三个 2×2 矩阵的克利福德谱

Alexander Cerjan

综合纳米技术中心，桑迪亚国家实验室，阿尔伯克基，新墨西哥州 *87185*，美国

Vasile Lauric

系 o f 数学，佛罗里达农工大学，塔拉哈西，佛罗里达 *32307*，美国 *A*

Terry A. Loring

数学与统计系，新墨西哥大学，阿尔伯克基，新墨西哥州 *87131*，美国

arXiv:2602.15302v1 [math.FA] 17 Feb 2026

Abstract. 我们证明，与三个2×2矩阵相关联的克利福德谱是非空的。克利福德的结构用“移动”的等值曲线来描述。我们讨论了针对任意大小的三个n×n矩阵所提出的一个猜想的某些推论，并在无限维希尔伯特空间中三个自伴算子的情形下给出一个例子。

Contents

1. 引言 1 2. 三个2×2埃尔米特矩阵。 4 3. 命题2.1的证明 7 4. 克利福德谱的几何结构 11 致谢 14 参考文献 14

1. Introduction

针对 n元非对易厄米矩阵，人们提出了多种联合谱的定义；在可交换情形下，它们都给出相同的结果。其中一些联合谱没有计算算法，有些几乎总是非空，还有些不满足非平凡的谱映射定理。本文将重点讨论克利福德谱，它

电子邮件地址：awcerja@sandia.gov, vasile.lauric@famu.edu, tloring@unm.edu.1

正逐渐应用于量子材料研究，不过我们将先简要回顾其他一些选择。

要定义$\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_n)$的外尔谱，首先需要定义 Weyl 函数演算 $f \mapsto \mathcal{W}_f(\mathbf{A})$。有关基本定义，请参见 [1, 2, 18] 。在一个简单情形下，例如 $f(x, y) = x^2 y$，其定义为 $\mathcal{W}_f(X, Y)) = \frac{1}{3}(X^2Y + XYX + YX^2)$ 。 可以定义

$$\mathcal{W}_f(\mathbf{A}) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\mathbf{y}) \exp\left(-i \sum y_j A_j\right) d\mathbf{y}$$

只要 f 是施瓦茨函数即可。可以利用泛函分析或克利福德分析中的方法，将其推广到分布。外尔谱 $\sigma_{\mathrm{W}}(\mathbf{A})$ 是该分布的支集。这个联合谱版本满足谱映射定理，尤其是，它总是非空的。

求非交换谱的另一种方法，是推广预解式（$A - \lambda I$）$^{-1}$及其与谱的关联，其定义为

$$\sigma(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{R} | \, (A - \lambda I)^{-1} \text{ does not exist} \right\}.$$

对于一个埃尔米特矩阵的情形，这等价于

$$\sigma(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \, \middle| (A - \lambda I)^2 \text{ is singular} \right\}.$$

这里的一种推广是

$$\Lambda^{\mathrm{Q}}(\mathbf{A}) = \left\{ \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n \, \middle| \sum_j (A_j - \lambda_j I)^2 \text{ is singular} \right\},$$

我们倾向于将其称为二次谱。因此，在这种情况下，我们用它来替代预解式（的逆）的对象是

$$Q_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{A}) = \sum_j (A_j - \lambda_j I)^2 .$$

这可以很容易地通过计算机估算，并且可以从联合特征值的角度加以巧妙解释 [8]。然而，在许多有趣的例子中，它是空集，因为联合特征向量意味着矩阵之间存在某种形式的交换性。

克利福德谱 [20] 是二次谱的一种变体。它仍然易于通过计算机估算，并且与拓扑物理相关的 K理论 [21] 密切相连。

物理系统中的物质拓扑相 [17, 11] 可以通过算子理论构造来检测：这种构造将系统的哈密顿量与其位置可观测量整合为一个称为谱局域化子的复合算子 [21, 22, 23, 5], 。谱局域化子已成为一种有价值的工具，可用于对无法采用标准能带理论方法
[14, 4, 28, 10, 7, 9, 13, 26, 15, 24, 27]研究的材料进行拓扑分类。在这种情形下，与空间维度为 $d - 1$ 的物理系统相联系的 d 自伴矩阵$\mathbf{A} = (A_1, A_2 \ldots)$ 的克利福德谱，是使谱局域化子

$$L_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{d} (A_j - \lambda_j I) \otimes \Gamma_j$$

不可逆，其中 Γ_j 构成至少具有 d [6] 大小的克利福德代数的一个表示。谱局域化子框架的核心是矩阵同伦论证：用于对材料拓扑进行分类的所有相关不变量（例如基于符号差、普法夫式或

行列式的不变量）只有在谱局域化子路径经过不可逆点时才会改变。因此，任何拓扑非平庸材料都必然使其克利福德谱出现零点，因为谱局域化子的奇异点是同伦类发生变化所必需的“关口”。反过来，这些零点也表明存在邻近态[8], ，从而编码体-边对应关系，并为相关的局部拓扑标记提供定量的稳健性估计。因此，很自然会提出一个问题：是否存在一般性的结构保证？也就是说，克利福德谱何时非空?

克利福德谱很容易被看出具有矩阵谱所预期的许多其他性质；例如，它是 $\mathbb{R}^n$ 的一个紧子集，保持直和，并且当矩阵经酉算子共轭时保持不变。它还可推广到 C^*-代数 [3], 中非交换厄米元素的元组，而克利福德谱对 $*$-同态的行为也符合预期。请注意，谱映射定理对克利福德谱而言会彻底失效 [3]。看来，针对非交换厄米矩阵，我们需要研究多种形式的谱，具体取决于我们希望该谱具备哪些性质。

对于非交换矩阵的许多形式的联合谱 [18, 25] ，我们发现并不知道联合谱是否必定非空，事实上，有时它确实为空 [8]。对于克利福德谱而言，当 $L_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{A})$ 不只是接近奇异，而是实际奇异时，这对物理学应用至关重要，因为这些奇异性对应着材料局部拓扑的变化。物理学家利用谱局域化子所做的大量计算，充分证明了克利福德谱永不为空。

Kisil [20] 声称已通过证明相关的单生成谱非空，说明克利福德谱总是非空。随后有人证明 [19] 这些谱并不总是相等，因此关于克利福德谱的猜想仍未解决。克利福德谱是目前已知唯一应用于材料拓扑保护的联合谱，因此这一猜想似乎很重要。

在这里，我们给出了最小非平凡情形的完整答案：对于任意三个 2×2 厄米矩阵，克利福德谱绝非空集。先通过酉共轭将 A_1 化为对角矩阵，再将定位算子按Pauli基展开，我们推导出 $\det[L_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{A})]$ 的闭式公式，它是一个具有明确对称中心的四次多项式 $D(\boldsymbol{\lambda})$，随后证明对于某个 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^3$， $D(\boldsymbol{\lambda}) \leq 0$ 。等价地，对于每个三元组$\mathbf{A}$， $L_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{A})$在某处是奇异的，从而确立了它们的克利福德谱非空。

这三种非交换联合谱之间的差异，在三个 2×2 埃尔米特矩阵 $(A_1,\ A_2,\ A_3)$ 这一特殊情形下已十分明显。Greiner 和 Ricker [16]证明，除非这三个矩阵两两可交换，否则二次谱为空。

第 2 节介绍一些记号，并回顾与三个自伴矩阵相关的克利福德谱。我们利用定位算子行列式的表达式证明克利福德谱非空。第 3 节则致力于建立行列式公式。

一个展示这些谱之间差异有多大的特殊情形是$\mathbf{A} = (\frac{1}{2}\sigma_x, \sigma_y, \frac{1}{2}\sigma_z)$。这里二次谱为空，外尔谱是一个椭球 [2], ，而克利福德谱甚至不是流形，而是一条旋转后的伯努利双纽线 [12,§4]。

2. Three two-by-two hermitian matrices.

我们分别用 σ_0，σ_1，σ_2，和 σ_3 表示以下 2×2 矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{2.1}$$

