arXiv:2602.15188v1 [math-ph] 16 Feb 2026

希尔伯特双模与拉格朗日关系的范畴等价量子化

Benjamin H. Feintzeig

美国华盛顿州西雅图市华盛顿大学哲学系，邮编98195-3350。

贡献作者：bfeintze@uw.edu；

摘要

众所周知，经典理论和量子理论具有不同类型的*representations*，每种表征类型分别对应经典或量子语境下广义荷的可能取值。本文表明，这些表征理论的结构在从经典物理到量子物理的过程中，在某种意义上得以保留。为此，我讨论经典和量子语境中不同的表示理论保持态射。具体而言，我考察这样一些范畴：在经典语境中，其态射是拉格朗日关系；在量子语境中，其态射是希尔伯特双模。这些态射意义重大，因为它们分别产生经典理论和量子理论的 *induced representations* 。我将量子化和经典极限视为这些范畴之间的确定函子。我通过泊松代数的严格变形量子化来处理量子化，并通过延拓一致连续C*代数丛来处理经典极限。借助这些工具，我证明量子化函子与经典极限函子彼此“几乎互逆”，由此确立范畴等价。

1 引言

本文旨在阐明一种意义：经典物理与量子物理在表示对称性及其相关荷的结构上具有共同之处。这种结构通常与李群的表示理论相关，其中表示的恰当概念是相对于经典或量子物理的框架来定义的（见 [1, 2]）。就本文而言，哈密顿框架中的经典理论建立在承载

表示的泊松流形上。另一方面，量子理论则以承载希尔伯特空间上表示的可观测量C*-代数来表述。即使经典理论与量子理论具有相同的对称性李群，它们的表示也未必一一对应。例如，经典理论中的荷通常取连续值，因此形成连续的表示族；而量子理论中的荷通常是“量子化”的，因此形成离散的表示族。这引出了一个问题：能否精确说明，尽管如此，经典与量子表示理论仍然彼此对应的含义?

我希望说明，对于某一类经典物理模型及其量子化对应物，确实可以用范畴论的语言将这种结构对应关系精确化。我将考察一个经典物理模型范畴，其中对象是与李群胚相关的泊松流形，态射是拉格朗日关系，即保持经典表示论结构的态射。我将把范围限制在由辛对偶对确定的拉格朗日关系这一特殊情形。同样地，我还将考察一个量子物理模型范畴，其中对象是作为李群胚量子化结果而关联的C*-代数，态射是希尔伯特双模的（等价类），即保持量子表示论结构的态射。此前，Landsman [3] 定义了一个量子化函子 Q，它将经典范畴中的经典态射（辛对偶对）对应到量子范畴中的量子态射（希尔伯特双模）。另一方面，Feintzeig 和 Steeger [4] 定义了一个经典极限函子 L，它将量子范畴中的量子态射对应到经典范畴中的经典态射。在本文中，我将说明，经典极限函子几乎是量子化函子的逆函子，其意义在于 $L \circ Q$ 和 $Q \circ L$ 都分别与恒等函子自然同构。这一结果推广了先前的工作 [5], ，我认为它证明了经典理论与量子理论共享与物理荷和对称性相关的表示论结构。

本文结构如下。第 2 节定义由李群胚构造的模型的经典范畴和量子范畴中的对象 [6, 7]。经典对象是与李群胚相关联的李代数丛的对偶，并带有其自然的泊松结构 [8–10]。量子对象是与李群胚相关联的（约化）李群胚C*代数 [7, 8]。我还将定义量子化函子和经典极限函子对这些对象的作用。量子化通过严格变形量子化 [7, 11–13], 实现，而经典 $\hbar \to 0$ 极限则通过一致连续C*代数丛 [14–16]的延拓来理解。第 3 节定义经典态射和量子态射 [17, 18]。经典态射是由辛对偶对 [19–23] 确定的拉格朗日关系，而量子态射则是希尔伯特双模 [24, 25]（的等价类）。我将分别回顾 Landsman [3] 以及 Feintzeig 和 Steeger[4], 给出的涉及这些态射的量子化和经典极限变换。第 4 节证明本文的核心结果：量子化函子和经典极限函子构成范畴等价。最后，第 5 节讨论主要结果，并作总结和结论。

2 经典与量子模型

2.1 与李群胚相关的系统

我们考虑的经典与量子模型涵盖了多种可由李群胚表示的物理系统 [6, 9]。李群胚是一个小范畴 G，其中每个态射都有逆映射。我们将对象 G 认作恒等箭头，其集合记为 G_0。存在一个源投影s_G： $G \to G_0$ 以及一个靶投影 t_G： $G \to G_0$。群胚乘法定义为态射复合 $x, x' \in G$；当 $s_G(x) = t_G(x')$ 时，记作 $x \cdot x'$。此外，对于李群胚，G 和 G_0 都是光滑流形， s_G 和 t_G 都是满射浸没，乘法是光滑映射 $G \times G \to G$，且包含映射 $G_0 \hookrightarrow G$ 是光滑的。正如 Landsman [7, 13], 所述，李群胚的例子包括任意流形的对群胚、李群作用于流形所对应的作用群胚，以及主丛的规范群胚。

李群胚可以与一个泊松流形相关联，该流形被视为经典力学系统的相空间。这里所讨论的泊松流形是李代数丛的对偶。我们将 G 的李代数丛记作 $\mathfrak{G} \rightrightarrows^{TG_0}_{G_0}$。令 $T^tG = \ker((t_G)_*)$ 为 TG 的子丛，则有 $\mathfrak{G} \cong T^tG_{|G_0}$，它可理解为对 G_0 的限制。换言之，$(x, \xi) \in T^tG_{|G_0}$ 意味着 $x \in G_0$ 是 G 中的恒等箭头，且 $\xi \in T_xG$ 是一个切向量，并满足 $(t_G)_*(\xi) = 0$。李代数丛 $\mathfrak{G}$ 是 G_0 上的一个向量丛，其投影 $\tau_G \colon \mathfrak{G} \to G_0$ 定义为 $\tau_G(x, \xi) = s_G(x) = t_G(x)$，对所有 $(x, \xi) \in T^tG_{|G_0}$ 均成立。锚映射 $\tau^a_G \colon \mathfrak{G} \to TG_0$ 由 $(s_G)_*$ 的限制给出。对偶李代数胚 $\mathfrak{G}^*$ 是 $\mathfrak{G}$ 在 G_0 上的对偶向量丛，其投影记为 τ^*_G。

流形 $\mathfrak{G}^*$ 在 $C^\infty(\mathfrak{G}^*)$ [7, 13] 上带有一个泊松括号。泊松括号由函数特殊情形之间的关系唯一确定。首先，考虑$\tilde{}$仅沿底空间变化而不沿纤维变化的函数：取 f, $\tilde{g} \in C^\infty(G_0)\tilde{}$，并通过定义 $f(\eta) = f(\tau^*_G(\eta))$，将它们视为函数 f， $g \in C^\infty(\mathfrak{G}^*)$；对于 $\eta \in \mathfrak{G}^*$，同样定义$g(\eta) = \tilde{g}(\tau^*_G(\eta))$。 f 和 g 的泊松括号定义为

$$\{f, g\} = 0. \tag{1}$$

接下来，考虑与 $\mathfrak{G}$ 的截面对偶的函数：取截面 s_1， $s_2 \colon G_0 \to \mathfrak{G}$，并通过 $\tilde{s}_1(\eta) = \eta(s_1(\tau^*_G(\eta)))$ 和 $\tilde{s}_2(\eta) = \eta(s_2(\tau^*_G(\eta)))$ 定义 $\tilde{s}_1$， $\tilde{s}_2 \in C^\infty(\mathfrak{G}^*)$，其中 $\eta \in \mathfrak{G}^*$。对于如上所述的 $\tilde{s}_1$ 和 f，以及 $\tilde{s}_2$，泊松括号定义为

$$\{\tilde{s}_1, f\} = -(\tau^a_G \circ s_1)(\tilde{f}) \tag{2}$$

$$\{\tilde{s}_1, \tilde{s}_2\} = -\widetilde{[s_1, s_2]_{\mathfrak{G}}}, \tag{3}$$

其中 $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{G}}$ 表示李括号。如前所述，这些关系完全确定了 $\mathfrak{G}^*$上的泊松括号。这为将 $\mathfrak{G}^*$ 视为哈密顿系统的相空间提供了足够的结构。

李群胚还定义了量子系统 [7, 8, 26]的可观测量所构成的非交换C*-代数。约化[1]群胚 C*-代数 $C^*(G)$ 定义为代数 $C_c^\infty(G)$ 在卷积积下的一种适当完备化。为定义这些代数，回顾一下，李群胚 G带有相应的右/左 Haar 系统 $(\nu_{x_0}^{s/t})_{x_0\in G_0}$，分别定义在 $s_G^{-1}(x_0)$ 和$t_G^{-1}(x_0)$ 上。另考虑 G_0上的一个给定准不变测度 ν_0。定义 $C_c^\infty(G)$ 在$G(\nu_0\times\nu^s)$ 上的左正则表示 π^G 如下：

$$\pi^G(f)(\psi)(x)=\int_{s_G^{-1}(s_G(x))} d\nu^s_{s_G(x)}(x')f(xx'^{-1})\psi(x') \tag{4}$$

对于 $f\in C_c^\infty(G)$ 和 $\psi\in L^2(G,\ \nu_0\times\nu^s)$。注意，$\pi^G(f)$ 是一个积分核为

$$K^f(x,x')=f(xx'^{-1}) \tag{5}$$

当 $s_G(x)=s_G(x')$ 且 $K^f(x,\ x')$ 时；否则为 $=0$。约化群胚 C*-代数$C^*(G)$ 是 $C_c^\infty(G)$ 在表示 π^G下关于算子范数的完备化。

2.2 李群胚的量子化与经典极限

经典模型——泊松流形 $\mathfrak{G}^*$——通过严格变形量子化与量子模型——C*-代数 $C^*(G)$——相关联。我们首先回顾相关结构的定义 [7, 11, 12, 27]，，重点介绍（均匀）连续 C*-代数丛的概念，以表述经典极限 [14–16]。

定义 1。泊松代数 $\mathcal{P}\subseteq C_b(M)$ 的严格量子化 是光滑泊松流形 M 上有界函数的严格量子化，由以下内容构成：

- 一族 C*-代数$(\mathfrak{A}_\hbar)_{\hbar\in[0,1]}$，称为纤维；以及
- 一族量子化映射 $(\mathcal{Q}_\hbar:\ \mathcal{P}\to\mathfrak{A}_\hbar)_{\hbar\in[0,1]}$，其中 $\mathcal{Q}_0:\ \mathcal{P}\hookrightarrow C_b(M)$ 为包含映射

对所有 $f,g\in\mathcal{P}$ 满足：

1.（冯·诺伊曼条件）$\lim_{\hbar\to0}\|\mathcal{Q}_\hbar(f)\mathcal{Q}_\hbar(g)-\mathcal{Q}_\hbar(fg)\|=0$；*2.*（狄拉克条件）$\lim_{\hbar\to0}\|\mathcal{Q}_\hbar\big(\{f,g\}\big)-[\mathcal{Q}_\hbar(f)\ \mathcal{Q}_\hbar(g)]\|=0$；以及 *3.*（里费尔条件）映射 $\hbar\mapsto\|\mathcal{Q}_\hbar(f)\|$ 连续。

此外，若对每个 $\hbar\in[0,1]$，映射 $\mathcal{Q}_\hbar$ 是单射，且 $\mathcal{Q}_\hbar(\mathcal{P})$ 在$\mathfrak{A}_\hbar$中稠密，则该结构称为严格变形量子化。[2]

我们有时会将严格变形量子化简写为 $\mathcal{Q}_\hbar$。

[1]约化群胚 C*-代数通常记作 $C_r^*(G)$，以区别于全群胚 C*-代数。当群胚可和时，二者重合。本文不考虑全群胚 C*-代数，因此为简便起见，我们继续用记号 $C^*(G)$ 表示约化群胚 C*-代数。[2]严格变形量子化的定义可以加以推广，使得底空间不限于 $I=[0,1]$，也包括更一般的子集 $I\subseteq\mathbb{R}$，其中 0 是聚点。然而，本文只采用底空间 $[0,1]$ 和 $(0,1]$。

本文所关注的严格变形量子化的主要例子，是将经典系统建模为李代数丛的对偶 $\mathfrak{G}^*$，并将其与量子系统建模为群胚 C*-代数 $C^*(G)$ 联系起来。现在我们概述 Landsman [7, 13] 提供的细节（另见 Landsman 和 Ramazan [28]）。为了定义量子化映射，我们利用李代数丛结构的另外两个方面：Weyl 指数映射和逐纤维傅里叶变换。

为定义 Weyl 指数映射，我们假设李代数丛 $\mathfrak{G}$ 配备了一个联络。考虑丛 $\tau_{T^tG\to G}: T^tG \to G$，并定义左指数映射 $\exp^L: \mathfrak{G} \to G$，其定义如下：

$$\exp^L(X) = \tau_{T^tG\to G}(X'(1)), \tag{6}$$

其中 $X'(t)$ 是 T^tG 上的测地流；当测地流在 $t=1$ 处有定义时，左指数映射也有定义。接着定义 Weyl 指数映射 $\exp^W: \mathfrak{G} \to G$，其定义如下：

$$\exp^W(X) = \exp^L\big(-X/2\big)^{-1}\exp^L\big(X/2\big). \tag{7}$$

为定义纤维傅里叶变换，我们考虑一族定义在纤维 $(\tau_G^*)^{-1}(x_0)$ 上的勒贝格测度 $(\nu_{x_0}^*)_{x_0\in G_0}$。函数 $f: \mathfrak{G}^* \to \mathbb{C}$ 的纤维傅里叶变换定义为

$$\hat{f}(X) = \int_{(\tau_G^*)^{-1}(x_0)} d\nu_{x_0}^*(\theta) e^{i\theta(X)} f(\theta) \tag{8}$$

对所有 $X \in \mathfrak{G}$。

接下来，定义 $\mathcal{P}_G = C_{PW}^\infty(\mathfrak{G}^*)$，即 $\mathfrak{G}^*$ 上的光滑 Paley-Wiener 函数代数，也就是那些纤维傅里叶变换光滑且紧支撑的函数。对所有 $\hbar > 0$，取 $\mathfrak{A}_0 = C_0(\mathfrak{G}^*)$ 和 $\mathfrak{A}_\hbar = C^*(G)$。对于每个 $\hbar > 0$，定义量子化映射 $\mathcal{Q}_\hbar^G: C_{PW}^\infty(\mathfrak{G}^*) \to C^*(G)$ 如下：

$$\mathcal{Q}_\hbar^G(f)(\exp^W(X)) = \hbar^{-n}\kappa_G(X)\hat{f}(X/\hbar), \tag{9}$$

