arXiv:2602.15243v1 [math.AT] 16 Feb 2026

上集可分解持久模的剪枝距离

Roy Nicolas Nehme*

摘要

Bjerkevik 最近提出了剪枝距离，它通过称为修剪的近似分解来比较持久模。Bjerkevik 猜想，对于逐点维数有界的模，这一距离与经典交错距离 Lipschitz 等价。本文证明，对于上集可分解持久模，剪枝距离与瓶颈距离 Lipschitz 等价。特别地，这证明了 Bjerkevik 猜想对这类模的一半。更具体地说，我们给出瓶颈距离的上界，即剪枝距离的某个倍数，将猜想中的上界从 $2r$ 改进为 $(2r-1)$，其中 r 是最大逐点维数，并证明这一改进后的上界是紧的。我们还证明了反向不等式，即用瓶颈距离给出剪枝距离的上界。我们的方法依赖于对上集可分解模的剪枝进行显式计算，并使用有向图形式体系完成这一计算。

目录

1 引言 **2**

2 预备知识 **3**

2.1 持久模.3 2.2 剪枝.6 2.3 剪枝距离.7

3 上集可分解模的剪枝 10

3.1 上集可分解模.10 3.2 上集可分解模的剪枝.13

*LAGA，索邦大学巴黎北校区，法国国家科学研究中心，巴黎第八大学 电子邮箱：nehme@math.univ-paris13.fr

1 引言

拓扑持久性最初为数据分析而发展，通过对过滤拓扑空间的同调进行计算，为其提供不变量。该方法产生称为持久模的代数对象，它们形式上是从有序集 (R $\preceq$) 到向量空间范畴的函子。该理论的一个核心结果保证，当这些模的向量空间为有限维时，它们可分解为与区间相关联的简单元素。出现在此类分解中的区间集合，即持久条形码，在同构意义下完全描述了原始持久模，因而包含关于初始拓扑过滤的精细信息。

著名的等距定理 [7] 保证，在模之间代数定义的交错距离 d_I 与其条形码之间的组合瓶颈距离 d_B相一致。后者通过持久图定义，并可表述为完全二分图[8], 上的最小代价瓶颈匹配问题，且可在多项式时间 [9]内求解。特别地，该定理表明，交错距离虽然就其构造而言相对于数据上的距离是稳定的，也可在多项式时间内计算。

在处理多参数数据时，自然会考虑依赖于多个参数而非单一参数的过滤，从而得到多参数持久模，即由赋予乘积序的 $\mathbb{R}^n$ 所指标的持久模。然而，尽管交错距离和瓶颈距离都已推广到多参数情形，等距定理不再成立：多参数模不能由其不可分解对象以稳定的方式描述。因此，瓶颈距离在多参数情形下无法满足稳定性，使其应用变得无用。自此，交错距离的计算优势在多参数情形中消失；特别地，计算多参数持久模的交错距离已被证明是 NP-hard [5]。

Bjerkevik 在 [3] 中引入了模的 ε-剪枝（定义 2.10）。M 的 ε-剪枝是 M 的一种近似，它具有特别良好的可分解性，同时丢弃了低于尺度 ε 的特征。这一剪枝概念使 Bjerkevik 得以引入剪枝距离 d_P（定义 2.13），该距离与交错距离和分解都有关。因此，目前尚不清楚其计算是 NP-hard，还是可在多项式时间内完成。Bjerkevik 猜想，计算剪枝可以在多项式时间内完成；他还指出，在 [4], 中用于证明计算交错距离为 NP-hard 的例子里，剪枝距离似乎可以在多项式时间内计算，这表明可能存在一种通用的多项式时间算法。

重要的是，Bjerkevik 猜想，在逐点维数有界的持久模上，剪枝距离是稳定的，甚至与交错距离 Lipschitz 等价。更准确地说，若 M 和 N 是定义在任意偏序集上的持久模，且其逐点维数小于某个正整数 r,

$$d_P(M,N) \leq d_I(M,N) \leq 2r\, d_P(M,N).$$

本文证明，对于上集可分解持久模这一类模，剪枝距离与瓶颈距离 Lipschitz 等价。此类模

可分解为区间持久模的直和，其支撑于子集 $U \subset \mathrm{R}^n$ 上，并且在乘积序下向上封闭。上集可分解模是我们在第3节中详细研究的一类重要的多参数持久模。我们的主要结果定理 3.15 和定理 3.18 表明如下

定理1.1。 若 M 和 N 是逐点维数至多为 r的上集可分解模，则

$$d_P(M,N) \leq d_B(M,N) \leq (2r-1)d_P(M,N).$$

这一结果通过将常数从 $2r$降至 $2r-1$，改进了 Bjerkevik猜想中的右侧不等式；并且将交错距离替换为瓶颈距离（后者不小于交错距离），从而进一步加强了该结果。此外，在例 3.17中，我们证明了常数 $2r-1$ 对于上集可分解持久模这一类对象是最优的，无论使用交错距离还是瓶颈距离。左侧不等式由我们的分析得出，其结论弱于猜想中涉及交错距离的不等式。

我们的方法基于定理 3.9中对上集可分解持久模的剪枝进行的显式计算。为计算剪枝，我们为一个上集可分解模关联一个有向图，从而将问题转化为通过图中的有向路径计算可达指标，进而得到一个纯粹的组合过程。

2 预备知识

备注。 本章介绍的所有定义和结果均取自 Bjerke- vik 的 [3], ，此处不提供证明，因为相关证明可在该文献中找到。我们将它们列为预备知识，因为本文旨在证明同一篇论文中提出的猜想 2.15 在上集可分解持久模情形下的一个不等式。本章内容均非原创，熟悉 [3] 的读者可以放心跳过本章，直至猜想 2.15。

2.1 持久模

设 P 为一个偏序集，我们将其视为对应的偏序范畴。我们的结果将针对偏序集 R^d，但由于剪枝和剪枝距离是 Bjerkevik 在一般偏序集情形下于[3] 中引入的，本节将给出主要定义，以便得到猜想的一般定义。

在本文余下部分中，我们假设 P 配备了一个平移函数：

$$\mathbb{P}_\varepsilon : \mathbb{P} \to \mathbb{P} \quad \text{for each } \varepsilon \in \mathbb{R},$$

即：

- P_0 是恒等映射；
- 对于 $p \leq q \in$P，有 $\mathrm{P}_\varepsilon(p) \leq \mathrm{P}_\varepsilon(q)$；

- 对于所有 $p \in \mathrm{P}$ 和 $\varepsilon \geq 0$，$\mathrm{P}_\varepsilon(p) \geq p$；
- 对于所有 ε，$\delta \in \mathrm{R}$, $\mathrm{P}_{\varepsilon+\delta} = \mathrm{P}_\varepsilon \circ \mathrm{P}_\delta$。

由第一条和第四条性质可知，所有函数 P_ε 都是双射。本文其余部分将假设 P 满足上述性质。

令 **Vec** 表示某个固定域 k上的向量空间范畴。

定义 2.1。 一个持久模是一个函子：

$$M : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbf{Vec},$$

一个持久模态射 f： $M \to N$ 是相应函子之间的自然变换。

在本文中，术语“模”指持久模。

当偏序集 P 取为 R^d，且平移函数 $\mathrm{P}_\varepsilon(p) = p + (\varepsilon, \ldots, \varepsilon)$ 时，我们将其称为 d参数模。特别地，我们区分 $d = 1$ 这一情形，称为单参数模，以及 $d > 1$ 这一情形，称为多参数模。

给定一个模 M，我们将 M_p 记作对象 $p \in \mathrm{P}$ 上对应的向量空间，并将 $M_{p\to q}$ 记作由偏序集中的 $p \leq q$ 所诱导的态射。

如果对于所有 $p \in$P， M_p 都是有限维的，我们称模 M 为逐点有限维（简称*pfd*）。

Giv对于两个模 M 和 N，直和 $M \oplus N$ 是按 y

$$(M \oplus N)_p := M_p \oplus N_p,$$

结构映射以显然的方式逐分量定义的模。若一个模 M 对每一个分解都满足.....，则称其为不可分解

$$M = M_1 \oplus M_2,$$

其中一个直和项 M_1 或 M_2 是零模。

下面的定理表明，逐点有限维模具有一种本质上唯一的分解方式，并使我们能够引入后续定义。

定理 2.2 ([6, 定理 1.1], [1, 定理 1(ii)])。 设 M 是一个逐点有限维（*pfd*）模。那么，存在一组非零不可分解模 $\{M_i\}_{i\in I}$，它们的局部自同态环满足

$$M \cong \bigoplus_{i\in I} M_i.$$

此外，如果 $M \cong \bigoplus_{j\in J} M'_j$，其中每个 M'_j 均为非零且不可分解的，则存在一个双射 σ：$I \to J$，使得对所有 $i \in I$，都有 $M_i \cong M'_{\sigma(i)}$。