分别。$M_2(\mathbb{C})$ 中任意自伴矩阵都可以写成σ_0，.....，σ_3的实系数线性组合。设 A_j，$j=1$，2，3 是三个自伴矩阵，写作

$$A_j = \sum_{k=0}^{3} a_{jk}\sigma_k.$$

由于克利福德谱在酉共轭下保持不变，我们不妨假设 A_1 是一个对角矩阵，即 $a_{11}=a_{12}=0$，也就是说 A_1 只是 σ_0 和 σ_3.的线性组合。回顾一下，局部化算子定义为 $L_{\boldsymbol{x}}(\mathbb{A}) = \sum_{j=1}^{3}(A_j - x_j\sigma_0)\otimes\Gamma_j$，其中 Γ_j 构成一个克利福德系统，并且在计算中我们假设 $\Gamma_j=\sigma_j$，$j=1$，2，3，以及$\boldsymbol{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)\in\mathbb{R}^3$. 因此，局部化算子

$$\begin{aligned} L_{\boldsymbol{x}}(\mathbb{A}) =& (a_{10}-x_1)\,\sigma_0\otimes\sigma_1 + a_{13}\,\sigma_3\otimes\sigma_1 + \\ & (a_{20}-x_2)\,\sigma_0\otimes\sigma_2 + a_{21}\,\sigma_1\otimes\sigma_2 + a_{22}\,\sigma_2\otimes\sigma_2 + a_{23}\,\sigma_3\otimes\sigma_2 + \\ & (a_{30}-x_3)\,\sigma_0\otimes\sigma_3 + a_{31}\,\sigma_1\otimes\sigma_3 + a_{32}\,\sigma_2\otimes\sigma_3 + a_{33}\,\sigma_3\otimes\sigma_3, \end{aligned}$$

or

$$L_x(\mathbb{A}) = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=0}^{3} b_{jk}\sigma_{kj},$$

其中 $b_{j0}=a_{j0}-x_j$对于 $j=1$，2，3，$b_{jk}=a_{jk}$对于 j，$k=1$，2，3，$b_{11}=b_{12}=0$，以及 $\sigma_{kj}=\sigma_k\otimes\sigma_j$，克利福德谱记作 $\Lambda^{\mathrm{C}}(\mathbb{A})$，其定义为

$$\Lambda^{\mathrm{C}}(\mathbb{A}) = \{x\in\mathbb{R}^3 :\ L_x(\mathbb{A}) \text{ is not invertible}\}.$$

下一个命题给出了定位算子行列式 $D(x)$，局部化算子$L_{\boldsymbol{x}}(\mathbb{A})$。在上述记号下，并假设矩阵 A_1 为对角矩阵，我们有如下结论。

命题 2.1。

$$\begin{aligned} D(x) =& \sum_{j=1}^{3}((a_{j0}-x_j)-a_{j3})^2 \sum_{j=1}^{3}((a_{j0}-x_j)+a_{j3})^2 + \\ & + 2|\alpha_2|^2[((a_{10}-x_1)^2-a_{13}^2)-((a_{20}-x_2)^2-a_{23}^2)+((a_{30}-x_3)^2-a_{33}^2)] + \\ & + 2|\alpha_3|^2[((a_{10}-x_1)^2-a_{13}^2)+((a_{20}-x_2)^2-a_{23}^2)-((a_{30}-x_3)^2-a_{33}^2)] - \\ & - 4\,Im(\alpha_2\,\alpha_3)\,[((a_{20}-x_2)+a_{23})((a_{30}-x_3)-a_{33})+((a_{20}-x_2)-a_{23})((a_{30}-x_3)+a_{33})] + \\ & + |\alpha_2^2-\overline{\alpha_3}^2|^2, \end{aligned}$$

其中 $\alpha_2=a_{22}+i\,a_{21}$和 $\alpha_3=a_{31}+i\,a_{32}$.

该命题的证明将在本文第 3 节中给出。以下是命题 2.1 的一个显然推论，稍后将会用到。

推论 2.2。 $D\left(x_1, x_2, x_3\right) = D\left(2\,a_{10} - x_1, 2\,a_{20} - x_2, 2\,a_{30} - x_3\right)$，因此任意等值面 $D\left(\boldsymbol{x}\right) = t$ 都关于点 $\left(a_{10}, a_{20}, a_{30}\right)$ 对称，特别地，克利福德谱 $\Lambda^C\left(\mathbb{A}\right)$ 也是如此。

因此我们可以假设 $a_{j0} = 0,\, j = 1,2,3,$ 也就是说，矩阵 A_j 可以假定仅为 $\sigma_1,\, \sigma_2$ 与 $\sigma_3,$ 的线性组合（注意，由于假定 A_1 为对角矩阵，它不包含 σ_1 和 σ_2。）这一约化也可以通过如下观察得到：当三元组 $\mathbb{A}$ 受到 $\boldsymbol{y}I,$ 扰动时，克利福德谱会“平移”，即 $\Lambda^{\mathrm{C}}(\mathbb{A} + \boldsymbol{y}I) = \Lambda^{\mathrm{C}}(\mathbb{A}) + \boldsymbol{y},$ 从而 $\mathbb{A}$ 中的每个矩阵都迹为零。

我们用 a 表示向量 (a_{13}, a_{23}, a_{33})，用 $||\cdot||$ 表示$\mathbb{R}^3$ 与 $|\alpha|^2$ 中向量的欧几里得范数: $= |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2,$ 其中 α_2 和 α_3 是命题 2.1 中的复数。此外，我们用 c表示如下表达式

$$c := ||a||^4 - 2\,|\alpha|^2\,||a||^2 + 4\,|\alpha_2\,a_{23} + i\overline{\alpha_3}\,a_{33}|^2 + |\alpha_2^2 - \overline{\alpha_3}^2|^2 \tag{2.2}$$

以及 A 这个 3×3 矩阵

$$A := \begin{bmatrix} a_{13}^2 & a_{13}a_{23} & a_{13}a_{33} \\ a_{13}a_{23} & a_{23}^2 + |\alpha_2|^2 & a_{23}a_{33} + \mathrm{Im}(\alpha_2\alpha_3) \\ a_{13}a_{33} & a_{23}a_{33} + \mathrm{Im}(\alpha_2\alpha_3) & a_{33}^2 + |\alpha_3|^2 \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

在假设 $a_{j0} = 0,\ j = 1,2,3$ 并采用上述记号的前提下，可以通过初等计算验证如下结论。

命题 2.3。

$$D(x) = ||x||^4 + 2\,||x||^2\big(||a||^2 + |\alpha|^2\big) - 4\,\langle Ax, x\rangle + c.$$

定理 2.4。对于 任意三个 $M_2(\mathbb{C})$ 中的自伴矩阵，克利福德谱非空 .

证明。只需证明存在 $x \in \mathbb{R}^3$，使得 $D(x) \leq 0.$ 如果 $c \leq 0,$，那么 $x = 0$将满足该不等式。因此，下面我们假设 $c > 0.$ 由于 $x = 0$ 不是不等式 $D(x) \leq 0,$ 的解，我们可以假设 $x \neq 0.$ 因此，对于 $x \neq 0$，我们可以写成

$$D(x) = ||x||^4 + 2\,||x||^2\big(||a||^2 + |\alpha|^2 - 2\,\langle A\frac{x}{||x||}, \frac{x}{||x||}\rangle\big) + c.$$

注意到，除非.....，否则 $D(x)$不可能小于或等于零

$$E(x) := ||a||^2 + |\alpha|^2 - 2\,\langle A\frac{x}{||x||}, \frac{x}{||x||}\rangle$$

对于某个 $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$，.....为负。因此，问题归结为求 $\sup_{||x||=1}\langle Ax,\ x\rangle$，因为这样的点将给出 $E(x)$。 记

$$\lambda_0 = \sup_{||x||=1} \langle Ax, x\rangle$$

并令 $x_0, ||x_0|| = 1,$ 使得 $\langle Ax_0,\ x_0\rangle = \lambda_0.$。我们将证明，对于由下式定义的 x_*

$$x_* = \sqrt{2\,\lambda_0 - (||a||^2 + |\alpha|^2)}\,x_0,$$

我们有 $D(x_*) = -(2\,\lambda_0 - (||a||^2 + |\alpha|^2))^2 + c \leq 0,$ 或者等价地

$$(2\,\lambda_0 - (||a||^2 + |\alpha|^2))^2 \geq c. \tag{2.4}$$

我们稍后将证明 $2\,\lambda_0 \geq ||a||^2 + |\alpha|^2$. 记 $||a||^2 + |\alpha|^2$ 为 β，因此不等式 (2.4) 等价于

$$4\,\lambda_0^2 - 4\,\lambda_0\beta + \beta^2 - c \geq 0.$$

记 $|\alpha_2\,a_{23} + i\,\alpha_3\,a_{33}|$ 为 δ，因此

$$\begin{aligned}\beta^2 - c = ||a||^4 + 2\,||a||^2|\alpha|^2 + |\alpha|^4 - (||a||^4 - 2\,||a||^2|\alpha|^2 + 4\,\delta^2 + |\alpha_2^2 - \overline{\alpha_3}^2|^2) = \\ = 4\,||a||^2|\alpha|^2 - 4\,\delta^2 + |\alpha|^4 - |\alpha_2^2 - \overline{\alpha_3}^2|^2.\end{aligned}$$

