arXiv:2602.15221v1 [math.CO] 16 Feb 2026

不可约区分着色与选择公理

Marcin Stawiski
stawiski@agh.edu.pl

克拉科夫AGH大学应用数学学院，al.
Mickiewicza 30，30-059 克拉科夫，波兰

2026年2月18日

摘要

如果图的顶点着色或边着色中，唯一保持该着色的自同构是恒等映射，我们就称这种着色为区分着色。如果不存在合并两个非空颜色类后仍得到（适当）区分着色的可能性，那么（适当的）区分着色就是不可约的。我们证明，每个图都有不可约的（适当）区分顶点着色；每个不含孤立边且至多含一个孤立顶点的图都有不可约的（适当）区分边着色。此外，我们证明，对于每个连通图（不与 K_2 同构），上述任一种着色的存在性都等价于选择公理。

关键词：正常着色、区分着色、非对称着色、无限图、图自同构、选择公理。

数学主题分类：05C15、03E25、05C25、05C63。

1 引言

设 c 是图 G的顶点着色或边着色， φ 是 G的自同构。如果每个顶点（边）都映射到颜色相同的顶点（边），我们就说 φ 保持 c 。否则，我们就说 c 破坏 φ。如果 c 破坏了 G的所有非恒等自同构，那么我们就称 c 是区分着色。请注意，具有一条孤立边或至少两个孤立顶点的图不可能有区分边着色。其他图总是有区分边着色，因为只需给每个顶点赋予一种唯一颜色即可。区分顶点着色总是存在。

区分顶点着色由Babai [1] 于1977年以非对称着色之名提出，这一名称有时仍在使用。他对该概念的研究最终促成了图同构问题存在拟多项式算法这一结论的证明 [2]。

冯·诺伊曼层级 （由策梅洛于 [10]提出）（V_α: $\alpha \in Ord$）是按如下方式通过超限归纳定义的层级:

1. $V_0 = \emptyset$,
2. $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$ 对每个序数 α,
3. $V_\alpha = \bigcup\{V_\beta\colon \beta < \alpha\}$ 对每个极限序数 α。

我们将集合 S 的秩 定义为满足 $S \in V_{\alpha+1}$的最小序数 α 。我们注意到，“每个集合都有秩”这一命题等价于ZF^- 中的基础公理（不含选择公理和基础公理的策梅洛-弗兰克尔集合论）。

本文中，我们不假设选择公理成立，并在 ZF 中进行讨论。若集合 X 和 Y 之间存在双射，我们称它们等势 ，并记作 $|X| = |Y|$ 或 $X \sim Y$。我们将初始序数 定义为不与任何更小序数等势的序数。在 ZFC 中，每个集合都恰与一个初始序数等势。本文将基数定义为等势关系的一个等价类。集合 $|X|$的基数 是集合 $|X| = \{Y\colon X \sim Y$，且 Y 的秩最小 $\}$。如果存在从集合 X 到 Y 的单射，则记作 $|X| \leqslant |Y|$ 或 $X \preceq Y$。

图 G的区分（色）数是 G的（正常）区分顶点着色中颜色集合的最小基数（若此基数存在）。类似地，图 G 的区分（色）指数是 G的（正常）区分边着色中颜色集合的最小基数（若此基数存在）。

Galvin 和 Komj´áth [6] 研究了 ZF 中正常着色的概念。他们证明，每个图都有色数，当且仅当选择公理成立。Stawiski [9] 在 ZF 中研究了正常着色和区分着色的概念，涵盖顶点和边两种情形，并证明了以下定理。

定理 1 （Stawiski 2023 [9]）。 假设将基数定义为初始序数。在 *ZF* 中，以下命题等价:

1）选择公理。

2）每个连通图都有区分数。

3) 每个连通图都有区分指标，除非它同构于 K_2.