定义 2.3。 设 M 是一个逐点有限维（*pfd*）模，并且同构于直和 $M \cong \bigoplus_{i\in I} M_i$，其中每个 M_i 均为非零且不可分解的。
我们将 M 的条形码 定义为多重集

$$B(M) := \{M_i\}_{i\in I},$$

其中， M_i 被视为模的同构类。
By 定理 *2.2* 条形码是良定义的，并且是一个同构不变量 $t.$

定义 2.4. 设 M 是一个模，且 $\varepsilon \in \mathbb{R}$。 M的 ε-平移 记作 $M(\varepsilon)$，是由下式定义的模:

$$M(\varepsilon)_p := M_{\mathbb{P}_\varepsilon(p)} \quad and \quad M(\varepsilon)_{p\to q} := M_{\mathbb{P}_\varepsilon(p)\to\mathbb{P}_\varepsilon(q)}.$$

对于 $\varepsilon \le \delta$，定义态射

$$M_{\varepsilon\to\delta} : M(\varepsilon) \to M(\delta)$$

由 $(M_{\varepsilon\to\delta})_p := M_{\mathbb{P}_\varepsilon(p)\to\mathbb{P}_\delta(p)}$给出。

定义 2.5. 设 M 为一个模。 M的一个子模 N ，记作 $\boldsymbol{N \subseteq M}$，是满足以下条件的模：对于所有 p， $N_p \subseteq M_p$ ；并且对于每个 $p \le q$，以下图表交换:

$$\begin{array}{ccc} N_p & \xrightarrow{N_{p\to q}} & N_q \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_p & \xrightarrow{M_{p\to q}} & M_q \end{array}$$

定义 2.6. 设 M 为一个模。若存在子模 $K \subseteq I \subseteq M$ 使得 $N \cong I/K$，则称模 N 为 M 的子商 。

等价地，若存在一个模 M'，以及一个单态射 $f\colon M\prime\to M$和一个满态射 $g\colon M\prime\twoheadrightarrow N$，则称模 N 为 M 的子商 。

引理 2.7. 子商关系是在有限维点态模块的同构类集合上的偏序。

模之间的距离总是指扩展伪度量。扩展意味着距离可能为无穷大；伪意味着允许不同的模之间的距离为零。

定义 2.8。 两个模 M 和 N 之间的 ε-交错是一对态射

$$\varphi : M \to N(\varepsilon) \quad and \quad \psi : N \to M(\varepsilon)$$

使得

$$\psi(\varepsilon)\circ\varphi = M_{0\to 2\varepsilon} \quad and \quad \varphi(\varepsilon)\circ\psi = N_{0\to 2\varepsilon}.$$

如果存在这样的交错，我们就称 M 和 N 是 ε-交错的，并记作 $M \sim_\varepsilon N$。交错距离 d_I 定义为

$$d_I(M,N) = \inf\{\varepsilon \ge 0 \mid M \sim_\varepsilon N\}.$$

定义 2.9。设 M 和 N 为 ***pfd*** 模块。从 M 到 N 的匹配是一个双射

$$\sigma : \bar{B}(M) \to \bar{B}(N)$$

其中 $B(M) \subseteq B(M)$ 以及 $B(N) \subseteq B(N)$。

此外，如果：

- *for each* $Q \in \bar{B}(M)$, $Q \sim_\varepsilon \sigma(Q)$.
- *for each* $Q \in (B(M) \setminus \bar{B}(M)) \cup (B(N) \setminus \bar{B}(N))$, $Q \sim_\varepsilon 0$ *(the zero module).*

那么 σ 称为从 M 到 N的一个 ε-匹配。

该瓶颈距离 d_B 定义为：

$$d_B(M, N) = \text{下确界}\{\varepsilon \geq 0 \mid \text{存在 } M \text{ 与 } N \text{ 之间的一个 } \varepsilon\text{-匹配}\}。$$

我们将使用记号 $x \in M$ 表示一个模 M，意指对于某个点 $p \in \mathbf{P}$，有 $x \in M_p$。

2.2 剪枝

为了处理证明其主要结果时遇到的一些困难，[3], Bjerkevik 引入了 ε-剪枝的概念。尽管剪枝最初是为了解决这些特定困难而提出的，但后来证明它具有稳健的理论性质。本节将回顾其定义、构造，以及一个计算剪枝的示例。

定义 2.10. (剪枝) 设 M 为一个模。令 I 为 M 的最大子模，使得对于任意态射 $f\colon M \to M(2\varepsilon)$，都有 $f(I) \subseteq M_{0\to 2\varepsilon}(I)$。
令 K 为 I 的最小子模，使得对于任意态射 $f\colon M \to M(2\varepsilon)$，都有 $I^{-1}_{0\to 2\varepsilon}(f(K)) \subseteq K$。

我们将 M 的 ε-剪枝对定义为有序对 (I, K)，并将 M 的 ε-剪枝定义为

$$\mathrm{Pru}_\varepsilon(M) := (I/K)(-\varepsilon).$$

例如，模 M 的0-剪枝对为 $(M,0)$，而 M 的0-剪枝为

$$\mathrm{Pru}_0(M) = (M/0)(0) \cong M.$$

引理 2.11. 设 M 是一个模。那么 M 的 δ-剪枝对 (I, K) 是良定义的。令 $\{f_j\}_{j\in\Gamma}$ 表示从 M 到 $M(2\delta)$ 的所有态射组成的集合 $\cdot$ 具体来说：

- $I = \bigcap_{i=0}^{\infty} I_i$，其中我们定义

$$I_0 = M, \quad I_i = \bigcap_{j\in\Gamma} f_j^{-1}(M_{0\to 2\delta}(I_{i-1})) \subseteq M \quad \textit{for all } i \geq 1.$$

- $K = \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i$，其中我们定义

$$K_0 = 0, \quad K_i = \sum_{j\in\Gamma} I^{-1}_{0\to 2\delta}(f_j(K_{i-1})) \subseteq I \quad \textit{for all } i \geq 1.$$

此外，对于所有 $i \geq 0$，我们有 $I_i \supseteq I_{i+1}$ 和 $K_i \subseteq K_{i+1}$。

计算剪枝的示例。

设 M 是一个由 $M = M_1 \oplus M_2 \oplus M_3$ 定义的单参数模，其中 $M_1 = [0, 8]$、$M_2 = [2, 8]$, 和 $M_3 = [4, 8]$，且每个 M_i 都是在标准单参数情形下的区间模；本文不对其作明确的定义。

让我们计算 $\mathrm{Pru}_1(M)$:

根据 [2, 命题 5.3], ，我们有：若 $f : M \to N$ 是单参数逐点有限维持久模之间的态射，且 f 将 $[b, d]$ 映入 $[b', d']$. ，则 $b' \leq b < d' \leq d$.

因此，态射 f 从 M 到 $M(2)$ 可以将 M_1 映入 $M_1(2)$ 或 $M_2(2)$，也可以将 M_2 或 M_3 映入 $M_1(2)$、$M_2(2)$ 或 $M_3(2)$。我们选取 f_1，使其成为从 M 到 $M(2)$ 的态射，并满足其映射关系：$M_1 \mapsto M_2(2)$、$M_2 \mapsto M_3(2)$、$M_3 \mapsto M_3(2)$。由于 $\mathrm{supp}(M_3) \subseteq \mathrm{supp}(M_2) \subseteq \mathrm{supp}(M_1)$，构造 f_1 时使其原像包含于从 M 到 $M(2)$ 的任意其他态射 f 的原像中。我们设 $I_0 = M$。

$$M_{0\to 2}(I_0) \cong [0, 6] \oplus [2, 6] \oplus [4, 6],$$

于是:

$$I_1 \cong \bigcap_{j\in\Gamma} f_j^{-1}(M_{0\to 2\delta}(I_0)) \cong f_1^{-1}(M_{0\to 2}(I_0)) \cong [2, 8] \oplus [4, 8] \oplus [4, 8].$$

为计算 I_2，我们采用相同的推理:

$$I_2 \cong f_1^{-1}(M_{0\to 2}(I_1)) \cong [4, 8] \oplus [4, 8] \oplus [4, 8].$$