首先考察

$$\begin{aligned}|\alpha|^4 - |\alpha_2^2 - \overline{\alpha_3}^2|^2 = (|\alpha_2|^4 + 2\,|\alpha_2\,\alpha_3|^2 + |\alpha_3|^4) - (|\alpha_2|^4 - 2\,Re((\alpha_2\,\alpha_3)^2) + |\alpha_3|^4) = \\ = 2\,|\alpha_2\,\alpha_3|^2 + 2\,Re((\alpha_2\,\alpha_3)^2) = 4\,(Re(\alpha_2\,\alpha_3))^2,\end{aligned}$$

因此 $\beta^2 - c = 4\,||a||^2|\alpha|^2 - 4\,\delta^2 + 4(Re(\alpha_2\,\alpha_3))^2,$，不等式 (2.4) 相应改写为

$$\lambda_0^2 - \beta\,\lambda_0 + d \geq 0, \tag{2.5}$$

其中 $d = ||a||^2\,|\alpha|^2 - \delta^2 + (Re(\alpha_2\,\alpha_3))^2$.

另一方面，λ_0 是矩阵 A 的最大特征值，且满足 $det(A - \lambda_0\,I_3) = 0$.接下来我们将展开 $det(A - \lambda_0\,I_3)$。回忆

$$A - \lambda_0\,I_3 := \begin{bmatrix} a_{13}^2 - \lambda_0 & a_{13}a_{23} & a_{13}a_{33} \\ a_{13}a_{23} & a_{23}^2 + |\alpha_2|^2 - \lambda_0 & a_{23}a_{33} + \mathrm{Im}(\alpha_2\alpha_3) \\ a_{13}a_{33} & a_{23}a_{33} + \mathrm{Im}(\alpha_2\alpha_3) & a_{33}^2 + |\alpha_3|^2 - \lambda_0 \end{bmatrix},$$

因此

$$\begin{aligned}det(A - \lambda_0 I_3) = (a_{13}^2 - \lambda_0)(a_{23}^2 + |\alpha_2|^2 - \lambda_0)(a_{33}^2 + |\alpha_3|^2 - \lambda_0) + \\ + 2\,(a_{13}^2\,a_{23}\,a_{33})(a_{23}a_{33} + \mathrm{Im}(\alpha_2\alpha_3)) - (a_{13}a_{33})(a_{23}^2 + |\alpha_2|^2 - \lambda_0) - \\ - (a_{13}a_{23})^2(a_{33}^2 + |\alpha_3|^2 - \lambda_0) - (a_{23}a_{33} + \mathrm{Im}(\alpha_2\alpha_3))^2(a_{13}^2 - \lambda_0) = \\ = -\lambda_0^3 + \lambda_0^2\left[a_{13}^2 + (a_{23}^2 + |\alpha_2|^2) + (a_{33}^2 + |\alpha_3|^2)\right] - \\ - \lambda_0\left[(a_{23}^2 + |\alpha_2|^2)(a_{33}^2 + |\alpha_3|^2) + a_{13}^2\,(a_{23}^2 + |\alpha_2|^2) + a_{13}^2\,(a_{33}^2 + |\alpha_3|^2) - \right. \\ \left. - (a_{13}\,a_{23})^2 - (a_{13}\,a_{33})^2 - (a_{23}a_{33} + \mathrm{Im}(\alpha_2\alpha_3))^2\right] + det(A).\end{aligned}$$

接下来，只需保 证上述 $det(A - \lambda_0\,I_3)$ 的表达式等价于

$$det(A - \lambda_0 I_3) = -\lambda_0^3 + \beta\,\lambda_0^2 - d\,\lambda_0 + det(A). \tag{2.6}$$

首先，我们需要证明 $2\,\lambda_0 \geq \beta.$。事实上，令 $f(t) = t^3 - \beta\,t^2 + d\,t - det(A)$，并注意到 $\beta^2 < 3d$意味着 $f'(t) \geq 0$，因此方程 $f(t) = 0$只有一个实数解，隐含地，矩阵 A 的所有特征值都相同，这显然不是这种情形。此外，$\lambda_0 \geq \lambda_+$，其中 λ_+ 是 $f'(t)$，的较大零点，即$\lambda_+ = \frac{1}{2}(\beta + \sqrt{\beta^2 - 3d})$，因此 $\lambda_0 \geq \frac{\beta}{2}$.

现在我们转到最后一步。由于 $det(A - \lambda_0) = 0$ 和 $\lambda_0 > 0$，等式 (2.6) 推出 $\lambda_0^2 - \beta\,\lambda_0 + d = \overline{det(A)\,\lambda_0}\ \cdot$但是 $det(A) = a_{13}^2\left[|\alpha_2\,\alpha_3|^2 - (\mathrm{Im}(\alpha_2\,\alpha_3))^2\right] = a_{13}^2(Re(\alpha_2\,\alpha_3))^2 \geq 0$，因此$\overline{det}_{(A)\ \lambda_0} \geq 0$ 定理的证明至此完成。□

3. Proof of Proposition 2.1

本节将给出命题 2.1 的证明。证明虽然初等，但包含繁琐的计算；一个 4×4矩阵的行列式包含 4! 个乘积，而每个乘积中的每一项都是另外 2 项或 4 项的线性组合，因此行列式的表达式确实很长。幸运的是，经过仔细观察，可以将其中一些项归为一组，从而使表达式变得简洁合理。

回顾

$$L_x(\mathbb{A}) = \sum_{j=1}^{3} y_{j0}\,\sigma_{0j} + \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a_{jk}\sigma_{kj},$$

其中 $y_{j0} = a_{j0} - x_j$对于 $j = 1$，2，3，$a_{11} = a_{12} = 0$，$\sigma_{kj} = \sigma_k \otimes \sigma_j$，以及 $\alpha_2 = a_{22} + i\,a_{21}$，$\alpha_3 = a_{31} + i\,a_{32}$. 此外，记 $y_{j0} \pm a_{j3}$为 $y_{j3_\pm}$，因此

$$L_x(\mathbb{A}) = \begin{bmatrix} y_{30_+} & y_{10_+} - i\,y_{20_+} & \overline{\alpha_3} & -\alpha_2 \\ y_{10_+} + i\,y_{20_+} & -y_{30_+} & \alpha_2 & -\overline{\alpha_3} \\ \alpha_3 & \overline{\alpha_2} & y_{30_-} & y_{10_-} - i\,y_{20_-} \\ -\overline{\alpha_2} & -\alpha_3 & y_{10_-} + i\,y_{20_-} & -y_{30_-} \end{bmatrix}. \tag{3.1}$$

行列式包含 24 个乘积，其中 12 个将与偶置换相关联：$\sigma_1 = id$ $\sigma_2 =$(1, 2)(3, 4) $\sigma_3 =$(1, 3)(2, 4) $\sigma_4 =$(1, 4)(2, 3) $\sigma_5 =$(1, 2, 3)，$\sigma_6 =$(1, 3, 2) $\sigma_7 =$(1, 2, 4) $\sigma_8 =$(1, 4, 2) $\sigma_9 =$(1, 3, 4) $\sigma_{10} =$(1, 4, 3) $\sigma_{11} =$(2, 3, 4)，以及$\sigma_{12} =$(2, 4, 3)；另外 12 个与奇置换相关联：$\tau_1 =$(1, 2) $\tau_2 =$(1, 3)，$\tau_3 =$(1, 4) $\tau_4 =$(2, 3) $\tau_5 =$(2, 4) $\tau_6 =$(3, 4) $\tau_7 =$(1, 2, 3, 4) $\tau_8 =$(1, 2, 4, 3) $\tau_9 =$(1, 3, 2, 4)，$\tau_{10} =$(1, 3, 4, 2) $\tau_{11} =$(1, 4, 2, 3)，以及 $\tau_{12} =$(1, 4, 3, 2)。