4) 每个连通图都有色指数。

集合 X 的秩是满足 $X \in V_{\alpha+1}$的最小序数 α 。在 ZF 中，我们将集合 X 的基数 $|X|$ 定义为 $|X| = \{Y\colon |X| = |Y|$ ，且 Y 具有最小秩$\}$。如果一个集合是某个集合的基数，我们就称它为基数。

Banerjee、Moln´ar 和 Gopaulsingh [4]研究了 K˝onig 引理与 ZF 中局部有限连通图存在不可约正常顶点着色之间的联系。他们在假定基数定义为等势关系的等价类的前提下，证明了下列陈述在 ZF 中等价。

定理 2 (Banerjee, Moln´ar, Gopaulsingh 2024 [4])**.** 下列陈述在 *ZF* 中彼此等价。

1) *K˝onig* 引理。2) 每个局部有限连通图都有色数。3) 每个局部有限连通图都有区分数。4) 每个局部有限连通图都有辨别色数。5) 每个局部有限连通图都有色指数。6)每个不同构于 K_2 的局部有限连通图都有区分指标。7)每个不同构于 K_2 的局部有限连通图都有辨别色指数。

此外，据我们所知，下面提到的问题仍未解决。

猜想 3. 在假设将基数定义为等势关系的等价类的前提下，以下陈述在 *ZF* 中等价于选择公理。

1) 每个无限连通图都有色指数。2) 每个无限连通图都有辨别色数

.

3) 每个无限连通图都有辨别色指数。4) 每个无限连通图都有区分数。
5) 每个无限连通图都有辨别色指数。

Banerjee、Moln´ar 和 Gopaulsingh [3] 询问：如果改用 Scott 提出的基数定义（即基于秩的概念），那么定理 1 的条件 2)–4) 是否蕴含选择公理。

设 $c\colon X \to Y$ 是图 G 的一个具有某种性质 Φ的顶点（边）着色。设$a, b \in Y$ 是两种颜色，并设 σ 是一个从 Y 到其自身的函数，使得 $\sigma(b) = a$且 $\sigma(x) = x$，其中 $x \neq b$。两种（不一定不同的）颜色 a, b 的约化是 $\sigma \circ c$的一个复合。从给定着色得到约化的过程称为合并。换言之，若着色 c' 等于 c，或者存在 c 中使用的颜色 c_1, c_2，使得 c 中每个颜色为 c_1 的顶点（边）在c' 中都具有颜色 c_2，且 c' 中的其余颜色与 c 中的相同，则称 c' 是 c 的一个约化。若不存在具有性质 Φ的 c 的非平凡约化，则称 c 是不可约的（相对于性质 Φ）。Galvin 和 Komj´ath [6]研究了选择公理与不可约正常顶点着色之间的联系。他们证明，在 ZF 中，选择公理等价于以下命题：“每个连通图都有一个不可约正常顶点着色。”

本文的主要定理如下:

定理 4. 设 G 是一个图，c 是 G 的一个（正常的）区分顶点（边）着色，其颜色集可良序化。那么存在 c 的一个约化 c'，它是一个不可约的（正常的）区分顶点（边）着色。

请注意，即使假设选择公理成立，此结论对于区分着色此前也尚未为人所知。

第二个主要定理给出了一些在 ZF 中与选择公理等价的命题。

定理 5. 在 *ZF* 中，以下命题等价：

1) 选择公理。2) 每个连通图都有一种不可约区分顶点着色。3) 每个连通图都有一种不可约区分边着色。4) 每个连通图都有一种不可约正常区分顶点着色。5) 每个连通图都有一种不可约正常区分边染色。

关于选择公理的其他等价形式，可参见 Rubin 和 Rubin 的详尽专著 [8]。本文未介绍的图论概念，可参见 Diestel 的专著 [5]。本文未介绍的集合论概念，可参见 Jech 的专著 [7]。

