1, 1, 0, \ldots, 0\ldots, |M+1\rangle \equiv |0, M, 0, \ldots, 0\rangle$ $|M+2\rangle \equiv |0, M-1, 1, \ldots, 0\ldots, |N-1\rangle \equiv |0, 0, 0, \ldots, M\rangle$。对于 $i \in \{1,\ldots,n\}$，令 $m_i(\ell) \in \{0,\ldots,M\}$为 i^{th} 分量在 $|\ell\rangle \equiv |m_1(\ell)\ldots, m_n(\ell)\rangle$中的值，其中 $0 \leq \ell \leq N-1$。我们还有逆映射$\mathbf{m}^{-1}$，使得$\mathbf{m}^{-1}(m_1(\ell)\ldots, m_n(\ell)) = \ell \in \{0,\ldots,N-1\}$。

那么，完全对称的 $\mathfrak{su}(n)$ 的不可约表示由以下矩阵给出，这些矩阵作用于基向量的方式如下：

$$\begin{aligned} E_{j,k}|\ell\rangle &\equiv E_{j,k}|m_1(\ell),\ldots,m_j(\ell),\ldots,m_k(\ell),\ldots,m_n(\ell)\rangle \\ &= \sqrt{(m_j(\ell)+1)m_k(\ell)}\,|m_1(\ell),\ldots,m_j(\ell)+1,\ldots,m_k(\ell)-1,\ldots,m_n(\ell)\rangle \\ &\equiv \sqrt{(m_j(\ell)+1)m_k(\ell)}|\mathbf{m}^{-1}(m_1(\ell),\ldots,m_j(\ell)+1,\ldots,m_k(\ell)-1,\ldots,m_n(\ell))\rangle\,. \end{aligned} \tag{6}$$

也就是说，这些矩阵是

$$E_{j,k}: \begin{cases} (E_{j,k})_{\ell,\ell'} = \sqrt{(m_j(\ell)+1)m_k(\ell)} \;\text{ if } \ell' = \mathbf{m}^{-1}(m_1(\ell),\ldots,m_j(\ell)+1,\ldots,m_k(\ell)-1,\ldots,m_n(\ell)), \\ (E_{j,k})_{\ell,\ell'} = 0 \;\text{ otherwise.} \end{cases} \tag{7}$$

˜这自动给出了厄米的 N 维表示 $S_{j,\,k}$和 $A_{j,\,k}$分别对应于 $S_{j,\,k}$和 $\tilde{A}_{j,\,k}$。为了得到 $\tilde{H}_i$的表示，我们写作 $\tilde{H}_i = \frac{1}{2}(\tilde{E}_{i,\,i} - \tilde{E}_{i+1,\,i+1})$。˜的表示 $E_{i,\,i}$ 是一个作用于基向量的矩阵，其作用方式为

$$\begin{aligned} E_{i,i}\,|\ell\rangle &\equiv E_{i,i}\,|m_1(\ell),\ldots,m_i(\ell),\ldots,m_n(\ell)\rangle \\ &= m_i(\ell)\,|m_1(\ell),\ldots,m_i(\ell),\ldots,m_n(\ell)\rangle \\ &\equiv m_i(\ell)\,|\ell\rangle\ . \end{aligned} \tag{8}$$

也就是说，

$$E_{i,i}:\begin{cases} (E_{i,i})_{\ell,\ell} = m_i(\ell), \\ (E_{i,i})_{\ell,\ell'} = 0 \ \text{ if } \ell \neq \ell' \end{cases} \tag{9}$$

对于 $1 \le i \le n$。对于 $n = 2$的情形，这些表示都是以角动量算符表示的标准不可约表示。具有物理学背景的读者或许已经注意到，矩阵 $E_{j,\,k}$ 的作用与相应的玻色产生与湮灭算符作用于福克态时相似。这种联系至关重要。详情见附录A.1 。

虽然 $SU(n)$ 中的酉算子可以表示为任意矩阵 T_a 的线性组合的指数函数，这些矩阵表示 $\mathfrak{su}(n)$，但也可以很容易地将其表示为表示 Cartan-Weyl 基中各元素的矩阵的指数函数。

高维 $\boldsymbol{SU(n)}$ 问题。设 $n \ge 2$、$M \ge 0$ 为整数，$\epsilon \ge 0$ 为误差，N 为满足 $N = \binom{M+n-1}{n-1}$的维数。考虑由式（7）和（9）得到的 $\mathfrak{su}(n)$ 的 N 维表示，其厄米矩阵为 $\{H_i, S_{j,\,k}, A_{j,\,k}\}$。对于 $1 \le i \le n-1$和 $1 \le j < k \le n$，令 $\varsigma_i \in [0, 4\pi)$、$\vartheta_{j,\,k} \in [0, 4\pi)$ 和 $\varphi_{j,\,k} \in [0, 4\pi)$ 为一组 $n^2 - 1$ 任意相位，并定义 $SU(n)$ 酉矩阵

$$U := \exp\left(\mathrm{i}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\varsigma_i H_i + \sum_{1\le j<k\le n}\vartheta_{j,k}S_{j,k} + \varphi_{j,k}A_{j,k}\right)\right) \in \mathbb{C}^{N\times N}. \tag{10}$$

高维 $SU(n)$ 问题的目标是构造一个量子电路 $V \in \mathsf{C}^{N'\times N'}$，使其以谱范数衡量的加性误差至多为 ϵ 地近似 U，具体来说

$$\|(U\,|\psi\rangle)\,|0\rangle - V\,|\psi\rangle\,|0\rangle\,\| \le \epsilon\,, \tag{11}$$

对于所有量子态 $|\psi\rangle \in \mathsf{C}^N$。量子电路 V作用于一个扩展空间，其中 $N' \ge N$，而 $|0\rangle$是辅助系统的某个零态。

我们注意到，与其直接求解这个问题，我们不如求解一个简化版本，即考虑如何对更简单的高维 $SU(n)$ 酉算子进行快速前向模拟。也就是说，我们可以转而考虑实现各个酉算子 $\exp(\mathrm{i}\varsigma H_i)$、$\exp(\mathrm{i}\vartheta S_{j,k})$ 或 $\exp(\mathrm{i}\varphi A_{j,k})$ 的量子电路。这是因为，根据广义欧拉角，式（10）中的酉算子总可以用一系列这样的简单酉算子来近似。

更准确地说，存在一种高效的经典预处理，可执行 $\mathcal{O}(n^3)$ 次运算（包括加法和乘法），使得在给定相位 ς_i, $\vartheta_{j,k}$ 和 $\varphi_{j,k}$ 后，这些相位用于指定 U 在方程 (10) 中的形式，它会输出一组新的角度，从而等价地将 U 写成这些更简单指数算符的乘积。具体而言，我们能够将

$$U = \prod_{b=1}^{n^2-1}\exp(\mathrm{i}\vartheta_b O_b), \tag{12}$$

对于某些角度取值 $\vartheta_b \in [0, 4\pi]$，且其中每个 $O_b \in \{H_i, S_{j,k}, A_{j,k}\}$。

经典方法采用众所周知的吉文斯旋转，序列的最小长度也是 n^2-1，这与 $\mathfrak{su}(n)$的维数相同。对于我们的情况，可以通过简单的递归方式实现这一点：考虑 $\mathfrak{su}(n)$ 的基本表示，该过程本质上是用雅可比方法对角化 $n \times n$ 酉矩阵。实际操作中会出现微小的数值误差。也就是说，要使该分解的误差达到 $\mathsf{O}(\epsilon)$，我们需要在输入中以 $\mathsf{O}(\log(1/\epsilon))$ 位精度提供相位和矩阵元素，因为 n 是常数。对于高维表示，若 $\|H_i\| = \mathsf{O}(N)$、$\|S_{j,k}\| = \mathsf{O}(N)$，且$\|A_{j,k}\| = \mathsf{O}(N)$，则需要将 $\epsilon' =$ 设为 $\mathsf{O}(\epsilon/N)$，才能使谱范数误差达到 $\mathsf{O}(\epsilon)$。因此，这种经典预处理的实际复杂度——即高精度地生成 U 的分解——关于 n、$\log(N)$ 和 $\log(1/\epsilon)$ 是多项式级的，不会影响所声称的加速效果。关于一种高效的经典方法（当 n 为常数或 $n =$ 为 $\mathrm{polylog}(N)$ 时，可生成这样的序列），请参阅文献 [45, 47] 。

1.2 结果总结

我们的主要 结果是用于高维 $SU(n)$ 变换的高效量子电路 .

定理*1.1*（高效高维 $SU(n)$ 量子线路）。设 $n \geq 2$ 为常数， $M \geq 0$为整数。存在一个量子线路 $V \in \mathsf{C}^{N' \times N'}$，能够在维数为 $N = \binom{M+n-1}{n-1}$ 的情况下，以加性误差 $\epsilon > 0$ 实现公式（*10*）中的 $SU(n)$ 酉算子，其复杂度为 $\mathrm{poly}(n, \log(N), \log(1/\epsilon))$。维数 N' 关于 N 和 $1/\epsilon$为多项式，且假设输入相位 ς_i、 ϑ_j、k以及 φ_j、k 均以 $O(\log(N/\epsilon))$ 位精度给出。

更确切地说，我们将证明，只需令维数为 $N' = \mathcal{O}((M^{2.25}/\epsilon^{3.25})^n)$，即可得到总体复杂度 $\mathcal{O}(n^2(\log(N) + \log(1/\epsilon))^3 \times \log(1/\epsilon))$，该复杂度主要由量子厄米变换（QHT）决定，而因子 n^2 源于将 U 分解为 $\mathcal{O}(n^2$项。详见第 5.1节。

如前所述，我们通过考察 $\mathfrak{su}(n)$ 的振子表示以及近期提出的量子哈达玛变换 [31] 来得到这一结果。一般而言，对于所有基态， $U|\ell\rangle = \sum_{\ell'=0}^{N-1} \alpha_{\ell,\ell'} |\ell'\rangle$ ，其中 $\alpha_{\ell,\ell'} \in \mathsf{C}$。下面简述我们的构造。

1. 应用酉算子 V_1 ， 将 $|\ell\rangle$ 转换为按降序字典序排列的第 ℓ 个状态:

$$|\ell\rangle \mapsto |m_1(\ell), \ldots, m_n(\ell)\rangle\,. \tag{13}$$

2. 应用由 n 个量子谐波变换（即 $V_2 =$ 个量子哈达玛变换 $^{\otimes n}$）构成的酉算子 V_2 ，将其映射到厄米特基,

$$|m_1(\ell), \ldots, m_n(\ell)\rangle \mapsto |\psi_{m_1(\ell)}, \ldots, \psi_{m_n(\ell)}\rangle. \tag{14}$$

厄米特态 $|\psi_m\rangle$ 属于扩展空间 C^L，其中 $L = \mathrm{poly}(N/\epsilon)$。

3. 实现由振子表示得到的、作用于 $(\mathsf{C}^L)^{\otimes n}$ 上的相应酉算子U ,

$$|\psi_{m_1(\ell)}, \ldots, \psi_{m_n(\ell)}\rangle \mapsto \sum_{\ell'=0}^{N-1} \alpha_{\ell,\ell'} |\psi_{m_1(\ell')}, \ldots, \psi_{m_n(\ell')}\rangle\,, \tag{15}$$

其中，系数根据求和中 U 和 $\sum_{i=1}^n m_i(\ell) = \sum_{i=1}^n m_i(\ell') = M$的作用确定。该过程通过一系列 $\mathcal{O}(n^2)$个更简单的酉算符实现。

4. 依次应用 n 量子哈达玛变换的逆和 V_1 的逆，

$$|\psi_{m_1(\ell')}, \ldots, \psi_{m_n(\ell')}\rangle \mapsto |m_1(\ell'), \ldots, m_n(\ell')\rangle \mapsto |\ell'\rangle \ , \tag{16}$$

其中 $\ell' \in \{0, \ldots, N-1\}$。

总体结果就是所需的映射

$$|\ell\rangle \mapsto \sum_{\ell'=0}^{N-1} \alpha_{\ell,\ell'} |\ell'\rangle = U |\ell\rangle \ . \tag{17}$$

酉算子 V_1 可按我们在第 4.1 节所示高效构造。在第3.1 节，我们给出一个快速前向模拟结果，说明如何利用振子表示，将步骤 3 中相应的U 分解为对角操作与傅里叶变换的乘积。这些操作对应于玻色系统中空间坐标或动量坐标的二次算符所引发的演化。虽然该结果在连续情形下可以得到 U 精确的结果，其中厄米特态 $|\psi_m\rangle$ 是量子谐振子$\frac{1}{2}(\hat{x}^2 + \hat{p}^2)$的连续本征函数，但我们必须通过作用于有限维空间（由量子比特构成）来描述量子算法。这要求我们在 $\mathbb{C}^L$ 中定义恰当的有限维量子谐振子，并且我们证明，只需恰当设定维数 L ，即可任意精确地恢复连续情形下的结果。证明这些近似成立，是本工作的主要技术贡献之一。

我们针对高维 $SU(n)$ 酉算符的高效量子电路，可立即应用于高效且最优的量子扩张器，这归功于文献 [38, 27, 25]。

推论 1.2 （显式拉马努金量子扩展器）。 对于任意 $D = p + 1$ ，其中 p 是模 4 余 1 的素数，存在显式量子电路，可在误差 $\epsilon > 0$ 内实现度为 D、维数为 N 的 *Ramanujan* 量子扩展器，其运行时间关于 $\log(N)$ 与$\log(1/\epsilon)$ 为多项式。对于该量子扩展器，第二特征值可以任意接近最优界 $\lambda \leq 2\sqrt{D-1}/D$。

据我们所知，这是首个已知的显式、高效且最优的量子扩张器构造。我们的构造与文献 [8, 25],中方案的参数相匹配，但关键在于，这些方案是非构造性的。因此，我们给出一种算法，使该构造成为显式的。细节与证明见第6 节和附录 C。拉马努金扩张器之所以最优，是因为其谱性质模仿了Haar随机酉算子的谱性质，从而提供最快的混合速率或搅乱速率。虽然我们无法精确得到该量子扩展器，但我们指出，误差 ϵ 在我们的构造中可以任意小，这与其他（低效）构造形成对比，后者的误差由维数固定（参见 [28]）。

我们的量子线路还可用于对某些量子系统的动力学进行指数级快速前向模拟。对于这类系统，哈密顿量 H 是矩阵或算子的线性组合，且这些矩阵或算子构成 $\mathfrak{su}(n)$ 的高维不可约表示。演化算子具有式（10）的形式，因此根据定理 1.1，其模拟复杂度仅关于 $\|H\|$ 呈多对数级，相较于不可快速前向模拟结果有指数级改进。示例见第 6 节。

我们的构造涉及许多参数，现将它们汇总在下表中，以便查阅。

	定义	性质
n	群 $SU(n)$ 的维数	$n \geq 2$
N	$SU(n)$ 的不可约表示维数	指数级大
ϵ	U 的实现误差（以谱范数计）	$\epsilon > 0$
M	振子表示中的玻色子总数	$N = \binom{M+n-1}{n-1}$
L	每个离散化谐振子的维数	$L = \text{poly}(M/\epsilon)$
N'	量子电路空间的维数	$N' = \Theta(L^n)$

表 1：参数说明。详情请参见以下各节。

1.3 相关工作

我们现在概述若干相关工作，包括此前解决高维$SU(n)$问题的尝试、基变换和哈密顿量模拟中的相关算法任务，以及拉马努金量子扩展器的当前研究现状。未来研究方向将在第7节中概述。