对于 $n =$ 维 G，且其中 $\kappa_G: \mathfrak{G} \to \mathbb{C}$ 是一个适当的实值光滑截断函数。我们要求 $\kappa_G(-X) = \kappa_G(X)$，并且 κ_G 的支集包含在 $\mathfrak{G}$ 零截面附近的一个邻域内，在该邻域上 $\exp^L$ 和 $\exp^W$ 是微分同胚。Landsman [13]证明，映射$\mathcal{Q}_\hbar^G$ 满足严格变形量子化的所有条件。

泊松代数 $\mathcal{P}$ 的两个具有相同纤维 C*-代数的严格量子化 $(\mathcal{Q}_\hbar)_{\hbar\in I}$ 和 $(\mathcal{Q}'_\hbar)_{\hbar\in I}$，若对每个 $f \in \mathcal{P}$，映射

$$\hbar \mapsto \|\mathcal{Q}_\hbar(f) - \mathcal{Q}'_\hbar(f)\| \tag{10}$$

是连续的 [7]。例如，已知在 $\mathbb{R}^{2n}$ 上，外尔量子化和 Berezin 量子化是等价的 [7]。等价量子化共享 C*-代数连续丛的结构 [14, 29–31],这一结构在下文中发挥着关键作用。

我们现在定义本文将采用的 C*-代数丛类型，其中涉及 一致连续 [4, 16]的强性质。该定义源于 Kirchberg 和 Wasserman [14], 的定义 [14], ，但不仅允许纳入在 $\hbar \in [0,1]$上的严格变形量子化，也允许纳入它们对$\hbar > 0$的限制，即 $\hbar \in (0,1]$。我们对一致连续C*代数丛的定义提供了足够的信息结构，以重构经典极限。

定义 2。 一个 一致连续C*代数丛由以下部分组成：

- 一个局部紧度量空间 I ，称为底空间；
- 一族 C*-代数（$\mathfrak{A}_\hbar$）$_{\hbar\in I}$ ，称为纤维；
- 一个 C*-代数 $\mathfrak{A}$ ，称为一致连续截面代数；以及
- 一族满*-同态（$\phi_\hbar$ ： $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_\hbar$）$_{\hbar\in I}$ ，称为求值映射

对所有 $a \in \mathfrak{A}$ 满足：

1. $\|a\| =$ 上确界$_{\hbar\in I}\|\phi_\hbar(a)\|$; *2.* 对每个定义在 I 上的一致连续有界函数 f，都存在一个元素 $fa \in \mathfrak{A}$，使得 $\phi_\hbar(fa) = f(\hbar)\phi_\hbar(a)$ 对所有 $\hbar \in I$ 均成立；*3.* 映射 $\hbar \mapsto \|\phi_\hbar(a)\|$ 一致连续且有界。

本文中考虑的所有丛都是一致连续的，因此我们有时会省略修饰词“一致”，直接将这些结构称为C*-代数连续丛。不过，我们强调，我们的定义不同于Kirchberg和Wasserman关于连续C*-代数丛的标准定义 [14],，后者用定义在 I 上的一致连续函数来替代定义 2 中的相应条件，即要求函数仅连续且在 I上无穷远处消失。此外，我们还指出，有时会用连续截面的代数 $\mathfrak{A}$来简写一致连续C*代数丛。

严格量子化只要满足一些温和的技术条件，就能确定一个 C*-代数连续丛。以下构造当且仅当对于映射 $[\hbar \mapsto \mathcal{Q}_\hbar(f)]$（ $f \in \mathcal{P}$）的每个多项式 P，映射

$$\hbar \mapsto \|P(\hbar)\| \tag{11}$$

˜是连续的 [32]。通过对形如以下形式的映射取逐点乘积和求和，可以生成一个截面*-代数$\mathfrak{A} \subseteq \prod_{\hbar\in[0,1]}$

$$[\hbar \mapsto \mathcal{Q}_\hbar(f)] \tag{12}$$

对于 $f \in \mathcal{P}$。然后将连续截面的 C*-代数定义为

$$\mathfrak{A} = \left\{ a \in \prod_{\hbar \in [0,1]} \mathfrak{A}_\hbar \;\middle|\; \text{the map } [\hbar \mapsto \|a(\hbar) - \tilde{a}(\hbar)\|] \text{ is continuous for each } \tilde{a} \in \tilde{\mathfrak{A}} \right\}. \tag{13}$$

求值映射定义如下：

$$\phi_\hbar(a) = a(\hbar) \tag{14}$$

对于每个 $a \in \mathfrak{A}$ 和 $\hbar \in [0,1]$，该结构成为一个 C*-代数连续丛。事实上，可以证明，等价量子化确定了相同的连续截面代数，因此也确定了相同的连续丛 [7]。

我们主要关注这样的情形：在底空间 $[0,1]$, 上存在严格量子化，它确定了 $[0,1]$ 上的一个 C*-代数连续丛。此时，将闭区间 $[0,1]$ 上的连续丛限制到半开区间 $(0,1]$，便得到一个一致连续的 C*-代数丛。我们将 $(0,1]$ 上的一致连续 C*-代数丛理解为编码了量子可观测量代数的信息，以及其在取值 $\hbar > 0$时的缩放性质。

利用这一结构，我们可以将经典 $\hbar \to 0$ 极限视为量子化的“逆”过程。我们将把 $\hbar \to 0$ 极限表示为将 $(0,1]$ 上的一致连续 C*-代数丛延拓至闭区间 $[0,1]$,，其中包含取值 $\hbar = 0$。

为此，假设我们给定了一个在$(0,1]$ 上的一致连续C*代数丛，其一致连续截面代数为 $\mathfrak{A}$，纤维为$(\mathfrak{A}_\hbar)_{\hbar \in (0,1]}$，求值映射为$(\phi_\hbar)_{\hbar \in (0,1]}$。Steeger 和 Feintzeig [15] 证明，只要底空间的包含映射$(0,1] \hookrightarrow [0,1]$ 是等距的（本例显然满足这一条件），该丛就可以唯一地延拓到单点紧化 $[0,1]$，并且任意 $\hbar \in [0,1]$ （包括值 $\hbar = 0$）处的纤维代数由下式确定：

$$\mathfrak{A}_\hbar = \mathfrak{A}/K_\hbar, \tag{15}$$

其中取关于闭双边理想的商

$$K_\hbar = \left\{ a \in \mathfrak{A} \mid \lim_{\hbar' \to \hbar} \|\phi_{\hbar'(a)}\| = 0 \right\}. \tag{16}$$

特别地，存在唯一的极限纤维代数 $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}/K_0$。

当一致连续丛由泊松代数的严格变形量子化确定时，我们有： $\mathfrak{A}_1$ 表示完全量子理论， $\mathfrak{A}_0$ 表示经典理论。下面简要介绍经典极限的一些特征；Steeger 和 Feintzeig [15]以及 Feintzeig 和 Steeger [4]对此有更详细的描述。首先，冯·诺伊曼条件意味着经典极限代数$\mathfrak{A}_0$ 是一个交换代数，因此根据盖尔范德表示定理，它是拓扑空间M 上的函数代数。其次，某些泊松代数的选择

包含足够的信息，可以在 M上定义光滑流形结构。第三，狄拉克条件意味着 C*-代数丛确定了 M上的泊松括号。最后，经典极限在同构意义下是唯一的：对 M 上的函数泊松代数进行量子化，可在经典极限中恢复 M 的结构，其中 $\mathfrak{A}_0 \cong C_0(M)$。总而言之，由严格变形量子化生成的一致连续 C*-代数丛的经典极限，使我们能够恢复原空间的几何结构，从而理解为：对于 $\hbar > 0$，经典结构由量子模型决定。

3 经典与量子态射

为了将量子化理解为经典物理与量子物理模型之间的范畴等价，我们必须明确所考虑的模型范畴中的态射。遵循 Landsman [8, 18], 的做法，我们分别研究能够体现经典模型与量子模型表示论结构的态射。现在，我们将经典模型（即泊松流形）之间的态射定义为辛对偶对，将量子模型（即 C*-代数）之间的态射定义为希尔伯特双模。我们将重点讨论由李群胚之间的双丛导出的辛对偶对与希尔伯特双模；这些双丛由作用于同一空间上的一对群胚组成 [6, 33, 34]。我们首先给出所采用的双丛定义。

定义*3.* 李群胚 G 与 H 之间的双丛是一个流形 M，带有光滑映射 $t_M: M \to G_0$ 和 $s_M: M \to H_0$，并具有光滑左 G-作用和光滑右 H-作用。对于 $x \in G$ 和 $q \in M$，左 G-作用xq的结果仅当 $s_G(x) = t_M(q)$时才有定义。对于 $y \in H$和 $q \in M$，右 G-作用 qy的结果仅当 $s_M(q) = t_H(y)$时才有定义。此外，记作 $G \rightarrowtail M \leftarrowtail H$ 的双丛还必须满足 $t_M(qy) = t_M(q)$、$s_M(xq) = s_M(q)$，以及对于群胚作用有定义的所有 $x \in G$、$q \in M$和 $y \in H$，均有 $(xq)y = x(qy)$。

有时，我们会用双丛 $G \rightarrowtail M \leftarrowtail H$ 的中间空间 M来指称它。若存在微分同胚 $\zeta: M \to N$，使得 $s_N \circ \zeta = s_M$、$t_N \circ \zeta = t_M$，并且对所有 $x \in G$、$q \in M$以及 $y \in H$、$\zeta(xq) = x\zeta(q)$ 和 $\zeta(qy) = \zeta(q)y$，则称双丛 $G \rightarrowtail M \leftarrowtail H$ 和 $G \rightarrowtail N \leftarrowtail H$ 是同构的。若满足以下条件，则称双丛为正则的

- s_M 是满射浸没；
- 对所有 $x \in G$ 和 $q \in M$，$xq = q$ 当且仅当 $x \in G_0$；
- 对所有 $q \in M$ 和 $q' \in s_M^{-1}(s_M(q))$，存在一个 $x \in G$，使得 $q' = xq$；
- 右侧的 H-作用是适当的。

正则双丛可以看作从 H 到 G的广义映射，并且可以通过张量积 [17]定义一个自然的复合算子。特别地，给定两个正则双丛

$$G \rightarrowtail M \leftarrowtail H \qquad \text{and} \qquad H \rightarrowtail N \leftarrowtail G', \tag{17}$$

定义纤维积

$$M \times_H N = \left\{ (q, q') \in M \times N \;\middle|\; s_M(q) = t_N(q') \right\}. \tag{18}$$

该空间带有一个 H-作用，其定义为对 $y \in H$，$(q,\ q') \in M \times_H N \mapsto (qy,\ y^{-1}q)$。张量积定义为 $M \circledast_H N = (M \times_H N)/H$，构成双丛的中间空间

$$G \rightarrowtail M \circledast_H N \leftarrowtail G', \tag{19}$$

我们将其视为双丛 M 与 N [17, 18]的张量积。

3.1 对偶对与希尔伯特双模

我们遵循 Weinstein [19] 和 Landsman [17] 对辛对偶对的定义（另见 Xu [20, 21, 35]）。

定义 4. 泊松流形 M与 N 之间的一个辛对偶对 $M \leftarrow S \rightarrow N$ 由一个辛流形 S 以及光滑泊松映射 $j_M\colon\ S \rightarrow M$和 $j_N\colon\ S \rightarrow N$构成，其中 N 取为泊松括号的相反数。二者必须共同满足：对于每个 $f \in C^\infty(M)$ 和 $g \in C^\infty(N)$，

$$\{j_M^* f, j_N^* g\} = 0, \tag{20}$$

其中，泊松括号由 S上的辛形式决定。

有时，我们会用其中间空间 S 来指称对偶对 $M \leftarrow S \rightarrow N$，作为简写。我们称另一个对偶对 $M \leftarrow S \rightarrow N$（其映射为 $j_M\colon\ S \rightarrow M$ 与 $j_N\colon\ S \rightarrow N$）同构于对偶对 $M \leftarrow S \rightarrow N$，如果存在辛同胚 $u\colon\ S \rightarrow S$ 使得 $j_M \circ u = j_M$ 与 $j_N \circ u = j_N$。

我们称一个辛对偶对弱正则，如果映射 j_M 与 j_N 是完备的，且 j_N 是满射浸没 [17]。这里，我们说 j_M 是完备的，如果每当函数 $f \in C^\infty(M)$ 在 M上具有完备的哈密顿流时，$j_M^* f$在 S上就具有完备的哈密顿流，对 j_N [7]亦然。弱正则的辛对偶对可以通过一种张量积进行复合，如下 [17]。考虑两个弱正则辛对偶对

$$M \xleftarrow{\overset{1}{j}_M} S_1 \xrightarrow{\overset{1}{j}_N} N \qquad \text{and} \qquad N \xleftarrow{\overset{2}{j}_N} S_2 \xrightarrow{\overset{2}{j}_P} P\,. \tag{21}$$

定义该空间

$$S_1 \times_N S_2 = \left\{ (s_1, s_2) \in S_1 \times S_2 \;\middle|\; \overset{1}{j}_N(s_1) = \overset{2}{j}_N(s_2) \right\}. \tag{22}$$

由于 $S_1 \times S_2$ 携带由辛流形 S_1 和 S_2确定的乘积辛结构，我们可以考虑其中向量的零分布 $\mathcal{N}_{S_1 \times_N S_2}$

$T(S_1 \times_N S_2)$，这些向量相对于积空间上的辛形式为零。接着定义 $S_1 \circledcirc_N S_2 = (S_1 \times_N S_2)/\mathcal{N}_{S_1 \times_N S_2}$。弱正则性确保这是一个辛流形，可作为辛对偶对的中间空间

$$M \xleftarrow{\quad} S_1 \circledcirc_N S_2 \xrightarrow{\quad} P \,, \tag{23}$$

我们将其视为对偶对 S_1 与 S_2 [3]的复合。

众所周知，辛对偶对 $M \leftarrow S \rightarrow N$ 允许我们从 N [36]的辛实现诱导出 M 的辛实现。这里，辛实现是从辛流形 S 到泊松流形N的光滑泊松映射 $j : S_0 \rightarrow N$。通过将上述张量积复合 $S \circledcirc S_0$ 与显然的映射 $j : S \circledcirc S_0 \rightarrow M$结合，可以利用 S_0 和对偶对 S 诱导出 M 的辛实现；该映射由第一分量上的 j_M 构造而成。此外，诱导辛实现的这一构造并不依赖于辛对偶对 S的完整结构，而仅依赖于其像 $(j_M, j_N)[S] \subseteq M \times N$，这是一个拉格朗日关系 [23]。这里，$(j_M, j_N) : S \rightarrow M \times N$是对映射 $(j_M, j_N)(s) = (j_M(s)\ j_N(s))$，其中 $s \in S$。所谓诱导的辛实现仅依赖于拉格朗日关系，是指不同的辛对偶对可能会给出从 N 的实现到 M的实现的等价函子，但这些对偶对确定的是同一个拉格朗日关系。此外，任何确定同一拉格朗日关系的辛对偶对也会确定同一个诱导函子。因此，我们将范畴中的态射定义为确定同一拉格朗日关系的辛对偶对的等价类。