2 可良序化的颜色集合与不可约区分着色

在本节中，我们证明定理 4。

证明。 我们将同时处理定理中所有可能的表述版本。根据所讨论的表述，我们称着色 c 为适当的，如果它是一个（正常的）区分顶点（边）着色。设 G 为一个图，且 c 为一个适当的着色，其颜色集合 κ 可良序化。不失一般性，我们可以假设 κ 是一个定义为初始序数的基数。我们通过对 $\alpha \leqslant \kappa$进行归纳，从 c 构造 c'。在步骤 α 中，我们假设已有着色 (c_γ: $\gamma \leqslant \alpha$)，并满足以下性质：

1. 对每个 $\gamma \leqslant \alpha$，着色 c_γ 都是区分的。2. 对每个 $\gamma \leqslant \alpha$，如果陈述要求正常着色，则着色 c_γ 是正常的。3. 对每个 $\delta < \gamma \leqslant \alpha$，着色 c_γ 是对 c_δ 的约化。4. 对每个 $\gamma < \alpha$，着色 $c_{\gamma+1}$ 等于 c_γ，或者 $c_{\gamma+1}$ 可以通过将大于 γ 的某些颜色类与 γ 合并，从 c_γ 得到。

我们设 $c_0 = c$。对于 c_0，上述所有条件都成立。令 $S_\alpha(0) = \{c_0\}$，且 $c_\alpha^0 = c_\alpha$。在步骤 α 中，我们通过对 β 归纳，考虑 $\alpha < \beta \leqslant \kappa$ 的所有颜色 β。在这次归纳的某些阶段，我们将修改着色 c_α，并定义着色 $(c_\alpha^\beta\colon\ \alpha < \beta \leqslant \kappa)$，它们将对应于当前考虑的、通过若干约化操作从 c_α 得到的着色。

首先假设 β 是一个后继序数。在构造中，我们定义集合$S_\alpha(\beta)$；当我们在归纳的另一个步骤 β' 中考虑极限序数 β' 时，这个集合会派上用场，其确切作用稍后解释。我们检查将 β 与 α 合并后得到的着色是否仍然是区分（正常）着色。如果不是，我们令$S_\alpha(\beta) = S_\alpha(\beta - 1)$。否则，我们通过将当前着色 c_α^β中所有出现的 β替换为 α，构造一个新的着色 $c_\alpha^{\beta+1}$。我们令 $S_\alpha(\beta) = S_\alpha(\beta-1)\cup\{c_\alpha^{\beta+1}\}$。

现在假设 β 是一个极限序数。令 $\delta < \beta$。假设 $S_\alpha(\beta)$ 是一个非空的（正常）区分着色集合，并且对于$S_\alpha(\beta)$中的任意一对元素 $\{x, y\}$，要么 x是 y 的约化，要么 y 是 x 的约化。对于$S_\alpha(0)$，这一条件确实成立，并且在归纳的每一步 β 之后也都成立。集合 $S_\alpha(\beta)$的作用是构造 $S_\alpha(\beta)$的尾部。极限序数β 对应步骤中的某些约化操作，可能会产生不具区分性的着色。尾部和非消失着色（我们马上就会定义）可将我们所考虑的约化限制为仍具区分性的约化。 $S_\alpha(\beta)$的尾部 $T(\beta,\delta)$是由这些着色 c''组成的集合，其中对于每种颜色 k，顶点（边） v 具有颜色 k，当且仅当对于 $\beta > \gamma > \delta$， $S_\alpha(\gamma)$中的所有着色里 v 都具有颜色 k。换言之， c'' 是一个极限着色。如果某种颜色 $\gamma < \kappa$ 在某个 $\delta < \beta$对应的$T(\beta,\delta)$中所有着色里的颜色类都非空，我们就称它为非消失颜色。由构造可知，每个顶点（边）恰有一种非消失颜色，因为可用颜色的集合是良序的，而顶点（边）的颜色只能减少有限次。考虑着色 c^*，其中每个顶点（边）都取其非消失颜色。注意，如果所讨论的命题涉及正常着色，那么 c^* 就是正常着色。不过， c^* 可能并不具区分性。