1.3.1 Zalka构造

在文献 [49]，中，Zalka提出了在量子计算机上实现 $SU(2)$ 的高维不可约表示这一问题，并概述了一种可能的方法。Zalka的方案基于这样一个观察： $SU(2)$ 是 $SO(3)$ 的二重覆盖，因此，实现 $SU(2)$ 的不可约表示，本质上与实现 $SO(3)$ 的不可约表示是同一个问题，只存在一些细微的技术差异。为了实现 $SO(3)$ 的不可约表示，作者提出利用以下事实：对于任意固定的 ℓ，球谐函数 $\{Y_{\ell,m}(x,y,z) : m = -\ell, \ldots, \ell\}$ 在旋转作用下按不可约表示 ρ_ℓ：$SO(3) \to U(2\ell+1)$ 变换，其指标为 $\ell \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \ldots\}$。这里，$U(N)$ 指维数为 $N \times N$ 的酉矩阵。 – – –

考虑如下形式的叠加态

$$|Y_{\ell,m}\rangle = \sum_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3} Y_{\ell,m}(\mathbf{x}) f(|\mathbf{x}|) |\mathbf{x}\rangle , \tag{18}$$

其中， $f(|\mathbf{x}|)$ 是任意可生成归一化态的包络函数（例如高斯函数或球壳）。那么，对于任意 $R \in SO(3)$

$$\sum_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3} Y_{\ell,m}(\mathbf{x}) f(|\mathbf{x}|) \left|R^{-1}\mathbf{x}\right\rangle = \sum_{m'} [\rho_\ell(R)]_{m,m'} |Y_{\ell,m'}\rangle . \tag{19}$$

因此，如果能够使用多项式$(\log(\ell))$ 个门，高效地构造形如式18的叠加态，那么就可以按如下方式将 ρ_ℓ 实现为一个由多项式$(\log(\ell))$ 个门组成的量子电路。

1. 给定 m ，在辅助寄存器中构造 $|Y_\ell, m\rangle$ ：

$$|m\rangle |0\ldots0\rangle \to |m\rangle |Y_{\ell,m}\rangle . \tag{20}$$

2. 逆计算 m。这可以通过 Kitaev相位估计来实现，因为 $|Y_{\ell,\ m}\rangle$ 在绕 z-轴旋转时的变换形式为

$$R_z(\phi) |Y_{\ell,m}\rangle = e^{im\phi}. \tag{21}$$

必须注意确保 $R_z(\phi$即使$\sum_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3}$必然经过离散化并截断到有限体积上，仍保持可逆。这可以通过将旋转分解为一系列剪切变换来实现，如 [49]中所述。

3. 将给定的旋转 $R \in SO(3)$ 作用于$|Y_{\ell,\ m}\rangle$。根据式（19），可得

$$|Y_{\ell,m}\rangle \to \sum_{m'} [\rho_\ell(R)]_{m,m'} |Y_{\ell,m'}\rangle \ . \tag{22}$$

同样，这个旋转需要以可逆方式实现为一系列剪切变换。

4. 最后，必须实现变换$|Y_{\ell,\ m'}\rangle \to |m'\rangle$，即将索引 m' 提取为比特串。这可以通过使用相位估计将 m' 提取到辅助寄存器中，然后按门逐个执行第1 步中态制备电路的逆操作，以解计算出$|Y_{\ell,\ m'}\rangle$。

关键挑战在于第一步，即制备叠加态$|Y_{\ell,\ m}\rangle$。Zalka 提议使用条件旋转方法来实现这一点；该方法此前已在 [48] 中介绍（并由 Grover 和 Rudolph 在 [20]中进一步改进）。只要能够高效地近似 R^{3}的各个有限区域上 $Y^2_{\ell,\ m}$(x) 的积分，就可以高效地完成此操作。在 [49], 中，Zalka 推测这确实可行，但指出这并非易事，因为当 ℓ呈指数级增长时，被积函数 $Y^2_{\ell,\ m}$ 会剧烈振荡，并具有指数多个节点。据我们所知，这个问题至今仍未解决。

我们的方法在某些方面与 Zalka 最初提出的方案相似，因为我们考虑映射到连续的 L^2 函数空间的等距映射。不过，我们没有采用对 $Y^2_{\ell,m}$(x) 进行积分的方式，而是通过量子厄米变换 [31], 采用一种更直接的方法，利用 Plancherel-Rotach 公式避免计算任何振荡积分。

1.3.2 Schur 变换

虽然我们考虑的问题不同于量子 Schur 变换，但仍有一些相关特征值得强调。设$\mathcal{H}$ =(C^d)$^{\otimes n}$ 为 n d 维量子位元的希尔伯特空间。我们可以通过选取酉群 $U(d)$ 基本表示中的一个元素 u 来作用于这个希尔伯特空间；该元素是酉算子 $d \times d$，并将其作用于每个量子位元：

$$|\psi\rangle \to u^{\otimes n} |\psi\rangle \ . \tag{23}$$

我们还可以通过选取对称群中的一个元素 $\pi \in S_n$，并相应地置换这些 n 量子位元，来作用于这个希尔伯特空间$\mathcal{H}$：

$$|\psi_1\rangle \otimes \ldots \otimes |\psi_n\rangle \to M_\pi |\psi_1\rangle \otimes \ldots \otimes |\psi_n\rangle = |\psi_{\pi^{-1}(1)}\rangle \otimes \ldots \otimes |\psi_{\pi^{-1}(n)}\rangle, \tag{24}$$

其中， $u^{\otimes n}$ 和 M_π 分别是酉群 $U(d)$和对称群 S_n的可约酉算子 d^n维表示。这两个作用在$\mathcal{H}$ 上彼此对易。

S_n 的不可约表示与 n的分拆一一对应。 n 的任何一个至多包含 d 个部分的分拆，都标记了 $U(d)$的一个不可约表示。 $U(d)$有无穷多个不可约表示，因此，对于任意固定的 n，这些分拆只标记其中一个特殊子集。正如参考文献 [6],中所讨论的，存在一个酉基变换 U_{Schur}，使得

$$U_{\text{Schur}} M_\pi u^{\otimes n} U^{-1}_{\text{Schur}} = \bigoplus_\lambda \rho_\lambda(\pi) \otimes \nu_\lambda(u), \tag{25}$$

其中 λ 遍历 n 所有至多包含 d 个部分的分拆。（如果 $d < n$ ，那么并非 S_n 的所有不可约表示都会出现在 M_π的分解中。）

文献 [24, 7, 6] 中证明，可以用 poly$(n, d\,\log(1/\epsilon))$ 个量子门构造 U_{Schur} 的 ϵ 近似。随后，文献 [15]改进了量子 Schur 变换在 d 较大时的效率；该文基于文献 [35], ，证明 U_{Schur} 可用 O$(n^4\,\text{poly}(\log\, d, \log(1/\epsilon)))$ 个量子门实现。对于 n ，目前具有最佳渐近效率的实现见文献 [41], ，其中证明 U_{Schur} 可用 O$(nd^4\,\text{poly}(\log(1/\epsilon)))$ 个量子门实现。

Schur 变换的量子电路可直接推论出用于实现维数高于 d 的 $U(d)$ 不可约表示的量子电路。具体而言，由式 (25) 可知，先应用 U_{Schur}^{-1} 的量子线路，再应用 $u^{\otimes n}$，最后应用 U_{Schur} 的量子线路，即可得到一个直和，其中包含 $U(d)$ 的所有不可约表示，这些表示由将 n 分拆为至多 d 个部分的分拆标记。由于 $U(d)$ 的不可约表示限制到 $u \in U(d)$ 后仍保持不可约，且满足 det$(u) = 1$, 这一构造也能得到 $SU(d)$ 的不可约表示。正如后文所述， $U(d)$ 和 $SU(d)$ 的不可约表示由一组 d 个整数标记，称为最高权。Schur 变换无法高效地复现本文的结果，因为我们考虑的表示中，最高权里的整数可能呈指数级增长；而在 Schur 变换中，只有当量子位元数 n 呈指数级增长时，才会出现这种情况。

1.3.3 基于哈密顿量的方法：李群表示

利用量子哈密顿量模拟，可以尝试实现李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个表示的指数算符，从而得到相应的李群G表示。设 ρ 表示该表示。对于 $\Gamma \in G$ 的任意元素，要实现 $e^{\rho(\gamma)}$ 可能很困难；当 ρ 的维数呈指数级增长时，很可能无法找到相应的 γ 使得 $\Gamma = e^{\gamma}$ 。相反，假设我们能够找到一组多项式规模的生成元 $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\} \in \mathfrak{g}$ ，使得：

i) 给定任意元素 $\Gamma \in G$，可以高效地将其分解为如下形式

$$\Gamma = \prod_{j=1}^{m} e^{\gamma_j t_j} \tag{26}$$

其中 $t_1, \ldots, t_m \in$是可由 G高效计算的系数，并且

ii) $e^{\gamma_1 t_1}, \ldots, e^{\gamma_m t_m}$ 中的每一个都可以通过多项式规模的量子电路实现。

然后，可以将这些量子电路串联起来，得到 G的表示 $e^{\rho(\gamma)}$ 。特别地，如果 $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ 是稀疏度为 poly$(\log(N))$ 且矩阵元可高效计算的矩阵，那么对于每个 $j = 1 \ldots, m$ ，酉算子 $e^{\gamma_j t_j}$ 可能可以通过规模为 $\mathcal{O}(\|\gamma_j t_j\|)$ 的量子电路实现，所用方法包括文献 [12]等已知的哈密顿量模拟方法。

在文献 [34] 中，该方法被用于实现 $U(n)$、 $SU(n)$和 $SO(n)$的指数级高维不可约表示。借助盖尔范德-采特林图的形式体系，这些李群中任意一个的不可约表示都可以由一个整数 n元组来指定，称为最高权[3]。 $U(n)$、 $SU(n)$和 $SO(n)$的不可约表示的维数按 $w^{\mathcal{O}(n)}$标度，其中 w 是 n元组中任意一项的最大绝对值，该元组用于指定

[3]It 不同的 n-元组可能索引同一个不可约表示。特别是， $SU(2)$ 就会出现这种情况。

最高权。在 [33] 中所用哈密顿算符的范数随 w 多项式增长，并且与 n无关。因此，尽管 [33] 的方法能够高效实现由固定的 w 和多项式大的 n所产生的指数级高维不可约表示，但它们并不能高效实现本文所考虑的指数级高维不可约表示，即那些由固定的 n 和指数级大的 w所产生的表示。这与如下事实有关：这些代数的向量的 N维不可约表示的谱范数可以与 N成线性关系，而在我们的设定中这是指数级大的。

1.3.4 近拉马努金量子扩张器

在参考文献 [32] 中，作者提出了一种高效算法，可从任意扩张图构造近拉马努金扩张图。他们的方法还可用于构造高效且显式的近拉马努金量子扩张器，正如我们的情形一样。他们的结果以度数 D 关于“扩张参数” λ的界来表述，其中 λ是第二大特征值。更准确地说，他们得到 $D = \mathcal{O}(1/\lambda^{2+o_\lambda(1)})$，其中 $o_\lambda(1)$ 按 $1/\sqrt{\log(1/\lambda)}$ 的量级增长，并且当 $\lambda \to 0$时渐近趋于零。然而，当 D较小且为常数时，第二特征值为$\lambda > 0$ ，因此 D 对 λ 的依赖比 $1/\lambda^2$ 更差，且并非最优。相比之下，我们的构造没有这种额外依赖，即使 D较小，也满足 D 与 λ之间的拉马努金条件。

2 $SU(n)$的振子表示

本节介绍有关振子表示（又称 Jordan-Schwinger 表示）的基本概念。借助该表示，我们可以利用 $\mathfrak{su}(n)$，通过 n 量子谐振子来实现。这将构成快速前向方法的核心，使我们能够将这些旋转分解为位置和动量的二次单项式的指数算符。稍后，在第3节中，我们将对这里介绍的表示进行离散化，从而得到该方法误差的界。

2.1 Jordan-Schwinger映射

如前所述，我们感兴趣的 $SU(n)$的 N维表示，可以通过对代数 $\mathfrak{su}(n)$的不可约表示所对应的 N维矩阵取指数得到。获得后者的一种方法是采用振子表示，也称为 Jordan-Schwinger映射。本质上，我们将利用这样一个事实：群 $SU(n)$是辛群 $Sp(2n,$ R)的子群，而后者可由某些玻色算符生成。

为此，我们考虑 n 个玻色模式，即量子谐振子，其中玻色子的总数设为某个 $M \geq 0$。令 $a_j^\dagger$ 和 a_j 分别为第 j^{th} 个玻色模式的产生算符和湮灭算符。接着，我们定义 $\hat{E}_{j,k} := a_j^\dagger a_k$ 和 $\hat{H}_i = \frac{1}{2}(a_i^\dagger a_i - a_{i+1}^\dagger a_{i+1})$，其中 $1 \leq j < k \leq n$ 和 $1 \leq i \leq n-1$。相应地，我们定义 $\hat{S}_{j,k} := \frac{1}{2}(\hat{E}_{j,k} + (\hat{E}_{j,k})^\dagger)$ 和 $\hat{A}_{j,k} := \frac{i}{2}(\hat{E}_{j,k} - (\hat{E}_{j,k})^\dagger)$。玻色算符的正则对易关系为 $[a_j, a_k^\dagger] = \delta_{j,k}$，其中 $\delta_{j,k}$ 是克罗内克δ。这些关系进一步意味着，此类算符在抽象李代数 $\mathfrak{su}(n)$ 中也满足相同的对易关系，因此它们也张成 $\mathfrak{su}(n)$。更多详情请参见附录 A。

在 Jordan-Schwinger 表示中，通过考虑由确定粒子数 M 的玻色态张成的子空间，可以得到 $\mathfrak{su}(n)$ 的一个不可约表示。这个

由福克态张成的子空间

$$\mathcal{B}_{n,M} := \left\{ |m_1, m_2, \ldots, m_n\rangle : \sum_{j=1}^{n} m_j = M \right\} . \tag{27}$$

该子空间的维数为 $N = \binom{M+n-1}{n-1}$。为简便起见，现将 $|m_1, m_2, \ldots, m_n\rangle$ 表示为第一处有 m_1 个玻色子、第二处有 m_2 个玻色子，依此类推的量子态。利用玻色算符的已知性质，可得该表示，即

$$a_j^\dagger |m_1, \ldots, m_j, \ldots, m_n\rangle = \sqrt{m_j + 1}\, |m_1, \ldots, m_j + 1, \ldots, m_n\rangle , \tag{28}$$

$$a_j |m_1, \ldots, m_j, \ldots, m_n\rangle = \sqrt{m_j}\, |m_1, \ldots, m_j - 1, \ldots, m_n\rangle . \tag{29}$$

现在考虑基 $\mathrm{B}_{n,M}$ 的标准降序字典序，其中基由长度为 n 的字符串构成。例如，$\mathrm{B}_{3,2} = \{|3,0,0\rangle \ |2,1,0\rangle \ |2,0,1\rangle \ |0,3,0\rangle \ |0,2,1\rangle \ |0,0,3\rangle\}$。更一般地，将这些量子态标记为 $\{|\ell\rangle : 0 \le \ell \le N-1\}$，该排序给出一个一一映射，使得$|\ell\rangle \equiv |m_1(\ell) \ldots, m_n(\ell)\rangle$。于是，公式 (28) 和 (29) 表明

$$\begin{aligned} \hat{E}_{j,k} |\ell\rangle &\equiv \hat{E}_{j,k} |m_1(\ell), \ldots, m_j(\ell), \ldots, m_k(\ell), \ldots, m_n(\ell)\rangle \\ &= \sqrt{(m_j(\ell)+1) m_k(\ell)}\, |m_1(\ell), \ldots, m_j(\ell)+1, \ldots, m_k(\ell)-1, \ldots, m_n(\ell)\rangle \\ &\equiv \sqrt{(m_j(\ell)+1) m_k(\ell)}\, |\ell'\rangle , \end{aligned} \tag{30}$$