我们观察到 $I_3 \cong I_2$，因此迭代已稳定。

$$K \cong K_1 \cong \mathrm{Ker}(I_{0\to 2}) \cong [6, 8] \oplus [6, 8] \oplus [6, 8].$$

最后，我们得到:

$$\mathrm{Pru}_1(M) \cong I/K(-1) \cong [5, 7] \oplus [5, 7] \oplus [5, 7].$$

2.3 剪枝距离

ε-剪枝自然引出了剪枝距离的定义。这种距离是多参数情形下表现良好的度量的一个有前景的候选。本文的主要目标是朝着确立这种距离在上集可分解模中的稳定性迈进一步。除了稳定性性质外，已有迹象表明，剪枝距离或许可以在多项式时间内计算，这使得它有望兼具理论上的稳健性与算法可处理性。

定义 2.12. ∞-细化 的 $M \cong \bigoplus_{i\in I} M_i$ （其中每个 M_i 都不可分解）是一个同构于模 $\bigoplus_{i\in I} N_i$ 的模，且对于每个 $i \in I$， N_i 都是 M_i 的子商。

ε细化的定义见 [3] ，但本文的结果不需要用到它。

定义 2.13。 剪枝距离 d_P 定义为

$$\begin{aligned} d_P(M,N) = \inf\{\varepsilon \geq 0 \mid \forall \delta \geq 0, \\ &\mathrm{Pru}_{\varepsilon+\delta}(M) \textit{ is an } \infty\textit{-refinement of } \mathrm{Pru}_{\delta}(N) \textit{ and} \\ &\mathrm{Pru}_{\varepsilon+\delta}(N) \textit{ is an } \infty\textit{-refinement of } \mathrm{Pru}_{\delta}(M)\} \end{aligned}$$

对于任意有限维点态模块 M 和 N。

命题 2.14. 剪枝距离是一种距离。

下面的猜想指出，这种距离是稳定的；如果我们将范围限制在逐点维数有界的模上，它甚至与交错距离 Lipschitz 等价。

对于一个模 M，令 $\mathrm{supdim}\ M = \sup_{p\in\mathbb{P}} \dim\ M_p \in \{0, 1, \ldots, \infty\}$.

猜想 2.15. 设 M 和 N 是满足 $r = \mathrm{supdim}\, M < \infty$ 的有限维点态模块。那么

$$d_P(M,N) \leq d_I(M,N) \leq 2r\, d_P(M,N).$$

尽管猜想中的左侧不等式已在 [3] 针对 $\delta = 0$ 的情形得到验证，但将其推广到任意正参数仍是一个开放问题。

在 [3] 中，剪枝的许多性质都得到了证明，尤其是 $\mathrm{Pru}_\alpha(M) \sim_{2r\alpha} M$，而论文还给出了以下试图证明右侧不等式的启发式推理。由于 $d_P(M, N) \leq \alpha$，模 $\mathrm{Pru}_\alpha(M)$ 是 ∞ 的细化，而 $\mathrm{Pru}_\alpha(N)$ 是 ∞的细化。因此，存在一个模 $P_1 := \mathrm{Pru}_\alpha(M)$，使得 $M \sim_{2r\alpha} P_1$，并且 P_1是 ∞的细化。类似地，存在一个模 $P_2 := \mathrm{Pru}_\alpha(N)$，使得 $N \sim_{2r\alpha} P_2$，并且 P_2 是 ∞的细化。该推理希望结合这些陈述，在 M 与 N之间构造一个 $2r\alpha$-交错。

然而，这一直觉无法在完全一般的情形下得到精确表述，我们将通过以下例子加以说明。

例 2.16。 我们在图 *1* 中给出了一个反例，以说明上述启发式推理。该构造是在上集可分解模这一类模中进行的，这些模将在第*3*节中讨论。这个反例中的模通过受约束可逆性问题的适当形式得到，简称 *CI*问题；这一形式在 *[4]* 中引入。这里不再回顾 *CI*问题的定义，而是参阅 *[4]*和 *[5]* 以了解所需的背景。

令 $M = M_1 \oplus M_2$ 和 $N = N_1 \oplus N_2$ 为与图 *1* 相关联的两个上集可分解模。我们有 $M_1 \subseteq N_1$*(1)* 和 $M_2 \subseteq N_2$*(1)*，因此 $M(-1)$ 是 N（以及 $M(-1) \sim_1 M$）的一个 ∞-细化。我们还有 $N_1 \subseteq M_2$*(1)* 和 $N_2 \subseteq M_1$*(1)*，因此 $N(-1)$ 是 M（以及 $N(-1) \sim_1 N$）的一个 ∞- 细化，但 $d_I(M, N) = 3$。因此，尽管 M 和 N 满足上述关于 $P_1 = M(-1)$ 和 $P_2 = N(-1)$ 的条件，它们并非 *1*-交错，这表明该启发式方法一般无法精确化。

本文显式计算上集可分解模的剪枝，以证明该类模所满足的不等式。

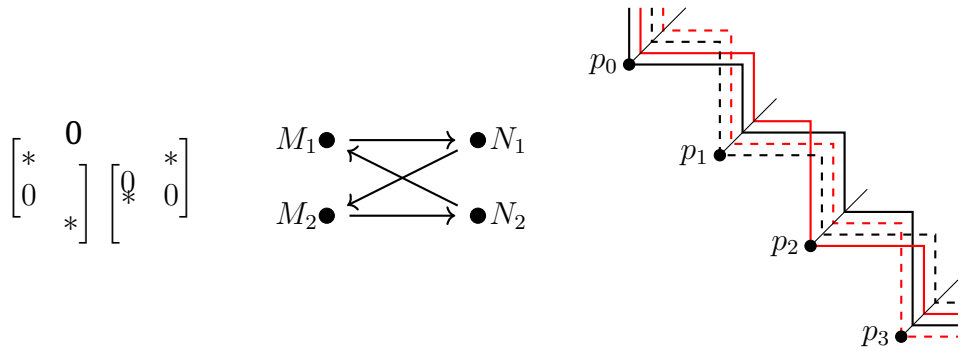


图 1：左侧是一个 CI问题，中间是与其关联的图。右侧是两个与该 CI问题相关的上集可分解模 $M = M_1 \oplus M_2$ 和 $N = N_1 \oplus N_2$的示例，它们是利用 [3, 引理 6.12] 的证明构造的（$C = 4$）。实线黑色、虚线黑色、实线红色和虚线红色曲线分别是上集 M_1、M_2、N_1 和 N_2的边界。对于每个 $i \in \{0, 1, 2, 3\}$，$p_i = (8i, -8i) \in \mathbb{R}^2$，每个对角步都是在前一个点上加上 (1, 1)。利用同一个引理，这一构造表明 $d_I(M, N) = 3$。

3 上集可分解模的剪枝

3.1 上集可分解模

本节回顾上集可分解模的定义。这类模是下一节主要结果将要证明的对象。我们还陈述并证明若干标准引理，这些引理将在下文中反复使用。这些结果在文献中广为人知。相关结果的精确陈述和证明可见 [5] 中的引理 3.5、3.6 和 3.7。

定义 3.1. 上闭区间 是一个集合 $U \subset \mathbb{R}^d$，满足 $\forall p \in U, \forall q \geq p$ 属于 U。与 U 相关联的上集模 M 是由 $M_p = k$ 定义的模：若 $p \in U$，则取该值；否则取 0。$M_{p\to q} = \mathrm{Id}_k, \forall p \in U$。并且若 $p \notin U$，$M_p = 0$ 则自动有 $M_{p\to q} = 0$。上集可分解模 是一个同构于若干上集模直和的模。

为简化记号，对于上集模 M 和 N，我们用 $M \subseteq N$ 表示 $\mathrm{supp}(M) \subseteq \mathrm{supp}(N)$，这等价于存在一个单态射 $M \hookrightarrow N$。若 $M = \bigoplus_{l=1}^{r} M_l$ 和 $N = \bigoplus_{l=1}^{r} N_l$ 是上集可分解模，我们用 $M \subseteq N$ 表示对所有 $l = 1,\ldots,r$，都有 $M_l \subseteq N_l$。

引理 3.2. 设 M 是一个上集模。那么对所有 $\varepsilon \leq \alpha$，我们有

$$M(\varepsilon) \subseteq M(\alpha),$$

也就是说，平移态射 $M_{\varepsilon\to\alpha}\colon M(\varepsilon) \to M(\alpha)$ 是单射。因此，若 $M = \bigoplus_{l=1}^{r} M_l$ 是一个上集可分解模

$$\pi_l(M(\varepsilon)) \subseteq \pi_l(M(\alpha)), \forall l \in \{1, 2, ..., r\},$$