本文所考虑的对偶对的主要示例，源自李群胚 G 与 H 之间的正则双丛 $G \rightarrowtail M \leftarrowtail H$，它使得我们能够构造一个辛对偶对 $\mathfrak{G}^* \leftarrow T^*M \rightarrow \mathfrak{H}^*$，其对应于它们的李代数对偶 $\mathfrak{G}^*$ 与 $\mathfrak{H}^*$。泊松态射 $j_G : T^*M \rightarrow \mathfrak{G}^*$ 定义为

$$j_G(\eta_q)\Big(\frac{d}{dt}_{|t=0}\gamma(t)\Big) = -\eta_q\Big(\frac{d}{dt}_{|t=0}\big(\gamma(t)^{-1} \cdot q\big)\Big), \tag{24}$$

其中 $\eta_q \in T_q^*M$ 与 $\gamma : I \rightarrow G$ 是一条曲线，满足 $\gamma(0) = t_M(q)$，且 $\gamma(t) \in t_G^{-1}(t_M(q))$，从而 $\dot{\gamma}(0) \in \tau_G^{-1}(t_M(q))$，并且对于所有 $t \in I \subseteq \mathbb{R}$，$\gamma(t)^{-1} \cdot q$ 都有定义。同理，泊松态射 $j_H : T^*M \rightarrow \mathfrak{H}^*$ 定义为

$$j_H(\eta_q)\Big(\frac{d}{dt}_{|t=0}\gamma(t)\Big) = \eta_q\Big(\frac{d}{dt}_{|t=0}\big(q \cdot \gamma(t)\big)\Big), \tag{25}$$

其中 $\eta_q \in T_q^*M$和 $\gamma : I \rightarrow H$是一条曲线，满足 $\gamma(0) = s_M(q)$ 且 $\gamma(t) \in t_H^{-1}(s_M(q))$，因此 $\dot{\gamma}(0) \in \tau_H^{-1}(s_M(q))$，并且对所有 $t \in I \subseteq \mathbb{R}$，$q \cdot \gamma(t)$ 都有定义。由此可知，$\mathfrak{G}^* \leftarrow T^*M \rightarrow \mathfrak{H}^*$ 满足辛对偶对 [8, 37] 的定义。双丛的正则性意味着相应对偶对的弱正则性，这保证了这些对偶对可以通过张量积进行复合。

我们将进一步把注意力限制在可积泊松流形上（或相应李代数丛的对偶可积的李群胚上），因为可积性条件保证存在一个从该泊松

流形到其自身、起着恒等箭头作用 [10, 17]。同样，我们将注意力限制在源单连通李群胚上（即李群胚 G使得s_G^{-1} （x_0）对每个 $x_0 \in G_0$ [38]都连通且单连通），因为该条件成立当且仅当恒等双丛对应于恒等对偶对。

我们定义如下泊松流形范畴，将其理解为经典模型的范畴。

定义 5. 我们用**LPoisson** 表示由下列内容构成的范畴：

• 对象：李代数丛 $\mathfrak{G}^*$ 的可积对偶，与源单连通李群胚 G相关联，理解为泊松流形的一类。

• 态射：辛对偶对的等价类 $\mathfrak{G}^* \leftarrow T^*M \rightarrow \mathfrak{H}^*$ 与正则双丛相关联 M，介于李群胚之间，经由式（*24*）-（*25*）的构造，并确定相同的拉格朗日关系 （j_G， j_H）$[T^*M] \subseteq \mathfrak{G}^* \times \mathfrak{H}^*$。

LPoisson 确实是一个范畴：对象的可积性保证了恒等箭头的存在，而对偶对的张量积的行为蕴含了态射 [17, 18]的适当复合律。请注意，我们的定义不同于Landsman所给出的定义，因为我们考虑的是确定相同拉格朗日关系的辛对偶对的等价类，而不是辛对偶对本身的同构类。

接下来，我们遵循 Lance [24] 以及 Raeburn 和 Williams [25]对希尔伯特双模的定义（另见 Rieffel [39, 40, 41]）。

定义 6. 由 *C**-代数 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 之间的一个希尔伯特双模 $\mathfrak{A} \rightarrowtail \mathcal{E} \leftarrowtail \mathfrak{B}$，包含一个向量空间 $\mathcal{E}$，其上带有一个取值于 $\mathfrak{B}$的正定内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{E}}$，该内积对第一个变量共轭线性、对第二个变量线性。空间 $\mathcal{E}$ 带有 $\mathfrak{B}$ 的右作用和 $\mathfrak{A}$的左作用，且这些作用由可伴随算子给出（这里，若存在一个线性算子 a^*，使得对所有 $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{E}$都有 $\langle \varphi_1, a\varphi_2 \rangle_{\mathcal{E}} = \langle a^*\varphi_1, \varphi_2 \rangle_{\mathcal{E}}$，则称 $\mathcal{E}$ 上的线性算子a 为可伴随的。）内积还须满足

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 b \rangle_{\mathcal{E}} = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_{\mathcal{E}} \cdot b \tag{26}$$

对所有 $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{E}$ 和 $b \in \mathfrak{B}$均成立，并且空间 $\mathcal{E}$ 须在范数

$$\|\varphi\|^2 = \|\langle \varphi, \varphi \rangle_{\mathcal{E}}\|, \tag{27}$$

其中，右侧使用 $\mathfrak{B}$ 中的 *C**-范数。最后，要求 $\mathfrak{A}$-作用是非退化的，即 $\mathfrak{A}\mathcal{E}$ 在 $\mathcal{E}$ 中稠密。

有时，为简便起见，我们会用中间空间 $\mathcal{E}$ 来指称双模 $\mathfrak{A} \rightarrowtail \mathcal{E} \leftarrowtail \mathfrak{B}$。如果存在酉映射 $U : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$，同时交织左侧 $\mathfrak{A}$-作用和右侧 $\mathfrak{B}$-作用，我们就称另一个希尔伯特双模 $\mathfrak{A} \rightarrowtail \mathcal{F} \leftarrowtail \mathfrak{B}$ 酉等价于希尔伯特双模 $\mathfrak{A} \rightarrowtail \mathcal{E} \leftarrowtail \mathfrak{B}$。

可以将希尔伯特双模视为 C*-代数之间的广义映射，并可通过张量积运算进行复合，如下所示 [17, 18]。

考虑两个希尔伯特双模

$$\mathfrak{A} \rightarrowtail \mathcal{E} \leftarrowtail \mathfrak{B} \qquad \text{and} \qquad \mathfrak{B} \rightarrowtail \mathcal{F} \leftarrowtail \mathfrak{C}. \tag{28}$$

考虑代数张量积 $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$，并定义子空间

$$\mathcal{N}_{\mathfrak{B}} = \operatorname{span}\Big\{ \varphi b \otimes \psi - \varphi \otimes b\psi \;\Big|\; \varphi \in \mathcal{E}, \psi \in \mathcal{F}, \text{and } b \in \mathfrak{B} \Big\}. \tag{29}$$

然后定义 $\mathcal{E}\dot{\otimes}_{\mathfrak{B}}\mathcal{F} = (\mathcal{E} \otimes \mathcal{F})/\mathcal{N}_{\mathfrak{B}}$。该空间带有自然的左 $\mathfrak{A}$-作用和右 $\mathfrak{C}$-作用，以及如下定义的 $\mathfrak{C}$-值内积:

$$\langle \varphi_1 \otimes \psi_1, \varphi_2 \otimes \psi_2 \rangle_{\mathcal{E}\dot{\otimes}_{\mathfrak{B}}\mathcal{F}} = \langle \psi_1, \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_{\mathcal{E}} \cdot \psi_2 \rangle_{\mathcal{F}} \tag{30}$$

对于 φ_1, $\varphi_2 \in \mathcal{E}$ 和 ψ_1, $\psi_2 \in \mathcal{F}$。$\mathcal{E}\dot{\otimes}_{\mathfrak{B}}\mathcal{F}$的完备化记为 $\mathcal{E} \otimes_{\mathfrak{B}} \mathcal{F}$，称为内张量积，并构成希尔伯特双模的中间空间

$$\mathfrak{A} \rightarrowtail \mathcal{E} \otimes_{\mathfrak{B}} \mathcal{F} \leftarrowtail \mathfrak{C}, \tag{31}$$

我们将其视为希尔伯特双模 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{F}$的复合。

众所周知，希尔伯特双模 $\mathfrak{A} \rightarrowtail \mathcal{E} \leftarrowtail \mathfrak{B}$ 允许我们由 $\mathfrak{B}$ [36] 的希尔伯特空间表示诱导出 $\mathfrak{A}$ 的希尔伯特空间表示（另见 [39–44]）。这里，希尔伯特空间表示是一个 *-同态 $\pi : \mathfrak{B} \to \mathcal{H}_\pi$。我们可以通过取上述内张量积 $\mathcal{E} \otimes_{\mathfrak{B}} \mathcal{H}_\pi$，利用 $\mathcal{H}_\pi$ 和双模 $\mathcal{E}$ 诱导出 $\mathfrak{A}$ 的希尔伯特空间表示。此外，这种诱导希尔伯特空间表示的构造并不依赖于希尔伯特双模 $\mathcal{E}$ 的完整结构，因为不同的希尔伯特双模可能产生相同的诱导函子。不过，对于产生相同诱导函子的不同希尔伯特双模，存在一种不变结构。若将由 $\mathcal{E}$上的左/右作用确定的 $\mathfrak{A}$和（ $\mathfrak{B}$的相反代数）的表示分别记为 $\pi^{\mathcal{E}}_{\mathfrak{A}}$ 和 $\pi^{\mathcal{E}}_{\mathfrak{B}}$，那么诱导的希尔伯特空间表示具有一个不变量，即张量积表示的核 $\ker(\pi^{\mathcal{E}}_{\mathfrak{A}} \otimes \pi^{\mathcal{E}}_{\mathfrak{B}})$；下文将其称为与 $\mathcal{E}$相关的张量积核。称张量积核为诱导表示的不变量，是指：尽管不同的希尔伯特双模可能产生从 $\mathfrak{B}$ 的希尔伯特空间表示到 $\mathfrak{A}$的希尔伯特空间表示的等价函子，但在这种情况下，这些希尔伯特双模必定具有相同的张量积核。因此，我们将共享同一张量积核的希尔伯特双模的等价类定义为范畴中的态射。

特别地，李群胚 G 与 H 之间的正则双丛 $G \rightarrowtail M \leftarrowtail H$ 可以构造出一个希尔伯特双模 $C^*(G) \rightarrowtail \mathcal{E}_M \leftarrowtail C^*(H)$，其中 $\mathcal{E}_M$ 是关于下文定义的内积对 $C_c^\infty(M)$ 进行完备化得到的。为定义内积和群作用，首先注意到，G 上的左 Haar 系统 $(\nu^t_{x_0})_{x_0 \in G_0}$ 在 M 上诱导出一族测度 $(\mu_{y_0})_{y_0 \in H_0}$，每个测度的支集都包含于 $s_M^{-1}(y_0)$ 中，使得对于每个 $f \in C_c^\infty(M)$ [8],

1. H_0 上的函数 $y_0 \mapsto \int d\mu_{y_0}(q)\ f(q)$ 是光滑的；2. $\int d\mu_{t_H(y)}(q)\ f(qy) = \int d\mu_{s_H(y)}(q) f(q)$；以及

3. 对任意 $y_0 \in H_0$和 $q_0 \in s_M^{-1}(y_0)$， $\int d\mu_{y_0}(q)\ f(q) = \int d\nu^t_{t_M(q_0)}(x)\ f(x^{-1}q_0)$。

我们进一步将 H 上的左 Haar 系统记为 $(\lambda^t_{y_0})_{y_0\in H_0}$。利用 M上的测度 $(\mu_{y_0})_{y_0\in H_0}$，我们可以定义取值于 $C^*(H)$ 的内积

$$\langle\varphi,\psi\rangle_{\mathcal{E}_M}(y) = \int_{s_M^{-1}(t_H(y))} d\mu_{t_H(y))}(q)\ \overline{\varphi(q)}\psi(qy) \tag{32}$$

对于 $\varphi,\ \psi \in C_c^\infty(M)$ 和 $y \in H$。则 $\mathcal{E}_M$定义为 $C_c^\infty(M)$ 关于范数 $\|\varphi\|^2_{\mathcal{E}_M} = \|\langle\varphi,\varphi\rangle_{\mathcal{E}_M}\|$的完备化，其中右侧的范数是 $C^*(H)$ 中的 C*-范数。左侧的 $C^*(G)$-作用和右侧的 $C^*(H)$ 作用分别对$f \in C^*(G)$ 和 $g \in C^*(H)$ 定义为

$$(f\cdot\varphi)(q) = \int_{t_G^{-1}(t_M(q))} d\nu^t_{t_M(q)}(x)\ f(x)\varphi(x^{-1}q) \tag{33}$$

$$(\varphi\cdot g)(q) = \int_{t_H^{-1}(s_M(q))} d\lambda^t_{s_M(q)}(y)\ g(y^{-1})\varphi(qy) \tag{34}$$

对所有 $\varphi \in C_c^\infty$（M）以及 $q \in M$，并通过连续性延拓至 $\mathcal{E}_M$。由此可得C^*（G）$\rightarrowtail \mathcal{E}_M \leftarrowtail C^*$（$H$）满足希尔伯特双模的定义 [8, 34, 42]。

我们定义如下 C*-代数范畴，并将其视为量子模型范畴。

定义 7. 我们将由以下对象构成的范畴记为 $\mathbf{LC}^*$：

• 对象：$C^*(G)$ 与源单连通李群胚 G 相关联的李群胚C*-代数，其李代数丛 $\mathfrak{G}^*$ 均可积。

• 态射：希尔伯特双模的等价类 $C^*(G) \rightarrowtail \mathcal{E}_M \leftarrowtail C^*(H)$ 与可积正则双丛相关联 M，这些双丛位于李群胚之间，并通过方程 *(32)-(34)* 的构造得到相同的张量积核 $\ker(\pi^{\mathcal{E}}_{\mathfrak{A}} \otimes \pi^{\mathcal{E}}_{\mathfrak{B}})$。

可以验证，$\mathbf{LC}^*$ 确实构成一个范畴；希尔伯特双模张量积的性质保证了态射 [17, 18] 具有适当的复合律。同样需要注意，我们的定义与 Landsman 给出的定义不同：我们考虑的是确定相同张量积核的希尔伯特双模等价类，而不是希尔伯特双模本身的酉等价类。