其中 ℓ' 满足 $m_1(\ell') = m_1(\ell) \ldots, m_j(\ell') = m_j(\ell) + 1, \ldots, m_k(\ell') = m_k(\ell) - 1, \ldots, m_n(\ell') = m_n(\ell)$。此外，

$$\begin{aligned} \hat{H}_i |\ell\rangle &\equiv \hat{H}_i |m_1(\ell), \ldots, m_i(\ell), m_{i+1}(\ell), \ldots, m_n(\ell)\rangle \\ &= (m_i(\ell) - m_{i+1}(\ell)) |m_1(\ell), \ldots, m_i(\ell), m_{i+1}(\ell), \ldots, m_n(\ell)\rangle \\ &\equiv (m_i(\ell) - m_{i+1}(\ell)) |\ell\rangle . \end{aligned} \tag{31}$$

这些算符在基 $\mathcal{B}_{n,M}$ 上的作用立即给出它们的一个 N 维表示，其中 H_i, $S_{j,k}$和 $A_{j,k}$ 分别由厄米矩阵 H_i, $S_{j,k}$和 $A_{j,k}$表示。简单观察可知，这些矩阵正是由式（7）和（9）得到的矩阵。也就是说，Jordan-Schwinger 表示给出了我们所关注的 $SU(n)$ 的全对称表示。

实现高维 $SU(n)$ 酉算子的一种可行途径，是在由福克态张成的子空间上实现相应的玻色算符。这些福克态是量子谐振子的本征态（本征函数）。也就是说，考虑哈密顿量

$$\hat{H} := \frac{1}{2}(\hat{x}^2 + \hat{p}^2) , \tag{32}$$

其中，$\hat{x}$和$\hat{p}$是位置和动量算符，作用于 L^2函数时，$\hat{x} f(x) = x f(x)$，且$\hat{p} f(x) = -\mathrm{i}\partial_x f(x)$。$\hat{H}$ 的本征函数是众所周知的（物理学家所用的）厄米函数：

$$\psi_m(x) := \frac{1}{\sqrt{2^m m! \sqrt{\pi}}} e^{-x^2/2} H_m(x) \implies \hat{H}\psi_m(x) = (m + 1/2)\psi_m(x) , \tag{33}$$

对所有整数 $m \geq 0$均成立。这里， $H_m(x)$是满足下列条件的 m^{th} 厄米特多项式

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} e^{-x^2} \ . \tag{34}$$

那么，按照我们对$\mathcal{B}_{n,M}$的记号，可以将其表示为

$$|m_1, \ldots, m_n\rangle \equiv \left(\int \mathrm{d}x_1 \ \psi_{m_1}(x_1) \, |x_1\rangle \right) \otimes \cdots \otimes \left(\int \mathrm{d}x_n \ \psi_{m_n}(x_n) \, |x_n\rangle \right) \ , \tag{35}$$

其中， $|x\rangle$ 表示 $\hat{}x$ 的本征态，即 $\hat{}x \, |x\rangle \ = x \, |x\rangle$，且 $x \in \mathrm{R}$。

在下文中，我们将量子谐振子的本征态表示为 $|\psi_m^{\mathrm{c}}\rangle := \int \mathrm{d}x \ \psi_m(x) \ |x\rangle$，因此 $|m_1, \ldots, m_n\rangle \to |\psi_{m_1}^{\mathrm{c}}, \ldots, \psi_{m_n}^{\mathrm{c}}\rangle := |\psi_{m_1}^{\mathrm{c}}\rangle \otimes \ldots \otimes |\psi_{m_n}^{\mathrm{c}}\rangle$ 也表示福克态。（上标 c 表示连续情形中的量子态。）这有助于将它们与描述我们的量子算法时使用的标准计算基基态（即酉算子 U）以及离散量子谐振子中出现的量子态区分开来。

接下来，我们将展示如何高效实现 U：具体而言，说明如何在由福克态张成的 N 维子空间中实现相应的 $\hat{}U$。

2.2 在振子表示中快速前向模拟 $SU(n)$

在振子表示中，任意 $SU(n)$ 酉变换 $\hat{}U$ 都可以写成若干简单酉算符的乘积 $\hat{} \, \hat{} \, \hat{}$，其中每个酉算符仅涉及一个基算符的指数函数 H_i, $S_{j,k}$ 或 $A_{j,k}$。现在我们将展示如何对这些运算分别进行快速前向模拟。为此，将产生算符和湮灭算符用位置和动量算符表示会很方便。也就是说，对于 $1 \leq j \leq n$，我们定义

$$\hat{x}_j := \frac{1}{\sqrt{2}}(a_j^\dagger + a_j), \ \hat{p}_j := \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(a_j^\dagger - a_j). \tag{36}$$

$a_j^\dagger$ 和 a_j 的对易关系意味着

$$[\hat{x}_j, \hat{p}_k] = \mathrm{i}\delta_{j,k}, \ [\hat{x}_j, \hat{x}_k] = [\hat{p}_j, \hat{p}_k] = 0 \ . \tag{37}$$

位置和动量算符所对应的李代数称为海森堡代数，而二次位置和动量算符的李代数为 $\mathfrak{sp}(2n,\mathrm{R})$，其中包含 $\mathfrak{su}(n)$。由此可得

$$\hat{H}_i = \frac{1}{2} \left((\hat{x}_i)^2 + (\hat{p}_i)^2 - (\hat{x}_{i+1})^2 - (\hat{p}_{i+1})^2 \right) \ , \tag{38}$$

$$\hat{S}_{j,k} = \frac{1}{2} \left(\hat{x}_j \hat{x}_k + \hat{p}_j \hat{p}_k \right) \ , \tag{39}$$

$$\hat{A}_{j,k} = \frac{1}{2} \left(\hat{p}_j \hat{x}_k - \hat{x}_j \hat{p}_k \right) \ , \tag{40}$$

其中 $1 \leq i \leq n-1$ 和 $1 \leq j < k \leq n$。

在$\hat{}x_j$ 为对角的实空间基中（即由 $|x\rangle$张成的基），我们假设通过对位置算符取指数函数得到的相应酉算符很容易实现，因为这些酉算符是对角的。对于动量算符的指数算符，也能得到类似结果，因为位置和动量通过与傅里叶变换共轭而相关联，

这也可以“轻松”实现：$\hat{p} = \hat{F}^{-1}\hat{x}\hat{F}$，其中 F是R上的傅里叶变换。然而，涉及位置和动量的线性组合的指数函数原则上并不容易实现。尽管如此，如果能够将这类指数函数分解为一系列仅涉及位置算符或动量算符的指数函数，那么相应的指数函数就很容易实现。

为证明这是可行的，我们基于以下已知结果 [42, 31]。

断言 2.1。 设 K_1、K_2 和 K_3 是李代数中的三个算符，满足对易关系

$$[K_1, K_2] = -2K_3, \quad [K_3, K_1] = 2K_1, \quad [K_3, K_2] = -2K_2. \tag{41}$$

那么对于所有 $t \in \mathbb{R}$，

$$e^{(K_1+K_2)t} = e^{\alpha K_2} e^{\beta K_1} e^{\alpha K_2}, \tag{42}$$

其中

$$\alpha = \frac{\tan\left(t/\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}}, \qquad \beta = \frac{\sin\left(\sqrt{2}t\right)}{\sqrt{2}}. \tag{43}$$

除常数因子外，由 K_1、K_2 和 K_3 张成的李代数是众所周知的量子谐振子的 $\mathfrak{sp}(2, \mathbb{R})$ 李代数。该断言使参考文献 [31]，中的快速前向模拟结果成为可能，但现在我们将其用于 n耦合量子简谐振子。

引理 2.2。 设 ς、ϑ、$\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$、$n \geq 2$，并考虑方程 $\hat{H}_i$、$\hat{S}_{j,k}$ 和 $\hat{A}_{j,k}$ 中的算符，其中方程编号为 (38)、(39) 和 (40)，其中 $1 \leq i \leq n-1$ 和 $1 \leq j < k \leq n$。那么，

$$e^{\mathrm{i}\varsigma\hat{H}_i} = e^{\mathrm{i}\varsigma_1(\hat{p}_i)^2} e^{\mathrm{i}\varsigma_2(\hat{x}_i)^2} e^{\mathrm{i}\varsigma_1(\hat{p}_i)^2} e^{\mathrm{i}\varsigma_1(\hat{p}_{i+1})^2} e^{\mathrm{i}\varsigma_2(\hat{x}_{i+1})^2} e^{\mathrm{i}\varsigma_1(\hat{p}_{i+1})^2}, \tag{44}$$

$$e^{\mathrm{i}\vartheta\hat{S}_{j,k}} = e^{\mathrm{i}\vartheta_1\hat{p}_j\hat{p}_k} e^{\mathrm{i}\vartheta_2\hat{x}_j\hat{x}_k} e^{\mathrm{i}\vartheta_1\hat{p}_j\hat{p}_k}, \tag{45}$$

$$e^{\mathrm{i}\varphi\hat{A}_{j,k}} = e^{-\mathrm{i}\varphi_1\hat{x}_j\hat{p}_k} e^{\mathrm{i}\varphi_2\hat{p}_j\hat{x}_k} e^{-\mathrm{i}\varphi_1\hat{x}_j\hat{p}_k}, \tag{46}$$

其中 $\varsigma_1 = \tan(\varsigma/2)/2$、$\varsigma_2 = \sin(\varsigma)/2$、$\vartheta_1 = \tan(\vartheta/4)$、$\vartheta_2 = \sin(\vartheta/2)$、$\varphi_1 = \tan(\varphi/4)$以及 $\varphi_2 = \sin(\varphi/2)$。

证明。对于第一个结果，注意到 i^{th} 模的算符与 $(i+1)^{\text{th}}$模的算符对易，因此 $\exp\left(\mathrm{i}\varsigma\hat{H}_i\right) = \exp(\mathrm{i}\varsigma(\hat{x}_i^2 + \hat{p}_i^2)/2)\exp(\mathrm{i}\varsigma(\hat{x}_{i+1}^2 + \hat{p}_{i+1}^2)/2)$ 可以因式分解。于是我们可以令 $K_1 = \mathrm{i}(\hat{x}_j)^2/\sqrt{2}$、$K_2 = \mathrm{i}(\hat{p}_j)^2/\sqrt{2}$以及 $K_3 = \mathrm{i}(\hat{x}_i\hat{p}_i + \hat{p}_i\hat{x}_i)/2$，它们满足断言 2.1 中的对易关系，这将意味着

$$e^{\mathrm{i}\varsigma(\hat{x}_i^2+\hat{p}_i^2)/2} = e^{(\varsigma/\sqrt{2})(K_1+K_2)} = e^{\mathrm{i}\varsigma_1(\hat{p}_i)^2} e^{\mathrm{i}\varsigma_2(\hat{x}_i)^2} e^{\mathrm{i}\varsigma_1(\hat{p}_i)^2}. \tag{47}$$

接下来，我们使用相同的分析方法，采用 $(i+1)^{\text{th}}$ 模式，并得到该表达式。

对于第二个结果，我们考虑 $K_1 = \mathrm{i}\sqrt{2}(\hat{x}_j\hat{x}_k)$, $K_2 = \mathrm{i}\sqrt{2}(\hat{p}_j\hat{p}_k)$, 以及 $K_3 = \mathrm{i}(\hat{x}_j\hat{p}_j + \hat{p}_k\hat{x}_k)$. 这些也满足命题 2.1 中的对易关系，这意味着

$$e^{\mathrm{i}\vartheta\hat{S}_{j,k}} = e^{(\vartheta/(2\sqrt{2}))(K_1+K_2)} = e^{\mathrm{i}\vartheta_1\hat{p}_j\hat{p}_k} e^{\mathrm{i}\vartheta_2\hat{x}_j\hat{x}_k} e^{\mathrm{i}\vartheta_1\hat{p}_j\hat{p}_k}. \tag{48}$$

同样，对于第三个结果，我们可以选择 $K_1 = \mathrm{i}\sqrt{2}\hat{p}_j\hat{x}_k$、$K_2 = -\mathrm{i}\sqrt{2}\hat{x}_j\hat{p}_k$和 $K_3 = \mathrm{i}(\hat{x}_j\hat{p}_j - \hat{x}_k\hat{p}_k)$。然后，

$$e^{\mathrm{i}\varphi\hat{A}_{j,k}} = e^{(\varphi/(2\sqrt{2}))(K_1+K_2)} = e^{-\mathrm{i}\varphi_1\hat{x}_j\hat{p}_k} e^{\mathrm{i}\varphi_2\hat{p}_j\hat{x}_k} e^{-\mathrm{i}\varphi_1\hat{x}_j\hat{p}_k}. \tag{49}$$

□

因此，我们能够按所需方式对算符的指数算符进行因式分解。此外，由于任意酉算子 U in $SU(n)$ 都可以分解为一系列更简单的指数算符，因此在振子表示中作用的相应 $\hat{}\, U$ 可写为

$$U \mapsto \hat{U} = \prod_b \exp\left(\mathrm{i}\vartheta_b \hat{O}_b\right) , \tag{50}$$

$\hat{}$其中， O_b现在是位置和动量的二次单项式，即，

$$\hat{O}_b \in \{\hat{x}_j\hat{x}_k, \hat{x}_j\hat{p}_k, \hat{p}_j\hat{p}_k\}. \tag{51}$$

此外，乘积中的项数有界为 $r = \mathcal{O}(n^2-1)$，因为引理 2.2 表明，每个指数算符至多是六个指数算符的乘积。此外，相位 ϑ_b 可以由一个常数（例如 $|\vartheta_b| \leq 1$）界定，因为引理 2.2 中的相位同样有界。更一般地，如果相位大于例如 $\pi/2$，我们只需将该指数算符拆分为若干涉及较小相位的指数算符之积；例如， $e^{\mathrm{i}\varsigma \hat{} H_i} = (e^{\mathrm{i}\varsigma \hat{} H_i/T})^T$。

为了得到作用于基态时所需的 U 量子线路，我们希望证明：可以将谐振子的空间离散化并假设其为有限维，而不会产生较大的误差，同时仍保留快速前向模拟特性；并且，我们可以高效地制备相应的厄米特态。最后一步正是参考文献 [31] 中的量子厄米变换（QHT）所实现的。接下来我们将讨论这些问题。

3 离散量子谐振子

方程（50）是一个作用于 n量子谐振子连续空间中的算符。我们的量子算法运行在由量子比特构成的系统上，因此需要在有限维空间中执行这些映射。为此，我们考虑量子谐振子的一个离散有限维版本，它使我们能够在连续情形下恢复第2.2节中的结果。这与文献 [46, 31]中研究的系统相同。

一个离散量子谐振子。离散量子谐振子由 L 维哈密顿量描述

$$\overline{\mathrm{H}} = \frac{1}{2}\left(\overline{x}^2 + \overline{p}^2\right) , \tag{52}$$