我们将用 P_γ 表示包含每个置换对应符号的乘积$\gamma \in S_4$. 因此，

$$P_{\sigma_1} = (y_{30} + a_{33})[-(y_{30} + a_{33})](y_{30} - a_{33})[-(y_{30} - a_{33})] = (y_{30} + a_{33})^2(y_{30} - a_{33})^2 = (y_{30}^2 - a_{33}^2)^2;$$

$$\begin{aligned} P_{\sigma_2} &= [(y_{10} + a_{13}) + i\,(y_{20} + a_{23})]\,[(y_{10} + a_{13}) - i\,(y_{20} + a_{23})]\cdot \\ &\quad \cdot [(y_{10} - a_{13}) + i\,(y_{20} - a_{23})]\,[(y_{10} - a_{13}) - i\,(y_{20} - a_{23})] = \\ &= [(y_{10} + a_{13})^2 + (y_{20} + a_{23})^2][(y_{10} - a_{13})^2 + (y_{20} - a_{23})^2] = \\ &= (y_{10}^2 - a_{13}^2)^2 + (y_{20}^2 - a_{23}^2)^2 + (y_{10} - a_{13})^2\,(y_{20} + a_{23})^2 + (y_{10} + a_{13})^2\,(y_{20} - a_{23})^2; \end{aligned}$$

$$P_{\sigma_3} = |\alpha_3|^4; \quad P_{\sigma_4} = |\alpha_2|^4;$$

$$\begin{aligned} P_{\sigma_5} &= [(y_{10} + a_{13}) + i\,(y_{20} + a_{23})]\,(\overline{\alpha_2}\,\overline{\alpha_3})\,[-(y_{30} - a_{33})] = \\ &= -\overline{\alpha_2\alpha_3}[(y_{10} + a_{13})(y_{30} - a_{33}) + i\,(y_{20} + a_{23})(y_{30} - a_{33})]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{\sigma_6} &= \alpha_2\,\alpha_3\,[(y_{10} + a_{13}) - i\,(y_{20} + a_{23})]\,[-(y_{30} - a_{33})] = \\ &= -\alpha_2\alpha_3[(y_{10} + a_{13})(y_{30} - a_{33}) - i\,(y_{20} + a_{23})(y_{30} - a_{33})]; \end{aligned}$$

$$P_{\sigma_7} = \alpha_2\,\alpha_3\,[(y_{10}+a_{13})+i\,(y_{20}+a_{23})]\,(y_{30}-a_{33}) = \\ = \alpha_2\alpha_3\,[(y_{10}+a_{13})(y_{30}-a_{33})+i\,(y_{20}+a_{23})(y_{30}-a_{33})];$$

$$P_{\sigma_8} = (\overline{\alpha_2}\,\overline{\alpha_3})\,[(y_{10}+a_{13})-i\,(y_{20}+a_{23})]\,(y_{30}-a_{33}) = \\ = \overline{\alpha_2\alpha_3}[(y_{10}+a_{13})(y_{30}-a_{33})-i\,(y_{20}+a_{23})(y_{30}-a_{33})];$$

$$P_{\sigma_9} = (-\alpha_2)\,(\alpha_3)\,[(y_{10}-a_{13})+i\,(y_{20}-a_{23})]\,[-(y_{30}+a_{33})] = \\ = \alpha_2\alpha_3[(y_{10}-a_{13})(y_{30}+a_{33})+i\,(y_{20}-a_{23})(y_{30}+a_{33})];$$

$$P_{\sigma_{10}} = -(\overline{\alpha_2})\,(\overline{\alpha_3})\,[(y_{10}-a_{13})-i\,(y_{20}-a_{23})]\,[-(y_{30}+a_{33})] = \\ = \overline{\alpha_2\alpha_3}\,[(y_{10}-a_{13})(y_{30}+a_{33})-i\,(y_{20}-a_{23})(y_{30}+a_{33})];$$

$$P_{\sigma_{11}} = (\overline{\alpha_2})\;-(\overline{\alpha_3})\,[(y_{10}-a_{13})+i\,(y_{20}-a_{23})]\,[(y_{30}+a_{33})] = \\ = -(\overline{\alpha_2\alpha_3})\,[(y_{10}-a_{13})(y_{30}+a_{33})+i\,(y_{20}-a_{23})(y_{30}+a_{33})];$$

$$P_{\sigma_{12}} = (\overline{\alpha_2})\,[-(\overline{\alpha_3})]\,[(y_{10}-a_{13})+i\,(y_{20}-a_{23})]\,[(y_{30}+a_{33})] = \\ = -(\overline{\alpha_2\alpha_3})\,[(y_{10}-a_{13})(y_{30}+a_{33})+i\,(y_{20}-a_{23})(y_{30}+a_{33})].$$

可以观察到这些乘积具有如下相似之处,

$$P_{\sigma_6}+P_{\sigma_7} = 2i\,(\alpha_2\alpha_3)\,(y_{20}+a_{23})(y_{30}-a_{33})$$

and

$$P_{\sigma_5}+P_{\sigma_8} = -2i\,(\overline{\alpha_2\alpha_3})\,(y_{20}+a_{23})(y_{30}-a_{33})$$

因此

$$P_{\sigma_5}+P_{\sigma_6}+P_{\sigma_7}+P_{\sigma_8} = 2(i\,\alpha_2\alpha_3 - i\,\overline{\alpha_2\alpha_3})\,(y_{20}+a_{23})(y_{30}-a_{33}) = \\ = (-4)\;\mathrm{Im}(\alpha_2\alpha_3)\,(y_{20}+a_{23})(y_{30}-a_{33}).$$

类似地

$$P_{\sigma_{10}}+P_{\sigma_{11}} = -2i\,(\overline{\alpha_2\alpha_3})\,(y_{20}-a_{23})(y_{30}+a_{33})$$

and

$$P_{\sigma_9}+P_{\sigma_{12}} = 2i\,(\alpha_2\alpha_3)\,(y_{20}-a_{23})(y_{30}+a_{33}),$$

因此

$$P_{\sigma_9}+P_{\sigma_{10}}+P_{\sigma_{11}}+P_{\sigma_{12}} = 2(i\,\alpha_2\alpha_3 - i\,\overline{\alpha_2\alpha_3})\,(y_{20}+a_{23})(y_{30}-a_{33}) = \\ = (-4)\;\mathrm{Im}(\alpha_2\alpha_3)\,(y_{20}-a_{23})(y_{30}+a_{33}).$$

从而，

$$S_e := \sum_{k=1}^{12} P_{\sigma_k} = \sum_{j=1}^{3}(y_{j0}^2 - a_{j3}^2)^2 + (y_{10}+a_{13})^2\,(y_{20}-a_{23})^2 + (y_{10}-a_{13})^2\,(y_{20}+a_{23})^2 + \\ + |\alpha_2|^4 + |\alpha_3|^4 - 4\ \mathrm{Im}(\alpha_2\alpha_3)\,[(y_{20}+a_{23})(y_{30}-a_{33}) + (y_{20}-a_{23})(y_{30}+a_{33})].$$