3.2 态射的量子化与经典极限

量子化和经典极限已经提供了将**LPoisson** 中的对象与$\mathbf{LC}^*$中的对象关联起来的方法。特别是，与李群胚 G相关联的李代数丛 $\mathfrak{G}^*$ 对偶在**LPoisson**中，其在式（9）定义的严格量子化给出了李群胚 C*-代数 C^*（G），它属于$\mathbf{LC}^*$。另一方面，可以通过生成一个一致连续丛，对 C^*（G）中对象取经典极限；该丛$\mathbf{LC}^*$ 以底空间为底，丛的取值由 $\mathfrak{A}^G$ 在（$\hbar$）中的取值构成，其中$0,1]$ 来自这一严格量子化。（Landsman [13] 证明，该一致连续丛的连续截面代数就是底空间 G上的正规群胚的群胚 C*-代数。）令 K_0^G

令 $\mathfrak{A}^G$ 为 $\hbar = 0$ 处范数趋于零的16式（16）所示的 $\mathfrak{A}^G$ 中截面的理想。Steeger 和 Feintzeig 的构造 [15] 随后给出了经典极限 $\mathfrak{A}^G/K_0^G$，他们证明该经典极限在同构意义下是唯一的。这意味着 $\mathfrak{A}^G/K_0^G \cong C_0$（$\mathfrak{G}^*$），通过盖尔范德对偶性得到 $\mathfrak{G}^*$ 中的泊松流形**LPoisson**。

我们将这些对应记为

$$Q : \mathfrak{G}^* \mapsto C^*(G) \tag{35}$$
$$L : C^*(G) \mapsto \mathfrak{G}^*. \tag{36}$$

映射 Q 表示将**LPoisson** 中的对象量子化，从而得到**LC***中的对象。映射 L 表示取 **LC*** 中对象的经典极限，从而得到**LPoisson**中的对象。

我们将把映射 Q 与 L 分别理解为函子在相应范畴的对象上的作用。为使每个函子的定义完备，我们必须具体说明 Q 与 L 各自在态射上的行为。Landsman [3, 8]（另见 [37]）通过如下对应，具体定义了 Q 在**LPoisson**的态射上的作用

$$Q : [\mathfrak{G}^* \leftarrow T^*M \rightarrow \mathfrak{H}^*] \mapsto [C^*(G) \rightarrowtail \mathcal{E}_M \leftarrowtail C^*(H)] \tag{37}$$

如下事实，即 Q 是良定义的，可由我们下面的命题13 得出；该命题表明，若两个辛对偶对 T^*M与 T^*M'确定同一个拉格朗日关系，则希尔伯特双模 $\mathcal{E}_M$ 与 $\mathcal{E}_{M'}$ 必具有相同的张量积核。Landsman证明， Q 通过**LPoisson**中辛对偶对的张量积以及**LC***中希尔伯特双模的内张量积，在辛对偶对同构与希尔伯特双模酉等价的意义下保持态射复合。Landsman的结果保证 Q确实是一个函子。

虽然态射的量子化针对的是**LPoisson** 中的对象，而非一般的辛对偶对，但 Feintzeig 和 Steeger [4]构造的态射的经典极限适用于一大类希尔伯特双模；我们将看到，**LC*** 中的态射是其中的特例。他们考虑的情形不仅是在 $\hbar \in$ 的某个特定取值处拥有纤维 C*-代数（$0, 1], $），还拥有两个由量子化映射（$\mathcal{Q}_\hbar$）$_{\hbar\in(0,1]}$ 和（$\mathcal{Q}'_\hbar$）$_{\hbar\in(0,1]}$生成的完备一致连续 C*-代数丛 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}'$ 。在一定条件下，固定取值处纤维 $\mathfrak{A}_\hbar$ 和 $\mathfrak{A}'_\hbar$ 之间的希尔伯特双模 $\mathcal{E}_\hbar$ ，可通过映射 $\mathcal{Q}$ 和 $\mathcal{Q}'$在 $\hbar \in$ （$0, 1]$ ）的不同取值之间进行转换，从而得到连续截面代数 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}'$ 之间的希尔伯特双模$\mathcal{E}$ 。随后便可用希尔伯特双模$\mathfrak{A} \rightarrowtail \mathcal{E} \leftarrowtail \mathfrak{A}'$ 按如下方式构造经典极限。

设 $K_0 = \{a \in \mathfrak{A} \mid \lim_{\hbar\to 0}\|\phi_\hbar(a)\| = 0\}$ 和 $K'_0 = \{b \in \mathfrak{A}' \mid \lim_{\hbar\to 0}\|\phi_\hbar(b)\| = 0\}$。回顾一下，经典极限代数为 $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}/K_0$ 和 $\mathfrak{A}'_0 = \mathfrak{A}'/K'_0$。我们称希尔伯特双模 $\mathcal{E}$ 在 $\hbar = 0$ 处是强非退化的，如果 $K_0 \cdot \mathcal{E} \subseteq \mathcal{E} \cdot K'_0$。Feintzeig 和 Steeger [4] 证明，如果 $\mathcal{E}$ 在 $\hbar = 0$ 处强非退化，那么

$$\mathfrak{A}_0 \rightarrowtail \mathcal{E}_0 \leftarrowtail \mathfrak{A}'_0 \tag{38}$$

构成 $\hbar = 0$ 处经典极限纤维 C*-代数 $\mathfrak{A}_0$ 和 $\mathfrak{A}'_0$ 之间的希尔伯特双模，其中间空间为 $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}/\mathcal{E} \cdot K'_0$。他们将希尔伯特双模 $\mathcal{E}_0$ 称为 $\mathcal{E}$ 的希尔伯特经典极限。

于是可以利用对偶性，从希尔伯特经典极限构造一个辛对偶对 $\mathcal{E}_0$。特别地，左 $\mathfrak{A}_0$作用和右 $\mathfrak{A}_0$作用各自给出表示 π_0，分别作用于 $\mathfrak{A}_0$ 和 π'_0（$\mathfrak{A}'_0$ 的反代数）上，并将其视为 $\mathcal{E}_0$上的有界线性算子。Feintzeig 和 Steeger [4] 考虑 C*-代数

$$\mathfrak{B} = (\mathfrak{A}_0 \otimes \mathfrak{A}'_0)/\ker(\pi_0 \otimes \pi'_0), \tag{39}$$

并证明，在某些条件下，对于辛流形 S，$\mathfrak{B} \cong C_0(S)$。此外，若 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A}'$ 由严格量子化生成，则对于泊松流形 P和 P'，有 $\mathfrak{A}_0 \cong C_0(P)$且$\mathfrak{A}'_0 \cong C_0(P')$。在这种情况下，Feintzeig 和 Steeger [4] 的结果表明

$$P \longleftarrow S \longrightarrow P' \tag{40}$$

是一个辛对偶对，他们将其称为辛经典极限。值得注意的是，Feintzeig 和 Steeger [4] 证明，将 $\mathcal{E}$ 分别关联到希尔伯特经典极限 $\mathcal{E}_0$ 和辛经典极限 S，这一对应通过相应的张量积运算保持希尔伯特双模的复合与辛对偶对的复合，因此该对应具有函子性。

现在我们回到本文关注的情形：我们将李群胚 G 和 H 的量子化 $(\mathcal{Q}^G_\hbar)_{\hbar\in(0,1]}$ 和 $(\mathcal{Q}^H_\hbar)_{\hbar\in(0,1]}$ 视为生成一致连续丛，其一致连续截面所成的 C*-代数分别为 $\mathfrak{A}^G$ 和 $\mathfrak{A}^H$（即正规群胚 C*-代数）。在下一节中，我们将证明，$\mathbf{LC}^*$ 中的每个希尔伯特双模 $C^*(G) \rightarrowtail \mathcal{E}_M \leftarrowtail C^*(H)$ 都可以规范地（并且函子性地）提升为一个希尔伯特双模

$$\mathfrak{A}^G \rightarrowtail \underline{\mathcal{E}}_M \leftarrowtail \mathfrak{A}^H \tag{41}$$

连接这些一致连续截面所成的 C*-代数。由此，

$$K^G_0 = \left\{a \in \mathfrak{A}^G \mid \lim_{\hbar\to 0}\|a(\hbar)\| = 0\right\} \quad \text{and} \quad K^H_0 = \left\{b \in \mathfrak{A}^H \mid \lim_{\hbar\to 0}\|b(\hbar)\| = 0\right\}, \tag{42}$$

Feintzeig 和 Steeger 的构造 [4] 随即给出希尔伯特经典极限

$$\mathfrak{A}^G_0 \rightarrowtail (\mathcal{E}_M)_0 \leftarrowtail \mathfrak{A}^H_0 \tag{43}$$

其中间空间为 $(\mathcal{E}_M)_0 = \mathcal{E}_M/\mathcal{E}_M \cdot \underline{K}^H_0$，并在 $\hbar = 0$ 处具有阿贝尔C*代数$\mathfrak{A}^G_0 \cong C_0(\mathfrak{G}^*)$ 和 $\mathfrak{A}^H_0 \cong C_0(\mathfrak{H}^*)$ 的作用。与之前一样，$(\underline{\mathcal{E}_M})_0$ 上的左 $\mathfrak{A}^G_0$ 作用和右$\mathfrak{A}^H_0$作用产生了 $\mathfrak{A}^G_0$ 的表示 π^G_0 以及（反向的）$\mathfrak{A}^H_0$ 的表示 π^H_0，它们都是有界线性算子。这使我们可以考虑 C*代数

$$\mathfrak{B}_M = (\mathfrak{A}^G_0 \otimes \mathfrak{A}^H_0)/\ker(\pi^G_0 \otimes \pi^H_0) \tag{44}$$

由于 $\mathfrak{A}_0^G$和 $\mathfrak{A}_0^H$都是阿贝尔的，因此 $\mathfrak{B}_M$也是阿贝尔的。盖尔范德对偶性于是推出 $\mathfrak{B}_M \cong C_0(S_M)$ 对应于一个拓扑空间 S_M，它同时具有泊松流形结构。Feintzeig 和 Steeger [4] 讨论了这样一种特殊情形： S_M 本身已是一个辛流形。然而，在本文的设定中， S_M 可能不具有辛形式。相反，我们将直接证明， S_M 是由一个辛对偶对等价类确定的拉格朗日关系。因此，对于本文设定中的群胚结构，我们得到了一个拉格朗日关系，并可将其理解为 $\mathcal{E}_M$的经典极限。

于是，我们可以通过如下对应来定义 L 在$\mathbf{LC}^*$ 中对态射的作用

$$L : [C^*(G) \rightarrowtail \mathcal{E}_M \twoheadleftarrow C^*(H)] \mapsto [S_M], \tag{45}$$

其中， $[S_M]$ 表示确定拉格朗日关系 S_M 的辛对偶对的等价类。Feintzeig 和 Steeger [4] 证明，辛经典极限在态射复合下保持复合性：在 $\mathbf{LC}^*$ 中，希尔伯特双模的内张量积对应于 LPoisson 中辛对偶对的张量积，其结果在希尔伯特双模的酉等价以及辛对偶对的同构意义下成立。事实上，这保证了 L 在我们的范畴上是良定义的——为说明这一点，假设两个希尔伯特双模 $C^*(G) \rightarrowtail \mathcal{E}_M \twoheadleftarrow C^*(H)$ 和 $C^*(G) \rightarrowtail \mathcal{E}_{M'} \twoheadleftarrow C^*(H)$ 确定了等价的诱导函子。那么， $\mathcal{E}_M$ 和 $\mathcal{E}_{M'}$ 必须具有相同的张量积核。直接检查式（44）中的构造可知， $L(\mathcal{E}_M) = L(\mathcal{E}_{M'})$，因为它们确定了相同的拉格朗日关系。因此， L 是良定义的，而 Feintzeig 和 Steeger [4] 的结果保证了 L 是一个函子。

如此指定函子 Q 和 L 后，本文余下部分将致力于：(i) 证明 L 确实具有刚才所述的性质；(ii) 证明Q 和 L 构成范畴等价。确立范畴等价的主要结果要求证明 Q 和 L几乎互为逆映射，即 $Q \circ L$和 $L \circ Q$与恒等函子自然同构。归根结底，问题的关键在于证明：只要 $Q([T^*M]) = [\mathcal{E}_M]$且 $[S_M] = L([\mathcal{E}_M])$，就必然有 $S_M \cong (j_G, j_H)[T^*M]$。本文余下部分将证明这一主要结果，从而确立**LPoisson** 与$\mathbf{LC}^*$之间存在范畴等价。

4 范畴等价

4.1 连续丛之间的双模

回顾一下，我们将李群胚 G 和 H 的量子化 $(\mathcal{Q}_\hbar^G)_{\hbar\in(0,1]}$ 和 $(\mathcal{Q}_\hbar^H)_{\hbar\in(0,1]}$ 视为生成一致连续丛，其截面 C*-代数分别为 $\mathfrak{A}^G$和 $\mathfrak{A}^H$。本节将根据$\mathbf{LC}^*$中的态射 $C^*(G) \rightarrowtail \mathcal{E}_M \twoheadleftarrow C^*(H)$，构造连续截面代数 $\mathfrak{A}^G$ 和 $\mathfrak{A}^H$ 之间的希尔伯特双模（记作$\mathcal{E}_M$）；该双模可理解为固定取值 $\hbar \in (0,1]$处纤维 C*-代数$\mathfrak{A}_\hbar^G = C^*(G)$与 $\mathfrak{A}_\hbar^H = C^*(H)$之间的希尔伯特双模。

为此，我们考虑空间 $(0,1] \times M$，对于流形 M，它充当双丛 $G \rightarrowtail M \twoheadleftarrow H$的中间空间。仿照 $\mathcal{E}_M$在方程（32）之后的构造，我们从向量空间 $C^\infty((0,1] \times M)$ 开始。我们将把

将元素 $\varphi \in C^\infty((0,1]\times M)$ 理解为对应于映射 $(0,1] \to C^\infty(M)$，其中$\hbar \mapsto \varphi_\hbar(\cdot) = \varphi(\hbar,\cdot)$。我们定义子空间

$$\widehat{\mathcal{E}}_M = \left\{ \underline{\varphi} \in C^\infty((0,1]\times M) \;\middle|\; \text{for each } \hbar \in (0,1],\ \underline{\varphi}_\hbar \in C_c^\infty(M) \right\} \tag{46}$$