其中 π_l 表示从直和中的 M 到 M_l 的典范投影。

证明。对于任意 $p \in \mathrm{P}$，我们有 $\mathrm{P}_\varepsilon(p) \leq \mathrm{P}_\alpha(p)$，且由于 M 是一个上集模 $(M_{\varepsilon\to\alpha})_p = M_{\mathbb{P}_\varepsilon(p)\to\mathbb{P}_\alpha(p)}$ 对每个 p 都是单射。因此 $M_{\varepsilon\to\alpha}$ 是一个单射，故 $M(\varepsilon) \subseteq M(\alpha)$。 □

引理 3.3. 设 M 是一个上集模。那么，N 中的每个子模都是上集模。

证明。设 N 是 M 的一个非零子模。任取 $p \in \mathrm{supp}(N)$ 和任意 $q \geq p$。由于 $N \subseteq M$ 和 M 是上集可分解的，因此有 $p, q \in \mathrm{supp}(M)$。特别地，$M_p = M_q = k$，因此包含关系 $0 \neq N_p \subseteq M_p = k$ 迫使 $N_p = k$。又由于 $M_{p\to q} = \mathrm{id}_k$，由子模 $N \subseteq M$ 诱导的图表是

$$\begin{array}{ccc} N_p = k & \longrightarrow & N_q \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_p = k & \xrightarrow[\mathrm{id}_k]{} & M_q = k \end{array}$$

底部的箭头是同构，且垂直映射是单射，因此顶部的箭头也是同构。特别地，$N_q = k$ 和 $N_{p\to q} = \mathrm{id}_k$。因此 $q \in \mathrm{supp}(N)$。所以 N 是一个上集模。

□

引理 3.4. 设 M 和 N 是非零上集模。若 N 是 M 的子商，则 N同构于 M 的一个子模，因此 $N \subseteq M$.

证明。

$$N \cong M'/M''$$

其中 $M'' \subseteq M' \subseteq M$。由于 M是上集模，根据引理 3.3， M的每个子模都是上集模，因此 M' 和 M''都是上集模。因为 N非零，所以存在 $p_1 \in \text{supp}(M') \setminus \text{supp}(M'')$。反设 $M'' \neq 0$。取 $p_2 \in \text{supp}(M'')$。由于我们在 $\mathbf{R}^d$中讨论，可以取 p_3 使得 $p_3 \geq p_1$ 且 $p_3 \geq p_2$。我们有

$$p_3 \in \text{supp}(M') \quad \text{and} \quad p_3 \in \text{supp}(M'').$$

因此 $N_{p_3} \cong (M'/M'')_{p_3} = 0$。但是 $p_3 \geq p_1$，所以 $p_3 \in \text{supp}(N)$，矛盾。因此 $M'' = 0$。于是 $N \cong M'$，其中 M'是 M的子模。 □

引理 3.5. 设 M和 N是非零上集模，且设 $f\colon M \to N$。则存在 $\lambda \in k$，使得对每个 $p \in \text{supp}(M)$， $f_p(1) = \lambda$.

证明。选取 $p_1 \in \text{supp}(M)$，并令 $\lambda = f_{p_1}(1)$。设 $p_2 \in \text{supp}(M)$，我们来证明 $\lambda = f_{p_2}(1)$。选取 $p_3 \in \text{supp}(M)$，使得 $p_1 \leq p_3$ 且 $p_2 \leq p_3$。由引理 3.2， M 与 N 中从 p_1 到 p_3 以及从 p_2 到 p_3 的移位映射均为单射。利用与引理 3.3 中形状相同的交换图，我们得到

$$\lambda = f_{p_1}(1) = f_{p_3}(1) = f_{p_2}(1).$$

□

引理 3.6。设 M 与 N 为上集模。若 $M \not\subseteq N$，则唯一可能的态射 $f\colon M \to N$ 为零映射。若 $M \subseteq N$，则 $\lambda \in k$ 的每一种选取都给出一个态射 $f\colon M \to N$。

证明。第一种情形： $M \not\subseteq N$。此时存在 $p_1 \in \text{supp}(M)$，使得 $p_1 \notin \text{supp}(N)$。因此 f_{p_1}: $M_{p_1} \to N_{p_1} = 0$ 必然为零映射。由引理 3.5， $f_p(1)$ 在 $\text{supp}(M)$ 上必为常数，故对所有 p 有 $f_p(1) = 0$，从而 f 为零态射。

第二种情况： $M \subseteq N$。令 $\lambda \in k$并定义 $f_p\colon M_p \to N_p$，使得 $f_p(1) = \lambda$对每个$p \in \text{supp}(M)$ 都成立（若 $M_p = 0$，则还需满足 $f_p = 0$ ）。根据引理 3.5，非零态射只能具有这种形式。

□

引理 3.7。设 $M = \bigoplus_{l=1}^{r} M_l$和 $N = \bigoplus_{s=1}^{r} N_s$是上集可分解模。映射 $f\colon M \to N$是态射，当且仅当每个分量 $f_l^s\colon M_l \longrightarrow N_s$都是上集模的模之间的态射，其中 $\forall l, s \in \{1, \ldots, r\}$。因此，任意态射 f 都可以由一个以 k 为元素的 $r \times r$ 矩阵确定。

证明。令 $p \leq q$，考虑以下图表：

$$\begin{array}{ccc} M_p & \xrightarrow{M_{p\to q}} & M_q \\ \downarrow{\scriptstyle f_p} & & \downarrow{\scriptstyle f_q} \\ N_p & \xrightarrow{N_{p\to q}} & N_q \end{array}$$

由于 $M_p = \bigoplus_{l=1}^{r}(M_l)_p$ 且 $N_q = \bigoplus_{s=1}^{r}(N_s)_q$，该图表可交换，当且仅当对于所有 l和 s，两个复合映射先限制到 $(M_l)_p$，再投影到 $(N_s)_q$ 所得的结果相同。等价地，对于所有 l 和 s，以下图表必须可交换：

$$\begin{array}{ccc} (M_l)_p & \xrightarrow{(M_l)_{p\to q}} & (M_l)_q \\ \Big\downarrow{\scriptstyle (f_l^s)_p} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (f_l^s)_q} \\ (N_s)_p & \xrightarrow[(N_s)_{p\to q}]{} & (N_s)_q \end{array}$$

其中，$(f_l^s)_p$ 表示将 f_p 限制到直和项 M_l，再投影到直和项 N_s。但是，$f = \{f_p\}$ 定义一个态射，当且仅当第一个图对所有 $p \le q$ 都交换；而限制 $(f_l^s)_p$ 定义一个态射 $M_l \to N_s$，当且仅当第二个图对所有 $p \le q$ 都交换。因此，我们证明了这一等价性。 □

将引理 3.7 中描述的矩阵记为 A^f。由引理 3.6 $A_{l\ ,s}^{f} = 0$ 可立即得到，只要 $M_l \not\subseteq N_s$.。只需确定任意 p $\in \bigcap_{l=1}^{r}$supp(M_l) 对应的 f_p，即可确定 $A_{l\ ,s}^{f}$（因此也确定 f）。

$M_{l_1} \bigcap M_{l_2}$ 表示满足 supp($M_{l_1} \bigcap M_{l_2}$) =supp(M_{l_l}) ⋂supp(M_{l_2}). 的上集模。

以下引理似乎未在现有文献中明确出现，后文将会用到。

引理 3.8。设 $M = \bigoplus_{l=1}^{r} M_l$ 和 $N = \bigoplus_{s=1}^{r} N_s$ 是上集可分解模，设 $f{:}M \to N$ 和 $N\prime = \bigoplus_{s=1}^{r} N_s' \subseteq N.$，则

$$\left(f_{|_{M_l}}\right)^{-1}(N') = M_l \bigcap \left(\bigcap_{s\in J_l^f} N_s'\right).$$

其中 J_l^f =**{**$s \in$**{**1、2、...、 r**}** :$A_{l\ ,\ s}^{f} \neq 0$**}** ⊆**{**1、2、...、 r**}**。此外，$f^{-1}(N\prime) = \bigoplus_{l=1}^{r} \pi_l(f^{-1}($ $N\prime)) = \bigoplus_{l=1}^{r}\left(f_{|_{M_l}}\right)^{-1}(N')$。

证明。根据引理 3.3，$\left(f_{|_{M_l}}\right)^{-1}(N')$ 是一个上集模，因为它是上集模 M_l 的子模。现在我们来求它的支撑：