其中

$$\overline{x} := \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \begin{pmatrix} -\frac{L}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{L}{2}+1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{L}{2}-1 \end{pmatrix} \tag{53}$$

是离散位置算符，而 $p := F^{-1}xF$ 是离散动量算符， F 是居中的 L 维离散傅里叶变换。维数 L 需要根据精度要求设定，因为它决定了离散化规模 $\sqrt{2\pi/L}$ 以及近似质量。对于任意整数 $m \geq 0$, 我们通过以下方式定义离散厄米特态:

$$|\psi_m\rangle := \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{1/4} \sum_{j=-L/2}^{L/2-1} \psi_m(x_j)\,|j\rangle \ , \tag{54}$$

其中 $\psi_m(x)$ 是式（33）中的 m^{th} 埃尔米特函数，且 $x_j := j\sqrt{\frac{2\pi}{L}}$ 是离散化空间中的一个点。在满足 $m \le cL$ （其中 $c < 1$是某个常数）的“低能”子空间中，可以证明这些态近似为 H 的本征态，并且具有连续情形下量子态 $|\psi^{\mathrm{c}}_m\rangle$ 的许多性质。

也就是说，Somma（参考文献 [46]）证明存在常数 $c,\ \gamma \in (0,\ 1)$，使得对于所有$L > 0$ 充分大的值以及所有 $0 \le m,\ m' \le cL$，

$$\left|\langle\psi_{m'}|\,\overline{x}^a\overline{p}^b\,|\psi_m\rangle - \langle\psi^{\mathrm{c}}_{m'}|\,\hat{x}^a\hat{p}^b\,|\psi^{\mathrm{c}}_m\rangle\right| \le \exp(-\gamma L). \tag{55}$$

这里，a 和 b 是常数和非负整数（例如，$a,\ b \le 4$）。此外，对于 $0 \le m \le cL$ ，

$$\|(\overline{\mathrm{H}} - (m+1/2))\,|\psi_m\rangle\,\| \le \exp(-\gamma L)\ , \tag{56}$$

对于其他量也有类似的近似。最后一个方程表明，这些厄米特态几乎是 H 的本征态。在 $SU(n)$ 变换的情况下，由于相关空间的维数为 $N = \binom{M+n-1}{n-1}$，我们将选择足够大的 L ，使得 $cL \gg M$[4]。这些误差在 L 中呈指数级小，这一点将很有帮助。

多个离散量子谐振子。与参考文献 [31], 不同，这里我们需要调用 $n \ge 2$ 个离散量子谐振子。此时希尔伯特空间为 $(\mathbb{C}^L)^{\otimes n}$，维数为 L^n。对于每个系统 $i \in\{1,\ .....,\ n\}$，我们将相应的算子定义为

$$\overline{x}_i := \mathbb{1}^{\otimes(i-1)} \otimes \overline{x} \otimes \mathbb{1}^{\otimes(n-i)}, \qquad \overline{p}_i := \mathbb{1}^{\otimes(i-1)} \otimes \overline{p} \otimes \mathbb{1}^{\otimes(n-i)}. \tag{57}$$

我们还考虑 $(\mathbb{C}^L)^{\otimes n}$ 中厄米特态的张量积：

$$|\psi_{m_1}, \ldots, \psi_{m_n}\rangle := |\psi_{m_1}\rangle \otimes \ldots \otimes |\psi_{m_n}\rangle \tag{58}$$

方程（55）中的误差界可直接推广到 n 量子谐振子的情形，此时我们可以考虑 x_i 和 p_i 的乘积。在下一节中，我们将利用这些误差界证明，第 2.2 节中在连续情形下精确成立的快速转发恒等式，在 n量子谐振子的某个目标低能子空间上仍然成立，且误差呈指数级小，前提是局部维数 L 选得足够大。

3.1 离散化误差

到目前为止，我们已经证明，若允许在连续情形下进行运算，则第 1.2 节步骤 3 中的酉算子可通过对 $\hat{}x_j$ 和 $\hat{}p_k$ 中二次单项式的指数算符进行简单的乘积运算来精确实现。这就是方程（50）中的酉算子 $\hat{}U$。现在我们证明，可以将空间离散化，并以任意小的指数级误差实现该酉算子；我们将这种误差称为U。为此，我们将在引理 2.2 的每个指数算符中，用 $\hat{}x_j \to x_j$ 和 $\hat{}p_j \to p_j$ 替换相应项，从而得到 U。我们假设 $n \ge 2$ 是一个常数，不过结果也可以推广到 $n = \mathrm{polylog}(N)$ 的情形。

引理 3.1。 令 $\hat{}U$ 为式 (50) 中实现振子表示里的 $SU(n)$ 运算的酉算子，其中乘积中的项数为 $r \ge 1$。考虑其对任意福克态的作用：

$$\hat{U}|\psi^{\mathrm{c}}_{m_1}, \ldots, \psi^{\mathrm{c}}_{m_n}\rangle = \sum_{m'_1,\ldots,m'_n} \beta^{m_1,\ldots,m_n}_{m'_1,\ldots,m'_n} |\psi^{\mathrm{c}}_{m'_1}, \ldots, \psi^{\mathrm{c}}_{m'_n}\rangle\ , \tag{59}$$

[4]数值模拟表明该常数满足 $c \ge 3/4$。

其中各求和满足 $\sum_i m_i = \sum_i m'_i = M$。考虑相应的有限维酉算符 U，它由在式 $\hat{x}_j \to x_j$ 和 $\hat{p}_j \to p_j$ 中替换 (50)得到。于是，若每个离散量子谐振子的维数满足 $L \geq c' 2^r M$，其中 $c' > 1$为某个常数，则有

$$\|\overline{U}|\psi_{m_1}, \ldots, \psi_{m_n}\rangle - \sum_{m'_1,\ldots,m'_n} \beta^{m_1,\ldots,m_n}_{m'_1,\ldots,m'_n} |\psi_{m'_1}, \ldots, \psi_{m'_n}\rangle\| \leq \exp(-\overline{\gamma} L) \,, \tag{60}$$

其中 $\overline{\gamma} > 0$ 是一个正的常数。

这个引理基本上表明，第 1.2 节中的步骤 3 可以通过简单的酉算符实现，这些酉算符是离散位置算符和动量算符的二次单项式的指数算符，误差小到指数级。每个这样的指数算符要么是对角酉算符，要么是经中心化傅里叶变换共轭后的对角酉算符，因此可以使用标准技术快速前推。

误差随 L 指数级减小。与此同时，为了使结果成立，我们需要选择 $L = \Omega(2^r M)$，其中 $r = \mathcal{O}(n^2)$。如果 n 为常数（正如我们所假设的），那么这就是 $L = \Omega(M)$。若误差为 ϵ，则令某个 $L = \mathcal{O}(M + \log(1/\epsilon))$ 即可满足要求。然而，由于参考文献 [31], 中量子哈达玛变换的要求，我们最终需要选择大得多的 $L = \mathcal{O}(M^{2.25}/\epsilon^{3.25})$。这意味着引理 3.1 中的离散化导致的变换误差可能会远小于 ϵ。

我们将引理 3.1 的证明拆分为以下三个结果。

引理 3.2. 考虑作用于两个量子谐振子的较简单酉算子 $\hat{W} = \exp(\mathrm{i}\vartheta \hat{x}_j \hat{x}_k)$，以及相应的离散化 $W = \exp(\mathrm{i}\vartheta x_j x_k)$。那么，若 $\hat{W}|\psi^{\mathrm{c}}_{m_j}, \psi^{\mathrm{c}}_{m_k}\rangle = \sum_{m'_j\, m'_k=0}^{\infty} \alpha_{m'_j m'_k} |\psi^{\mathrm{c}}_{m'_j}\ \psi^{\mathrm{c}}_{m'_k}\rangle$，我们得到

$$\overline{W}|\psi_{m_j}, \psi_{m_k}\rangle = \sum_{m'_j, m'_k=0}^{\infty} \alpha_{m'_j m'_k} |\psi_{m_j}, \psi_{m_k}\rangle \,. \tag{61}$$

证明。 不失一般性，我们假设 $j = 1$ 和 $k = 2$。其余所有情形的证明完全相同，即使在 $j = k$时也是如此。首先，我们注意到离散厄米特态满足与厄米函数类似的递推关系。也就是说

$$\hat{x}\,|\psi^{\mathrm{c}}_m\rangle = \sqrt{\frac{m}{2}}\,|\psi^{\mathrm{c}}_{m-1}\rangle + \sqrt{\frac{m+1}{2}}\,|\psi^{\mathrm{c}}_{m+1}\rangle \implies \overline{x}\,|\psi_m\rangle = \sqrt{\frac{m}{2}}\,|\psi_{m-1}\rangle + \sqrt{\frac{m+1}{2}}\,|\psi_{m+1}\rangle \,. \tag{62}$$

然后，我们将 $\hat{W}$ 和 $\overline{W}$ 写成（收敛的）泰勒级数：

$$\hat{W} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}\theta)^k (\hat{x}_1 \hat{x}_2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}\theta)^k \hat{x}_1^k \hat{x}_2^k}{k!}, \ \overline{W} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}\theta)^k \overline{x}_1^k \overline{x}_2^k}{k!}. \tag{63}$$

对于每个 k，不失一般性地写作

$$\hat{x}_1^k \hat{x}_2^k |\psi^{\mathrm{c}}_{m_1}, \psi^{\mathrm{c}}_{m_2}\rangle = \sum_{m'_1, m'_2} \gamma^{(k)}_{m'_1, m'_2} |\psi^{\mathrm{c}}_{m'_1}, \psi^{\mathrm{c}}_{m'_2}\rangle, \tag{64}$$

以及 $\gamma^{(k)}_{m'_1, m'_2}$ 系数由方程（62）中的递推关系给出。该递推关系还意味着

$$\overline{x}_1^k \overline{x}_2^k |\psi_{m_1}, \psi_{m_2}\rangle = \sum_{m'_1, m'_2} \gamma^{(k)}_{m'_1, m'_2} |\psi_{m'_1}, \psi_{m'_2}\rangle, \tag{65}$$

系数完全相同。因此，对所有 k 合并各项后，我们可以在离散情形和连续情形下均得到 $\alpha_{m_1', m_2'} = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{m_1', m_2'}^{(k)}$，从而证明所需结果：

$$\overline{W}|\psi_{m_1}, \psi_{m_2}\rangle = \sum_{m_1', m_2'=0}^{\infty} \alpha_{m_1' m_2'} |\psi_{m_1}, \psi_{m_2}\rangle \, . \tag{66}$$

□

注意，由于 $|\psi_m\rangle$ 定义在维数为 L的空间中，因此在上述求和中它们最终会变为线性相关。不过，我们仍然可以用这种形式写出 W 的作用，并且注意，稍后我们会在适当的取值处截断求和，使其适用于 m。引理 2.2 中的其他酉算符也有相同结论，只要它们是 $\hat{x}_i^2$的指数算符，并将它们替换为 x_i^2的指数算符，因为递推关系适用于位置算符。接下来，我们证明动量算符的类似结果。

引理 3.3。考虑作用于两个量子谐振子的较简单酉算子 $\hat{W} = \exp(\mathrm{i}\vartheta \hat{p}_1 \hat{p}_2)$，以及通过离散化得到的对应算子 W，其中 $\hat{p}_i$ 被替换为 $\overline{p}_i$。设相位为 $\vartheta \in [-1/2e, 1/2e]$。那么，若 $\hat{W}|\psi_{m_1}^{\mathrm{c}}, \overline{\psi}_{m_k}^{\mathrm{c}}\rangle = \sum_{m_j', m_k'=0}^{\infty} \alpha_{m_j' m_k'} |\psi_{m_j'}^{\mathrm{c}}, \psi_{m_k'}^{\mathrm{c}}\rangle$，则得到

$$\|\overline{W}|\psi_{m_j}, \psi_{m_k}\rangle - \sum_{m_j', m_k'=0}^{\infty} \alpha_{m_j' m_k'} |\psi_{m_j'}, \psi_{m_k'}\rangle\| \leq \exp(-\tilde{\gamma} L) \tag{67}$$

对所有 $m_j, m_k \leq c' L$，其中 $c' < 1$ 和 $\tilde{\gamma} > 0$ 是正常数。

证明。同样，不失一般性，我们假设 $j = 1$，$k = 2$。我们希望沿用引理 3.2中的证明，但遗憾的是，递推关系不适用于离散动量算符。因此，我们使用 L维中心化傅里叶变换F，它将 $x \mapsto p \mapsto -x$映射到，并写作

$$\overline{W}|\psi_{m_1}, \psi_{m_2}\rangle = (F^{-1} \otimes F^{-1}) \overline{V} (F \otimes F) |\psi_{m_1}, \psi_{m_2}\rangle \, , \; \overline{V} := \exp(\mathrm{i}\vartheta \overline{x}_1 \overline{x}_2) \, . \tag{68}$$

由于厄米特态 $|\psi_m\rangle$ 并非 H 的精确本征态，因此它们不是 F 的本征态，这与连续情形不同。不过，可以证明它们近似为本征态，且参考文献 [46] 表明

$$\| F |\psi_m\rangle - \mathrm{i}^m |\psi_m\rangle \| \leq \exp(-\gamma L) \tag{69}$$

若 $m \leq cL$，其中 $\gamma > 0$ 和 $c < 1$ 是正常数。对 V进行泰勒级数展开，可得

$$\begin{aligned} \overline{V}(F \otimes F)|\psi_{m_1}, \psi_{m_2}\rangle &= \mathrm{i}^{m_1+m_2} \overline{V} |\psi_{m_1}, \psi_{m_2}\rangle + \mathcal{O}(\exp(-\gamma L)) \\ &= \mathrm{i}^{m_1+m_2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}\vartheta)^k (\overline{x}_1 \overline{x}_2)^k}{k!} |\psi_{m_1}, \psi_{m_2}\rangle + \mathcal{O}(\exp(-\gamma L)) \\ &= \sum_{m_1', m_2'=0}^{\infty} \gamma_{m_1', m_2'} |\psi_{m_1'}, \psi_{m_2'}\rangle + \mathcal{O}(\exp(-\gamma L)) \, , \end{aligned} \tag{70}$$

其中最后一行由式（62）得出。系数 $\gamma_{m_1',\ m_2'}$ 与连续情形的系数相匹配，即

$$\begin{aligned}\hat{V}(\hat{F}\otimes\hat{F})|\psi^{\mathrm{c}}_{m_1},\psi^{\mathrm{c}}_{m_2}\rangle &= \mathrm{i}^{m_1+m_2}\hat{V}|\psi^{\mathrm{c}}_{m_1},\psi^{\mathrm{c}}_{m_2}\rangle \\ &= \mathrm{i}^{m_1+m_2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}\vartheta)^k(\hat{x}_1\hat{x}_2)^k}{k!}|\psi^{\mathrm{c}}_{m_1},\psi^{\mathrm{c}}_{m_2}\rangle \qquad (71)\\ &= \sum_{m_1',m_2'=0}^{\infty}\gamma_{m_1',m_2'}|\psi^{\mathrm{c}}_{m_1'},\psi^{\mathrm{c}}_{m_2'}\rangle\ , \qquad (72)\end{aligned}$$