现在，我们计算与奇置换相关的乘积，包括置换的符号：

p ,

$$P_{\tau_1} = (-1)[(y_{10}+a_{13}) + i(y_{20}+a_{23})]\,[(y_{10}+a_{13}) - i(y_{20}+a_{23})](y_{30}-a_{33})[-(y_{30}-a_{33})] = \\ = (y_{30}-a_{33})^2\,[(y_{10}+a_{13})^2 + (y_{20}+a_{23})^2];$$

$$P_{\tau_2} = (-1)(\alpha_3)(\overline{\alpha_3})\,[-(y_{30}+a_{33})][-(y_{30}-a_{33})] = -|\alpha_3|^2\,(y_{30}^2 - a_{33}^2);$$

$$P_{\tau_3} = (-1)(-\alpha_2)(-\overline{\alpha_2})\,[-(y_{30}+a_{33})][(y_{30}-a_{33})] = |\alpha_2|^2\,(y_{30}^2 - a_{33}^2);$$

$$P_{\tau_4} = (-1)(\alpha_2)(\overline{\alpha_2})\,(y_{30}+a_{33})[-(y_{30}-a_{33})] = |\alpha_2|^2\,(y_{30}^2 - a_{33}^2);$$

$$P_{\tau_5} = (-1)(-\alpha_3)(-\overline{\alpha_3})\,(y_{30}+a_{33})(y_{30}-a_{33}) = -|\alpha_3|^2\,(y_{30}^2 - a_{33}^2);$$

$$P_{\tau_6} = (-1)[(y_{10}-a_{13}) + i(y_{20}-a_{23})]\,[(y_{10}-a_{13}) - i(y_{20}-a_{23})](y_{30}+a_{33})[-(y_{30}+a_{33})] = \\ = (y_{30}+a_{33})^2\,[(y_{10}-a_{13})^2 + (y_{20}-a_{23})^2];$$

$$P_{\tau_7} = (-1)(-\alpha_2)(\overline{\alpha_2})\,[(y_{10}+a_{13}) + i(y_{20}+a_{23})][(y_{10}-a_{13}) + i(y_{20}-a_{23})] = \\ = |\alpha_2|^2\,[(y_{10}+a_{13})(y_{10}-a_{13}) - (y_{20}+a_{23})(y_{20}-a_{23}) + \\ + i\,(y_{10}+a_{13})(y_{20}-a_{23}) + i\,(y_{10}-a_{13})(y_{20}+a_{23});$$

$$P_{\tau_8} = (-1)(-\alpha_3)(\overline{\alpha_3})\,[(y_{10}+a_{13}) + i(y_{20}+a_{23})][(y_{10}-a_{13}) - i(y_{20}-a_{23})] = \\ = |\alpha_3|^2\,[(y_{10}+a_{13})(y_{10}-a_{13}) + (y_{20}+a_{23})(y_{20}-a_{23}) - \\ - i\,(y_{10}+a_{13})(y_{20}-a_{23}) + i\,(y_{10}-a_{13})(y_{20}+a_{23});$$

$$P_{\tau_9} = (-1)(-\alpha_2)(\alpha_2)(\alpha_3)(-\alpha_3) = -(\alpha_2\alpha_3)^2;$$

$$P_{\tau_{10}} = (-1)(-\alpha_3)(-\overline{\alpha_3})\,[(y_{10}-a_{13}) + i(y_{20}-a_{23})][(y_{10}+a_{13}) - i(y_{20}+a_{23})] = \\ = |\alpha_3|^2\,[(y_{10}+a_{13})(y_{10}-a_{13}) + (y_{20}+a_{23})(y_{20}-a_{23}) + \\ + i\,(y_{10}+a_{13})(y_{20}-a_{23}) - i\,(y_{10}-a_{13})(y_{20}+a_{23});$$

$$P_{\tau_{11}} = (-1)(-\overline{\alpha_2})(\overline{\alpha_2})(-\overline{\alpha_3})(\overline{\alpha_3}) = -(\overline{\alpha_2\alpha_3})^2;$$

$$P_{\tau_{12}} = (-1)(\alpha_2)(-\overline{\alpha_2})\,[(y_{10}-a_{13}) - i(y_{20}-a_{23})][(y_{10}+a_{13}) - i(y_{20}+a_{23})] = \\ = |\alpha_2|^2\,[(y_{10}+a_{13})(y_{10}-a_{13}) - (y_{20}+a_{23})(y_{20}-a_{23}) + \\ - i\,(y_{10}+a_{13})(y_{20}-a_{23}) - i\,(y_{10}-a_{13})(y_{20}+a_{23}).$$

As seen in the case of even permutations, also the products associated with odd permutations share some similarities, thus

$$P_{\tau_2} + P_{\tau_3} + P_{\tau_4} + P_{\tau_5} = 2\,(|\alpha_2|^2 - |\alpha_3|^2)\,(y_{30}+a_{33})(y_{30}-a_{33}),$$

$$P_{\tau_1}+P_{\tau_6}=(y_{30}-a_{33})^2\,(y_{10}+a_{13})^2+(y_{30}-a_{33})^2\,(y_{20}+a_{23})^2+$$
$$+(y_{10}-a_{13})^2\,(y_{30}+a_{33})^2+(y_{20}-a_{23})^2\,(y_{30}+a_{33})^2,$$

$$P_{\tau_9}+P_{\tau_{11}}=-(\alpha_2\alpha_3)^2-(\overline{\alpha_2\alpha_3})^2,$$

$$\begin{aligned}P_{\tau_7}+P_{\tau_8}+P_{\tau_{10}}+P_{\tau_{12}}&=|\alpha_2|^2\,(2\,y_{10+}y_{10-}-2\,y_{20+}y_{20-}+\\&+i\,y_{10+}y_{20-}+i\,y_{10-}y_{20+}-i\,y_{10-}y_{20+}-i\,y_{10+}y_{20-})\\&+|\alpha_3|^2\,(2\,y_{10+}y_{10-}+2\,y_{20+}y_{20-}-\\&-i\,y_{10+}y_{20-}+i\,y_{10-}y_{20+}+i\,y_{10+}y_{20-}-i\,y_{10-}y_{20+})=\\&=2\,(|\alpha_2|^2+|\alpha_3|^2)\,y_{10+}y_{10-}+2\,(|\alpha_3|^2-|\alpha_2|^2)\,y_{20+}y_{20-},\end{aligned}$$

其中我们使用了记号 $y_{j0+}=y_{j0}+a_{j3}$ 和 $y_{j0-}=y_{j0}-a_{j3}$，表示 $j=1$，2、3。因此，

$$\sum_{j=2,3,4,5,7,8,10,12}P_{\tau_j}=2\,[(|\alpha_2|^2+|\alpha_3|^2)\,(y_{10+}y_{10-})+(|\alpha_3|^2-|\alpha_2|^2)\,(y_{20+}y_{20-})+(|\alpha_2|^2-|\alpha_3|^2)\,(y_{30+}y_{30-})],$$

因此

$$\sum_{j=1}^{12}P_{\tau_j}=(y_{10+})^2(y_{30-})^2+(y_{20+})^2(y_{30-})^2+(y_{10-})^2(y_{30+})^2+(y_{20-})^2(y_{30+})^2-2\,Re((\alpha_2\alpha_3)^2)+$$
$$+2\,[(|\alpha_2|^2+|\alpha_3|^2)\,(y_{10+}y_{10-})+(|\alpha_3|^2-|\alpha_2|^2)\,(y_{20+}y_{20-})+(|\alpha_2|^2-|\alpha_3|^2)\,(y_{30+}y_{30-})].$$

最后，

$$\begin{aligned}D(x)=&\sum_{j=1}^{3}(y_{j0+}y_{j0-})^2+\sum_{j\neq k}^{3}(y_{j0+}y_{k0-})^2+\\&+|\alpha_2|^4+|\alpha_3|^4-2\,Re((\alpha_2\alpha_3)^2)-\\&-4\,\mathrm{Im}(\alpha_2\alpha_3)\,(y_{20+}y_{30-}+y_{20-}y_{30+})+\\&+2\,[(|\alpha_2|^2+|\alpha_3|^2)\,(y_{10+}y_{10-})+(|\alpha_3|^2-|\alpha_2|^2)\,(y_{20+}y_{20-})+(|\alpha_2|^2-|\alpha_3|^2)\,(y_{30+}y_{30-})].\end{aligned}$$

