arXiv:2602.15347v1 [math.MG] 17 Feb 2026

关于基本 r-球多面体 *

卡罗伊·贝兹德克

2026年2月18日

摘要

本文在 d 维欧几里得空间 $\mathbb{E}^d$ 中，为 $d>1$ 和 $r>0$ 引入基本 r-球多面体这一类。我们研究其面结构，并针对给定的整数 $0\le i\le d-1$、$n\ge d+1\ge 3$，确定在具有 n 个面 $\mathbb{E}^d$ 的所有基本 r-球多面体中，i 维面的最大数量。此外，我们证明，对于 $d>2$，每个基本 r-球多面体关于其内二面角都是全局刚性的。

1 基本 r-球多面体及其面格

令 $\mathbb{E}^d, d>1$ 表示 d 维欧几里得空间，其配备标准内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和范数 $\|\cdot\|$。设给定 $r>0$。以 $\mathsf{p}\in\mathbb{E}^d$ 为球心、半径为 r 的闭（分别为开）欧几里得球记作 $\mathsf{B}^d[\mathsf{p}\ r]:=\{\mathsf{q}\in\mathbb{E}^d\mid\|\mathsf{p}-\mathsf{q}\|\le r\}$（分别记作 $\mathsf{B}^d(\mathsf{p}\ r):=\{\mathsf{q}\in\mathbb{E}^d\mid\|\mathsf{p}-\mathsf{q}\|<r\}$）。通常，$\mathsf{int}(\cdot)$、$\mathsf{bd}(\cdot)$、$\mathsf{cl}(\cdot)$、$\mathsf{conv}(\cdot)$ 和 $\mathsf{dim}(\cdot)$ 分别表示 $\mathbb{E}^d$ 中相应集合的内部、边界、闭包、凸包和维数。回顾一下，$\mathbb{E}^d$ 中的 r-球多面体（例如参见 [4], [9], 和 [12]）是 $\mathbb{E}^d$ 中有限个半径为 $r>0$ 的闭球的交，且其内部非空；这些球称为该 r-球多面体的生成球。此外，自然可以假设，移除任一生成球后，剩余球的交集会成为更大的集合。换言之，每当讨论一个 r-球多面体时，我们总是假设其生成球构成一个约化族。三维 r-球多面体中一个非常自然的子族是所谓的正规 r-球多面体，它们最早由 [6] 引入（另见 [7]）。本文将该定义推广到高维，并在 $\mathbb{E}^d$ 中为所有 $d>1$ 引入基本 r-球多面体，讨论其若干组合性质和度量性质，这些性质基于其底层的最远点 Voronoi 图。具体内容如下。

*关键词和短语： r-球多面体、最远点 Voronoi 图、最远点Delaunay复形、 r-凸包、r-凸位置、基本 r-球多面体、面格、内二面角、全局刚性。2010年数学主题分类：（主要）05C10、52C15，（次要）05B40、46B20。

†部分经费由加拿大自然科学与工程研究委员会探索研究资助提供。

我们先依照 [14] 回顾最远点 *Voronoi* 图的概念。设$C := \{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ 是 $\mathbb{E}^d$, $d > 1$ 中由 $n > 1$ 个（两两不同）点组成的点集。定义函数 R_f，将 $\mathbb{E}^d$ 映射到 C 的幂集:

$$R_f(\mathbf{x}) := \{\mathbf{c}_i \in C \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\| \geq \|\mathbf{x} - \mathbf{c}_j\| \text{ for all } 1 \leq j \leq n\}.$$

函数 R_f 在 $\mathbb{E}^d$上定义了一个等价关系 ρ_f，其中 $\mathbf{x}\rho_f\mathbf{y}$ 成立，当且仅当 $R_f(\mathbf{x}) = R_f(\mathbf{y})$。由 ρ_f诱导的 $\mathbb{E}^d$的划分称为 C 的最远点 *Voronoi* 图，记为 $V_f(C)$。$V_f(C)$的等价类称为$V_f(C)$的面，记为 $V_S := R_f^{-1}(S)$，其中 S 是 C的适当子集。按照惯例，我们将 0 维面称为顶点，1 维面称为棱，$(d-1)$ 维面称为面，将 d 维面称为 $V_f(C)$的最远点 *Voronoi* 单元。众所周知（[14]），$V_f(C)$中一个面的（拓扑）闭包是一个凸多面体集合（即有限个闭半空间的交），并且 $V_f(C)$各面的闭包构成一个多面体复形（即一个凸多面体集合的有限族，使得该族中任一成员的任何面仍属于该族；若其中两个成员的交非空，则它们的交是这两个成员的面）。