令 Γ 为由 c^* 保持的 G 的非平凡自同构集合。假设 Γ 非空。考虑自同构 $\varphi \in \Gamma$。由此可知，在极限步骤之前的某个时刻，存在一个顶点（边）被映射到一个颜色不同的顶点（边），并且其中一个是 α，另一个与 α 合并，或者二者都在 α 中合并。因此，存在唯一的极大集合 $A_\varphi \subseteq \kappa \setminus (\alpha + 1)$，使得若 $a \in A_\varphi$，则存在 G 中的一个顶点（边），被 φ 映射到 A_φ 中某个颜色为 $a^* \neq a$ 的顶点（边），且该顶点（边）属于某个着色 $k \in T(\alpha,\ \delta)$，其中 $\delta < \beta$。

现在我们将介绍逆合并的过程，并简要说明其背后的思路。如果我们只是重新给某些顶点（或边）着色，那么即使在定义这一极限着色时所使用的着色都不保留图的某个自同构，标准极限着色也可能保留该自同构。对着色 c进行逆合并的思路是，选取一个极小的颜色集合 K，并且不对这些颜色执行合并操作。更正式地说，对于每个满足 $c(x) \in K$ 的 x，令 $c^*(x) = x$；对于其余所有顶点（边） x，令 $c^*(x) = c(x)$，从而由着色 c 得到着色 c^*。

如果我们对 A_φ中的某种颜色执行逆合并操作，那么所得着色就不会保留 φ。我们希望得到 $B=\bigcup\{A_\varphi$的一个极小子集 B'： $\varphi\in\Gamma\}$，使得如果我们对 B' 和 α中的元素执行逆合并操作，就能破坏 Γ中的所有自同构。我们不能简单地从每个集合 A_φ 中各取一个元素，因为这样单独一个元素就可能破坏多个自同构，而且所选元素中有些会是多余的。

现在，我们通过对 $a<\beta$ 进行归纳来构造 B'。我们从空集 B_0 开始。在步骤 a 中，如果 $a\notin B$，则什么也不做。如果 $a\in B$，则考虑着色 k_a：它由 c^* 得到，方法是对每个 $b\in B_\alpha$ 撤销将 b 与 α 合并的操作；也就是说， k_a 将颜色 α 指派给不属于 B_α 的顶点，并将 $k_a=c^*$ 指派给其他顶点。如果 a 属于 B，且存在一个在当前着色下仍保持不变的自同构 $\varphi\in\Gamma$，那么我们令 $B_a=\bigcup\{B_b\colon b<\alpha\}\cup\{a\}$。否则，令 $B_a=\bigcup\{B_b\colon b<\alpha\}$。我们按照处理后继序数的步骤，以类似的方式进行：检查合并 β 和 α 后得到的着色是否仍是区分着色（适当着色）。如果不是，则什么也不做。否则，将所有出现的 β 替换为 α。由此得到着色 c_α^β。与处理后继序数的步骤不同，我们令 $S_\alpha(\beta)=\{c_\alpha^\beta\}$。

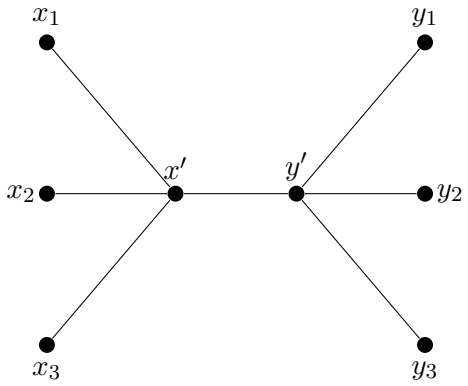
我们声称，所得着色是区分着色。假设并非如此。因此，存在一个自同构 φ，它在 c_α^β 下保持不变。着色 c^* 打破了 φ，而在 c_α^β 下保持不变的自同构子群 Γ' 是 Γ 的子群。因此， $\varphi\in\Gamma$。存在一种颜色 $a\in B$，使得由 c^* 固定 B_a 所得到的着色不能保持 φ 不变。与上文类似，在这种着色下保持不变的自同构群是 Γ' 的子群。因此， $\varphi\notin\Gamma'$。我们证明了 c_α^β 是区分着色。