现在观察以下等式：

$$\sum_{j=1}^{3}(y_{j0+}y_{j0-})^2+\sum_{j\neq k}^{3}(y_{j0+}y_{k0-})^2=\sum_{j=1}^{3}(y_{j0+})^2\sum_{j=1}^{3}(y_{j0-})^2,$$

$$|\alpha_2|^4+|\alpha_3|^4-2\,Re((\alpha_2\alpha_3)^2)=|\alpha_2^2-\overline{\alpha_3}^2|^2,$$

and

$$2\,[(|\alpha_2|^2+|\alpha_3|^2)\,(y_{10+}y_{10-})+(|\alpha_3|^2-|\alpha_2|^2)\,(y_{20+}y_{20-})+(|\alpha_2|^2-|\alpha_3|^2)\,(y_{30+}y_{30-})]=$$
$$2\,|\alpha_2|^2\,(y_{10+}y_{10-}-y_{20+}y_{20-}+y_{30+}y_{30-})+2\,|\alpha_3|^2\,(y_{10+}y_{10-}+y_{20+}y_{20-}-y_{30+}y_{30-}).$$

分别将 $y_{j0\pm}$ 替换为 $(x_{j0}-a_{j0})\pm a_{j3}$，即可得到命题 2.1 中所述 $D(x)$ 的表达式。

4. Geometrical structure of the Clifford spectrum

在本节中，我们将证明克利福德谱与经典卡西尼二维卵形面（某种二维曲面）相关，并且在某些特定情形下，它会退化为两个点或一个点。因此，将这样的曲面称为卡西尼二维变形卵形（二维变形卵形）是恰当的。回想一下，卡西尼一维卵形线是平面中的曲线，定义为到两个固定点（即称为焦点的 F_1 与 F_2 ）的距离之积为常数 $r.$ 的点的轨迹。依 $r,$ 的取值而定，这些轨迹可以是点 F_1 和 $F_2,$ 或围绕焦点的两个不相交环，或这些环可以彼此相切（如同 ∞ 符号），或只是一个内部包含两个焦点的环（我们将分别称它们为 c1、c2、c3、c4 阶段）。卡西尼一维卵形线关于连接焦点的线段的中点对称，同时也关于连接焦点的直线对称。显然，当 $F_1 = F_2,$ 时，所有这些曲线要么变成单个点，要么变成一个圆。我们将绕连接两个焦点的直线旋转一条卡西尼一维卵形线所得到的曲面称为经典卡西尼二维卵形面 。当焦点重合时，这样的曲面要么是一个球面，要么就退化为一个点。

将 a_{j0} 设为零后， $D(x)$ 的表达式变为

$$\begin{aligned} D(x) = &\big(\sum_{j=1}^{3}(x_j + a_{j3})^2\big)\big(\sum_{j=1}^{3}(x_j - a_{j3})^2\big) + \\ &+ 2|\alpha_2|^2[(x_1^2 - a_{13}^2) - (x_2^2 - a_{23}^2) + (x_3^2 - a_{33}^2)] + \\ &+ 2|\alpha_3|^2[(x_1^2 - a_{13}^2) + (x_2^2 - a_{23}^2) - (x_3^2 - a_{33}^2)] - \\ &- 4\ \mathrm{Im}(\alpha_2\,\alpha_3)\left[(x_2 - a_{23})(x_3 + a_{33}) + (x_2 + a_{23})(x_3 - a_{33})\right] + \\ &+ |\alpha_2^2 - \overline{\alpha_3}^2|^2. \end{aligned}$$

注意， $D(x)$ 的表达式中的第一个乘积为（$d(P,F_+))^2(d(P,F_-))^2,$ ，其中 $d(P,F_+)$ 和 $d(P,F_-)$ 分别是从 $P(x_1,x_2,x_3)$ 到 $F_\pm(\pm a_{13},\pm a_{23},\pm a_{33})$ 的距离。我们将以下表达式记作 $H(x)$:

$$\begin{aligned} H(x) = &-2|\alpha_2|^2[(x_1^2 - a_{13}^2) - (x_2^2 - a_{23}^2) + (x_3^2 - a_{33}^2)] \\ &- 2|\alpha_3|^2[(x_1^2 - a_{13}^2) + (x_2^2 - a_{23}^2) - (x_3^2 - a_{33}^2)] - \\ &+ 4\ \mathrm{Im}(\alpha_2\,\alpha_3)\left[(x_2 - a_{23})(x_3 + a_{33}) + (x_2 + a_{23})(x_3 - a_{33})\right] - |\alpha_2^2 - \overline{\alpha_3}^2|^2, \end{aligned}$$

因此 $D(x) = \big(d(P,F_+)\,(d(P,F_-)\big)^2 - H(x).$ 方程 $D(x) = 0$ 的图像可以看作由若干曲线的并集构成，这些曲线是通过与方程的图像相交而得到的

$$\big(d(P(x),F_+)\,d(P(x),F_-)\big)^2 = r$$

（经典卡西尼二维卵形面）与 $H(x) = r$ （一个双曲面）的图像相交，其中 $r \geq 0.$ 当 r在区间 $[0,+\infty$ 内变化时，经典卡西尼二维卵形面与双曲面的交集最终（当 r 取较大值时）将为空，因为卡西尼曲面的“增长”速度比双曲面慢（经历从 c1 到 c4 的所有阶段）。我们需要证明，二次方程 $H(x) = r$ 的图像确实是一个双曲面，并经历 h1（单叶双曲面）、h2（圆锥）和 h3（双叶

she叶双曲面）阶段，因为 r 从 0 增加到 $+\infty$。我们首先将 $H(x$)

$$\begin{aligned}H(x) =& -2|\alpha_2|^2[(x_1^2 - x_2^2 + x_3^2) - (a_{13}^2 - a_{23}^2 + a_{33}^2)] - \\ & -2|\alpha_3|^2[(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2) - (a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{33}^2)] - \\ & +8\ \mathrm{Im}(\alpha_2\,\alpha_3)\,(x_2x_3 - a_{23}a_{33}) - |\alpha_2^2 - \overline{\alpha_3}^2|^2 = \\ =& -2x_1^2(|\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2) + 2x_2^2(|\alpha_2|^2 - |\alpha_3|^2) + 2x_3^2(|\alpha_3|^2 - |\alpha_2|^2) + \\ & +8\ \mathrm{Im}(\alpha_2\,\alpha_3)\,(x_2x_3) + e,\end{aligned}$$

其中

$$e = 2|\alpha_2|^2(a_{13}^2 - a_{23}^2 + a_{33}^2) + 2|\alpha_3|^2(a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{33}^2) - 8\ \mathrm{Im}(\alpha_2\,\alpha_3)\,(a_{23}a_{33}) - |\alpha_2^2 - \overline{\alpha_3}^2|^2.$$

选取如下变换

$$x_1 = y_1,\ x_2 = \cos(\theta)y_2 + \sin(\theta)y_3,\ x_3 = -\sin(\theta)y_2 + \cos(\theta)y_3$$

（即一种不改变轴 x_1 的旋转，只有 x_2，x_3 在其平面内旋转了 θ角），$H(x)$的表达式变为

$$\begin{aligned}G(y) =& -2|\alpha_2|^2\big(y_1^2 - \cos(2\theta)\,y_2^2 - 2\sin(2\theta)\,y_2y_3 + \cos(2\theta)\,y_3^2\big) - \\ & -2|\alpha_3|^2\big(y_1^2 + \cos(2\theta)\,y_2^2 + 2\sin(2\theta)\,y_2y_3 - \cos(2\theta)\,y_3^2\big) - \\ & +8\ \mathrm{Im}(\alpha_2\,\alpha_3)\,\Big(-\frac{1}{2}\sin(2\theta)\,y_2^2 + \cos(2\theta)\,y_2y_3 + \frac{1}{2}\sin(2\theta)\,y_3^2\Big) + e = \\ =& -2\big(|\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2\big)\,y_1^2 + \\ & +2\big(|\alpha_2|^2\cos(2\theta) - |\alpha_3|^2\cos(2\theta) - 2\,\mathrm{Im}(\alpha_2\alpha_3)\,\sin(2\theta)\big)\,y_2^2 + \\ & +2\big(-|\alpha_2|^2\cos(2\theta) + |\alpha_3|^2\cos(2\theta) + 2\,\mathrm{Im}(\alpha_2\alpha_3)\,\sin(2\theta)\big)\,y_3^2 + \\ & +4\big(|\alpha_2|^2\sin(2\theta) - |\alpha_3|^2\sin(2\theta) + 2\,\mathrm{Im}(\alpha_2\alpha_3)\,\cos(2\theta)\big)\,y_2y_3 + e.\end{aligned}$$