$\hat{}$ 由于厄米函数是 F in R 上傅里叶变换的精确特征函数，特征值为 i^m。最后一行由式（62）中的同一递推关系得出。另外，回忆一下，傅里叶变换将 $\hat{}x\mapsto\hat{}p\mapsto-\hat{}x$ 映射为 $\hat{}W=(\hat{}F^{-1}\otimes\hat{}F^{-1})\,\hat{}V(\hat{}F\otimes\hat{}F)$。这又意味着$\alpha_{m_1',\ m_2'}=(-\mathrm{i})^{m_1'+m_2'}\gamma_{m_1',\ m_2'}$，如引理所述。

现在考虑式（70）中的求和。为了完成 W的作用，我们还需要$\overline{W}$作用于$F^{-1}\otimes F^{-1}$。然而，由于求和遍历所有 m_1'和 m_2'，我们无法直接使用式（69）中的误差界。为了解决这一问题，我们注意到，如果能够截断该求和，使得 $m_1',\ m_2'\le cL$，那么式（69）和式（70）将推出

$$\begin{aligned}\overline{W}|\psi_{m_1},\psi_{m_2}\rangle &= (F^{-1}\otimes F^{-1})\sum_{m_1',m_2'=0}^{cL}\gamma_{m_1',m_2'}|\psi_{m_1'},\psi_{m_2'}\rangle+\delta+\mathcal{O}(\exp(-\gamma L))\\ &= \sum_{m_1',m_2'=0}^{cL}(-\mathrm{i})^{m_1'+m_2'}\gamma_{m_1',m_2'}|\psi_{m_1'},\psi_{m_2'}\rangle+\delta+\mathcal{O}(L^2)\times\mathcal{O}(\exp(-\gamma L))\\ &= \sum_{m_1',m_2'=0}^{\infty}(-\mathrm{i})^{m_1'+m_2'}\gamma_{m_1',m_2'}|\psi_{m_1'},\psi_{m_2'}\rangle+2\delta+\mathcal{O}(\exp(-\gamma' L))\\ &= \sum_{m_1',m_2'=0}^{\infty}\alpha_{m_1',m_2'}|\psi_{m_1'},\psi_{m_2'}\rangle+2\delta+\mathcal{O}(\exp(-\gamma' L))\ , \qquad (73)\end{aligned}$$

其中 δ是将求和截断于 $m_1',\ m_2'\le cL$所导致的误差。项 $\mathcal{O}(L^2)\times\mathcal{O}(\exp(-\gamma L))$ 是在傅里叶变换作用中累加 $\mathcal{O}(L^2)$ 个误差所得的最坏情况界。它随 L 指数级减小，给出常数 $\gamma'>0$。

接下来我们证明，式（73）中的贡献 δ 也可以做到指数级小。该误差满足

$$\begin{aligned}\delta &\le \left\|\sum_{m_1'\ge cL,m_2'\ge cL}(-\mathrm{i})^{m_1'+m_2'}\gamma_{m_1',m_2'}|\psi_{m_1'},\psi_{m_2'}\rangle\right\| \qquad (74)\\ &\le \left|\sum_{m_1'\ge cL,m_2'\ge cL}\gamma_{m_1',m_2'}\right|\times\mathcal{O}(\sqrt{L})\ , \qquad (75)\end{aligned}$$

因为对所有 $m\ge cL,\ \ \||\psi_m\rangle\|=\mathcal{O}(L^{1/4})$，这可由埃尔米特函数的 $|\psi_m(x)|\le 1$ 得出。$\hat{}$ 现在，该不等式涉及由 V 的作用得到的相同系数。注意，根据

递推

$$\|(\hat{x})^k\,|\psi_m^{\rm c}\rangle\,\| \le \sqrt{m+1}\|(\hat{x})^{k-1}\,|\psi_{m+1}^{\rm c}\rangle\,\| \le \sqrt{(m+1)\dots(m+k)}\,. \tag{76}$$

那么，如果 $m_1 \le cL/2$ 和 $m_2 \le cL/2$，且 $k \ge cL$，

$$\left\|\frac{({\rm i}\vartheta)^k(\hat{x}_1\hat{x}_2)^k}{k!}\,|\psi_{m_1}^{\rm c},\psi_{m_2}^{\rm c}\rangle\right\| \le \frac{|\vartheta|^k}{k!}\sqrt{(m_1+1)\dots(m_1+k)(m_2+1)\dots(m_2+k)} \tag{77}$$

$$\le \frac{|\vartheta|^k}{k!}(cL/2+1)\dots(c'L+k) \tag{78}$$

$$\le \frac{|\vartheta|^k(cL/2+k)^k}{k!} \tag{79}$$

$$\le \left(\frac{e|\vartheta|(cL/2+k)}{k}\right)^k \qquad \text{(Stirling's)} \tag{80}$$

$$\le (3/4)^k\,. \tag{81}$$

这里我们用到了以下事实： $e|\vartheta| \le 1/2$。式（75）中的项确实由（$\hat{}x_1\hat{}x_2$）^{k} 对 $k \ge cL$的作用生成。因此，我们有

$$\delta \le \left|\sum_{m_1'\ge cL, m_2'\ge cL}\gamma_{m_1',m_2'}\right| \times \mathcal{O}(\sqrt{L}) \tag{82}$$

$$\le \sum_{k=cL}^{\infty}(3/4)^k \times \mathcal{O}(\sqrt{L}) \tag{83}$$

$$\le \exp(-\gamma'' L) \tag{84}$$

其中，常数 $\gamma'' > 0$ 可由这些不等式轻易得到。

综合所有结果，我们证明了误差呈指数级小

$$\left\|\overline{W}|\psi_{m_1},\psi_{m_2}\rangle - \sum_{m_1',m_2'=0}^{\infty}\alpha_{m_1'm_2'}|\psi_{m_1'},\psi_{m_2'}\rangle\right\| \le \exp(-\tilde{\gamma}L) \tag{85}$$

其中，正的常数 $\tilde{\gamma} > 0$ 也可由这些不等式得到。 □

需要指出的是，参考文献 [46] 中的数值结果表明 $c \ge 3/4$，因此 $c' \ge 3/8$ 适用于该引理。此外，对于涉及 $\hat{}x_j\hat{}p_k$的指数算符，若将其替换为 x_jp_k的指数算符，则类似的指数级小离散化误差结果同样适用。这对于纳入引理2.2 或式（50）中出现的所有指数算符是必要的。我们指出，唯一满足此条件的项有 $j \ne k$，因此可以对位置和动量算符进行对易，从而得到与引理 3.3非常相似的界。

引理 3.4. 考虑作用于两个量子谐振子的较简单酉算子 $\hat{}W = \exp({\rm i}\vartheta\hat{}x_j\hat{}p_k)$，以及相应的离散化 $W = \exp({\rm i}\vartheta x_jp_k)$。设相位为 $\vartheta \in [-1/2e, 1/2e]$。那么，若 $\hat{}W\left|\psi^{e}_{m_j,m_k}\right\rangle = \sum_{m_j',m_k'=0}^{\infty}\alpha_{m_j'm_k'}\left|\psi^{c}_{m_j',m_k'}\right\rangle$，我们得到

$$\|\overline{W}\left|\psi_{m_j,m_k}\right\rangle - \sum_{m_j',m_k'=0}^{\infty}\alpha_{m_j'm_k'}\left|\psi_{m_j',m_k'}\right\rangle\| \le \exp(-\tilde{\gamma}L) \tag{86}$$

对所有 m_j、$m_k \le c'L$，其中 $c' < 1$ 和 $\tilde{\gamma} > 0$ 是正常数。

证明步骤与引理 3.3中的基本相同。现在我们可以证明本节的主要结果，即引理 3.1。

证明。 式（U 50）中的酉算子$\hat{}$是由关于$\hat{}x_j$ 和$\hat{}p_j$的二次单项式指数算符相乘得到的。项数 r 与 n 的平方成正比；也就是说，当 n为常数时，项数也是常数。每个指数算符都替换为离散版本。我们可以直接应用引理 3.2、3.3和 3.4，将乘积中各项累积的误差相加，但这还不够。

回顾一下，这些引理适用于福克输入态；而乘积中第一项作用之后，量子态可能变成无穷多个福克态的线性组合。然而，引理 3.2、3.3和3.4的假设要求 m_i足够小，而这些指数算符中的每一个都可能产生m_i'任意大的福克态。尽管如此，我们在引理 3.3的证明中已经表明，可以对指数算符作泰勒级数展开，并舍弃 k足够大的项。特别地，我们看到，如果输入态满足 $k \geq 2c'L$，且输入态具有 $m_i \leq c'L$，那么这样就足够了。对于酉算子$\hat{}U$，它包含 $r = \mathcal{O}(n^2)$ 个指数算符的乘积，这意味着，如果初始态为 $|\psi^{\mathrm{c}}_{m_1}, \ldots\ldots, \psi^{\mathrm{c}}_{m_n}\rangle$ 且$m_i \leq M \leq c'L/2^r < c'L$，那么只需将第一个指数算符的泰勒级数截断于$c'L/2^{r-1}$。截断后的量子态，即第二个指数算符的输入态，是由满足 $m_i \leq c'L/2^{r-1}$的福克态构成的线性组合。接着，我们可以将第二个指数算符截断于 $c'L/2^{r-2} \leq c'L$，依此类推，直至将最后一个指数算符截断于 $c'L$。

对 $\hat{}U$ 中所有 $r = \mathcal{O}(n^2)$ 项应用并集界，并在所有步骤中使用 $m_i \leq c'L$ 时的平凡界，总截断误差至多为

$$\mathcal{O}(n^2(c'L)^{n/2} \times \exp(-\tilde{\gamma}L)) \,. \tag{87}$$

这是用相应的截断泰勒级数近似 $\hat{}$ 中每个 $\exp\left(\mathrm{i}\vartheta_b \hat{} O_b\right)$ 的误差。接下来，我们可以应用引理3.2、3.3和3.4，将这些泰勒级数替换为有限维算符的泰勒级数，再用相应的有限维酉算符 $\exp\left(\mathrm{i}\vartheta_b O_b\right)$ 来近似这些级数，它们定义了 U。这是可行的，因为此时这些酉算符作用于有界 $m_i \leq c'L$的福克态上。这会带来额外的误差项$\mathcal{O}(n^2(c'L)^{n/2}\exp(-\tilde{\gamma}L))$。假设 n 为常数，我们将所有这些误差合并到项 $\exp(-\gamma L)$ 中，其中 $\gamma > 0$经过适当定义。

此外，在每个引理中，我们都假设 m_i 有一个上界。特别是，对于第一个指数函数，我们有 $M \leq c'L/2^r$，从而得到下界 $L \geq 2^r M/c'$。

□

4 等距映射

现在我们讨论第 1.2 节中的步骤 1 和 4。也就是说，我们给出执行降序字典序排列步骤的流程，并概述厄米特变换的应用。这些步骤结合起来，将使我们能够实现一个等距映射，将标准基映射到更方便的厄米特态福克基。

4.1 降序字典序

对于给定的 $n \geq 2$ 和 $M \geq 0$，第1.2 节的第一步涉及一个酉算子，它将基态映射为

$$V_1 |\ell\rangle \mapsto |m_1(\ell), \ldots, m_n(\ell)\rangle \;; \tag{88}$$

特别是 $|0\rangle \mapsto |M, 0, 0, \ldots\ldots, 0\rangle$，$|1\rangle \mapsto |M-1, 1, 0, \ldots\ldots\rangle$ 以此类推，直到 $|N-1\rangle \mapsto |0, 0, 0, \ldots\ldots, M\rangle$。请注意，维数满足 $N = \binom{M+n-1}{n-1}$。因此，该操作按照降序字典序排列，同时满足约束 $\sum_{i=1}^{n} m_i = M$ 和 $m_i \geq 0$。

函数 $m_i(\ell)$ 可以高效计算，对于满足 $\mathbf{m}^{-1}(m_1(\ell)\ldots, m_n(\ell)) = \ell$ 的逆函数也同样如此。因此，我们可以使用可逆电路执行这些计算，并相干地实现所需的映射。标准策略是先计算 $|\ell\rangle \mapsto |\ell\rangle\ |m_1(\ell)\ldots, m_n(\ell)\rangle$，然后通过可逆地计算 $\mathbf{m}^{-1}$ 并执行映射 $|\ell\rangle\ |m_1(\ell)\ldots, m_n(\ell)\rangle \mapsto |m_1(\ell)\ldots, m_n(\ell)\rangle$，对 $|\ell\rangle$ 寄存器进行反计算。总复杂度为计算与反计算步骤的复杂度之和。

引理 4.1。 存在一个量子电路，可实现映射 V_1，其门复杂度为 $O(n^2 \text{对数}^3 M)$。

证明见附录 B。我们首先说明，给定 $\ell \in \{0, \ldots, N-1\}$，如何得到数位 $m_1(\ell)\ldots, m_n(\ell)$，使得 $\text{rank}_{\text{desc}}(m_1(\ell)\ldots, m_n(\ell)) = \ell$，其中 $\text{rank}_{\text{desc}}$ 表示排名。这可归结为一个划分任务，我们可以递归地计算数位 $m_1(\ell)$，直至 $m_{n-1}(\ell)$。最后一个数位由约束 $\sum_{i=1}^{n} m_i = M$ 确定。每个数位都通过二分搜索方法获得，该方法基于对所有以 $m_1, \ldots, m_j$ 开头的字符串之前的分拆数量进行计数。接着，我们说明给定数位 $m_1, \ldots, m_n$，如何计算 $\text{rank}_{\text{desc}}(m_1, \ldots, m_n)$。为此，我们高效地计算首位小于 m_1 的配置数量，再计算首位为 m_1 且次位小于 m_2 的配置数量，依此类推。将这些配置数量相加即可确定排名。该方法的复杂度主要由计算相应二项式系数的复杂度决定，并且可以证明其最坏情况下为 $O(n^2 \log^3(M))$。

4.2 量子 Hermite 变换

为完成将基态映射到 n量子谐振子的厄米特态的等距映射，我们将采用文献 [31] 中近期提出的量子厄米变换（QHT）。

定理4.2 （高效量子厄米特变换，改编自文献 [31]）。 设 $M > 0$ 为厄米特变换子空间的维数，$\epsilon > 0$ 为误差。那么，存在一个复杂度为 $O((\log M + \log(1/\epsilon))^3 \times \log(1/\epsilon))$ 的量子电路，可执行以下映射，误差为 ϵ:

$$\sum_{m=0}^{M-1} \alpha_m |m\rangle \mapsto \sum_{m=0}^{M-1} \alpha_m |\psi_m\rangle \ . \tag{89}$$

系数 $\alpha_m \in \mathbb{C}$ 任意且已归一化，即 $\sum_m |\alpha_m|^2 = 1$。厄米特态 $|\psi_m\rangle$ 如第 *3* 节所述，维数为 $L = \mathcal{O}(M^{2.25}/\epsilon^{3.25})$。

参见文献 [31], ，量子哈达玛变换（QHT）只是一种基变换，因此厄米特态可以定义到一个相位因子。尽管如此，容易证明，当厄米特态 $+1$ 对所有 m 均满足 $|\psi_m\rangle$ 按照第 89式和第 3节中的定义时，该构造产生的相位恰好为此值。若并非如此，那么振子表示中对应于 U 的酉算符 $SU(n)$ 就是所需的酉算符，只是还要与包含这些相位的对角酉算符作共轭。也就是说，按照第 U 节和第 U 节规定的量子算法，我们实现的并非 1.1 和 2中所述的精确算符，而是与其共轭的算符。所得变换仍是 U 的一个有效不可约表示，但并非我们所需的那个精确表示。 $SU(n)$