- 若 $p \notin$supp(M_l)，则 $(M_l)_p = 0$，因此 $((f|_{M_l})^{-1}(N\prime))_p$=0。
- 若 $p \in$supp(M_l)，但 $p \notin \bigcap_{s\in J_l^f}$supp($N_{\prime s}$)，则存在 $s \in J_l^f$使得 $p \notin$supp($N_{\prime s}$)。这意味着 $(f_l^s)_p$(1)) = $A_{l\ ,\ s}^{f} \neq 0$且 $(N_{\prime s})_p = 0$，因此可得 $(f|_{M_l})_p$(1) $\notin N_{\prime p}$。由于 $(M_l)_p = k$，我们得到 $(\mathrm{im}(f|_{M_l}))_p \cap N_{\prime}{}_p = 0$，从而 $((f|_{M_l})^{-1}(N\prime))_p = 0$。
- 若 $p \in$supp(M_l) $\bigcap\left(\cap_{s\in J_l^f}\text{supp}(N_{\prime s})\right)$（如果有任何一个 $N_{\prime}{}_s = 0$，则无须证明）。令 $x \in (M_l)_p$,若 $s \notin J_l^f, f_l^s(x)) = 0$，并且若 $s \in J_l^f$，则有 $(N_{\prime s})_p$ =$(N_s)_p$，因此 $(\mathrm{im}(f|_{M_l})$ $\subset N_{\prime p}$，且 $\left((f_{|_{M_l}})_p\right)^{-1}(N\prime)$ =$(M_l)_p = k.$

因此 $(f|_{M_l})^{-1}(N') = M_l \cap \left(\bigcap_{s\in J_l^f} N'_s\right)$.

□

3.2 上集可分解模的剪枝

本节证明本文的主要结果，即猜想 2.15 中针对上集可分解模的右侧不等式。证明通过对这些模进行显式计算剪枝来完成。我们首先将上集可分解模与有向图关联起来，把问题转化为组合背景，从而能够系统地计算剪枝。

令 $\alpha \geq 0$为一个固定常数。为了计算上集可分解模 $M = \bigoplus_{l=1}^{r} M_l$, 的 α-剪枝，我们首先将 M 与有向图 $G(M,\alpha)$关联起来。 $G(M,\alpha)$的顶点为 $\{M_1,\ldots,M_r\}$；若 $M_{l_1} \subseteq M_{l_2}$ (2α)，则存在一条边 $M_{l_1} \to M_{l_2}$。下文中，路径均指有向路径。

对于每个 $l_1 \in \{1,\ldots,r\}$，定义从 l_1 可达的指标集合：

- $JM_{l_1}^0 = \{l_1\}$,
- $JM_{l_1}^u = \left\{ l \in \{1,\ldots,r\} \;\middle|\; \exists \text{ path of length } \leq u \text{ from } M_{l_1} \text{ to } M_l \right\}, \forall u \in \{1,\ldots,r-1\}$,
- $JM_{l_1} = \left\{ l \in \{1,\ldots,r\} \;\middle|\; \exists \text{ path from } M_{l_1} \text{ to } M_l \right\}$.

我们用 $M_{l_1} \to^* M_l$ 表示存在这样一条路径。注意到 $JM_{l_1} = JM_{l_1}^{r-1}$，因为所有不含重复顶点的路径长度至多为 $r-1$。

对于 $S \subseteq \{1, \ldots\ldots, r\}$，我们定义 $JM_S := \bigcup_{l\in S} JM_l$.

定理 3.9。 设 $\alpha \geq 0$，并设 $M = \bigoplus_{l=1}^{r} M_l$ 是一个上集可分解模。该 n

$$\pi_{l_1}(\mathrm{Pru}_\alpha(M)) = \bigcap_{l\in JM_{l_1}} M_l(-\alpha),$$

其中 JM_{l_1} 如上所定义。

证明。 为了计算 α-剪枝，我们采用引理 2.11 的证明中的构造，即计算模 K 和 I。由于 M 是上集可分解的，根据引理 3.3， I 也上集可分解。

根据引理 3.2， I 的平移态射是单射。因此，

$$K_1 = \sum_{j\in\Gamma} (I_{0\to 2\alpha})^{-1}(f_j(0)) = 0 = K_0,$$

其中，$\{f_j\}_{j\in\Gamma}$ 是从 M 到 M（2α）的态射集合。因此 $K = 0$。于是，我们有

$$\mathrm{Pru}_\alpha(M) = I(-\alpha).$$

接下来，我们计算 I。为此，我们需要对每个 i 计算 I_i。我们声称：

$$\pi_{l_1}(I_i) = \bigcap_{l\in JM_{l_1}^i} M_l.$$

对于 i=0，这些断言成立。假设根据归纳法，结论对 $i-1$ 成立；下面证明它对 i也成立。

$$\pi_{l_1}(I_i) = \bigcap_{j\in\Gamma} \pi_{l_1}(f_j^{-1}(M_{0\to 2\alpha}(I_{i-1}))).$$

根据引理 3.2， $\pi_l(M_{0\to 2\alpha}(I_{i-1})) \cong \pi_l(I_{i-1})$ $\forall l \in \{1, 2, \ldots\ldots, r\}$。使用引理 3.8

$$\pi_{l_1}(f_j^{-1}(I_{i-1})) = \pi_{l_1}(I_{i-1}) \bigcap \left(\bigcap_{v\in J_{l_1}^{f_j}} \pi_l(I_{i-1}) \right)$$

由于$\{f_j\}_{j\in\Gamma}$是从 M到 $M(2\alpha)$的所有可能态射的集合，因此 $\bigcup_{j\in\Gamma} J_{l_1}^{f_j} = JM_{l_1}^1$，并且我们有 $l_1 \in JM_{l_1}^1$，所以

$$\pi_{l_1}(I_i) = \bigcap_{j\in\Gamma} \pi_{l_1}(f_j^{-1}(I_{i-1})) = \bigcap_{v\in JM_{l_1}^1} \pi_v(I_{i-1})$$

因此，利用归纳假设可得：

$$\pi_{l_1}(I_i) = \bigcap_{v\in JM_{l_1}^1} \left(\bigcap_{l\in JM_v^{i-1}} M_l \right) = \bigcap_{l\in JM_{l_1}^i} M_l.$$

最后一个等式来自这样一个事实： l 到某个点 v 的路径距离小于 $i-1$ ，且该点到 l_1 的距离小于 1，这与 l 到 l_1的距离小于 i 是等价的。因此

$$\pi_{l_1}(I) = \bigcap_{i=0}^{\infty} \pi_{l_1}(I_i) = \bigcap_{l\in\bigcup_{i=0}^{r-1} JM_{l_1}^i} M_l = \bigcap_{l\in JM_{l_1}} M_l$$

因此我们得到：

$$\pi_{l_1}(\mathrm{Pru}_\alpha(M)) = \pi_{l_1}(I)(-\alpha) = \bigcap_{l\in JM_{l_1}} M_l(-\alpha).$$

□

设 G 为一个有向图，满足 $|V(G)| < \infty$。设 A， $B \subseteq V(G)$。对于 a， $b \in V(G)$，令 $l_G(a, b)$ 表示从 a 到 b的最短路径长度，其中 $l_G(a, a) = 0$，若不存在从 a 到 b 的路径，则 $l_G(a, b) = \infty$。设

$$d_G(A, B) := \max_{b\in B} \min_{a\in A} l_G(a, b).$$

换句话说，这是从 A 中某个顶点出发，到达 B 中每个顶点所需的最短路径长度。显然，一般而言， $d_G(A, B) \neq d_G(B, A)$。

引理 3.10. 令 $A \subseteq V(G)$ 并设

$$B := \{\, b \in V(G) \mid d_G(A, \{b\}) < \infty \,\},$$

即从 A可达的顶点集合。于是

$$d_G(A, B) \leq |B| - |A|,$$

其中 $|\cdot|$ 表示基数。

证明。反设 $d_G(A,B) = c > |B| - |A|$，因此存在 $b_1 \in B$，使得 $\min_{a\in A} l_G(a,b_1) = c$。于是对每个 $a \in A$，都有 $l_G(a,b_1) \geq c$，且存在 $a_1 \in A$ 使得 $l_G(a_1,b_1) = c$。令

$$P : a_1 = v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_{c-1} \to v_c = b_1$$

是一条长度为 c 的路径。$c-1$ 中间顶点 $v_1, \ldots, v_{c-1}$ 两两不同（否则可以缩短该路径）。此外，b_1 不能是中间顶点，否则该路径还可以再次缩短。没有一个中间顶点位于 A 中，因为如果 $v_j \in A$，那么 $l_G(v_j,b_1) \leq c-j < c$，因此我们将得到 A 中的一个元素，其到 b_1 的路径严格短于 c。