我们选取 θ，使得 y_2y_3 的系数为零，即

$$(|\alpha_2|^2 - |\alpha_3|^2)\sin(2\theta) + 2\,\mathrm{Im}(\alpha_2\alpha_3)\cos(2\theta) = 0.$$

我们用 f 表示如下内容

$$f := \sqrt{\big(|\alpha_2|^2 - |\alpha_3|^2\big)^2 + 4\big(\,\mathrm{Im}(\alpha_2\alpha_3)\big)^2}.$$

我们首先考虑如下情形：$f = 0$. 因此 $f = 0$等价于 $|\alpha_2| = |\alpha_3| =:$ t且 $\mathrm{Im}(\alpha_2\alpha_3) = 0$，也就是说，$\alpha_2 = te^{i\beta}$ 且 $\alpha_3 = \pm te^{-i\beta}$. 。$t = 0$ 的子情形等价于矩阵 A_2 和 A_3 为对角矩阵（回想一下，假设 A_1 为对角矩阵），因此此情形下的克利福德谱由两个点 F_+ 和 F_-组成；若 $F_+ = F_-$.，则只有一个点。若 $t > 0$，则 $e = 4t^2a_{13}^2$，而方程 $D(x) = 0$ 等价于$\big(d(P(x)\ F_+)\ d(P(x)\ F_-)\big)^2 = 4t^2(a_{13}^2 - x_1^2)$。此时，$F_+$和 F_-满足前述方程。这里我们指出，若 $a_{13} = 0$，即矩阵 $A_1 = 0_2$，则 F_+ 和 F_-是位于平面 $x_1 = 0$ 上的克利福德谱中仅有的点；当然，它们也可能重合。

现在我们转到情形 $f > 0$. 存在唯一的 $\theta_0 \in [0, 2\pi)$，使得

$$\frac{|\alpha_2|^2 - |\alpha_3|^3}{f} = \cos(\theta_0)$$

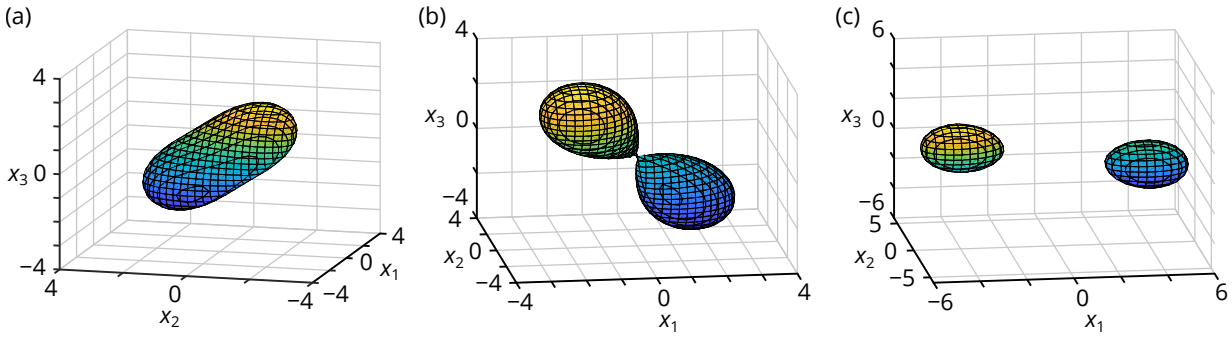


FIGURE 4.1. 对应于例 4.1(a)、例 4.2(b)和例 4.3(c)中给出的矩阵三元组的克利福德谱的曲面。

and

$$\frac{2\,\mathrm{Im}(\alpha_2\alpha_3)}{f} = \sin(\theta_0),$$

并选取 $\theta = -\frac{\theta_0}{2} \in (-\pi,\ 0]$，也就是说 $\sin(\theta_0 + 2\theta) = 0$. 因此，$y_2^2$的系数为 1 或 -1，而 y_3^2 的系数分别为 -1 或 1，。我们只讨论 y_2^2 的系数为 1 且 y_3^2 的系数为 -1的情形；另一种情形类似，故略去。因此 $G(y) = -2(|\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2)\, y_1^2 + 2f\, y_2^2 - 2f\, y_3^2 + e = r \geq 0$ 等价于

$$\frac{y_1^2}{A} + \frac{y_2^2}{B} - \frac{y_3^2}{B} = 1,$$

其中$A = \frac{s}{-2(|\alpha_2|^2+|\alpha_3|^2)}$ $B \equiv \frac{s}{2f}$，以及 $s = r - e \in [-e, +\infty)$。我们区分三种情形，即 (i) $e > 0$, (ii) $e = 0$, 以及(iii) $e < 0$. 因此，当变量 r 从0变化到$+\infty$ （从而 s 从 $-e$ 变化到 $+\infty$）时，在情形(i)中，$G(y) = r$ 的图像形状从单叶双曲面变为圆锥，进而变为双叶双曲面；在情形(ii)中从圆锥变为双叶双曲面；在情形(iii)中仅为双叶双曲面。

注意到 $c = ||a||^4 - e$ （见方程 2.2），因此，三种情形 (i)-(iii) 分别等价于 $||a||^4 > c$, $||a||^4 = c$, 和 $||a||^4 < c$, 。回顾一下，如果 $c < 0$ 或 $c = 0$ （见定理 2.4 的证明），那么 $D(0) < 0$ 或 $D(0) = 0$, 分别成立；在这些情形下，克利福德谱是一个连通集（一个泡，或两个相接的泡）。

以下是分别对应于 $c < 0$ 和 $c = 0$的一些例子。

例 4.1。令 $a = (2,1,2)$ 且 $\alpha_2 = 1 - 3i$ 和 $\alpha_3 = 2 + i$；因此 $|\alpha_2|^2 = 10$, $|\alpha_3|^2 = 5$, $\alpha_2^2 - \overline{\alpha_3^2} = -11 - 2i$, $|\alpha_2^2 - \alpha_3^{\overline{2}}|^2 = 125$, $\mathrm{Im}(\alpha_2\alpha_3) = -5$, $||a||^4 = 81$，从而 $e = 105$和 $c = 81 - 105 = -24$。$D(x)$ 的方程为

$$\left[(x_1-2)^2 + (x_2-1)^2 + (x_3-2)^2\right]\left[(x_1+2)^2 + (x_2+1)^2 + (x_3+2)^2\right] + 30x_1^2 - 10x_2^2 + 10x_3^2 - 105.$$

例 4.2. 令 $a = (\sqrt{10}, 2, -2)$ 且 $\overline{\alpha_2} = 2 - i$ 和 $\alpha_3 = 3 + 2i$；因此 $||a||^2 = 18$,$|\alpha_2|^2 = 5$, $|\alpha_3|^2 = 13$, $\alpha_2^2 - \alpha_3{}^2 = -2 + 8i$, $|\alpha_2^2 - \alpha_3^{\overline{2}}|^2 = 68$, $\mathrm{Im}(\alpha_2\alpha_3) = 1$, 从而$e = 324$，即 $||a||^4 = e$。$D(x)$ 的方程为

$$\left[(x_1-\sqrt{10})^2 + (x_2-2)^2 + (x_3+2)^2\right]\left[(x_1+\sqrt{10})^2 + (x_2+2)^2 + (x_3-2)^2\right] + 36x_1^2 + 16x_2^2 - 16x_3^2 - 324$$

定理 2.4 的证明唯一非平凡的情形是 $c > 0$, 或者等价地 $||a||^4 > e$.。注意，卡西尼二维卵形线的起点，即 $r = 0$, 焦点 F_+ 和

F_- 始终位于双叶双曲面补集的“中间”连通分支中。随着 r 从 0 增加到 $+\infty$，双叶双曲面逐渐远离系统原点，克利福德谱包含两个分支（两个泡或两个点）。下面给出一个例子。

例 4.3。令 $a=(6,\ 1,\ -1)$ 且 $\alpha_2=2-i$ 和 $\alpha_3=3+2i$；因此 $||a||^2=18$、$|\alpha_2|^2=5$、$|\alpha_3|^2=13$、$\alpha_2^2-{\alpha_3}^2=-2+\overline{8i}$、$|\alpha_2^2-{\alpha_3}^2|^2=68$、$\overline{\mathrm{Im}(\alpha_2\alpha_3)}=1$，从而 $e=1236$，且 $||a||^4=1384$。$D(x)$ 的方程为

$$\left[(x_1-6)^2+(x_2-1)^2+(x_3+1)^2\right]\left[(x_1+6)^2+(x_2+1)^2+(x_3-1)^2\right]+36x_1^2+16x_2^2-16x_3^2-1236.$$