我们将看到，对 $\mathcal{E}_M$ 的一个子空间进行完备化，将定义希尔伯特双模 $\mathcal{E}_M$ 的中间空间。

类似地请注意，由于 $\mathfrak{A}^G$ 中的连续截面是映射 $(0,1] \to C^*(G)$，我们将把元素 $a \in \mathfrak{A}^G$ 理解为映射 $(0,1]\times G \to \mathbb{C}$。事实上，将 $\mathfrak{A}^G$ 视为 Landsman [13]，中所述的 G 的正规群胚，可以看出 $\mathfrak{A}^G$ 是 $C^\infty((0,1]\times G)$ 的一个子空间的适当完备化，其中采用了恰当的光滑流形结构。类似地，由于 $\mathfrak{A}^H$ 中的连续截面是映射 $(0,1] \to C^*(H)$，我们将把元素 $b \in \mathfrak{A}^H$ 理解为映射 $(0,1]\times H \to \mathbb{C}$，因为 $\mathfrak{A}^H$ 也是 $C^\infty((0,1]\times H)$ 的一个子空间的适当完备化。为简化记号，我们将用 $a_\hbar$ 表示 $a(\hbar)$，用 $b_\hbar$ 表示 $b(\hbar)$。

在 $\mathcal{E}_M$ 上按如下方式定义一个双线性映射

$$\langle \underline{\varphi}, \underline{\psi} \rangle \underline{\mathcal{E}}_M(\hbar, y) = \langle \underline{\varphi}_\hbar, \underline{\psi}_\hbar \rangle \mathcal{E}_M(y) = \int_{s_M^{-1}(t_H(y))} d\mu_{t_H(y)}(q)\ \overline{\underline{\varphi}(\hbar,q)}\underline{\psi}(\hbar, qy) \tag{47}$$

对所有 $\varphi,\ \psi \in \mathcal{E}_M$、$\hbar \in (0,1]$, 以及 $y \in H$。然后按如下方式定义子空间 $\widetilde{\mathcal{E}}_M \subseteq \widehat{\mathcal{E}}_M$

$$\widetilde{\mathcal{E}}_M = \left\{ \underline{\varphi} \in \widehat{\mathcal{E}}_M \;\middle|\; \hbar \mapsto \underline{\varphi}_\hbar \text{ is uniformly continuous with respect to } \|\cdot\|_{\mathcal{E}_M} \right\}. \tag{48}$$

显然，$\mathcal{E}_M$ 是一个向量空间。于是 $\mathcal{E}_M$ 定义为 $\mathcal{E}_M$ 相对于范数 $\|\varphi\|^2_{\mathcal{E}_M} = \|\langle \varphi,\ \varphi\rangle_{\mathcal{E}_M}\|$的完备化。

该向量空间 $\mathcal{E}_M$ 将作为连续截面代数之间的希尔伯特双模的中间空间。对 $a \in \mathfrak{A}^G$ 和 $b \in \mathfrak{A}^H$，$\mathcal{E}_M$上的左 $\mathfrak{A}^G$-作用与右 $\mathfrak{A}^H$-作用由如下给出

$$(a \cdot \underline{\varphi})(\hbar, q) = (a_\hbar \cdot \underline{\varphi}_\hbar)(q) = \int_{t_G^{-1}(t_M(q))} d\nu^t_{t_M(q)}(x)\ a(\hbar, x)\underline{\varphi}(\hbar, x^{-1}q) \tag{49}$$

$$(\underline{\varphi} \cdot b)(\hbar, q) = (\underline{\varphi}_\hbar \cdot b_\hbar)(q) = \int_{t_H^{-1}(s_M(q))} d\lambda^t_{s_M(q)}(y)\ b(\hbar, y^{-1})\underline{\varphi}(\hbar, qy) \tag{50}$$

对所有 $\varphi \in \mathcal{E}_M$、$q \in M$和 $\hbar \in (0,1]$,通过连续性延拓到 $\mathcal{E}_M$。

现在我们着手证明 $\mathfrak{A}^G \rightarrowtail \mathcal{E}_M \leftarrowtail \mathfrak{A}^H$ 确实是一个希尔伯特双模。唯一必须检验的性质是：对所有 $\varphi,\ \psi \in \mathcal{E}_M$，均有$\langle \varphi,\ \psi\rangle_{\mathcal{E}_M} \in \mathfrak{A}^H$，以确保 $\langle \cdot,\ \cdot\rangle_{\mathcal{E}_M}$是一个 $\mathfrak{A}^H$ 值内积。我们将需要一条关于内积 $\langle \cdot,\ \cdot\rangle_{\mathcal{E}_M}$的预备引理。

引理 1. 对于任意 $\varphi,\ \psi \in \mathcal{E}_M$，映射 $\hbar \mapsto \langle \varphi_\hbar, \psi_\hbar\rangle_{\mathcal{E}_M}$关于 $C^*(H)$上的范数是一致连续的。

证明. 假设 $\epsilon > 0$。由于 $\hbar \mapsto \varphi_\hbar$ 和 $\hbar \mapsto \psi_\hbar$ 是一致连续的，因此存在 $\delta_\varphi > 0$ 和 $\delta_\psi > 0$，使得对于任意 $\hbar, \hbar' \in (0,1]$ 且满足 $|\hbar - \hbar'| < \epsilon$,

$$\|\underline{\varphi}_\hbar - \underline{\varphi}_{\hbar'}\|_{\mathcal{E}_M} < \delta_\varphi \tag{51}$$

$$\|\underline{\psi}_\hbar - \underline{\psi}_{\hbar'}\|_{\mathcal{E}_M} < \delta_\psi. \tag{52}$$

我们定义

$$\delta = \delta_\psi \cdot \sup_{\hbar\in(0,1]} \|\underline{\varphi}_\hbar\|_{\mathcal{E}_M} + \delta_\varphi \cdot \sup_{\hbar\in(0,1]} \|\underline{\psi}_\hbar\|_{\mathcal{E}_M}. \tag{53}$$

则对任意 $\hbar$, $\hbar' \in (0,1]$ 其中 $|\hbar - \hbar'| < \epsilon$，希尔伯特双模的柯西-施瓦茨不等式 [25,引理 2。5] 蕴含

$$\|\langle\underline{\varphi}_\hbar, \underline{\psi}_\hbar\rangle_{\mathcal{E}_M} - \langle\underline{\varphi}_{\hbar'}, \underline{\psi}_{\hbar'}\rangle_{\mathcal{E}_M}\| = \|\langle\underline{\varphi}_\hbar, \underline{\psi}_\hbar\rangle_{\mathcal{E}_M} - \langle\underline{\varphi}_\hbar, \underline{\psi}_{\hbar'}\rangle_{\mathcal{E}_M} + \langle\underline{\varphi}_\hbar, \underline{\psi}_{\hbar'}\rangle_{\mathcal{E}_M} - \langle\underline{\varphi}_{\hbar'}, \underline{\psi}_{\hbar'}\rangle_{\mathcal{E}_M}\| \tag{54}$$

$$\leq \|\langle\underline{\varphi}_\hbar\ \underline{\psi}_\hbar - \underline{\psi}_{\hbar'}\rangle_{\mathcal{E}_M}\| + \|\langle\underline{\varphi}_\hbar - \underline{\varphi}_{\hbar'}, \underline{\psi}_\hbar\rangle_{\mathcal{E}_M}\| \tag{55}$$

$$\leq \|\underline{\varphi}_\hbar\|_{\mathcal{E}_M} \cdot \|\underline{\psi}_\hbar - \underline{\psi}_{\hbar'}\|_{\mathcal{E}_M} + \|\underline{\varphi}_\hbar - \underline{\varphi}_{\hbar'}\|_{\mathcal{E}_M} \cdot \|\underline{\psi}_{\hbar'}\|_{\mathcal{E}_M} \tag{56}$$

$$< \delta. \tag{57}$$

□

接下来，为了比较内积 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\mathcal{E}_M}$ 与 $\mathfrak{A}^H$ 中的连续截面，我们还需要一些关于生成集 $\tilde{\mathfrak{A}}^H$ 的进一步结果；该生成集（见式（12）附近的讨论）被定义为形如下式的截面之逐点乘积与截面之和所构成的*-代数

$$[\hbar \mapsto \mathcal{Q}^H_\hbar(g)] \tag{58}$$

对于 $g \in C^\infty_{PW}(\mathfrak{H}^*)$。

引理 2. 设 $g \in C^\infty_{PW}(\mathfrak{H}^*)$。映射 $\hbar \mapsto \pi^H(\mathcal{Q}_\hbar(g))$ 对 $\hbar \in$ 是范数连续的$(0,1]$, 即,

$$\lim_{\hbar\to\hbar'} \|\pi^H(\mathcal{Q}^G_\hbar(g) - \pi^H(\mathcal{Q}^H_{\hbar'}(g))\| = 0. \tag{59}$$

证明。 映射 $\hbar \mapsto K^{\mathcal{Q}^H_\hbar(g)}$ 给出希尔伯特–施密特核（式（5））， 显然在 $H\times H$上给出一个逐点连续的函数族。 $L^2(H \times H)$ 中的控制收敛定理蕴含

$$\lim_{\hbar\to\hbar'} \|\pi^H(\mathcal{Q}_\hbar(g)) - \pi^H(\mathcal{Q}^G_{\hbar'}(g))\|_{HS} = 0, \tag{60}$$

其中$\|F\|_{HS} = \|K_F\|_{L^2(H\times H)}$表示任意希尔伯特-施密特算子 F的核 K_F的希尔伯特–施密特范数。现在，由 $\|F\| \leq \|F\|_{HS}$这一事实即可得出结论。 □

引理 3。 设 $g_1, ..., g_k \in C^\infty_{PW}(\mathfrak{H}^*)$。映射 $\hbar \mapsto \pi^H(\mathcal{Q}^H_\hbar(g_1) \cdot ... \cdot \mathcal{Q}^G_\hbar(g_k))$ 是范数连续的。

证明。通过归纳法。前一个命题给出了基础情形。假设该条件对 $g_1, ..., g_{k-1}$ 成立。然后利用三角不等式，很容易得到

$$\lim_{\hbar\to\hbar'} \|\pi^H(\mathcal{Q}^H_\hbar(g_1)\cdot ...\cdot \mathcal{Q}^H_\hbar(g_k)) - \pi^H(\mathcal{Q}^H_{\hbar'}(g_1)\cdot ...\cdot \mathcal{Q}^H_{\hbar'}(g_k))\| \tag{61}$$

$$\leq \lim_{\hbar\to\hbar'} \|\pi^H(\mathcal{Q}^H_\hbar(g_1)\cdot ...\cdot \mathcal{Q}^H_\hbar(g_{k-1})) - \pi^H(\mathcal{Q}^H_{\hbar'}(g_1)\cdot ...\cdot \mathcal{Q}^H_{\hbar'}(g_{k-1}))\| \cdot \|\pi^H(\mathcal{Q}_{\hbar'}(g_k))\| \tag{62}$$

$$+ \|\pi^H(\mathcal{Q}^H_\hbar(g_1)\cdot ...\cdot \mathcal{Q}^H_\hbar(g_{k-1}))\| \cdot \|\pi^H(\mathcal{Q}^G_\hbar(g_k)) - \pi^H(\mathcal{Q}^G_{\hbar'}(G_k))\| \tag{63}$$

$$= 0. \tag{64}$$

□

类似的陈述显然对 G 和 H 同样成立。现在我们可以利用这些初步引理来证明 $\mathcal{E}_M$ 是希尔伯特双模的中间空间。

命题 4. 对于任意 $\varphi, \psi \in \widetilde{\mathcal{E}}_M$, $\langle\varphi,\psi\rangle_{\mathcal{E}_M} \in \mathfrak{A}^H$.

证明。回顾式（13）可知， $b \in \mathfrak{A}^H$ 当且仅当对每个 $\tilde{b} \in \tilde{\mathfrak{A}}^H$，映射 $\hbar \mapsto \|b_\hbar - b_\hbar\|$ 对所有 $\hbar \in [0,1]$ 都连续。或者说，这等价于 $\hbar \mapsto \|b_\hbar - b_\hbar\|$ 对所有 $\hbar \in (0,1]$。引理 3 意味着，对每个 $\tilde{b} \in \tilde{\mathfrak{A}}^H$ 以及任意 $\epsilon > 0$，都存在一个 δ_b 使得如果 $|\hbar - \hbar'| < \epsilon$，那么

$$\|\tilde{b}_\hbar - \tilde{b}_{\hbar'}\| < \delta_b. \tag{65}$$

同样，引理 1 意味着存在一个 δ，使得如果 $|\hbar - \hbar'| < \epsilon$，那么

$$\|\langle\underline{\varphi}_\hbar, \underline{\psi}_\hbar\rangle_{\mathcal{E}_M} - \langle\underline{\varphi}_{\hbar'}, \underline{\psi}_{\hbar'}\rangle_{\mathcal{E}_M}\| < \delta \tag{66}$$

因此，由反三角不等式可知，只要 $|\hbar - \hbar'| < \epsilon$

$$\left|\|\langle\underline{\varphi}_\hbar, \underline{\psi}_\hbar\rangle_{\mathcal{E}_M} - \tilde{b}_\hbar\| - \|\langle\underline{\varphi}_{\hbar'}, \underline{\psi}_{\hbar'}\rangle_{\mathcal{E}_M} - \tilde{b}_{\hbar'}\|\right| \leq \|\langle\underline{\varphi}_\hbar, \underline{\psi}_\hbar\rangle_{\mathcal{E}_M} - \langle\underline{\varphi}_{\hbar'}, \underline{\psi}_{\hbar'}\rangle_{\mathcal{E}_M}\| + \|\tilde{b}_\hbar - \tilde{b}_{\hbar'}\| \tag{67}$$

$$< \delta + \delta_b. \tag{68}$$

这就证明了映射 $\hbar \mapsto \|\langle\varphi_\hbar, \psi_\hbar\rangle_{\mathcal{E}_M} - b_\hbar\|$ 对于任意 $\tilde{b} \in \tilde{\mathfrak{A}}^H$，根据式（13）中的定义可知 $\langle\varphi, \psi\rangle_{\mathcal{E}_M} \in \mathfrak{A}^H$。 □

推论 5。 $\mathfrak{A}^G \rightarrowtail \mathcal{E}_M \leftarrowtail \mathfrak{A}^H$ 是一个希尔伯特双模。

我们称希尔伯特双模 $\mathcal{E}_M$ 为 $\underline{\mathcal{E}_M}$的提升 。

为结束本节，我们将通过**LC***中的张量积运算，证明从 $\mathcal{E}_M$ 构造 $\mathcal{E}_M$ 的过程与希尔伯特双模的复合相容。设

$$C^*(G) \rightarrowtail \mathcal{E}_M \leftarrowtail C^*(H) \qquad \text{and} \qquad C^*(H) \rightarrowtail \mathcal{E}_N \leftarrowtail C^*(G'). \tag{69}$$

是**LC*** 中李群胚 $G, H,$ 之间的两个希尔伯特双模，且 G' 对应于双丛

$$G \rightarrowtail M \leftarrowtail H \qquad \text{and} \qquad H \rightarrowtail N \leftarrowtail G'. \tag{70}$$