在转入基本 r-球多面体的定义之前，我们需要回顾另一个有用的概念。设 $C := \{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n\} \subset \mathbf{B}^d(\mathbf{p}\ r)$，其中 $\mathbf{p} \in \mathbb{E}^d$, $d > 1$且 $r > 0$。令 r-凸包 $\mathrm{conv}_r(C)$ 定义为 $\mathrm{conv}_r(C) := \cap\{\mathbf{B}^d[\mathbf{x}\ r] \mid C \subset \mathbf{B}^d[\mathbf{x}\ r]\}$。以下是一个基本观察（例如可由 [4] 的推论 3.4 直接得到）：$\mathbf{B}^d[\mathbf{c}_1, r], \mathbf{B}^d[\mathbf{c}_2, r], \ldots, \mathbf{B}^d[\mathbf{c}_n, r]$, $n > 1$, $d > 1$ 构成 r-球多面体 $\cap_{1 \leq i \leq n}\mathbf{B}^d[\mathbf{c}_i, r]$ 的约化生成族，且 $\mathrm{int}\left(\cap_{1 \leq i \leq n}\mathbf{B}^d[\mathbf{c}_i, r]\right) \neq \emptyset$，当且仅当点 $C := \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ 处于 r-凸位置，即对于某个 $\mathbf{p} \in \mathbb{E}^d$ 且 $r > 0$，有 $C \subset \mathbf{B}^d(\mathbf{p}\ r)$，并且对所有 $1 \leq i \leq n$ 都成立 $\mathbf{c}_i \notin \mathrm{conv}_r(C \setminus \{\mathbf{c}_i\})$。下面关于基本 r-球多面体的定义，是将 [6]and [7] 中的三维类似定义推广到高维的结果。

定义 1.1. 设 $\mathbf{C} := \mathrm{conv}\left(\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}\right)$ 为任意 d 维凸多面体，其顶点集为 $C := \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}$，位于 $\mathbb{E}^d$ 中，其中 $n \geq d + 1 \geq 3$。然后选取 $r > 0$，使得

- $\mathbf{C}$ 的顶点处于 r-凸位置，并且
- C 的最远点 *Voronoi* 图 $V_f(C)$ 的每个顶点都属于 $\mathrm{int}\,(\mathbf{P}_{C,r})$，其中 $\mathbf{P}_{C,r} := \cap_{i=1}^n \mathbf{B}^d[\mathbf{c}_i, r]$。

于是，$P_{C,r}$ 称为一个 d维基本 r球多面体，其生成半径为 r，中心多胞体为 $C = conv(C)$。若对于适当的子集 S（C的子集），$V_S = R_f^{-1}(S)$是 $V_f(C)$的一个 k维面，且 $1 \leq k \leq d$满足 $V_S \cap bd(P_{C,r}) \neq \emptyset$，则 $V_S \cap bd(P_{C,r})$（相应地，$cl(V_S) \cap bd(P_{C,r})$）称为基本 r球多面体 $P_{C,r}$的一个$(k-1)$维面（相应地，一个闭的$(k-1)$维面）。按照惯例，我们称 *0* 维面为顶点，*1* 维面为棱，并称 $P_{C,r}$的$(d-1)$维面为面。由此可知，$P_{C,r}$ 有 n个面。

注 *1.2.* 显然，定义 *1.1* 中引入的 $P_{C,r}$ 的闭面，以及 $\emptyset$和 $P_{C,r}$ （作为退化面），在按包含关系排序时构成一个偏序集 $L(P_{C,r})$。由于 $P_{C,r}$ 的两个闭面的交要么是 $\emptyset$，要么是 $P_{C,r}$ 的一个闭面，因此 $L(P_{C,r})$是一个格——称为 $P_{C,r}$ 的面格——其交运算为$F \wedge F' := F \cap F'$，并运算为 $F \vee F' := \cap\{F'' \in L(P_{C,r}) \mid F \subseteq F''$和 $F' \subseteq F''\}$，其中 F和 $F' \in L$ 是 $P_{C,r}$的闭面。