为此，我们给出两个例子，说明克利福德谱可能是两个不同于“焦点”的点，也可能是一个点（它必然是原点）。

例4.4。令 $a=(1,\ 1,\ 0)$ 且 $\alpha_2=0$ 和 $\alpha_3=1+i$；因此 $||a||^2=2$、$|\alpha_2|^2=0$、$|\alpha_3|^2=2$、$|\alpha_2^2-{\alpha_3}^2|^2=4$、$\overline{\mathrm{Im}(\alpha_2\alpha_3)}=0$，从而 $e=4=||a||^4$，因此 $c=0.$。$D(x)$的方程为

$$\left[(x_1-1)^2+(x_2-1)^2+x_3^2\right]\left[(x_1+1)^2+(x_2+1)^2+x_3^2\right]+4x_1^2+4x_2^2-4x_3^2-4=$$
$$=\sum_{j=1}^{3}x_j^4+2\sum_{j<k}x_j^2x_k^2+4(x_1-x_2)^2$$

仅当 $x_1=x_2=x_3=0.$ 时才消失

例4.5。令 $a=(1、\ 1、\ 0)$ 且 $\alpha_2=0$ 以及 $\alpha_3=i$；因此 $||a||^2=2$、$|\alpha_2|^2=0$、$|\alpha_3|^2=1$、$|\alpha_2^2-\overline{\alpha_3^2}|^2=1$、$\mathrm{Im}(\alpha_2\alpha_3)=0$，从而 $e=3$ 且 $||a||^4=4$，因此 $c=1.$ $D(x)$的方程为

$$\left[(x_1-1)^2+(x_2-1)^2+x_3^2\right]\left[(x_1+1)^2+(x_2+1)^2+x_3^2\right]+2[(x_1^2-1)+(x_2^2-1)-x_3^2]+1=$$
$$=(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1)^2+4(x_1-x_2)^2+4x_3^2$$

仅当 $x_1=x_2=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ 且 $x_3=0.$ 时才消失

Acknowledgments

中间　　作者希望将这篇短文献给他母亲 Georgeta 的记忆　　.

A.C. 和 V.L. 感谢桑迪亚国家实验室实验室指导研究与开发项目的支持。T.A.L. 感谢美国国家科学基金会 DMS-2349959 号拨款的支持。这项工作部分在综合纳米技术中心完成，该中心是由美国能源部（DOE）科学办公室运营的科学办公室用户设施。桑迪亚国家实验室是一个多任务实验室，由桑迪亚国家技术与工程解决方案有限责任公司管理和运营；该公司是霍尼韦尔国际公司的全资子公司，受美国能源部国家核安全管理局根据 DE-NA-0003525 号合同委托。文章中表达的观点不一定代表美国能源部或美国政府的观点。

References

1. Robert FV Anderson，*Weyl* 函数演算，《函数分析杂志》**4**（1969），第 2 期，240–267。

2. Robert V. F. Anderson，《非交换自伴算子的函数演算》，博士论文，普林斯顿大学，1967。3. Alexander Cerjan、Vasile Lauric 和 Terry A Loring，《c∗-代数中的多变量伪谱》，《数学分析与应用杂志》547（2025），第 1 期，129241。4. Alexander Cerjan 和 Terry A. Loring，《局部不变量识别金属和无能隙系统中的拓扑》，《物理评论 B》106（2022），064109。5.，《使用谱局域化子和数值 K 理论对光子拓扑进行分类》，《APL 光子学》9（2024），第 11 期。6.，《偶维球面作为矩阵模型的联合谱》，《数学分析与应用杂志》531（2024），第 1 期，第 2 部分，127892。7. Alexander Cerjan、Terry A. Loring 和 Hermann Schulz-Baldes，《晶体拓扑的局域标记》，《物理评论快报》132（2024），第 7 期，073803。8. Alexander Cerjan、Terry A. Loring 和 Fredy Vides，《用于识别局域态的二次伪谱》，《数学物理杂志》64（2023），第 2 期，023501。9. Nisarg Chadha、Ali G. Moghaddam、Jeroen van den Brink 和 Cosma Fulga，《用于完整刻画位错趋肤效应的实空间拓扑局域化指标》，《物理评论 B》109（2024），第 3 期，035425。10. W. Cheng、A. Cerjan、S.-Y. Chen、E. Prodan、T. A. Loring 和 C. Prodan，《利用受 K 理论启发的实验方案揭示金属中的拓扑》，《自然通讯》14（2023），3071。11. Ching-Kai Chiu、Jeffrey C. Y. Teo、Andreas P. Schnyder 和 Shinsei Ryu，《具有对称性的拓扑量子物质分类》，《现代物理评论》88（2016），035005。12. Patrick H DeBonis、Terry A Loring 和 Roman Sverdlov，《作为矩阵联合谱的曲面与超曲面》，《落基山数学杂志》52（2022），第 4 期，1319–1343。13. Selma Franca 和 Adolfo G. Grushin，《平凡金属的谱局域化子拓扑零模》，《物理评论 B》109（2024），第 19 期，195107。14. I. C. Fulga、D. I. Pikulin 和 T. A. Loring，《非周期弱拓扑超导体》，《物理评论快报》116（2016），第 25 期，257002。15. Arnob Kumar Ghosh、Rodrigo Arouca 和 Annica M. Black-Schaffer，《弗洛凯系统的局部且能量分辨的拓扑不变量》，《物理评论 B》110（2024），245306。16. G. Greiner 和 W. J. Ricker，《(2×2) 自伴矩阵系统的联合谱与交换性》，《线性与多重线性代数》36（1993），第 1 期，47–58。MR 1308908 17. M. Z. Hasan 和 C. L. Kane，《专题评论：拓扑绝缘体》，《现代物理评论》82（2010），第 4 期，3045–3067。18. Brian Jefferies，《非对易算子的谱性质》，《数学讲义》1843，Springer-Verlag Berlin，2004。19. Brian Jefferies 和 Alan McIntosh，《Weyl 演算与克利福德分析》，《澳大利亚数学学会公报》57（1998），第 2 期，329–341。20. Vladimir Kisil，《M ¨obius 变换与单演函数演算》，《美国数学学会电子研究公告》2（1996），第 1 期，26–33。21. Terry A Loring，《拓扑绝缘体的 K理论与伪谱》，《物理学年鉴》356（2015），383–416。22. Terry A. Loring 和 Hermann Schulz-Baldes，《有限体积计算 K-理论不变量》，《纽约数学杂志》23（2017），1111–1140。MR 3711272 23.，《偶指标配对的谱局域化子》，《非交换几何杂志》14（2020），第 1 期，1–23。MR 4107509 24. Kyrylo Ochkan、Raghav Chaturvedi、Viktor K¨onye、Louis Veyrat、Romain Giraud、Dominique Mailly、Antonella Cavanna、Ulf Gennser、Ewelina M. Hankiewicz、Bernd B¨uchner、Jeroen van den Brink、Joseph Dufouleur 和 Ion Cosma Fulga，《多端量子霍尔器件中的非厄米拓扑》，《自然物理》2024，1–7。25. Alan J Pryde 和 Andrzej So-ltysiak，《关于非对易正规算子的联合谱》，《澳大利亚数学学会公报》48（1993），第 1 期，163–170。26. Zihao Qi、Ilyoun Na、Gil Refael 和 Yang Peng，《时间准周期马约拉纳模的实空间拓扑不变量》，《物理评论 B》110（2024），第 1 期，014309，出版方：美国物理学会。27. Catalin D. Spataru、Wei Pan 和 Alexander Cerjan，《通过局域陈标记揭示人工量子材料中的拓扑现象》，《物理评论快报》134（2025），126601。

28. Stephan Wong、Terry A. Loring 和 Alexander Cerjan，利用数值方法探测非线性拓扑材料中的拓扑 K 理论，物理评论 B **108** (2023)，第 19 期，195142。