文献 [31] 中量子哈达玛变换（QHT）的构造遵循简单的态制备步骤。对于每个 m，首先将 $|m\rangle$ 映射为 $\mapsto |m\rangle|\phi_m\rangle$，其中 $|\phi_m\rangle$ 与 $|\psi_m\rangle$ 的重叠为常数。这可以通过对厄米函数作一些简单的振荡近似来实现。接着，结合量子相位估计（本征态滤波）和定点振幅放大，将 $|\phi_m\rangle$ 映射为 $\mapsto |\psi_m\rangle$。然后，将 $|m\rangle|\psi_m\rangle$ 映射为 $\mapsto |0\rangle|\psi_m\rangle$，以反计算 $|m\rangle$ 寄存器；这一步也使用量子相位估计。由于线性性，这些步骤对任意量子态都能执行正确的操作。高效的复杂度源于能够高效制备 $|\phi_m\rangle$，以及相应的快速前向模拟结果使量子相位估计得以高效执行。对 L 的维数要求为关于 M 和 $1/\epsilon$ 的多项式，主要是因为一项证明表明 $|\phi_m\rangle$ 与 $|\psi_m\rangle$ 之间存在常数重叠；不过，通过更好的分析，这一要求或许可以改进。

然后，我们可以通过使用 QHT n 次来完成 $SU(n)$ 变换的等距映射，每次的误差不超过 ϵ/n，且对应维数为 L。也就是说，

$$(\mathrm{QHT})^{\otimes n}\,|m_1,\ldots,m_n\rangle \mapsto |\psi_{m_1},\ldots,\psi_{m_n}\rangle \tag{90}$$

误差不超过 ϵ。这是 V_2 第 2 步中的酉算子，见第 1.2 节。注意，我们希望对最多 M 个厄米特态执行此映射；由于 $M < N$（即 $N = \binom{M+n-1}{n-1}$），得到的复杂度关于 N 和 $1/\epsilon$ 呈多对数级。此外，比较引理 L 中对 3.1 和定理 4.2 中对 $L = \mathcal{O}(N^{2.25}/\epsilon^{3.25})$ 的要求可知，取合适的值即可使总体误差ϵ。

5 量子算法

我们用于高维 $SU(n)$ 问题的主要量子算法基本遵循第 1.2 节中的四个步骤。令 $\epsilon > 0$ 为误差，$N > 0$ 为通过 $N = \binom{M+n-1}{n-1}$ 确定的不可约表示的维数，$n \geq 2$ 为群 $SU(n)$ 的维数。令 $\vartheta \in [0, 4\pi)$ 为精度达到 $\mathrm{O}(\log(N/\epsilon))$ 位的相位，$T \in \{H_i, S_{j,k}, A_{j,k}\} \in \mathbb{C}^{N\times N}$ 为第 1.1 节中所述 $\mathfrak{su}(n)$ 的 N 维表示中的厄米矩阵，并考虑指数函数 $\exp(\mathrm{i}\vartheta T)$ 的实现。我们将 $\hat{T}$ 记为 n 个量子谐振子空间中的对应 T（以 $H_i \mapsto \hat{H}_i$, $S_{j,k} \mapsto \hat{S}_{j,k}$ 或 $A_{j,k} \mapsto \hat{A}_{j,k}$ 替代）。类似地，$\bar{O}_b$ 是对应的 $\hat{O}_b$，但位于离散量子谐振子的空间中。

算法1：高效高维 $SU(n)$ 量子线路

---

1 计算局部维数 $L = \mathcal{O}(M^{2.25}/\epsilon^{3.25})$，并考虑空间 $(\mathbb{C}^L)^{\otimes n}$。2 按照第4.1节所述，实现字典序排列酉算子 V_1。3 按照第4.2节所述，应用 V_2 =量子哈达玛变换$^{\otimes n}$。4 根据引理2.2，分解 $\exp\left(\mathrm{i}\vartheta\,\hat{T}\right) = \prod_{b=1}^{r}\exp\left(\mathrm{i}\vartheta_b\,\hat{O}_b\right)$。5 对于 $b \in [r]$，执行6 计算 $t = \lceil 2e\vartheta_b\rceil$ 并定义 $\vartheta'_b = \vartheta_b/t$。7 重复执行 $\exp\left(\mathrm{i}\vartheta'_b O_b\right)$ t 次，以满足引理3.2 至3.4的条件。8 实现 n 量子谐波变换的逆以及 V_1的逆。

—

该算法实现所需的 Uas $(V_1)^\dagger(V_2)^\dagger\exp\left(\mathrm{i}\vartheta T\right)V_2V_1$，其中 $\exp\left(\mathrm{i}\vartheta T\right) = \prod_{b=1}^{r}\exp\left(\mathrm{i}\vartheta_b O_b\right)$。—

—

5.1 复杂度

现在我们证明定理 1.1 中的主要结果。到目前为止，我们已经证明 V_1 和 n 量子谐波变换的复杂度关于 $1/\epsilon$ 和 N 呈多对数级。更具体地说，该等距映射可以通过复杂度为

$$\mathcal{O}(n^2 \times \log^3(N) + n((\log(M) + \log(1/\epsilon))^3 \times \log(1/\epsilon)) \,. \tag{91}$$

对于常数 n，其复杂度为 $\mathcal{O}((\log(M) + \log(1/\epsilon))^3 \times \log(1/\epsilon))$，且主要由量子谐波变换决定。更一般地，我们可以将该复杂度写为 $\mathcal{O}(n^2((\log(N) + \log(1/\epsilon))^3 \times \log(1/\epsilon))$。

额外的复杂度来自 $\exp\left(\mathrm{i}\vartheta T\right)$ 的实现。对于每个对角酉算符，例如由 $x_j x_k$ and ϑ 给出的指数算符，其精度为 $\mathcal{O}(\log(N/\epsilon))$ 位，使用标准技术可通过成本 $\mathcal{O}(\log^2(N/\epsilon))$ 实现该酉算符。如果该操作不是对角的，我们还需要加上维数为 L 的中心化傅里叶变换的成本，即$\mathcal{O}(\log^2 L)$ 或 $\mathcal{O}(\log^2(N/\epsilon))$。

对于一般的 U 高维不可约表示中的 $SU(n)$，如定理 1.1 所示，将有 $n^2 - 1$个相位和指数算符。因此，在振子表示中实现相应酉算符的复杂度为 $\mathcal{O}(n^2\log^2(N/\epsilon))$，因为乘积中有 $\mathcal{O}(n^2)$ 个项。

一般 U 的所得复杂度则为

$$\mathcal{O}(n^2(\log(N) + \log(1/\epsilon))^3 \times \log(1/\epsilon) + n^2 \log^2(N/\epsilon)) \tag{92}$$

或简记为$\mathcal{O}(n^2(\log(N) + \log(1/\epsilon))^3 \times \log(1/\epsilon))$。这是定理1.1中结果的实际复杂度。

6 应用

我们首先给出 $SU(2)$变换在最优量子扩张器上的一个具体应用，随后讨论这些变换在量子模拟问题中的潜在应用。

6.1 显式 Ramanujan 量子扩张器

我们给出推论1.2的证明。量子扩展器是用量子信道而非马尔可夫链对经典扩张器所作的推广。量子扩展器的目标是快速随机化输入量子态，其作用类似于去极化信道。它们在物理学和量子信息中十分有用；例如，由于它们是快速扰乱器，可用于探测量子混沌，它们在矩阵乘积态中发挥作用，并且与酉设计的构造相关（参见 [9, 28, 25]）。量子扩展器的定义依赖于该信道的谱性质。设 $\rho \in \mathbb{C}^{N\times N}$ 为密度矩阵，且 $\varepsilon(\cdot)$为量子信道。形式上，我们称 ε 是一个(N, D, λ)量子扩展器，如果它满足：

(i) $\varepsilon(1\mathrm{l}_N) = 1\mathrm{l}_N$ 是不动点，且唯一；(ii) $\varepsilon(\rho) = \sum_{\mathrm{d}=1}^{D} A_{\mathrm{d}}\rho A^{\dagger}{}_{\mathrm{d}}$，其中 A_{d} 为 Kraus 算子，且

(iii) ε 的第二大特征值至多为 $\lambda < 1$。

最后这个条件等价于

$$\sup_{X\in\mathbb{C}^{N\times N}:\mathrm{tr}(X)=0} \|\varepsilon(X)\|_{\mathrm{Fr}}/\|X\|_{\mathrm{Fr}} \leq \lambda < 1, \tag{93}$$

其中 $\|.\|_{\mathrm{Fr}}$ 是弗罗贝尼乌斯范数。（我们假设所有其他特征值的绝对值都不超过 λ 。）扩展器的度为 D ，我们关注的是 D 也为与 N无关的常数的情形。直观来说，两个最大特征值之间的间隙 $1-\lambda$越大，扩展器的混合速度就越快。最优量子扩展器，也称为 Ramanujan 量子扩展器，是指满足 λ 与 D之间最优关系的扩展器，即$\lambda \leq 2\sqrt{n}-1/D$。如果这一特征值关系并非精确满足，而只是满足到一个任意小的差值 $\epsilon > 0$以内，我们就称这类量子扩展器为近似拉马努金量子扩展器。

事实证明，可以通过某些 $SU(2)$ 酉算符显式构造精确的 Ramanujan 量子扩展器；而且，由于我们能够以任意精度实现这些酉算符，我们的构造得到了近似的以及适用于 $D \geq 2$的高效 Ramanujan 量子扩展器。也就是说，量子计算所关注的是那些 ε能够以复杂度为polylog(N) 的方式进行模拟的量子扩展器。特别是，文献 [17, 13] 给出了一个关于由$SU(2)$ 构造量子扩展器的结果：在 $SU(2)$ 的 N维表示中，存在一个特定的有限酉算符集合$\{U_1,\ldots,U_D\}$，使得量子信道() d $U_{\mathrm{d}}\rho U_{\dagger}$ d是一个量子扩展器。此外，还可以通过由 LPS构造 [38, 25]导出的 $SU(2)$ 酉算符构造精确的 Ramanujan 量子扩展器。然而，在本研究之前，这些酉算符尚无已知的高效实现方法。

我们高效的 $SU(n)$ 变换随后可用于构造这类高效的（近似）拉马努金量子扩展器。该构造是显式的，由一系列旋转角度和轴指定，它们决定了 U_{d}；详见附录 C 。这与基于随机量子电路的近似拉马努金量子扩展器的其他构造不同。例如，文献 [28] 表明，可以通过 $D \geq 2$ Haar 随机酉算子得到近似拉马努金量子扩展器。在这种情况下，可以证明特征值关系以一个加性项 $\mathcal{O}(1/\sqrt{N}$ 为误差成立，且其成立概率极高，为 $1-\mathcal{O}(\exp(-cN)$，其中某个 $c > 0$。然而，这种构造效率不高，因为 Haar 随机量子线路需要指数级数量的门[5]。为解决这一效率问题，文献 [14, 30, 23] 研究了相关问题：如何利用高效的随机量子电路构造 t-设计，这类电路具有局域连接或全连接。这些结果表明，只要深度足够大，就可以通过随机量子电路构造量子扩展器，但尚不清楚它们是否为拉马努金量子扩展器，即使是近似意义下也未得到证明。此外，对于 D 常数，这些构造需要使用 Ω(polylog$N$) 个随机比特来生成随机门，而基于 $SU(2)$ 的构造只需常数个随机比特即可实现该信道。

另一种构造 Ramanujan 量子扩展器的方法，或许是利用近期极低深度下高效构造的 t-设计 [43] ，尝试重现证明 Haar 随机酉算子是 Ramanujan 量子扩展器所需的伪随机性 [28]。然而，据我们所知，特征值关系性质会用到 Haar 随机分布的 poly(N) 阶矩（文中使用的是 $\Theta(N^{2/15})$ 阶矩）。分析或许可以改进，从而用更少的矩达到与拉曼努金界相差 ε 的精度，但这

[5]此外，我们注意到，虽然特征值关系中的加性项很小，但它取决于 N ，对于固定的 N，无法将其任意缩小。在我们的 $SU(2)$ 构造中，我们可以独立于 N 取 $\epsilon \to 0$ 。

并非易事。已知 t-设计需要深度为 t的量子线路，因此若无进一步的洞见，这种方法的量子线路复杂度必然是 poly(N)。

在附录C中，我们给出一个基于 $SU(2)$ 的 Ramanujan 量子扩展器的具体示例，适用于任意维数 $N \geq 2$ 和某些度数 $D \geq 4$。我们还推导了具体情形 $D = 6$，其中第二大特征值对所有 $N \geq 2$ 都满足 $\lambda \leq 2\sqrt{5}/6$ 。令旋转角为 $\theta = 2\arccos\left(1/\sqrt{5}\right)$，我们定义量子信道 $\mathcal{E}_{\mathfrak{su}(2)}$，它随机采样酉算子 $U_a^{\pm} = \exp(\pm i\theta J_a)$，其中 $a = x$、y、z，而 J_a 是角动量算符。图1展示了该量子信道的谱隙，以及它如何达到最优界。结合我们证明这些酉算符可通过复杂度 polylog(N) 和 polylog($1/\epsilon$) 实现的结果，我们得到了一个高效且显式的近似 Ramanujan 量子扩展器。

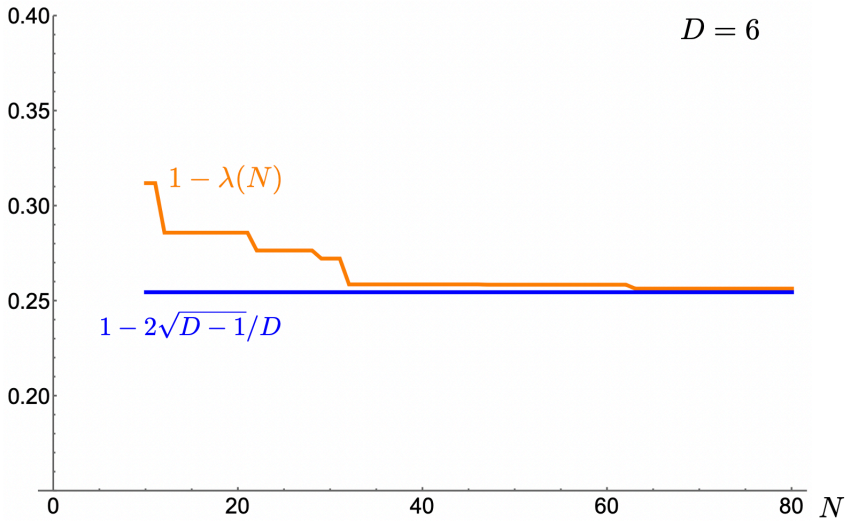

图 1：量子扩展器 $\mathcal{E}_{\mathfrak{su}(2)}$ 的谱隙随表示的维数 $N \geq 10$变化。谱隙满足最优界 $1 - \lambda(N) \geq 1 - 2\sqrt{5}/6$。

6.2 量子模拟快进

我们还可以考虑其在量子模拟中的应用。在模拟量子演化的背景下，我们针对 $SU(n)$ 变换构造的量子电路，为不断增长的快速前向模拟文献（参见 [4, 5, 21, 31, 2]）提供了其他范例。一般而言，要对哈密顿量 H 进行时长为 t的模拟，其复杂度为 $\Omega(\|H\|t)$，其中 $\|H\|$ 是诸如谱范数之类的某种范数。在我们的情形中，哈密顿量由李代数 $\mathfrak{su}(n)$ 的相应表示张成，其谱范数可以满足 $\|H\| = \Theta(N)$；然而，我们的量子变换使我们能够以 polylog(N) 的时间将这一演化的模拟速度提高到指数级。一个主要范例正是我们构造所依据的情形：我们直接展示了如何快速前向模拟 n 个量子谐振子的动力学，其哈密顿量具有如下形式

$$H = \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_{j,k} a_j^\dagger a_k \,. \tag{94}$$