显然，每个中间顶点都属于 B。因此，中间顶点构成 $B \setminus (A \cup \{b_1\})$ 的一个子集。如果 $b_1 \in A$，则 $c = 0$，这与 $c > |B| - |A|$ 矛盾。如果 $b_1 \notin A$，我们得到 $|B \setminus (A \cup \{b_1\})| = |B| - |A| - 1$。因此

$$c - 1 \leq |B| - |A| - 1,$$

所以 $c \leq |B| - |A|$，矛盾。因此 $d_G(A,B) \leq |B| - |A|$。 □

引理 3.11. 设 $M = \bigoplus_{l=1}^r M_l$ 是一个上集可分解模，$G = G(M,\alpha)$ 是如上所定义的、与 M 相关联的有向图，其中 $\alpha \geq 0$ 为某个对象。则

$$l_G(M_{l_1}, M_{l_2}) \leq c \quad \Longrightarrow \quad M_{l_1} \subseteq M_{l_2}(2c\alpha).$$

证明。假设 $l_G(M_{l_1},M_{l_2}) \leq c$。那么存在一条路径

$$P : \ M_{l_1} = M_{l'_0} \to M_{l'_1} \to \cdots \to M_{l'_{c'-1}} \to M_{l'_{c'}} = M_{l_2},$$

其中 $c' \leq c.$。根据 G 的构造，每条箭头都给出一个平移 2α 后的包含关系，因此

$$M_{l_1} \subseteq M_{l'_1}(2\alpha) \subseteq M_{l'_2}(4\alpha) \subseteq \cdots \subseteq M_{l'_{c'-1}}(2(c'-1)\alpha) \subseteq M_{l_2}(2c'\alpha).$$

由于 $c' \leq c$，由引理 3.2 可得 $M_{l_2}(2c'\alpha) \subseteq M_{l_2}(2c\alpha)$，这就证明了该结论。

□

引理 3.12. 设 N 是一个上集模，$M = \bigoplus_{l=1}^r M_l$ 是一个上集可分解模，$G = G(M,\alpha)$ 是与 M 相关联的有向图，其中 $\alpha \geq 0$ 为某个对象。设 $A, B \subseteq V(G)$ 如引理 *3.10* 中所述，则：

$$\forall M_a \in A,\ N \subseteq M_a \quad \Longrightarrow \quad \forall M_b \in B,\ N \subseteq M_b(2(|B| - |A|)\alpha).$$

证明。令 $M_b \in B$. 则

$$\begin{aligned}
& d_G(A, \{M_b\}) \leq d_G(A,B) \leq |B| - |A| \text{ by Lemma 3.10.} \\
\Longrightarrow\ & \min_{M_a \in A} l_G(M_a, M_b) \leq |B| - |A| \\
\Longrightarrow\ & \exists M_{a_1} \in A \mid l_G(M_{a_1}, M_b) \leq |B| - |A| \\
\Longrightarrow\ & \exists M_{a_1} \in A \mid M_{a_1} \subseteq M_b(2(|B| - |A|)\alpha) \text{ by Lemma 3.11} \\
\Longrightarrow\ & N \subseteq M_{a_1} \subseteq M_b(2(|B| - |A|)\alpha).
\end{aligned}$$

由此得证。

□

引理 3.13。 设 $M=\bigoplus_{l=1}^{r} M_l$ 和 $N=\bigoplus_{l=1}^{r} N_l$ 是上集可分解模。若 N 是 M的 ∞-细化，则存在 σ 的一个排列，它作用于 $\{1,\ldots,r\}$，使得

$$N_{\sigma(l)} \subseteq M_l, \forall l \in \{1,\ldots,r\}.$$

Proof. 令 N 是 M 的一个 ∞-细化。根据定义，存在一个分解 n

$$N \cong \bigoplus_{l=1}^{r} N_l'$$

使得每个 N_l 都是 M_l 的子商。由引理 3.4 可知，每个 N_l' 都是上集模，因此不可分解且 $N_l' \subseteq M_l$。由于 N_l 不可分解且非零，根据定理 2.2，存在一个 {1，.....， r} 的排列 σ，使得 $N_l' \cong N_{\sigma(l)}$.。因此 $N_{\sigma(l)} \subseteq M_l$。 □

引理 3.14. 设 $M=\bigoplus_{l=1}^{r} M_l$ 是上集可分解的，且 $G=G(M,\alpha)$ 是与 M 相关联的有向图，其中某个 $\alpha \geq 0$。若 $l_2 \in JM_{l_1}$，则 $\pi_{l_1}(\mathrm{Pru}_\alpha(M)) \subseteq \pi_{l_2}(\mathrm{Pru}_\alpha(M))$

证明。 由 $\to^*$ 的传递性可得 $JM_{l_2} \subseteq JM_{l_1}$，因此

$$\pi_{l_1}(\mathrm{Pru}_\alpha(M)) = \bigcap_{l \in JM_{l_1}} M_l(-\alpha) \subseteq \bigcap_{l \in JM_{l_2}} M_l(-\alpha) = \pi_{l_2}(\mathrm{Pru}_\alpha(M)),$$

由此证明了该引理。 □

我们现在陈述并证明本文的一个主要结果，该结果证明了上集可分解模这一类在猜想 2.15 中的上界。我们将常数从 $2r$ 改进为 $2r-1$，并通过用瓶颈距离 d_B替换交错距离 d_I 来加强该陈述；由于 $d_I \leq d_B$，关于 d_I 的猜想界立即随之成立。

我们还在例 3.17 中表明，该界对 d_I 和 d_B 而言都是最优的。

定理 3.15. 设 M 与 N 为有限点维上集可分解模，且 $r=\mathrm{supdim}\ M<\infty$，则

$$d_B(M,N) \leq (2r-1)\, d_P(M,N).$$

证明. 若 supdim $N \neq r$，则两个距离 $=\infty$，因此无需证明。
设 supdim $N=r$，即 $M=\bigoplus_{l=1}^{r} M_l$ 且 $N=\bigoplus_{l=1}^{r} N_l$.。令 $\alpha \geq 0$，使得 $\mathrm{Pru}_\alpha(M)$ 是 N 的一个 ∞-细化，且 $\mathrm{Pru}_\alpha(N)$ 是 M 的一个 ∞-细化，我们的目标是证明在 M 与 N之间存在一个 $(2r-1)\alpha$-匹配。由引理 3.13，存在$\{1,\ldots,r\}$ 的排列 σ_1,σ_2，使得

$$\pi_{\sigma_1(l)}(\mathrm{Pru}_\alpha(M)) \subseteq N_l \quad \text{and} \quad \pi_{\sigma_2(l)}(\mathrm{Pru}_\alpha(N)) \subseteq M_l, \quad \forall\, l \in \{1,\ldots,r\}.$$

定义 $N'=\bigoplus_{l=1}^{r} N_l$其中 $N_l=N_{\sigma_2(l)}$，则 $N_l \cong N$。令 $\sigma=\sigma_2^{-1}\circ\sigma_1^{-1}$，可得

$$\pi_l(\mathrm{Pru}_\alpha(M)) \subseteq N'_{\sigma(l)} \quad \text{and} \quad \pi_l(\mathrm{Pru}_\alpha(N')) \subseteq M_l, \quad \forall\, l \in \{1,\ldots,r\}. \tag{1}$$

由于 $N' \cong N$ 在 N 和 M 之间存在匹配，等价于在 M和 N_l之间存在匹配。从现在起，为简化记号， N表示 N'。

该匹配将对所有 $l \in \{1,\ldots,r\}$，把 M_l 与 N_l 对应起来。因此，只需证明

$$M_l \subseteq N_l((2r-1)\alpha) \quad \text{and} \quad N_l \subseteq M_l((2r-1)\alpha), \quad \forall\, l \in \{1,\ldots,r\}.$$

固定 $l_1 \in \{1,\ldots,r\}$。在有向图 $G(N,\alpha)$ 中，设

$$A = \{N_{l_1}\}, \qquad B = \{N_l : l \in JN_{l_1}\}.$$

引理 3.12 给出

$$N_{l_1} \subseteq N_l((2|JN_{l_1}|-2)\alpha) \quad \forall\, l \in JN_{l_1}$$

因此

$$N_{l_1} \subseteq \bigcap_{l \in JN_{l_1}} N_l((2|JN_{l_1}|-2)\alpha)$$

因此，由定理 3.9 和 (1) 可得:

$$N_{l_1} \subseteq \pi_{l_1}(\mathrm{Pru}_\alpha(N))((2|JN_{l_1}|-1)\alpha) \subseteq M_{l_1}((2|JN_{l_1}|-1)\alpha).$$