现在，我们可以陈述所承诺的 d 维基本 r 球多面体的面格的组合性质。设 $n > d > 1$ 和 $\mathbf{C}(n,d)$ 是矩曲线 $(\tau, \tau^2, \ldots, \tau^d)$ 上任意 n 个不同点的凸包，其中 $-\infty < \tau < \infty$ 属于 $\mathbb{E}^d$。设 $c_i(n,d)$ 表示 $\mathbf{C}(n,d)$ 的 i 维面的数目，其中 $0 \le i \le d-1$。McMullen 在 [10] 中证明，若 f_i 是一个具有 n 个顶点的任意 d 维凸多胞体的 i 维面的数目，则 $f_i \le c_i(n,d)$，其中 $0 \le i \le d-1$。以下定理是 McMullen 上界定理在基本 r 球多面体中的类比。

定理 *1.3.* 设 $C := conv(\{c_1, c2, \ldots, c_n\})$ 是一个任意的 d 维凸多胞体，其顶点集为 $C := \{c_1, c2, \ldots, c_n\}$，其中 $\mathbb{E}^d$ 属于 $\mathbb{E}^d$，且 $n \ge d+1 \ge 3$。若 $f_{k-1}(P_{C,r})$ 表示具有 n 个面的基本 r 球多面体 $P_{C,r}$ 的 $(k-1)$ 维面的数目，则

$$f_{k-1}(\mathbf{P}_{C,r}) \le c_{d-k}(n,d)$$

对所有 $0 \le k-1 \le d-1$ 均成立。

注 1.4。 由定理 *1.3* 的证明可直接得出，对于定义 *1.1* 中的选择 $\mathbf{C} := \mathbf{C}(n,d)$，定理 *1.3* 中的上界是精确的。

为了陈述 d 维基本 r-球多面体所具有的度量性质，我们先回顾以下定理。根据众所周知的 Alexandrov定理 [1]，若$\mathbf{P}$ 和$\mathbf{P}'$是组合等价的凸多面体，且在 $\mathbb{E}^3$ 中对应的面角相等，那么$\mathbf{P}$ 和$\mathbf{P}'$ 的对应内二面角也相等。众所周知，Alexandrov 定理蕴含 Cauchy 刚性定理（例如参见定理 26.8 及其后在 [13] 中的讨论）；根据该定理，若 $\mathbb{E}^3$ 中的两个凸多面体组合等价，且对应的面全等，那么$\mathbf{P}$ 与$\mathbf{P}'$全等。这些定理为 d 维基本 r-球多面体的以下类比结果提供了启发和依据。为陈述该结果，我们还需要

定义 *1.5.* 设 $P_{C,r}$ 是由 $\mathbb{E}^d$, $d \ge 3$构成的基本 r-球多面体。此外，设 $V_S \cap bd(P_{C,r})$ 是 $P_{C,r}$ 的任意一个 $(d-2)$ 维面，且 $p \in V_S \cap bd(P_{C,r})$，其中$S$ 是来自 C的一对不同（无序）点。（参见定理 *2.1* 的第 *(i)* 和 *(ii)* 部分。）以 S 中的点为球心、半径为 r 的两个闭球是$P_{C,r}$的生成球，其边界包含 $V_S \cap bd(P_{C,r})$。现在，赋予$V_S \cap bd(P_{C,r})$的内二面角，是在 p 处支撑这两个半径为 r 的生成球的两个半空间交集的角度。最后，如果满足以下条件，我们就称 $P_{C,r}$ 在 d 维基本 r-球多面体族中，关于其内二面角是全局刚性的。若另一个由 $\mathbb{E}^d$ 构成的基本 r-球多面体 $P_{C',r}$ 的面格 $L(P_{C',r})$