Landsman [8] 已证明，张量积$\mathcal{E}_M \otimes_{C^*(H)} \mathcal{E}_N$ 与 $\mathcal{E}_{M\circledast_H N}$酉等价。因此，可以采用推导命题5 的过程，将$\mathcal{E}_M \otimes_{C^*(H)} \mathcal{E}_N$ 的提升定义为 $\mathcal{E}_{M\circledast_H N}$的提升。

命题 6. 希尔伯特双模 $\mathcal{E}_M \otimes_{\mathfrak{A}^H} \mathcal{E}_N$ 与$\underline{\mathcal{E}_M} \otimes_{C^*(H)} \underline{\mathcal{E}_N}$的提升酉等价。

证明。 我们需要证明 $\mathcal{E}_M \otimes_{\mathfrak{A}^H} \mathcal{E}_N \cong \mathcal{E}_{M\circledast_H N}$，其中后者按定义是 $\mathcal{E}_{M\circledast_H N}$的提升。 Landsman [8, 在等式 3.8，第 107] 页，明确给出了一个酉等价$U : \mathcal{E}_M \otimes_{C^*(H)} \mathcal{E}_N \to \mathcal{E}_{M\circledast_H N}$。现在，定义$U : \mathcal{E}_M \otimes_{\mathfrak{A}^H} \mathcal{E}_N \to \mathcal{E}_{M\circledast_H N}$ 为

$$(\underline{U\varphi})_\hbar = U(\underline{\varphi_\hbar}) \tag{71}$$

对于$\underline{\varphi} \in \underline{\mathcal{E}_M} \otimes_{\mathfrak{A}^H} \underline{\mathcal{E}_N}$ 和 $\hbar \in (0, 1]$。容易看出， U 具有适当的值域，并且也作为酉等价。 □

最后，我们指出，可以验证该对应 $\mathcal{E}_M \mapsto \mathcal{E}_M$ 保持恒等态射，因而具有函子性。

为了取希尔伯特双模 $\mathcal{E}_M$的经典极限，我们必须验证它在 $\hbar = 0$ 处在Feintzeig 和 Steeger [4]的意义下是强非退化的。

命题7. 定义

$$K_0^G = \left\{ a \in \mathfrak{A}^G \mid \lim_{\hbar\to 0} ||a_\hbar|| = 0 \right\} \qquad K_0^H = \left\{ b \in \mathfrak{A}^H \mid \lim_{\hbar\to 0} ||b_\hbar|| = 0 \right\}. \tag{72}$$

则 $\overline{K_0^G \cdot \underline{\mathcal{E}_M}} \subseteq \underline{\mathcal{E}_M} \cdot \overline{K_0^H}$。

证明。 令 $\underline{\psi} \in \overline{K_0^G \cdot \underline{\mathcal{E}_M}}$。那么存在 $\overset{n}{a} \in K_0^G$，使得 $\lim_{\hbar\to 0} ||\overset{n}{a}_\hbar|| = 0$，且 $\overset{n}{\underline{\varphi}} \in \underline{\mathcal{E}_M}$ 满足 $\psi = \sum_n \overset{n}{a} \cdot \overset{n}{\varphi}$。注意， $\mathfrak{A}^H$ 具有一个序列近似单位元 $\overset{m}{b} \in \mathfrak{A}^H$:$_m$例如，可以取一列函数 $b(\overline{\hbar}, y) \in C^{\overline{\infty}}((0, 1] \times H)$，使得对每个$_m\hbar \in (0, 1]$， $b(\hbar, y)$在 H中当 $m \to \infty$时趋近于 $y = e$附近的δ函数（

这里的 $m \to \infty$ 极限按任意适当的分布意义理解）。于是可知，对于任意 $\varphi \in \mathcal{E}_M$，

$$||\underline{\varphi} - \underline{\varphi} \cdot \overset{m}{b}||_{\underline{\mathcal{E}_M}} \to 0 \tag{73}$$

如 $m \to \infty$。因此，定义 ${}_{n,}\overset{m}{b'}_{\hbar} = ||\overset{n}{a}_{\hbar}|| \cdot \overset{m}{b}_{\hbar}$，我们有 ${}_{n,}\overset{m}{b'} \in \mathfrak{A}^H$ 根据定义$_{n,m}$一致连续丛，并且显然 $\lim_{\hbar \to 0} || \ b' \ _{\hbar}|| = 0$ ，从而可得${}_{n,}\overset{m}{b'} \in K_0^H$。同样，定义 $\overset{n}{\varphi'}_{\hbar} = \left(||\overset{n}{a}_{\hbar}||^{-1} \cdot \overset{n}{a}_{\hbar} \right) \cdot \overset{n}{\varphi}$，我们有 $\overset{n}{\varphi'} \in \mathcal{E}_M$ 以及

$$\underline{\psi} = \lim_{m \to \infty} \sum_n \underline{\overset{n}{\varphi'}} \cdot \overset{n,m}{b'} . \tag{74}$$

因此， $\psi \in \underline{\mathcal{E}_M \cdot K_0^H}$ □

前一论证实际上在一般条件下确立了强非退化性，只要右作用存在适当的序列近似单位元。

综上所述，在本节中我们已证明，LC*中的每个希尔伯特双模 $\mathcal{E}_M$ 都以典范且函子性的方式提升为相应丛的一致连续截面的 C*-代数之间的希尔伯特双模 $\mathcal{E}_M$。此外，希尔伯特双模 $\mathcal{E}_M$ 是强非退化的，因此 Feintzeig 和 Steeger[4] 的构造蕴含 $\mathcal{E}_M$ 具有希尔伯特经典极限，我们将其记为 $(\mathcal{E}_M)_0$。位于 $\hbar = 0$ 处的希尔伯特双模 $C_0(\mathfrak{G}^*) \rightarrowtail (\mathcal{E}_M)_0 \leftarrowtail \overline{C_0(\mathfrak{H}^*)}$ 分别给出 $C_0(\mathfrak{G}^*)$ 与（ $C_0(\mathfrak{H}^*)$ 的相反）在 $(\mathcal{E}_M)_0$ 上的典范表示π_0^G和 π_0^H。然后我们可以仿照 Feintzeig 和 Steeger [4] ，将空间 S_M 定义为商 $(C_0(\mathfrak{G}^*) \otimes C_0(\mathfrak{H}^*))/\ker\left(\pi_0^G \otimes \pi_0^H\right)$ 的盖尔范德对偶，如式(44)所示。在我们的设定中， S_M 一般而言并非辛空间，但将会证明它同构于一个拉格朗日关系 $S_M \subseteq \mathfrak{G}^* \times \mathfrak{H}^*$。

4.2 经典对偶对的局部结构

回想一下，我们的目标是证明函子 Q 与 L构成范畴等价，这需要证明 S_M 同构于拉格朗日关系$(j_G, j_H)[T^*M]$。为了证明这一点，我们需要一些关于对偶对的局部结构的额外结果

$$\mathfrak{G}^* \leftarrow T^*M \to \mathfrak{H}^*. \tag{75}$$

在本节中，我们仍假设 T^*M 是 **LPoisson** 中的一个对偶对，它源自正则双丛 M。本节的目标是确立关于该对偶对的必要事实，以便继续讨论我们的范畴等价。

为便于查阅，我们先回顾映射 j_G 和 j_H的定义。泊松态射 $j_G\colon T^*M \to \mathfrak{G}^*$ 定义为

$$j_G(\eta_q)\Big(\frac{d}{dt}_{|t=0}\gamma(t)\Big) = -\eta_q\Big(\frac{d}{dt}_{|t=0}\big(\gamma(t)^{-1}\cdot q\big)\Big), \tag{76}$$

其中 $\eta_q \in T_q^*M$和 $\gamma\colon I \to G$是一条曲线，满足 $\gamma(0) = t_M(q)$ 且 $\gamma(t) \in t_G^{-1}(t_M(q))$，使得 $\dot{\gamma}(0) \in \tau_G^{-1}(t_M(q))$，并且对所有 $t \in I \subseteq \mathbb{R}$， $\gamma(t)^{-1}\cdot q$都有定义。同样，泊松态射 $j_H\colon T^*M \to \mathfrak{H}^*$ 定义为

$$j_H(\eta_q)\Big(\frac{d}{dt}_{|t=0}\gamma(t)\Big) = \eta_q\Big(\frac{d}{dt}_{|t=0}\big(q\cdot\gamma(t)\big)\Big), \tag{77}$$

其中 $\eta_q \in T_q^*M$和 $\gamma\colon I \to H$是一条曲线，满足 $\gamma(0) = s_M(q)$ 且 $\gamma(t) \in t_H^{-1}(s_M(q))$，使得 $\dot{\gamma}(0) \in \tau_H^{-1}(s_M(q))$，并且对所有 $t \in I \subseteq \mathbb{R}$， $q\cdot\gamma(t)$都有定义。

下文中，我们记 $\mathfrak{G}_{x_0} = \{X \in \mathfrak{G} \mid t_G(\exp^W(X)) = x_0\}$，类似地，记 $\mathfrak{H}_{y_0} = \{Y \in \mathfrak{H} \mid t_H(\exp^W(Y)) = y_0\}$。进一步注意，对每个 $q \in M$，我们都有一个映射 $(j_G)^*_{|q}\colon \mathfrak{G}_{t_M(q)} \to T_qM$，其定义为

$$(j_G)^*_{|q}(X) = -\frac{d}{dt}_{|t=0}\exp^W(tX)^{-1}\cdot q \tag{78}$$

对所有 $X \in \mathfrak{G}_{t_M(q)}$。同样，我们有一个映射 $(j_H)^*_{|q}\colon \mathfrak{H}_{s_M(q)} \to T_qM$，定义为

$$(j_H)^*_{|q}(Y) = \frac{d}{dt}_{|t=0}q\cdot\exp^W(tY) \tag{79}$$

对所有 $Y \in \mathfrak{H}_{s_M(q)}$。利用这些映射，我们定义 $j_{|q}\colon T_q^*M \to \mathfrak{G}^*_{t_M(q)} \oplus \mathfrak{H}^*_{s_M(q)}$为

$$j_{|q} = (j_G)_{|q} \oplus (j_H)_{|q}, \tag{80}$$

并且我们定义 $j^*_{|q}\colon \mathfrak{G}_{t_M(q)} \oplus \mathfrak{H}_{s_M(q)} \to T_qM$为

$$j^*_{|q} = (j_G)^*_{|q} \oplus (j_H)^*_{|q}. \tag{81}$$

综合起来，我们的定义可写为

$$j_{|q}(\eta_q)(Z) = (\eta_q)(j^*_{|q}(Z)) \tag{82}$$

对所有 $\eta_q \in T_q^*M$和 $Z \in \mathfrak{G}_{t_M(q)} \oplus \mathfrak{H}_{s_M(q)}$。

以下命题可由简单的维数计数论证得出。此处明确陈述这些命题，仅为确立我们将在下一节使用的记号。

引理 8. 存在一个线性映射 $\rho_q{:}T_qM \to \mathfrak{G}_{t_M(q)} \oplus \mathfrak{H}_{s_M(q)}$ 使得

$$j^*_{|q} \circ \rho_q(\xi_q) = \xi_q \tag{83}$$

对所有 $\xi_q \in T_qM$。

1 n证明。 选取 T_qM的一个基 ξ_q, ..., ξ_q （此处, $n = \dim M$）。对每个 $1 \le k \le n$, 选取 $Z_k \in (j^*)^{-1}_{|q}\left(\overset{k}{\xi}_q\right)$。然后对 $\xi_q = \sum_k \alpha_k \cdot \overset{k}{\xi}_q$, 定义

$$\rho_q(\xi_q) = \sum_k \alpha_k \cdot Z_k. \tag{84}$$

显然, ρ_q 按构造是线性的，并且

$$j^*_{|q} \circ \rho_q(\xi_q) = \sum_k \alpha_k \cdot j^*_{|q}(Z_k) = \sum_k \alpha_k \cdot \overset{k}{\xi}_q = \xi_q. \tag{85}$$

□

现在，固定一个满足前一引理条件的线性映射 ρ_q 的选取。注意 $T_qM = \mathrm{im}(j^*_{|q})$, 并定义 $\mathcal{I}_q = \ker(j^*_{|q})$。然后定义另一个记为$\iota_q$的映射: $\mathfrak{G}_{t_M(q)} \oplus \mathfrak{H}_{s_M(q)} \to T_qM \oplus \mathcal{I}_q$, 由

$$\iota_q(Z) = j^*_{|q}(Z) \oplus \left(Z - \rho_q \circ j^*_{|q}(Z)\right) \tag{86}$$

对所有 $Z \in \mathfrak{G}_{t_M(q)} \oplus \mathfrak{H}_{s_M(q)}$.

命题 9. 映射 ι_q是一个同构$\mathfrak{G}_{t_M(q)} \oplus \mathfrak{H}_{s_M(q)} \cong T_qM \oplus \mathcal{I}_q$。

证明。 定义映射 $\iota_q^{-1}{:}\, T_qM \oplus \mathcal{I}_q \to \mathfrak{G}_{t_M(q)} \oplus \mathfrak{H}_{s_M(q)}$ 如下

$$\iota_q^{-1}(\xi_q \oplus Z) = \rho_q(\xi_q) + Z \tag{87}$$

对 $\xi_q \in T_qM$ 和 $Z \in \mathcal{I}_q$。 那么 ι_q^{-1}确实是 ι_q 的逆映射，因为对所有 $Z \in \mathfrak{G}_{t_M(q)} \oplus \mathfrak{H}_{s_M(q)}$, 我们有

$$\begin{aligned} \iota_q^{-1} \circ \iota_q(Z) &= \rho_q \circ j^*_{|q}(Z) + Z - \rho_q \circ j^*_{|q}(Z) && (88)\\ &= Z. && (89) \end{aligned}$$

并且对所有 $\xi_q \in T_qM$ 和 $Z \in \mathcal{I}_q$, 我们有

$$\begin{aligned} \iota_q \circ \iota_q^{-1}(\xi_q \oplus Z) &= j^*_{|q}(\rho_q(\xi_q) + Z) \oplus \left(\rho_q(\xi_q) + Z - \rho_q \circ j^*_{|q}(\rho_q(\xi_q) + Z)\right) && (90)\\ &= \xi_q \oplus Z. && (91) \end{aligned}$$

□

同样地，定义对偶映射 $\iota_q^*\colon\ T_q^*M \oplus \mathcal{I}_q^* \to \mathfrak{G}_{t_M(q)}^* \oplus \mathfrak{H}_{s_M(q)}^*$ 为

$$\iota_q^*(\eta_q \oplus \Phi)(Z) = (\eta_q \oplus \Phi)(Z)) \tag{92}$$

对所有 $\eta_q \in T_q^*M$， $\Phi \in \mathcal{I}_q^*$以及 $Z \in \mathfrak{G}_{t_M(q)} \oplus \mathfrak{H}_{s_M(q)}$.