由于 $|JN_{l_1}| \le r$，我们得到

$$N_{l_1} \subseteq M_{l_1}((2r-1)\alpha).$$

我们在 $G(M,\alpha)$ 中采用类似的论证。令 $J_1 = JM_{l_1}$。我们得到,

$$\forall l \in J_1, \quad M_{l_1} \subseteq M_l((2|J_1|-2)\alpha) \tag{2}$$

and

$$M_{l_1} \subseteq \pi_{l_1}(\mathrm{Pru}_\alpha(M))((2|J_1|-1)\alpha)$$

由引理 3.14 和 (1) 可得

$$M_{l_1} \subseteq \pi_l(\mathrm{Pru}_\alpha(M))((2|J_1|-1)\alpha) \subseteq N_{\sigma(l)}((2|J_1|-1)\alpha) \quad \forall\, l \in J_1$$

等价地,

$$M_{l_1}(-(2|J_1|-1)\alpha) \subseteq N_l \quad \forall\, l \in \sigma(J_1).$$

现在继续在 $G(N,\alpha)$ 中，我们定义 $J_{\prime 1} = JN_{\sigma(J_1)}$，并使用引理 3.12,

$$A = \{N_l : l \in \sigma(J_1)\}, \qquad B = \{N_l \mid l \in J_1'\}$$

可得

$$M_{l_1}(-(2|J_1|-1)\alpha) \subseteq N_l(2(|J_1'|-|J_1|)\alpha) \quad \forall\, l \in J_1',$$

so

$$M_{l_1}(-(2|J_1'|-1)\alpha) \subseteq N_l, \quad \forall\, l \in \sigma(J_1').$$

若 $l_1 \in J_1'$我们得出 $M_{l_1}(-(2|J_{\prime 1}|-1)\alpha) \subseteq N_{l_1}$，则结论成立，因为 $|J_{\prime 1}| \le r$。否则，我们继续计算。根据 $J_{\prime 1}$的构造，对于所有 $l \in J_{\prime 1}$， $JN_l \subseteq J_{\prime 1}$，都有。因此

$$\forall l \in J_1', \quad M_{l_1}(-(2|J_1'|-1)\alpha) \subseteq \bigcap_{s \in JN_l} N_s.$$

因此，再次利用定理 3.9 和 (1)，我们得到

$$\forall l \in J_1', \quad M_{l_1}(-2|J_1'|\alpha) \subseteq \pi_l(\mathrm{Pru}_\alpha(N)) \subseteq M_l. \tag{3}$$

由于（$2|J_1|-2$）$\leq 2|J_1| \leq 2|J_1'|$，我们结合方程（2）和（3），得到

$$\forall l \in J_1' \cup J_1, \quad M_{l_1}(-2|J_1'|\alpha) \subseteq M_l.$$

根据前面的假设 $l_1 \notin J_1'$，并且我们知道 $l_1 \in J_1$，因此 $|J_1 \cup J_1| - 1 \geq |J_{l_1}|$，我们得到

$$\forall l \in J_1' \cup J_1, \quad M_{l_1}(-(2|J_1' \cup J_1| - 2)\alpha) \subseteq M_l.$$

我们定义 $J_2 = JM_{J_1' \cup J_1}$，再次对 $A = \{M_l \mid l \in J_1' \cup J_1\}$ 和 $B = \{M_l \mid l \in J_2\}$ 使用引理 3.12，因此

$$\forall l \in J_2, \quad M_{l_1}(-(2|J_1' \cup J_1| - 2)\alpha) \subseteq M_l(2(|J_2| - |J_1' \cup J_1|)\alpha).$$

thus

$$\forall l \in J_2, \quad M_{l_1}(-(2|J_2| - 2)\alpha) \subseteq M_l.$$

我们定义归纳 $J_{l_n} = JM_{\sigma(J_n)}$，并且每当 $l_1 \notin J_{l_m}$ 时，就令 $J_{n+1} = JM_{J_n \cup J_n'}$。由于 $l_1 \in J_n$，但 $l_1 \notin J_{l_m}$；我们利用 $|J_{l_n} \cup J_n| - 1 \geq |J_n'|$ 这一事实，并反复使用引理 3.12，得到

$$\forall l \in J_n, \quad M_{l_1}((2|J_n| - 2)\alpha) \subseteq M_l.$$

and

$$\forall l \in J_n', \quad M_{l_1}((2|J_n'| - 1)\alpha) \subseteq N_l.$$

我们继续进行归纳，直到达到 $n = n_0$，其中 n_0 是满足 $l_1 \in J_{n_0}'$的第一个整数。我们声称，这个归纳过程是有限的，并且 $n_0 \leq r$。我们通过归纳证明，对于每个 n， $\sigma^n(l_1) \in J_n'$。当 $n = 1$ 时，这一点成立，因为 $l_1 \in J_1$，并且我们有 $\sigma(J_1) \subseteq J_1'$，所以 $\sigma(l_1) \in J'1$；如果 $\sigma^n(l_1) \in J'_n$，那么我们有 $J'_n \subseteq J_{n+1}$，且 $\sigma(J_{n+1}) \subseteq J'_{n+1}$，所以 $\sigma^{n+1}(l_1) \in J_{n+1}'$。由于 σ 是 $\{1, \ldots, r\}$的一个排列，因此存在 $n_0 \leq r$， $\sigma^{n_0}(l_1) = l_1$，这就证明了我们的断言。由此可得

$$M_{l_1} \subseteq N_{l_1}((2|J_{n_0}'| - 1)\alpha) \subseteq N_{l_1}((2r-1)\alpha).$$

由于 l_1 是任意的，

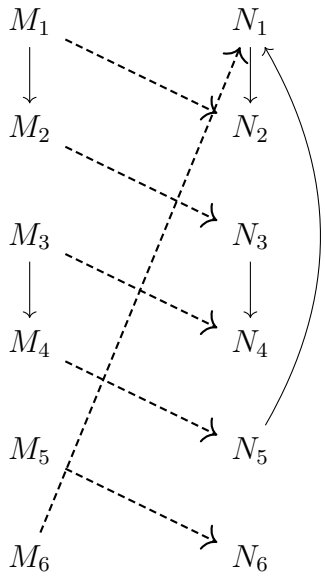
$$\forall\, l \in \{1, \ldots, r\}, \quad M_l \subseteq N_l((2r-1)\alpha) \quad \text{and} \quad N_l \subseteq M_l((2r-1)\alpha).$$

因此，我们构造了一个（$2r-1$）α-匹配，并得出

$$d_B(M, N) \leq (2r-1)\alpha = (2r-1)d_P(M, N).$$

□

例 3.16. 我们将给出一个示例，帮助我们直观地理解证明。设 $M = \bigoplus_{l=1}^{r} M_l$和 $N = \bigoplus_{l=1}^{r} N_l$ 是两个上集可分解模。该图中的竖直箭头表示 $G(M, \alpha)$ 和 $G(N, \alpha)$，而对角箭头表示 σ。



在这个例子中，$l_1 = 1$，我们有 $J_1 = JM_1 = \{1, 2\}$ $J_{1'} = JM_{\sigma(\{1,2\}} = JM_{\{2,3\}} = \{2, 3, 4\}$ $J_2 = JM_{\{1,2,3,4\}} = \{1, 2, 3, 4\}$ $J_{2'} = JM_{\sigma(\{1,2,3,4\}} = JM_{\{2,3,4,5\}} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$。由于 $1 \in J_2'$，我们停止归纳。因此得到 $M_1 \subseteq N_1(9\alpha) \subseteq N_1(11\alpha)$。

下面的例子说明，定理 3.15 中的上界 $(2r-1)d_P(M, N)$ 对瓶颈距离 d_B 和交错距离 d_I. 都可以达到。

例 3.17. 设 $\alpha > 0$ 和 $r \in \mathbb{N}^*$。再设 $M = \bigoplus_{i=1}^{r} M_i$ 和 $N = \bigoplus_{i=1}^{r} N_i$是两个支撑为 d 的参数上集可分解模

$$\mathrm{supp}(M_i) = \{(x_1, \ldots, x_d) \mid (x_1, \ldots, x_d) \geq (2i\alpha, \ldots, 2i\alpha)\}$$

$$\mathrm{supp}(N_i) = \{(x_1, \ldots, x_d) \mid (x_1, \ldots, x_d) \geq ((2r+1)\alpha, \ldots, (2r+1)\alpha)\}.$$