对所有 $\beta<\kappa$ 进行归纳后，我们得到一个极限着色 $c_\alpha=c_\alpha^\kappa$。根据构造以及上文，集合 $(c_\gamma\colon\ \gamma\leqslant\alpha)$ 满足所需的性质。

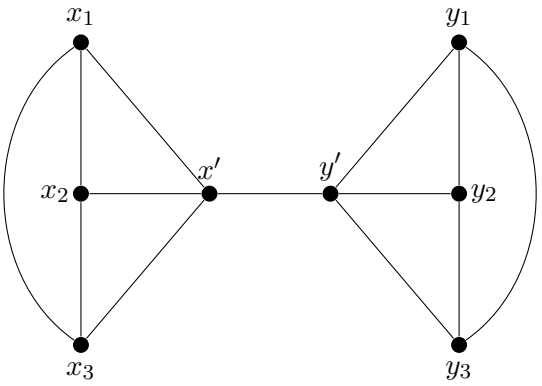
对所有 α 进行归纳后，我们得到一个极限着色 $c'=c_\kappa$。我们已经证明它是区分着色且适当的。接下来只需证明它是不可约的。假设并非如此，并且存在某些 $\alpha<\beta<\kappa$，使得颜色 α，β 满足：β 可以与 α 合并，从而得到一个（适当的）区分着色。然而，这意味着 β 将在 c_α^κ 中与 α 合并。这就产生了矛盾。 □

3 不可约着色与选择公理

在本节中，我们使用引理 6 证明定理 5。首先需要给出一些定义，以陈述该引理。设 X、Y、$\{x'\}$ 和 $\{y'\}$ 是两两不相交的非空集合。定义双星 $DS(X、Y)$为顶点集为 $V(DS(X、Y))$ 的图，其中 e 是 $DS(X、Y)$中的一条边，当且仅当对于所有$x\in X$和所有 $y\in Y$， $e=x'y'$、 $e=x'x$或 $e=y'y$ 成立。双团 $DC(X、Y)$是从 $DS(X、Y)$得到的图：在 X 中的每一对不同顶点之间以及在 Y中的每一对不同顶点之间添加边。



(a) 图 $DS(X,\ Y)$



(b) 图 $DC(X,\ Y)$

引理 6. 设 X 和 Y 是互不相交的非空集合。则以下条件等价。

a) DS（X、Y）具有不可约区分顶点着色。b) DS（X、Y）具有不可约区分边着色。c) DC（X、Y）具有不可约正常区分顶点着色。d) DS（X、Y）具有不可约正常区分边着色。e) $X \preceq Y$ 或 $Y \preceq X$。

证明。 我们将集合 X 在函数 c下的像记为 $c[X]$。

(a $\Rightarrow$ e)：假设存在$DS(X,\ Y)$的一个不可约区分顶点染色 c。特别地，这意味着 X 中的每个顶点颜色各不相同，且 Y 中的每个顶点颜色也各不相同。因此，$|c[X]| = |X|$ 和 $|c[Y]| = |Y|$。假设条件 e) 不成立。因此，存在一个顶点 $x \in X$，使得 $c(x) \notin c[Y]$；并且存在一个顶点 $y \in Y$，使得 $c(y) \notin c[X]$。令 c' 为由 c 重新着色得到的着色：将每个颜色为 $c(x)$ 的顶点重新着色为颜色 $c(y)$。现在， x' 和 y' 无法互换，因为它们要么颜色不同，要么其邻点上的颜色集合不同。着色 c' 是 c的一个非平凡区分约化，因为x' 和 y' 无法互换，并且 X 和 Y 逐点固定。这与 c不可约的假设矛盾。