尽管该哈密顿量作用于无限维空间，但我们也证明，通过适当的离散化和维数截断，可以以极高的精度恢复连续情形下的性质。不过，由于玻色系统按定义就是玻色系统，且其演化是对厄米特态的变换，因此这一结果并不需要量子厄米变换。我们展示了如何通过 Jordan-Wigner 表示高效地实现这一点。

另一个有趣的例子是量子踢顶。它是一种用于研究量子混沌的模型，也是文献 [49] 的研究动机之一。在这种情况下，周期性且随时间变化的哈密顿量为 $H(t) = \gamma J_y + \beta (J_z)^2 \sum_n \delta(t - nT)$，其中 T 是周期，J_a 是 $\mathfrak{su}(2)$ 的 N 维表示中的角动量算符。由 $H(t)$ 诱导的演化 $U(t)$ 可用 Floquet算符 $V = e^{-\mathrm{i}\beta (J_z)^2} e^{-\mathrm{i}\gamma J_y}$ 表示；也就是说，$U(kT) = V^k$。因此，这一过程也可以快速前向模拟，因为：i）我们的结果展示了如何快速前向模拟 $e^{-\mathrm{i}\gamma J_y}$；ii）算符 $e^{-\mathrm{i}\beta (J_z)^2}$ 是对角酉算符，可使用对角酉算符的标准技术高效实现。

7 结论与开放问题

我们给出了高效的量子电路，用于实现群 $SU(n)$ 的 N 维表示中的酉算符。这些量子电路利用了近期提出的量子厄米变换（QHT），以及李代数 $\mathfrak{su}(n)$ 的 Jordan-Schwinger 表示，其中使用了 n 个量子谐振子。为了获得关于维数 N 的多对数复杂度，我们证明了相应（二次）算符所诱导的 n 个量子谐振子的动力学可以快速前向模拟，随后又证明了离散化这些系统后也有类似结果。我们的研究结果适用于全对称表示；而如何使用其他表示实现 $SU(n)$ 酉算符，仍有待研究。

我们展示了其在高效、显式的拉马努金量子扩张图以及特定量子系统时间动力学的快速前向模拟中的应用。在这些情形中，我们假设 $n \geq 2$ 为常数，但也请注意，我们的结果可以轻松推广到 $n = \text{polylog}(N)$的情形。这为快速前向模拟其他量子系统带来了可能。除此之外，我们预计这些结果还将催生其他新颖的应用。

我们注意到，我们的量子电路在门数量方面可能并非最优；在研究实际应用时，这是一个重要问题。在我们的情形中，高维 $SU(n)$酉算子的复杂度主要由量子哈达玛变换（QHT）的复杂度决定，而后者又主要取决于一些需要可逆且相干算术的态制备步骤。因此，任何显著改进都可能来自对 QHT 相应步骤的改进。最后，我们提出一些有待未来研究解答的开放问题。

- 我们能否利用我们的构造，高效地实现群 $SU(n)$上的傅里叶变换?
- 既然我们只实现全对称不可约表示，能否也高效地实现 $SU(n)$ 的所有其他高维不可约表示?
- 我们能否为所有度数和维数构造显式拉马努金量子扩展器? 这将是对一系列著名研究工作的量子类比 [39, 40, 1]。
- 对于较大的 N，实现 $SU(2)$ 的 N 维不可约表示时，优化后的门数量是多少?

致谢

我们感谢 Aram Harrow 强调了其在显式拉马努金量子扩展器中的应用，也感谢 Dave Bacon 与我们进行讨论。VI 获得美国国家科学基金会研究生研究奖学金的资助。S. Jain 获得亚马逊人工智能奖学金的资助。

A 使用玻色算符构造李代数 $\mathfrak{su}(n)$ 的不可约表示

$\mathfrak{su}(n)$ 的振子表示，也称为 Jordan-Schwinger 表示或映射，提供了一种从与不同玻色模式或不同量子谐振子相关联的玻色算符生成 $\mathfrak{su}(n)$ 代数的方法。

考虑产生算符和湮灭算符 $a_j^\dagger$ and a_j，它们分别满足对易关系

$$[a_j, a_k^\dagger] = \delta_{j,k},\ [a_j^\dagger, a_k^\dagger] = 0,\ [a_j, a_k] = 0, \tag{95}$$

其中 $1 \le j, k \le n$。我们定义算符 $\hat{E}_{j,k} := a_j^\dagger a_k$，它们是玻色算符的二次形式，同时也是“数目守恒”的。也就是说， $a_j^\dagger$ 在 j^{th} 玻色模式中产生一个玻色子，而 a_k 则在 k^{th} 玻色模式中湮灭一个玻色子。因此，我们定义

$$\hat{S}_{j,k} := \frac{1}{2}(\hat{E}_{j,k} + \hat{E}_{k,j})\ , \tag{96}$$

$$\hat{A}_{j,k} := \frac{\mathrm{i}}{2}(\hat{E}_{j,k} - \hat{E}_{k,j})\ , \tag{97}$$

其中 $1 \le j < k \le n$，且 $\hat{E}_{k,j} = (\hat{E}_{j,k})^\dagger = a_k^\dagger a_j$。这些算符是厄米的，并且对于 $1 \le j < k \le n$，共有 $n(n-1)$ 个这样的算符。我们还定义对角算符

$$\hat{H}_i := \frac{1}{2}(a_i^\dagger a_i - a_{i+1}^\dagger a_{i+1})\ , \tag{98}$$

其中 $1 \le i < n$。这些算符同样是厄米的、数目守恒的，且共有 $n-1$ 个这样的算符。与 $\mathfrak{su}(n)$ 的联系显而易见。事实上，容易证明 $\{H_j, S_{j,k}, A_{j,k}\}$也张成实李代数 $\mathfrak{su}(n)$；由方程（95）中的对易关系可得

$$[\hat{E}_{j,k}, \hat{E}_{l,m}] = \delta_{k,l}\hat{E}_{j,m} - \delta_{j,m}\hat{E}_{l,k}\ , \tag{99}$$

$$[\hat{E}_{j,k}, \hat{H}_i] = \delta_{k,i}\hat{E}_{j,i} - \delta_{j,i}\hat{E}_{i,k} - \delta_{k,i+1}\hat{E}_{j,i+1} + \delta_{j,i+1}\hat{E}_{i+1,k}\ , \tag{100}$$

$$[\hat{H}_i, \hat{H}_{i'}] = 0\ . \tag{101}$$

这些对易运算的结构因子与 $n \times n$ 矩阵 $E_{j,k}$ 之间对易关系的结构因子相匹配，后者直接给出了 $\mathfrak{su}(n)$ 的一个不可约表示。因此，算符 $\hat{S}_{j,k}$、$\hat{A}_{j,k}$ 和 $\hat{H}_i$ 也构成一个 $\mathfrak{su}(n)$ 李代数。

下一步是利用这些算符构造 $\mathfrak{su}(n)$的不可约表示。为此，考虑 n 个不同的玻色模式，其中玻色子的总数为 $M \ge 0$ 且固定。这个子空间由以下福克态张成：

$$\mathcal{B}_{n,M} := \left\{ |m_1, m_2, \ldots, m_n\rangle : \sum_{j=1}^{n} m_j = M \right\}\ . \tag{102}$$

福克态的一种实用排序方式是第2节讨论的降序字典序。注意，玻色算符的作用满足

$$\hat{E}_{j,k}\,|m_1,\ldots,m_j,\ldots,m_k,\ldots,m_n\rangle = \sqrt{(m_j+1)m_k}\,|m_1,\ldots,m_j+1,\ldots,m_k-1,\ldots,m_n\rangle\ . \quad (103)$$

该作用自动给出了一个利用福克态构造的 $\mathfrak{su}(n)$ 表示。此外，作用 ˆ 是不可约的，因为总存在一系列算符$E_{j,\ k}$，能够连接 M 个玻色子的任意两个福克态。这个不可约表示 N 的总维数由 M 与 n 个非负整数组成的组合给出。公式为

$$N(n,M) = \binom{M+n-1}{n-1}\ , \quad (104)$$

它可以由递推关系 $N(n,\ M) = \sum_{m=0}^{M} N(n-1,\ m)$ 和 $N(1,\ m)\ = 1$ 得到。除非 $n\ =\ 2$，否则该维数并非任意取值；在这种情况下，$N(n,\ M)\ =\ M+1$，我们可以据此设定 M。更一般地，这些维数对应于 $SU(n)$ 的“全对称”表示。对于 $n \geq 3$，这些只是所有表示的真子集。

我们可以通过一个例子来说明这一点。考虑 $n\ =\ 3$ 和 $M\ =\ 2$ 的情形。该表示的维数为 $N(3,\ 2)\ =\ 6$，张成此空间的福克态按降序字典序排列如下：

$$\mathcal{B}_{3,2} = \{|2,0,0\rangle, |1,1,0\rangle, |1,0,1\rangle, |0,2,0\rangle, |0,1,1\rangle, |0,0,2\rangle\}\ . \quad (105)$$

ˆ 使用此排序，我们可以计算$E_{j,k}$的表示；例如

$$\hat{E}_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \hat{H}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (106)$$

A.1 $\mathfrak{su}(2)$的高维表示

另一个标准示例是 $n = 2$的情况。在这种情况下，我们可以得到所有不可约表示。对于一般的 M，考虑基

$$\mathcal{B}_{2,M} = \{|M,0\rangle, |M-1,1\rangle, \ldots, |0,M\rangle\}, \quad (107)$$

按降序字典序即可轻易得到

$$\hat{E}_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{M} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{(M-1)2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \sqrt{M} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \quad (108)$$

这就是众所周知的 $\mathfrak{su}(2)$ 角动量升算符 J^+，并且

$$\hat{H}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} M & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -M \end{pmatrix}, \tag{109}$$

即角动量算符 J_z。

B 降序字典序中的排名

我们希望利用相干算术执行映射 $|\ell\rangle \mapsto |m_1(\ell)\ldots, m_n(\ell)\rangle$ 及其逆。接下来我们描述相应的经典计算与反计算步骤及其复杂度，这些也决定了量子复杂度。

B.1 从索引到按字典序排列的分拆

给定 $\ell \in \{0, \ldots, N-1\}$，我们希望得到 $m_1(\ell)\ldots, m_n(\ell)$，其中 $\sum_i m_i(\ell) = M$。这是一个划分任务，可以看作将 M 个球放入 $k \le n$ 个箱子，共有$\binom{M+k-1}{k-1}$ 种做法。首先我们固定 M 和 $k = n-1$，并将 N_r 定义为第一个箱子中有 r 个球的分拆数目。由前述公式，我们得到

$$N_r = \binom{M-r+k-1}{k-1}. \tag{110}$$

现在，定义 $S_r := \sum_{k=r}^{M} N_k$。通过一个简单的组合论论证，我们有

$$S_r = \sum_{r'=r}^{M} \binom{M-r'+k-1}{k-1} = \binom{M-r+k}{k}. \tag{111}$$

这统计了在遇到任何其他首元素为 $r-1$ 的分拆之前、处于降序字典序中的分拆数量。

我们用于计算 $m_1(\ell)\ldots, m_n(\ell)$ 的算法将递归进行：找到满足 $S_r \le \ell$ 的最小 r。由于 S_r 关于 r 单调递减，这可以通过二分搜索在 $\log M$ 时间内完成。这将直接给出 $m_1(\ell)$。然后将 r 个球放入第一个箱子，并用 $\ell \to \ell - S_r$、$M \to M-r$ 和 $k \to k-1$ 递归求解该任务，直至 $k = 1$。这将给出前 $n-1$ 个数位，而数位 $m_n(\ell)$ 由约束 $\sum_i m_i(\ell) = M$ 自动确定。

该计算的最坏情况复杂度为 $\mathcal{O}(n \times \log(M) \times n \times \log^2 M) = \mathcal{O}(n^2 \log^3 M)$。$n$ 的一个因子来自将 $k = n-1$ 运行到 $k = 1$。另一个因子 $\log(M)$ 来自每一步的二分搜索。在每次二分搜索中，我们需要计算二项式系数 $\binom{M-r+k}{k}$，其中涉及对大小为 $\log^2(M)$ 的比特串进行 $\mathcal{O}(n)$ 次乘法，从而得到最终复杂度。

B.2 从字典序排列到索引

为得到所需的公式，首先考虑升序字典序会有所帮助。其排序规则是：如果存在一个 $j \in \{1, n\}$ 使得 $m_1, \ldots, m_n$ 大于 $m'_1, \ldots, m'_n$

对所有 $j' < j$ 和 $m_j > m'_j$ 都成立。这样，只需按升序逐个考察每个数位 m_i，就能轻松地对字符串进行排名。也就是说，较大的 m_1 意味着排名较高，从而确定排名中最相关的层级。对于给定的 m_1，较大的 m_2 也意味着排名较高，从而确定排名中下一个相关的层级，依此类推。我们的目标是将这些层级的量值相加，并确定 ℓ。

更具体地，设 $M \geq 0$ 和 $n \geq 2$ 固定。约束条件为 $m_i \geq 0$ 和 $\sum_i m_i = M$。考虑字符串 $m_1, \ldots, m_n$。如果 $m_1 > 0$，那么我们知道，按升序排列时，首个数位为 m'_1 的字符串 $m_1 - 1, \ldots, 0$ 排名低于该字符串。对于固定的 m'_1，我们需要计算如何将 $M' = M - m'_1$ 排列到 $d' = n - 1$ 个箱子中。其公式就是我们已知的公式，即 $\binom{M'+d'-1}{d'-1}$。这就得到了排名中的加性项

$$\begin{aligned} r_1 &= \sum_{m'_1=0}^{m_1-1} \binom{M - m'_1 + n - 2}{n-2} \\ &= \binom{M+n-1}{n-1} - \binom{S_1+n-1}{n-1}, \end{aligned} \tag{112}$$

其中 $S_1 = M - m_1 = \sum_{i>1} m_i$。在玻色态的语境中，这表示 m_1右侧的玻色子数量。

接下来，我们需要根据 m_2进行排名。也就是说，对于固定的 m_1 和 m_2，我们需要加上将 $M' = M - m_1 - m'_2$ 排列到 $d' = n - 2$ 个箱子中所产生的项。公式类似：

$$\begin{aligned} r_2 &= \sum_{m'_2=0}^{m_2-1} \binom{M - m_1 - m'_2 + n - 3}{n-3} \\ &= \binom{M - m_1 + n - 2}{n-2} - \binom{S_2+n-2}{n-2}. \end{aligned} \tag{113}$$

这里，$S_2 = \sum_{i>2} m_i$。接下来，我们继续添加各项，直到 r_{n-1}，因为根据约束 $\sum_i m_i = M$，r_n 将由这些项确定。结果为

$$\begin{aligned} \mathrm{rank}_{\mathrm{asc}}(m_1, \ldots, m_n) &= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{S_{k-1}+n-k}{n-k} - \binom{S_k+n-k}{n-k} \\ &= N + \sum_{k=1}^{n-2} \binom{S_k+n-k-1}{n-k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} \binom{S_k+n-k}{n-k} \qquad (114) \\ &= N - 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{S_k+n-k-1}{n-k-1} - \binom{S_k+n-k}{n-k}, \qquad (115) \end{aligned}$$