可以验证

$$\mathrm{Pru}_\alpha(M) \cong N,$$

因此，$\mathrm{Pru}_\alpha(M)$是 N 的一个 ∞-细化。此外，对于每个 $\delta > 0$,

$$\mathrm{Pru}_{\alpha+\delta}(M) \cong \mathrm{Pru}_\delta(N) \cong N(-\delta),$$

因此，我们也有 $\mathrm{Pru}_{\alpha+\delta}(M)$是 $N(-\delta)$ 的 ∞-细化。我们也可以轻易验证，$\forall \varepsilon < \alpha$，$\mathrm{Pru}_\varepsilon(M)$不是 N 的 ∞-细化。类似地，N是 M 的 ∞-细化，并且对每个 $\delta > 0$，$\mathrm{Pru}_\delta(N)$都是$\mathrm{Pru}_\delta(M)$ 的 ∞-细化。F

从 t $h^{这些}_{o}$ b观察中我们 o $b^{tain\ t}$ hat

$$d_P(M, N) = \alpha.$$

F此外，由于所有 N_i 都具有相同的支撑，很容易验证

$$d_B(M,N) = d_I(M,N) = (2r-1)\alpha,$$

这表明定理 *3.15* 中的上界确实可以取到 $\forall \alpha > 0$, $\forall d \in \mathbb{N}^*$ 和 $\forall r \in \mathbb{N}^*$。特别地，常数 $2r-1$ 是最优的，而且对于瓶颈距离 d_B 和交错距离 d_I，该不等式都无法进一步加强。

现在我们陈述并证明本文的另一个主要结果。该结果给出了定理 3.15 的一个部分逆命题，其界比猜想 2.15 中的左侧不等式更弱。综合这两个定理可知，在上集可分解模这一类中，剪枝距离与瓶颈距离 Lipschitz 等价。

定理 3.18. 设 M 和 N 是 *pfd* 上集可分解模，则

$$d_P(M,N) \leq d_B(M,N).$$

证明. 设 $r = \text{supdim}\ M$，若 $\text{supdim}\ N \neq r$，则两个距离 $= \infty$，因此无需证明。假设 $\text{supdim}\ N = r$，即 $M = \bigoplus_{l=1}^r M_l$ 且 $N = \bigoplus_{l=1}^r N_l$. 。令 $\alpha \geq 0$, 使得 M 与 N 之间存在一个匹配。这意味着存在一个排列 σ，它属于 $\{1,\ldots,r\}$，使得

$$M_l \subseteq N_{\sigma(l)}(\alpha) \quad \text{and} \quad N_l \subseteq M_{\sigma^{-1}(l)}(\alpha), \quad \forall l \in \{1,\ldots,r\}.$$

定义 $N\prime = \bigoplus_{l=1}^r N_{\prime l}$，其中 $N_{\prime l} = N_{\sigma(l)}$，则 $N\prime \cong N$。我们得到

$$M_l \subseteq N'_l(\alpha) \quad \text{and} \quad N'_l \subseteq M_l(\alpha), \quad \forall l \in \{1,\ldots,r\}. \tag{4}$$

从现在起，为简化记号， N 表示 N'。
我们要证明 $\forall \delta \geq 0$，$\text{Pru}^{\alpha+\delta}(M)$ 是 $\text{Pru}_\delta(N)$ 的 ∞-细化，且 $\text{Pru}^{\alpha+\delta}(N)$ 是 $\text{Pru}_\delta(M)$ 的 ∞-细化。我们只证明第一个结论；第二个结论由对称性可得。根据引理 3.13，只需证明

$$\forall \delta \geq 0, \forall l \in \{1,\ldots,r\}, \quad \pi_l(\text{Pru}_{\alpha+\delta}(M)) \subseteq \pi_l(\text{Pru}_\delta(N)).$$

固定 $l_1 \in \{1, \ldots..., r\}$ 和 $\delta \geq 0$。设 $l \in JN_{l_1}$ 属于有向图 $G(N, \delta)$，则存在一条路径

$$P:\ N_{l_1} = N_{l'_0} \to N_{l'_1} \to \cdots \to N_{l'_{c-1}} \to N_{l'_c} = N_l,$$

对于某个整数 c。根据 $G(N, \delta)$ 的构造，每条箭头都给出一个平移 2δ 后的包含关系，因此

$$N_{l'_0} \subseteq N_{l'_1}(2\delta), N_{l'_1} \subseteq N_{l'_2}(2\delta), \cdots, N_{l'_{c-1}} \subseteq N_{l'_c}(2\delta).$$

由 (4) 可得

$$M_{l'_i} \subseteq N_{l'_i}(\alpha) \subseteq N_{l'_{i+1}}(\alpha+2\delta) \subseteq M_{l'_{i+1}}(2\alpha+2\delta), \quad \forall i \in \{0,\ldots,c-1\}.$$

因此，我们得到存在一条路径

$$P':\ M_{l_1} = M_{l'_0} \to M_{l'_1} \to \cdots \to M_{l'_{c-1}} \to M_{l'_c} = M_l,$$

在有向图 $G(M,\ \alpha+\delta)$ 中。因此 $l \in JM_{l_1}$ 和

$$JN_{l_1} \subseteq JM_{l_1}.$$

因此，由定理 3.9 和 (4) 可得

$$\pi_{l_1}(\mathrm{Pru}_{\alpha+\delta}(M)) = \bigcap_{l\in JM_{l_1}} M_l(-\delta)(-\alpha) \subseteq \bigcap_{l\in JN_{l_1}} N_l(-\delta) = \pi_{l_1}(\mathrm{Pru}_{\delta}(N)).$$

由于 l_1 和 δ 是任意的,

$$\forall \delta \geq 0, \forall l \in \{1,\ldots,r\}, \quad \pi_l(\mathrm{Pru}_{\alpha+\delta}(M)) \subseteq \pi_l(\mathrm{Pru}_{\delta}(N)).$$

因此，$\mathrm{Pru}_{\alpha+\delta}(M)$ 是 $\mathrm{Pru}_{\delta}(N)$ 的一种 ∞-细化，由此得出

$$d_P(M,N) \leq d_B(M,N).$$

□

致谢

作者谨此感谢导师 Gr´egory Ginot 和 Vadim Lebovici，在本工作准备过程中给予的指导、支持以及许多有益的讨论，也感谢他们仔细审阅早期稿件并提出宝贵建议，显著改善了本文的表达。

参考文献

[1]Goro Azumaya. 关于 Krull-Remak-Schmidt 定理的论文勘误与补充。名古屋数学杂志，1:117–124，1950。doi:10.1017/S002776300002290X.[2] Ulrich Bauer 和 Michael Lesnick. 诱导匹配与持久条形码的代数稳定性。计算几何杂志，6(2):162–191，2015。doi:10.20382/jocg.v6i2a9.[3] H˚avard Bakke Bjerkevik. 多参数持久模的稳定分解。*Found. Comp. Math.*，2025。 doi:10.1007/s10208-025-09695-w.[4] H˚avard Bakke Bjerkevik 和 Magnus Bakke Botnan. 交错距离的计算复杂度。载于第 *34* 届计算几何国际研讨会，*SoCG 2018*，*2018* 年 *6* 月 *11–14* 日，匈牙利布达佩斯，第 15 页。Wadern：Schloss Dagstuhl – Leibniz 信息学中心，2018 年。编号 13。 doi:10.4230/LIPIcs.SoCG.2018.13.[5] H˚avard Bakke Bjerkevik、Magnus Bakke Botnan 和 Michael Kerber. 计算交错距离是 NP-hard。*Found. Comput. Math.*，20(5):1237–1271，2020。 doi:10.1007/s10208-019-09442-y.[6] Magnus Bakke Botnan 和 William Crawley-Boevey. 持久模的分解。*Proc. Am. Math. Soc.*，148(11):4581–4596，2020。 doi:10.1090/proc/14790.[7] Fr´ed´eric Chazal、Vin de Silva、Marc Glisse 和 Steve Oudot. 持久模的结构与稳定性。SpringerBriefs Math. 瑞士沙姆：Springer，2016。 doi:10.1007/978-3-319-42545-0.[8] Herbert Edelsbrunner 和 John L. Harer. 计算拓扑学：导论。罗得岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS），2010。[9] Michael Kerber、Dmitriy Morozov 和 Arnur Nigmetov. 几何学有助于比较持久图。*ACM 实验算法杂志*，22:20，2017。编号 1.4。 doi:10.1145/3064175。