命题10. 映射 ι_q^*是一个同构 $T_q^*M \oplus \mathcal{I}_q^* \cong \mathfrak{G}_{t_M(q)}^* \oplus \mathfrak{H}_{s_M(q)}^*$。

证明. 定义映射 $(\iota_q^*)^{-1}\colon \mathfrak{G}_{t_M(q)}^* \oplus \mathfrak{H}_{s_M(q)}^* \to T_q^*M \oplus \mathcal{I}_q^*$如下

$$(\iota_q^*)^{-1}(\Phi)(\xi_q \oplus Z) = \Phi(\iota_q^{-1}(\xi_q \oplus Z)) \tag{93}$$

对于 $\Phi \in \mathfrak{G}_{t_M(q)}^* \oplus \mathfrak{H}_{s_M(q)}^*$、 $\xi_q \in T_qM$ 和 $Z \in \mathcal{I}_q$。 那么 $(\iota_q^*)^{-1}$确实是 ι_q^* 的逆映射，因为对于所有 $\eta_q \in T_q^*M$、 $\Phi \in \mathcal{I}_q^*$、 $\xi_q \in T_qM$ 和 $Z \in \mathcal{I}_q$，我们有

$$\begin{aligned}
\big((\iota_q^*)^{-1} \circ \iota_q^*\big)(\eta_q \oplus \Phi)(\xi_q \oplus Z) &= \iota_q^*(\eta_q \oplus \Phi)(\iota_q^{-1}(\xi_q \oplus Z)) && (94)\\
&= (\eta_q \oplus \Phi)(\iota_q \circ \iota_q^{-1}(\xi_q \oplus Z)) && (95)\\
&= (\eta_q \oplus \Phi)(\xi_q \oplus Z), && (96)
\end{aligned}$$

并且对所有 $\Phi \in \mathfrak{G}_{t_M(q)}^* \oplus \mathfrak{H}_{s_M(q)}^*$以及 $Z \in \mathfrak{G}_{t_M(q)} \oplus \mathfrak{H}_{s_M(q)}$，我们有

$$\begin{aligned}
\big(\iota_q^* \circ (\iota_q^*)^{-1}\big)(\Phi)(Z) &= (\iota_q^*)^{-1}(\Phi)(\iota_q(Z)) && (97)\\
&= \Phi(\iota_q^{-1} \circ \iota_q(Z)) && (98)\\
&= \Phi(Z). && (99)
\end{aligned}$$

□

命题11. 对任意 $\eta_q \in T_q^*M$，我们有

$$\iota_q^*(\eta_q \oplus 0) = j_{|q}(\eta_q). \tag{100}$$

证明。 对任意 $\eta_q \in T_q^*M$以及任意 $Z \in \mathfrak{G}_{t_M(q)} \oplus \mathfrak{H}_{s_M(q)}$，我们有

$$\begin{aligned}
\iota_q^*(\eta_q \oplus 0)(Z) &= (\eta_q \oplus 0)(\iota_q(Z)) && (101)\\
&= \eta_q(j_{|q}^*(Z)) && (102)\\
&= j_{|q}(\eta_q)(Z). && (103)
\end{aligned}$$

□

在下一节中，我们将运用这些预备知识来分析空间 T^*M和 S_M之间的关系。

4.3 经典极限的自然同构

本节将证明本文的主要结果。我们将证明 S_M 与由 T^*M确定的拉格朗日关系同构。这保证了 L定义良好，且 S_M 是辛对偶对 $L\circ Q$ ([T^*M])的等价类的典范不变量。更重要的是，该结果意味着自然同构 $L\circ Q\to 1_{\mathbf{LC}^*}$ 和 $Q\circ L\to 1_{\mathbf{LPoisson}}$的存在。

我们从一些预备知识开始。对于 $q\in M$，令 E_q 表示雅可比行列式，使得

$$\int_{t_G^{-1}(t_M(q))}\int_{t_H^{-1}(s_M(q))} d\nu^t_{t_M(q)}(x)\; d\lambda^t_{s_M(q)(y)}\; F(x,y) \tag{104}$$

$$= \int_{\mathfrak{G}_{t_M(q)}}\int_{\mathfrak{H}_{s_M(q)}} E_q(X,Y)\; d^nX\; d^mY\; F(\exp^W(X),\exp^W(Y)) \tag{105}$$

对于 $F\colon\; G\times H\to\mathbb{C}$ 在 $t_G\times t_H$ 的纤维上可积。这里， d^nX 和 d^mY是 $\mathfrak{G}_{t_M(q)}$和 $\mathfrak{H}_{s_M(q)}$上的勒贝格测度，其中 $n=\dim\; G$且 $m=\dim\; H$。

给定两个函数 $f\in\mathfrak{G}^*\to\mathbb{C}$ 和 $g\in\mathfrak{H}^*\to\mathbb{C}$，我们将使用简写 $(f\cdot g)\colon\; \mathfrak{G}^*\oplus\mathfrak{H}^*\to\mathbb{C}$ 来表示函数

$$(f\cdot g)(\theta\oplus\phi)=f(\theta)\cdot g(\phi) \tag{106}$$

对于 $\theta\in\mathfrak{G}^*$ 和 $\phi\in\mathfrak{H}^*$。

为了证明 $S_M\cong T^*M$，我们将证明 $C_0(S_M)\cong C_0(T^*M)$。回顾一下，根据式（44）中的定义，我们有 $C_0(S_M)=(\mathfrak{A}_0^G\otimes\mathfrak{A}_0^H)/\ker(\pi_0^G\otimes\pi_0^H)$。我们的首要任务是分析 $\ker(\pi_0^G\otimes\pi_0^H)$。为此，我们同样利用在$\hbar=1$ 处记为 π_1^G和 π_1^H的、 $C^*(G)$ 以及（其相反） $C^*(H)$ 在 $\mathcal{E}_M$ 上的表示，它们由希尔伯特双模的左 $C^*(G)$-作用和右 $C^*(H)$-作用给出。我们将首先刻画 $\ker(\pi_1^G\otimes\pi_1^H)$，以此作为刻画 $\ker(\pi_0^G\otimes\pi_0^H)$ 的一步。

给定 $\xi_q\in T_qM$，定义 $\beta_\hbar^{\xi_q}\colon\; C_c^\infty(\mathfrak{G}^*)\otimes C_c^\infty(\mathfrak{H}^*)\to C_c^\infty(T^*M)$，使得

$$\beta_\hbar^{\xi_q}(f\otimes g)(\eta_q) \tag{107}$$

$$= \int_{\mathcal{I}_q}\int_{\mathcal{I}_q^*} \frac{E_q\circ\iota_q^{-1}(\xi_q\oplus Z)\; d^mZd^m\Phi}{\hbar^m}\big((\kappa_G\cdot\kappa_H)\circ\iota_q^{-1}\big)(\xi_q\oplus Z) \tag{108}$$

$$\times\big((f\cdot g)\circ\iota_q^*\big)(\eta_q\oplus\Phi)e^{-i\Phi(Z)/\hbar} \tag{109}$$

对于所有 $f\in C_c^\infty(\mathfrak{G}^*)$、 $g\in C_c^\infty(\mathfrak{H}^*)$ 和 $\eta_q\in T_q^*M$。

命题 12. 对于所有 $\hbar\in(0,\;1]$、 $f\in C_c^\infty(\mathfrak{G}^*)$ 和 $g\in C_c^\infty(\mathfrak{H}^*)$，我们有

$$\big(\mathcal{Q}_\hbar^G(f)\otimes\mathcal{Q}_\hbar^H(g)\big)\in\ker(\pi_1^G\otimes\pi_1^H) \tag{110}$$

当且仅当对几乎所有的 $q\in M$、 $\xi_q\in T_qM$ 和 $\eta_q\in T_q^*M$，

$$\beta_\hbar^{\xi_q}(f\otimes g)(\eta_q)=0. \tag{111}$$

证明。对于 $\psi \in \mathcal{E}_M$，我们有

$$\Big(\big(\pi_1(\mathcal{Q}_\hbar^G(f)) \otimes \pi_1^H(\mathcal{Q}_\hbar^H(g))\big)\psi\Big)(q) = \big(\mathcal{Q}_\hbar^G(f) \cdot \psi \cdot \mathcal{Q}_\hbar^H(g)\big)(q) \tag{112}$$

$$= \int_{t_G^{-1}(t_M(q))} \int_{t_H^{-1}(s_M(q))} d\nu^t_{t_M(q)}(x)\ d\lambda^t_{s_M(q)}(y)\ \big(\mathcal{Q}_\hbar^G(f)\big)(x)\psi(x^{-1}qy)\big(\mathcal{Q}_\hbar^H(g)\big)(y^{-1}) \tag{113}$$

$$= \int_{\mathfrak{G}_{t_M(q)}} \int_{\mathfrak{H}_{s_M(q)}} \frac{E_q(X,Y)\ d^nX\ d^mY}{\hbar^{(n+m)}} \kappa_G(X)\kappa_H(Y) \tag{114}$$

$$\times\ \hat{f}(X/\hbar)\psi\big(\exp^W(X)^{-1} \cdot q \cdot \exp^W(Y)^{-1}\big)\hat{g}(Y/\hbar) \tag{115}$$

$$= \int_{\mathfrak{G}_{t_M(q)} \oplus \mathfrak{H}_{s_M(q)}} \int_{\mathfrak{G}^*_{t_M(q)} \oplus \mathfrak{H}^*_{s_M(q)}} \frac{E_q(X,Y)\ d^nX\ d^mY\ d^n\theta\ d^m\phi}{\hbar^{(n+m)}} \kappa_G(X)\kappa_H(Y) \tag{116}$$

$$\times\ f(\theta)g(\phi)e^{-i\left(\theta(X)+\phi(Y)\right)/\hbar}\psi\big(\exp^W(X)^{-1} \cdot q \cdot \exp^W(Y)^{-1}\big). \tag{117}$$

由此可知，$\pi_1^G(\mathcal{Q}_\hbar(f)) \otimes \pi_1^H(\mathcal{Q}_\hbar(g))$ 是一个积分算子，其核 $K^{f\otimes g}: M \times M \to \mathbb{C}$ 为

$$K^{f\otimes g}\Big(q, \exp^W\big(\iota_q^{-1}(\xi_q \oplus 0)\big) \cdot q\Big) \tag{118}$$

$$= \int_{T_q^*M} \int_{\mathcal{I}_q} \int_{\mathcal{I}_q^*} \frac{(E_q \circ \iota_q^{-1})(\xi_q \oplus Z)\ d^n\eta_q\ d^mZ\ d^m\Phi}{\hbar^{(n+m)}} \big((\kappa_G \cdot \kappa_H) \circ \iota_q^{-1}\big)(\xi_q \oplus Z) \tag{119}$$

$$\times\ \big((f \cdot g) \circ \iota_q^*\big)(\eta_q \oplus \Phi)e^{-i\left(\eta_q(\xi_q)+\Phi(Z)\right)/\hbar} \tag{120}$$

对所有 $q \in M$和 $\xi_q \in T_qM$均成立。现在，傅里叶变换 $T_q^*M \to T_qM$是一一映射这一事实给出了结论。 □

接下来，定义 β_0^M: $C_c^\infty(\mathfrak{G}^*) \otimes C_c^\infty(\mathfrak{H}^*) \to C_c^\infty(T^*M)$ 如下:

$$\beta_0(f \otimes g)(\eta_q) = (f \circ j_G)(\eta_q) \cdot (g \circ j_H)(\eta_q) \tag{121}$$

对所有 $f \in C_c^\infty(\mathfrak{G}^*)$、$g \in C_c^\infty(\mathfrak{H}^*)$ 和 $\eta_q \in T_q^*M$均成立。

进一步回顾 Steeger 和 Feintzeig 的结果可知 [16] 存在同构 $\chi_G: C_0(\mathfrak{G}^*) \to \mathfrak{A}_0^G$ 以及 $\chi_H: C_0(\mathfrak{H}^*) \to \mathfrak{A}_0^H$它们由.....的连续延拓明确给出

$$\chi_G(f) = [\hbar \mapsto \mathcal{Q}_\hbar^G(f)] + K_0^G \tag{122}$$

$$\chi_H(g) = [\hbar \mapsto \mathcal{Q}_\hbar^H(g)] + K_0^H \tag{123}$$

对于 $f \in C_{PW}^\infty(\mathfrak{G}^*)$ 和 $g \in C_{PW}^\infty(\mathfrak{H}^*)$。

命题 13. 对于所有 $f \in C_c^\infty(\mathfrak{G}^*)$ 和 $g \in C_c^\infty(\mathfrak{H}^*)$，我们有

$$\big(\chi_G(f) \otimes \chi_H(g)\big) \in \ker(\pi_0^G \otimes \pi_0^H) \tag{124}$$

当且仅当对几乎所有 $q \in M$ 以及几乎所有 $\eta_q \in T_q^*M$,

$$\beta_0^M(f \otimes g)(\eta_q) = 0. \tag{125}$$

证明。由命题 12，我们有 $(f\otimes g) \in \ker(\pi_0^G\otimes\pi_0^H)$ 当且仅当 $\lim_{\hbar\to 0}\beta_\hbar^{\xi_q}(f\otimes g)(\eta_q) = 0$ 对几乎所有 $q \in M$， $\xi_q \in T_qM$，且 $\eta_q \in T_q^*M$。我们有

$$\lim_{\hbar\to 0}\beta_\hbar^{\xi_q}(f \otimes g)(\eta_q) \tag{126}$$

$$= \lim_{\hbar\to 0}\int_{\mathcal{I}_q\oplus K_q^*} \frac{(E_q \circ \iota_q^{-1})(\xi_q \oplus Z)\; d^mZ\; d^m\Phi}{\hbar^m}\big((\kappa_G \cdot \kappa_H) \circ \iota_q^{-1}\big)(\xi_q \oplus Z) \tag{127}$$

$$\times \big((f \cdot g) \circ \iota_q^*\big)(\eta_q \oplus \Phi)e^{-i\Phi(Z)/\hbar} \tag{128}$$

$$= \lim_{\hbar\to 0}\int_{\mathcal{I}_q\oplus K_q^*} (E_q \circ \iota_q^{-1})(\xi_q \oplus Z)\; d^mZ\; d^m\Phi\; \big((\kappa_G \cdot \kappa_H) \circ \iota_q^{-1}\big)(\xi_q \oplus Z) \tag{129}$$

$$\times \big((f \cdot g) \circ \iota_q^*\big)(\eta_q \oplus \hbar\Phi)e^{-i\Phi(Z)} \tag{130}$$

$$= \big((f \cdot g)\circ \iota_q^*\big)(\eta_q \oplus 0) \tag{131}$$

$$\times \int_{\mathcal{I}_q\oplus K_q^*} (E_q \circ \iota_q^{-1})(\xi_q \oplus Z)\; d^mZ\; d^m\Phi\; \big((\kappa_G \cdot \kappa_H) \circ \iota_q^{-1}\big)(\xi_q \oplus Z)e^{-i\Phi(Z)}. \tag{132}$$