其中 $S_0 := M$ 并回顾 $N = \binom{M+n-1}{n-1}$。这可以在经典情形下以时间 $\mathcal{O}(n^2 \log^2 M)$ 或$\mathcal{O}(n^2 \log^2 N)$（对于 $n \ll N$）计算，因为求和中有 $\mathcal{O}(n)$ 项，每一项涉及 $\mathcal{O}(n)$ 次乘法，且字符串大小为 $\mathcal{O}(\log\ N)$。注意，使用比教科书乘法更快的方法可以改进该指数。

对于降序字典序，我们直接得到

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}_{\mathrm{desc}}(m_1,\dots,m_n) &= (N-1) - \mathrm{rank}_{\mathrm{asc}} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{S_k+n-k}{n-k} - \binom{S_k+n-k-1}{n-k-1}\,. \end{aligned} \tag{116}$$

我们也可以在时间 $\mathcal{O}(n^2 \log^2 M)$ 内计算这一结果。注意，这就是所需的函数： $\ell(m_1,\dots,m_n) \equiv \mathrm{rank}_{\mathrm{desc}}(m_1,\dots,m_n)$。

C 来自 $SU(2)$ 的 Ramanujan 量子扩展器

我们简要讨论如何从 $SU(2)$ 变换构造最优量子扩展器。LPS构造 [38, 27] 根据四元数方程的整数解给出旋转角

$$a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = p\,, \tag{117}$$

其中 p 是一个素数，通常满足 $p = 1 \bmod 4$。也就是说，我们关注长度为 p 的整数四元数（平方）。这里，度数为 $D = p+1$，量子信道由D 个酉算符 $U_1,\dots,U_D$ 构造，因此 $\varepsilon(\rho) = \frac{1}{D}\sum_{\mathrm{d}=1}^{D} U_{\mathrm{d}}\rho U_{\mathrm{d}}^{\dagger}$。这些酉算符都可以显式写成

$$U_{\mathrm{d}} = \exp\!\Big(-\mathrm{i}\theta^{\mathrm{d}}(n_x^{\mathrm{d}}J_x + n_y^{\mathrm{d}}J_y + n_z^{\mathrm{d}}J_z)\Big)\,, \tag{118}$$

其中 J_x、 J_y 和 J_z 是 $SU(2)$ 角动量算符， $0 \le \theta_{\mathrm{d}} \le 2\pi$，且 $\vec{n}^{\mathrm{d}} = (n_x^{\mathrm{d}}, n_y^{\mathrm{d}}, n_z^{\mathrm{d}}) \in \mathbb{R}^3$ 满足 $\|\vec{n}_{\mathrm{d}}\| = 1$。旋转角和轴满足

$$\theta^{\mathrm{d}} = 2\arccos\left(\frac{a_0^{\mathrm{d}}}{\sqrt{p}}\right),\ \vec{n}^{\mathrm{d}} = \frac{1}{\sqrt{p-(a_0^{\mathrm{d}})^2}}(a_1^{\mathrm{d}}, a_2^{\mathrm{d}}, a_3^{\mathrm{d}}), \tag{119}$$

其中上标 d 表示第 d 个th 方程（117的解。（请注意，许多解可通过乘以虚单位相互关联，因此我们仅保留 $p+1$ “不同的”解。）

我们以 $p = 5$ 为例进行说明，其中 $D = 6$。不同的解为

$$(1,2,0,0),(1,-2,0,0),(1,0,2,0),(1,0,-2,0),(1,0,0,2),(1,0,0,-2). \tag{120}$$

我们计算出所有旋转角和轴：

$$\theta^1 \simeq 126.87^\circ,\ \vec{n}^1 = (1,0,0) \implies U_1 = \exp\!\Big(-\mathrm{i}\theta^1 J_x\Big)\,, \tag{121}$$

$$\theta^2 \simeq 126.87^\circ,\ \vec{n}^2 = (-1,0,0) \implies U_2 = \exp\!\Big(\mathrm{i}\theta^2 J_x\Big)\,, \tag{122}$$

$$\theta^3 \simeq 126.87^\circ,\ \vec{n}^3 = (0,1,0) \implies U_3 = \exp\!\Big(-\mathrm{i}\theta^3 J_y\Big) \tag{123}$$

$$\theta^4 \simeq 126.87^\circ,\ \vec{n}^4 = (0,-1,0) \implies U_4 = \exp\!\Big(\mathrm{i}\theta^4 J_y\Big)\,, \tag{124}$$

$$\theta^5 \simeq 126.87^\circ,\ \vec{n}^5 = (0,0,1) \implies U_5 = \exp\!\Big(-\mathrm{i}\theta^5 J_z\Big)\,, \tag{125}$$

$$\theta^6 \simeq 126.87^\circ,\ \vec{n}^6 = (0,0,-1) \implies U_6 = \exp\!\Big(\mathrm{i}\theta^6 J_z\Big)\,. \tag{126}$$

所有角度都相同，因为 $a_0 = 1$ 在所有这些解中都是如此。超算符的谱隙结果如图1所示。

即使在 $p = 3, D = 4$ 的情况下，我们也能构造出最优的拉马努金量子扩展器。方程 (117) 的相关解表明，对于所有 $1 \le n \le 4$， $a_0 = 0$ 或 $\theta^{\mathrm{d}} = \pi$ 。相关的旋转轴为 $\vec{n}^1 = (1, 1, 1)/\sqrt{3}$、$\vec{n}^2 = (1, 1, -1)/\sqrt{3}$、 $\vec{n}^3 = (1, -1, 1)/\sqrt{3}$ 和 $\vec{n}^4 = (-1, 1, 1)/\sqrt{3}$。模拟结果见图 2。

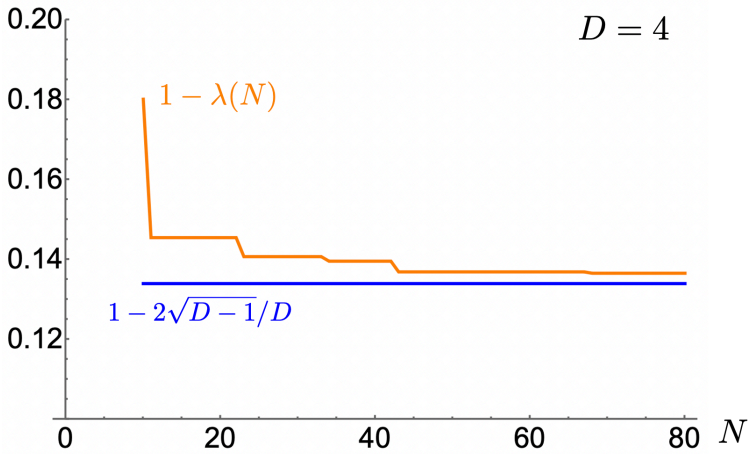

图 2：由公式（117）得到的量子扩展器的谱隙，是表示维数 $N \ge 10$ 的函数，适用于 $D = 4$ 情形。谱隙满足最优界 $1 - \lambda(N) \ge 1 - 2\sqrt{3}/4$。

参考文献

[1] Noga Alon。任意度数和规模的显式扩张图。*Combinatorica*，41(4):447–463，2021。[2] Harriet Apel 和 Burak S¸ahino˘glu。通过极化子变换快速前向模拟费米子-玻色子相互作用。*arXiv:2601.17732*，2026。[3] A Arima。Elliott 的 SU(3) 模型及其在核物理中的发展。《物理学杂志 *G*：核与粒子物理》，25(4):581，1999。[4] Yosi Atia 和 Dorit Aharonov。哈密顿量的快速前向演化与指数精度测量。《自然通讯》，8(1):1572，2017。[5] Ryan Babbush、Nathan Wiebe、Jarrod McClean、James McClain、Hartmut Neven 和 Garnet Kin-Lic Chan。材料的低深度量子模拟。《物理评论 *X*》，8(1):011044，2018。[6] Dave Bacon、Isaac Chuang 和 Aram Harrow。量子 Schur 变换 I：高效的量子位元电路。载于第 *18* 届 *ACM-SIAM* 离散算法研讨会（*SODA*）论文集，第 1235–1244 页，2007 年。arXiv:quant-ph/0601001。[7] Dave Bacon、Isaac L. Chuang 和 Aram W. Harrow。用于 Schur 变换和 Clebsch-Gordan 变换的高效量子电路。*Physical Review Letters*，97:170502，2006 年 10 月。[8] Avraham Ben-Aroya、Oded Schwartz 和 Amnon Ta-Shma。量子扩张器：动机与构造。载于第二十三届 *IEEE* 计算复杂性年会，第 292–303 页。IEEE Computer Soc.，美国加利福尼亚州洛斯阿拉米托斯，2008 年。[9] Avraham Ben-Aroya 和 Amnon Ta-Shma。量子扩张器与量子熵差问题。*arXiv:quant-ph/0702129*，2007。[10] Dominic W. Berry、Graeme Ahokas、Richard Cleve 和 Barry C. Sanders。用于模拟稀疏哈密顿量的高效量子算法。《数学物理通讯》，270:359–371，2007。[11] Dominic W. Berry、Andrew M. Childs、Richard Cleve、Robin Kothari 和 Rolando D. Somma。利用截断泰勒级数模拟哈密顿动力学。*Physical Review Letters*，114(9):090502，2015。[12] Dominic W Berry、Andrew M Childs 和 Robin Kothari。对所有参数的依赖性近乎最优的哈密顿量模拟。载于*2015* 年 *IEEE* 第 *56* 届计算机科学基础年会，第 792–809 页。IEEE，2015。[13] Jean Bourgain 和 Alex Gamburd。关于扩张图的新结果。*Comptes Rendus. Math´ematique*，342(10):717–721，2006。[14]Fernando GSL Brandao、Aram W. Harrow 和 Micha l Horodecki。局部随机量子电路是近似多项式设计。《数学物理通讯》，346(2):397–434，2016。

[15] Adam Burchardt、Jiani Fei、Dmitry Grinko、Martin Larocca、Maris Ozols、Sydney Timmerman 和 Vladyslav Visnevskyi。高维量子 Schur 变换。*arXiv:2509.22640*，2025。[16] J¨urgen Fuchs。《仿射李代数与量子群：导论及其在共形场论中的应用》。剑桥大学出版社，1995。[17] Alex Gamburd、Dmitry Jakobson 和 Peter Sarnak。SU(2) 群环中元素的谱。欧洲数学会杂志，1(1):51–85，1999。[18] Howard Georgi。《粒子物理学中的李代数：从同位旋到统一理论》。泰勒-弗朗西斯出版集团，2000。[19] David J. Griffiths 和 Darrell F. Schroeter。《量子力学导论》。剑桥大学出版社，2018。[20] Lov Grover 和 Terry Rudolph。构造对应于可高效积分概率分布的叠加态。*arXiv:quant-ph/0208112*，2002。[21] Shouzhen Gu、Rolando D. Somma 和 Burak S¸ahino˘glu。量子演化的快速前向模拟。*Quantum*，5:577，2021。[22] Jeongwan Haah、Matthew B. Hastings、Robin Kothari 和 Guang Hao Low。用于模拟晶格哈密顿量实时演化的量子算法。*SIAM*计算杂志，52(6):FOCS18–250，2021。[23] Jonas Haferkamp 和 Nicholas Hunter-Jones。随机量子电路的改进谱隙：大局部维数与全连接相互作用。《物理评论 *A*》，104(2):022417，2021。[24] Aram Harrow。《相干经典通信与 Schur 变换在量子信息论中的应用》。博士论文，麻省理工学院，2005。arXiv:quant-ph/0512255。[25] Aram W. Harrow。由任意经典 Cayley 图扩张子构造量子扩张器。*QuantumInfo. Comput.*，8(8):715–721，2008年9月。[26] Aram W Harrow 和 Richard A Low。随机量子电路是近似二设计。《数学物理通讯》，291(1):257–302，2009。[27] Aram W. Harrow、Benjamin Recht 和 Isaac L. Chuang。量子门的高效离散近似。第43卷，第4445–4451页。2002。量子信息论。[28] M. B. Hastings。随机酉算子可构成量子扩张器。《物理评论 *A*》 *(3)*，76(3):032315，11，2007。[29] Wolfgang Hollik。量子场论与标准模型。*arXiv:1012.3883*，2010。[30] Nicholas Hunter-Jones。随机量子电路中由统计力学得到的酉设计。*arXiv:1905.12053*，2019。

[31] Siddhartha Jain、Vishnu Iyer、Rolando D. Somma、Ning Bao 和 Stephen P. Jordan。高效量子厄米特变换。*arXiv:2510.04929*，2025。[32]Fernando Granha Jeronimo、Tushant Mittal、Sourya Roy 和 Avi Wigderson。通过算子放大，从任意扩张子构造近似拉马努金扩张器。*SIAM*计算杂志，(0):FOCS22–120，2025。[33] Stephen P. Jordan。用于近似某些群的不可约表示的快速量子算法。*arXiv:0811.0526*，2008。[34] Stephen P. Jordan。置换量子计算。量子信息与计算，10(5/6):470–497，2009。arXiv:0906.2506。[35] Hari Krovi。一种高效的高维量子 Schur 变换。*Quantum*，3:122，2019。[36] Zimu Li、Han Zheng、Yunfei Wang、Liang Jiang、Zi-Wen Liu 和 Junyu Liu。SU(d)对称随机酉算子：量子混沌、纠错与机器学习。*npj*量子信息，11(1):158，2025。[37] Guang Hao Low 和 Isaac L. Chuang。通过量子信号处理实现最优哈密顿量模拟。*Physical Review Letters*，118(1):010501，2017。[38] Alexander Lubotzky、Ralph Phillips 和 Peter Sarnak。拉马努金图。*Combinatorica*，8(3):261–277，1988。[39] Adam W. Marcus、Daniel A. Spielman 和 Nikhil Srivastava。交错族 I：任意度数的二分拉马努金图。*Ann. of Math. (2)*，182(1):307–325，2015。[40] Adam W. Marcus、Daniel A. Spielman 和 Nikhil Srivastava。交错族 IV：任意规模的二分拉马努金图。*SIAM J. Comput.*，47(6):2488–2509，2018。[41] Quynh T Nguyen。混合舒尔变换：高效量子电路及其应用。*arXiv:2310.01613*，2023。[42] P. C. Garc´ıa Quijas 和 L. M. Ar´evalo Aguilar。时间演化算子的因式分解。*Phys.Scr.*，75(2):185–194，2007。[43] Thomas Schuster、Jonas Haferkamp 和 Hsin-Yuan Huang。极低深度下的随机酉算子。*Science*，389(6755):92–96，2025。[44] Yasuhiro Sekino 和 Leonard Susskind。快速扰乱器。高能物理学杂志，2008(10):065，2008。[45] Rolando D. Somma。量子计算、复杂度与多体物理。*arXiv:quant-ph/0512209*，2005。[46] Rolando D. Somma。一维量子系统的量子模拟。*QuantumInf. Comput.*，16(13-14):1125–1168，2016。[47] Rolando D. Somma。用于广义相干态层析成像的酉电路合成。数学物理杂志，60(11)，2019。

[48] Christof Zalka。在量子计算机上模拟量子系统。伦敦皇家学会会刊。*A*辑：数学、物理与工程科学，454(1969):313– 322，1998年。arXiv:quant-ph/9603026。[49] Christof Zalka。在量子计算机上实现 SU(2) 的高维酉表示。*arXiv:quant-ph/0407140*，2004年。