(a $\Rightarrow$ b)：假设存在一个不可约区分顶点着色 c of$DS(X, Y)$。我们将每条边 xx' 着为颜色 $c(x)$，每条边 yy' 着为颜色 $c(y)$。我们将 $x'y'$ 着为已使用颜色中的一种。所得着色是 $DC(X, Y)$ 的不可约区分边着色。

(b $\Rightarrow$a)：假设存在一种不可约区分边着色 c of$DS(X,\ Y)$。我们将每个顶点 x' 着为颜色 $c(xx')$，并将每个顶点 y' 着为颜色$c(yy')$。如果 $|X| > 1$ 或 $|Y| > 1|$，我们就用之前使用过的不同颜色着色 x 和 y；如果 $|X| = |Y| = 1$，则用相同颜色着色。

(e $\Rightarrow$ a)：现在假设 e) 成立。不失一般性，我们可以假设$X \preceq Y$，且 Y至少有两个元素。令 f 为从 X 到 Y的一个单射。令$c(x) = x$，并且对 $x \in X$，有 $c(f(x)) = c(x)$。我们用不同的未使用颜色给 Y 中未着色的顶点着色。如果 f 是一个双射，那么存在一个自同构 φ of$DS(X,Y)$，将 X 映射到 Y。在这种情况下，我们用集合 $c[Y]$中的任意两种不同颜色给 c 中的 x' 和 y' 着色。注意，每个这样的自同构 φ 都不被 c保留。如果 f 不是双射，我们就用集合$c[Y]$中的同一种颜色给 x' 和 y' 着色。所定义的着色 c 具有区分性。我们将证明它也是不可约的。集合 Y 在 c中逐点固定。特别地，Y 中的每个元素都必须具有唯一颜色。因此，我们无法合并 $c[Y]$中的任何两种颜色。由于 c 中的每种颜色都属于 $c[Y]$，着色 c 是不可约的。

(a $\Rightarrow$ c)：回顾一下， $DS(X,\ Y)$ 和 $DC(X,\ Y)$ 具有相同的顶点集合。设 c 是 $DS(X,\ Y)$ 的一个不可约区分顶点着色。若 $c[X] = c[Y]$，则我们用新的、互不相同的颜色重新着色 x' 和 y'，从而得到 $DC(X,\ Y)$ 的一个不可约正常区分顶点着色 c'。否则，存在一种粉色，它属于$c[X]\backslash c[Y]$ 或 $c[Y]\backslash c[X]$。不失一般性，假设粉色属于 $c[X]\backslash c[Y]$。我们将 y' 染成粉色，并将 x' 染成来自 $c[Y] \setminus c[X]$ 的一种颜色（如果该集合非空），否则染成一种新颜色。所得着色 c' 是图 $DS(X,\ Y)$ 的一个不可约正常区分顶点着色。

(c $\Rightarrow$ a)：设 c 是 $DC(X,Y)$ 的一个不可约正常顶点着色。由于 $c(x') \neq c(y')$，着色 c 是 $DS(X,Y)$ 的一个区分着色。若 $c(X) = c(Y)$，则我们将 x' 染成 $c(X)$ 中任意一种颜色，并将 y' 染成一种新颜色。着色 c 是一个不可约区分着色。现在假设 $c[X] \neq c[Y]$。不失一般性，我们可以假设在 $c(X) \setminus c(Y)$ 中存在一种粉色。若 $c[X] = c[Y]$，则按如下方式重新着色 x' 和 y'：令 $c(x')$ 为 $c[X]$ 中任意一种颜色，并令 $c(y')$ 为一种新颜色。重新着色 x' 和 y' 后， c 是 $DC(X,Y)$ 的一个不可约区分着色。

(b $\Rightarrow$ d)：b) 与 d) 等价性的证明，本质上与 a) 和 b) 等价性的证明相同。通过重新着色边 $x'y'$，我们可以由一种着色得到另一种所需的着色。