因此，$(f \otimes g) \in \ker(\pi_0^G \otimes \pi_0^H)$ 当且仅当对几乎所有 $q \in M$ 和 $\eta_q \in T_q^*M$,

$$0 = \big((f \cdot g) \circ \iota_q^*\big)(\eta_q \oplus 0) = \big((f \cdot g) \circ j_{|q}\big)(\eta_q) = (f \circ j_G)(\eta_q) \cdot (g \circ j_H)(\eta_q), \tag{133}$$

这等价于 $\beta_0^M(f \otimes g)(\eta_q) = 0$. □

由于 $\ker(\pi_0^G \otimes \pi_0^H)$ 是一个闭双边理想，$\ker(\beta_0^M)$ 也是闭双边理想，因此 β_0^M 是一个 *-同态。这意味着 β_0^M 可连续延拓为完备化 $C_0(\mathfrak{G}^*) \otimes C_0(\mathfrak{H}^*) \to C_0(T^*M)$ 上的 *-同态。因此，我们有

$$C_0(S_M) \cong \big(C_0(\mathfrak{G}^*) \otimes C_0(\mathfrak{H}^*)\big)/\ker(\beta_0^M) \hookrightarrow C_0(T^*M), \tag{134}$$

这足以证明存在一个满射 $T^*M \to S_M$。

现在，对于 *-同构 $\chi_G\colon C_0(\mathfrak{G}^*) \to \mathfrak{A}_0^G$ 和 $\chi_H\colon C_0(\mathfrak{H}^*) \to \mathfrak{A}_0^H$，将相应的盖尔范德对偶记为 $\hat{}\chi_G\colon \mathcal{P}(\mathfrak{A}_0^G) \to \mathfrak{G}^*$ 和 $\hat{}\chi_H\colon \mathcal{P}(\mathfrak{A}_0^H) \to \mathfrak{H}^*$，分别对应于$\mathcal{P}(\mathfrak{A}_0^G)$ 和 $\mathcal{P}(\mathfrak{A}_0^H)$，即 $\mathfrak{A}_0^G$ 和 $\mathfrak{A}_0^H$的纯态空间。由于我们有

一个图表

$$\mathcal{P}\left(\mathfrak{A}_0^G\right) \longleftarrow S_M \longrightarrow \mathcal{P}\left(\mathfrak{A}_0^H\right), \tag{135}$$

我们还有一个图表

$$\mathfrak{G}^* \longleftarrow S_M \longrightarrow \mathfrak{H}^* \tag{136}$$

因此我们可以将 S_M 视为积流形 $\mathfrak{G}^* \times \mathfrak{H}^*$ 的子集。

最后请注意，根据公式（133），$\ker(\beta_0^M)$ 对应于这样一组函数：它们与 j_G 或 j_H （实际上是 $j_{|q}$ 对于任意 $q \in M$）复合后为零。由盖尔范德对偶性， S_M 因此必然同构于这样一个空间：其中 $\ker(\beta_0^M)$ 中的每个函数都在该空间上消失。该空间在将 $C_0(\mathfrak{G}^*) \otimes C_0(\mathfrak{H}^*)$ 与 $C_0(\mathfrak{G}^* \times \mathfrak{H}^*)$ 识别之后，正是对映射 (j_G, j_H) 的像。这足以证明， S_M同构于由辛对偶对 T^*M所确定的拉格朗日关系。

命题 14。 $S_M \cong (j_G, j_H)[T^*M]$

回顾一下，在§3中，我们定义了量子化函子，将 **LPoisson** 中的辛对偶对映射到 $\mathbf{LC}^*$ 中，映射方式为

$$Q : [\mathfrak{G}^* \leftarrow T^*M \rightarrow \mathfrak{H}^*] \mapsto [C^*(G) \rightarrowtail \mathcal{E}_M \leftarrowtail C^*(H)]. \tag{137}$$

Landsman [8] 证明了这一定义确实良定且具有函子性。此外，我们还定义了经典极限函子，将$\mathbf{LC}^*$ 中的希尔伯特双模映射到**LPoisson** 中的辛对偶对，映射方式为

$$L : [C^*(G) \rightarrowtail \mathcal{E}_M \leftarrowtail C^*(H)] \mapsto [S_M], \tag{138}$$

其中 $[S_M]$ 表示确定拉格朗日关系 S_M的辛对偶对的等价类。由于 $S_M \subseteq \mathfrak{G}^* \times \mathfrak{H}^*$ 是由辛对偶对 T^*M确定的拉格朗日关系，右侧实际上是**LPoisson**中包含 T^*M的辛对偶对等价类的另一种表达。至此，我们已经证明 L是良定的：来自等价类 $[S_M]$ 的任意辛对偶对的量子化，必定得到等价类$[\mathcal{E}_M]$中的一个希尔伯特双模，因为这些正是其经典极限返回 $[S_M]$的双模。此外，Feintzeig 和 Steeger [4] 给出的论证已表明，L具有函子性，分别将希尔伯特双模的复合和拉格朗日关系的复合对应到它们各自的张量积。

此外，我们已经证明了 $L \circ Q([T^*M]) \cong [T^*M]$。由此可知，由于在我们对 $\mathbf{LC}^*$ 的定义中，每个态射都是对**LPoisson**中某个态射进行量子化所得，因此我们也有 $Q \circ L([\mathcal{E}_M]) \cong [\mathcal{E}_M]$。至此，我们建立了所需的范畴等价。

定理 15。 函子 Q :**LPoisson** $\leftrightarrows \mathbf{LC}^*$: L 构成范畴等价。

5 结论

本文建立了某些辛对偶对等价类与相应的希尔伯特双模等价类之间的一一对应关系。辛对偶对及其确定的拉格朗日关系，可以理解为保持表示理论结构的经典相空间之间的态射。希尔伯特双模同样可以理解为保持表示理论结构的量子可观测量代数之间的态射。因此，我们的态射一一对应关系编码了范畴等价，也编码了经典物理与量子物理模型之间的一种表示理论等价。

我们的技术结果推广了 Feintzeig 和 Steeger [4] 的方法，从而将拉格朗日关系构造为更广泛的一类（希尔伯特双模等价类）的经典极限。这一成果消除了为保证所得经典极限空间是辛流形而需附加额外条件的必要性，并将经典极限重新表述为拉格朗日关系，而非辛对偶对。

本文的结果引出了关于本文所定义范畴的更多问题。在**LPoisson**中，我们之所以主张考虑拉格朗日关系，而非辛对偶对本身，是因为拉格朗日关系包含了足够的信息，可以确定一个从某个泊松流形的辛实现到另一个泊松流形的辛实现的诱导函子。然而，在**LC***中，我们之所以主张考虑张量积核，而非希尔伯特双模本身，是因为张量积核只是相应诱导函子的一个不变量；该诱导函子将一个 C*-代数的希尔伯特空间表示映到另一个 C*-代数的希尔伯特空间表示。拉格朗日关系与张量积核之间的类比究竟有多贴切？是否存在某些条件，使得给定一个张量积核便能唯一确定一个诱导函子？抑或还有其他定义 C*-代数范畴中态射的方式，从而使态射能够完全确定 C*-代数之间的诱导函子？最后，我们还要提及 Landsman [3], 提出的另一个开放研究方向：能否将我们一直研究的量子化函子和经典极限函子推广到更一般的态射类别，例如受 C*-代数的 K-理论启发的态射类别。

参考文献

[1] Mackey, G.W.：《群的诱导表示与量子力学》。W. A. Benjamin. Inc.，纽约（1968）[2] Marsden, J., Weinstein, A.：具有对称性的辛流形约化。《数学物理报告》5(1)，121–30（1974）[3] Landsman, N.P.：作为函子的量子化。载于：Voronov, T.（编），《量子化、泊松括号及其他》，第9–24页。当代数学，315，美国数学会，普罗维登斯（2003）。https://doi.org/10.1090/conm/315/05471[4] Feintzeig, B., Steeger, J.：希尔伯特双模的经典极限作为辛对偶对。《数学物理评论》36(10)（2024）https://doi.org/10. 1142/S0129055X24500260[5] Feintzeig, B.：作为范畴等价的量子化。《数学物理通讯》114(1)（2024）https://doi.org/10.1007/s11005-023-01765-w[6]Mackenzie, K.：《微分几何中的李群胚与李代数丛》。剑桥大学出版社，剑桥（1987）[7] Landsman, N.P.：《经典与量子力学之间的数学主题》。施普林格，纽约（1998）[8]Landsman, N.P.：与群胚相关的算子代数和泊松流形。《数学物理通讯》222，97–116（2001）[9] Weinstein, A.：李代数丛和李群胚的线性化问题。《数学物理通讯》52(1)，93–102（2000）https://doi.org/10.1023/a: 1007657920231[10]Crainic, M., Fernandes, R.L.：泊松括号的可积性。《微分几何杂志》66(1)（2004）https://doi.org/10.4310/jdg/1090415030[11] Rieffel, M.：海森伯流形的形变量子化。《数学物理通讯》122，531–562（1989）[12] Rieffel, M.：群 $\mathbb{R}^d$ 作用的形变量子化。《美国数学会回忆录》。美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯（1993）[13] Landsman, N.P.：李群胚C*-代数与外尔量子化。《数学物理通讯》206(2)，367–381（1999）https://doi.org/10.1007/ s002200050709[14] Kirchberg, E., Wasserman, S.：C*-代数连续丛上的运算。数学年刊303，677–697（1995）

[15]Steeger, J., Feintzeig, B.：C*-代数丛的扩张。《数学物理评论》33(8), 2150025 (2021) https://doi.org/10.1142/ s0129055x21500252[16] Steeger, J., Feintzeig, B.H.：“经典极限是‘奇异’的吗？”《科学史与科学哲学研究》A辑 88, 263–279 (2021) https://doi.org/10.1016/j. shpsa.2021.05.007[17] Landsman, N.P.：张量积形式的量子化约化。载于：《奇异辛商的量子化》，第137–180页。Birkh¨auser，巴塞尔 (2001)。https:// doi.org/10.1007/978-3-0348-8364-1 7[18] Landsman, N.P.：算子代数与泊松流形的双范畴。载于：《数学与物理中的数学物理：量子与算子代数方面》。会议论文集，意大利锡耶纳，2000年6月20日至24日。谨以此文献献给Sergio Doplicher和John E. Roberts，庆祝他们的60岁生日，第271–286页。美国数学会，美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯 (2001)[19] Weinstein, A.：泊松流形的局部结构。《微分几何杂志》18(3) (1983) https://doi.org/10.4310/jdg/1214437787 [20] Xu, P.：泊松流形的Morita等价。《数学物理通讯》142, 493–509 (1991)[21] Xu, P.：泊松流形的Morita等价与辛实现。《高等师范学校科学年刊》25(3), 307–333 (1992) https: //doi.org/10.24033/asens.1652[22]Bursztyn, H., Weinstein, A.：泊松几何中的皮卡群。《莫斯科数学杂志》4(1), 39–66 (2004) https://doi.org/10.17323/ 1609-4514-2004-4-1-39-66[23] Weinstein, A.：辛范畴。《葡萄牙数学》67(2), 261–278 (2010) https://doi.org/10.4171/pm/1866[24] Lance, E.C.：希尔伯特C*-模。剑桥大学出版社，剑桥 (1995)。https://doi.org/10.1017/cbo9780511526206[25] Raeburn, I., Williams, D.：Morita等价与连续迹C*-代数，第60卷。美国数学学会，普罗维登斯 (1998)。https://doi.org/10. 1090/surv/060[26] Renault, J.：C*-代数的群胚方法。《数学讲义》丛书，第793卷。施普林格，柏林、海德堡 (1980)[27] Landsman, N.P.：《经典与量子之间》。载于：Butterfield, J., Earman,

(编)《物理学哲学手册》第1卷，第417–553页。爱思唯尔，纽约 (2007)[28] Landsman, N.P., Ramazan, B.：李代数丛相关泊松代数的量子化。《物理学中的群胚》会议论文集，第282卷 (2000) https://doi.org/ 10.1090/conm/282/04685[29] Dixmier, J.：C*-代数。北荷兰出版社，纽约 (1977)[30] Fell, G., Doran, R.：*-代数表示、局部紧群与Banach *-代数丛。学术出版社，波士顿 (1988)[31]Nilsen, M.：C*丛与 $C_0(X)$-代数。《印第安纳大学数学杂志》45(2), 463–477 (1996)[32] Binz, E.,Honegger, R., Rieckers：场论韦尔量子化作为严格连续变形量子化。《亨利·庞加莱研究所年刊》5, 327–346 (2004) https://doi.org/10.1007/s00023-004-0171-y[33] Moerdijk, I.：托扑斯与群胚。《数学讲义》1348, 280–298 (1988) https://doi.org/10.1007/bfb0081366[34] Muhly, P., Renault, J., Williams, D.：群胚C*-代数的等价与同构。《算子理论杂志》17 (1987)[35] Xu, P.：非交换泊松代数。《美国数学杂志》116(1), 101–125 (1994)[36] Landsman, N.P.：Rieffel诱导作为广义量子Marsden-Weinstein约化。《几何与物理杂志》15, 285–319 (1995)[37] Landsman, N.P.：李群胚的Muhly–Renault–Williams定理及其经典对应。《数学物理通讯》54(1), 43–59 (2000) https://doi.org/10.1023/a:1007669418336[38] Moerdijk, I., Mrˇcun, J.：无穷小作用的可积性。《美国数学杂志》124(3), 567–593 (2002) https://doi.org/10.1353/ajm.2002. 0019[39] Rieffel, M.：C*代数的诱导表示。《数学进展》13, 176–257 (1974)[40] Rieffel, M.：C*-代数与W*代数的Morita等价。《纯粹与应用代数杂志》5, 51–96 (1974)[41] Rieffel, M.：C*代数的诱导表示。《美国数学会通报》4, 606–609 (1978)

[42] Green, P.：扭曲协变代数的局部结构。数学学报**140(0)**，191–250（1978）https://doi.org/10.1007/bf02392308[43] Green, P.：印子代数的结构。泛函分析杂志**36(1)**，88–104（1980）https://doi.org/10.1016/0022-1236(80)90108-1[44] Rosenberg, J.：C*-代数与 Mackey 群表示理论。当代数学**167**，151–181（1994）https://doi.org/10.1090/conm/167/1292014