(c $\Rightarrow$ d)：设 c 是 $DC(X,\ Y)$ 的正常不可约可区分顶点着色。我们按以下方式构造边着色 c'。对每个 $x \in X$，将颜色 $c(x)$ 分配给边 $x'x$；对每个 $y \in Y$，将颜色 $c(y)$ 分配给边 $y'y$。此外，将一种新颜色分配给边 $x'y'$。这样要么得到 $DC(X,\ Y)$ 的不可约正常区分边着色；要么在 $X \sim Y$ 时，将形如 xx' 的一条边重新着色为新颜色，即可得到这样的着色。因为如果 $X \sim Y$ 和 $c(X) = c(Y)$，那么必须将一条这种形式的边重新着色为新颜色，这是区分 X 与 Y 的必要且充分方法。

(d $\Rightarrow$ c)：同样，如在证明（**c $\Rightarrow$ d**）中提到的段落所述，若 c' 是 $DS(X,Y)$ 的不可约正常区分边染色，则给每个顶点 $y \in Y$赋予颜色 $c(y) = c'(yy')$，并给每个顶点 $x \in X$赋予颜色 $c(x) = c(xx')$。若 $c[Y] \setminus c[X]$ 非空，则用集合 $c[Y] \setminus c[X]$ 中的任意一种颜色给 x'在 c 中着色；若该集合为空，则使用一种新颜色。若 $c[X] \setminus c[Y]$ 非空，则用集合 $c[X] \setminus c[Y]$ 中的任意一种颜色给 y' 在 c中着色；若该集合为空，则使用一种不同于 $c(x')$ 的新颜色

若 $c[X] \setminus c[Y]$ 为空，则着色 c 是 $DC(X, Y)$ 的不可约正常区分顶点着色。这就完成了条件 c) 和 d) 等价性的证明，也完成了引理的证明。

□

现在我们证明定理 5。

证明。 假设对于任意不相交的集合 X 和 Y，都存在图 $DS(X, Y)$（分别为 $DC(X, Y)$）的不可约（正常）区分着色。由引理 6 可知， $X \preceq Y$ 或 $Y \preceq X$ 成立。因此，三歧律成立，因为 X 和 Y 的选择是任意的，选择公理也随之成立。这个观察结合定理 4，便得到了定理 5。

□

参考文献

[1] L. Babai. 具有两个指定度数的非对称树. 匈牙利科学院数学学报, 29, 1977年.[2] L. Babai. 准多项式时间内的图同构 [扩展摘要].*STOC'16*—— 48^{th} *ACM SIGACT*计算理论研讨会年会论文集, 第 684–697 页. ACM, 纽约, 2015. 完整版本预印本见 arXiv:1512.03547v2 [cs.DS]. doi:10.1145/2897518.2897542.[3] A. Banerjee, Z. Moln´ar, and A. Gopaulsingh. 不借助选择公理的区分着色、正常着色与覆盖性质. 当代数学艺术, 24(4), 2024.[4] A. Banerjee, Z. Moln´ar, and A. Gopaulsingh. 局部有限图着色参数的 Brooks 型定理与 K˝onig 引理. 当代数学艺术, 25:P#4.06, 2025.[5] R. Diestel. 图论，第 *5* 版. 施普林格出版社 柏林 海德堡 纽约, 2017.[6] F. Galvin and P. Komj´ath. 图着色与选择公理. 匈牙利数学期刊, 22:71–75, 1991.[7] T. Jech. 集合论. 第三个千年版，修订扩充版. 施普林格出版社 柏林 海德堡 纽约, 2003.[8] H. Rubin and J. Rubin. 选择公理的等价命题，*II*. 北荷兰出版社, 阿姆斯特丹、纽约和牛津, 1985, 第 322 页.[9] M. Stawiski. 选择公理在正常着色和区分着色中的作用. 当代数学艺术, 23:P3.10, 2023..[10] E. Zermelo. 关于界数和集合域：集合论基础的新研究. 基础数学, 16:29–47, 1930。