与 $L(\mathbf{P}_{C,r})$ 同构，且其内二面角与$\mathbf{P}_{C,r}$中对应的内二面角相等，那么$\mathbf{P}_{C',r}$ 与$\mathbf{P}_{C,r}$全等。

定理 1.6。 每个由 $\mathbb{E}^d, d \geq 3$ 构成的基本 r-球多面体，在 d 维基本 r-球多面体这一类中，关于其内二面角都是全局刚性的。

定理 1.3 和 1.6 的证明见第 3 节。最后，第 4 节提出了相关的开放问题。

2 关于基本 r-球多面体的面

首先，我们回顾 [4] 中的以下概念。设 $\mathrm{P} = \cap_{i=1}^{n} \mathrm{B}^d[\mathrm{c}_i, r]$ 是一个 r-球多面体，其生成球约化系统为 $\mathrm{B}^d[\mathrm{c}1, r], \ldots, \mathrm{B}^d[\mathrm{c}_n, r]$，且属于 $\mathbb{E}^d, d \geq 3, n > 1, r > 0$。我们称 $S^{d-1}(\mathrm{c}_i, r) := \mathrm{bd}\left(\mathrm{B}^d[\mathrm{c}_i, r]\right)$ 为 P 的生成球面，其中 $1 \leq i \leq n$。若 l 维球面 $S^l(\mathrm{p}\ s)$，$0 \leq l \leq d-1$ 的中心为 p、半径为 $s \geq 0$，且它是 P 的若干生成球面的交，并满足 $S^l(\mathrm{p}\ s) \cap \mathrm{P} \neq \emptyset$，则称其为 P 的支撑球。若对于 P 的任意支撑球 $S^l(\mathrm{p}\ s)$，交集 $S^l(\mathrm{p}\ s) \cap \mathrm{P}$ 同胚于某个维数的闭欧几里得球，则称 P 为标准 r-球多面体。我们将在定理 2.1 中证明：对于给定的 d 维凸多胞体 $\mathrm{C} := \mathrm{conv}\left(\{\mathrm{c}_1, \mathrm{c}2, \ldots, \mathrm{c}_n\}\right)$，其顶点为 $C := \{\mathrm{c}_1, \mathrm{c}2, \ldots, \mathrm{c}_n\}$，且属于 $\mathbb{E}^d$，其中 $n \geq d+1 \geq 3$；若 $r > 0$ 足够大，则基本 r-球多面体 $\mathrm{P}_{C,r}$ 也是标准 r-球多面体。另一方面，不难看出，存在并非基本球多面体的标准 r-球多面体。（关于三维例子，参见 [6] 中的第 91 页。）

接下来，设 $\mathrm{P}_{C,r} = \cap_{i=1}^{n} \mathrm{B}^d[\mathrm{c}_i, r]$ 是一个具有 n 个面的基本 r-球多面体，其中心多胞体为 $\mathrm{C} = \mathrm{conv}(C) = \mathrm{conv}\left(\{\mathrm{c}_1, \mathrm{c}2, \ldots, \mathrm{c}_n\}\right)$ in $\mathbb{E}^d$，其中 $n \geq d+1 \geq 3$。根据定义 1.1，如果 $V_S = R_f^{-1}(S)$ 是适当子集 S（$S \subseteq C$，且 $1 \leq k \leq d$）对应的最远点 Voronoi 图 $V_f(C)$ 的一个 k 维面，并满足 $V_S \cap \mathrm{bd}(\mathrm{P}_{C,r}) \neq \emptyset$，则称 $V_S \cap \mathrm{bd}(\mathrm{P}_{C,r})$ 为 r-球多面体 $\mathrm{P}_{C,r}$ 的一个（$k-1$）维面。此外，$\mathrm{P}_{C,r}$ 的每个（$k-1$）维面都可以由此方式得到。接下来，我们来定义

$$D_f(C) := \{\mathrm{conv}(S) \mid S \subseteq C \text{ and } V_S \neq \emptyset\}.$$

回顾一下（[14]），$D_f(C)$ 称为 C 的 最远点*Delaunay*复形，它是一个多面体复形，其成员的相对内部以面面相接的方式划分 $\mathbf{C} = \mathrm{conv}(C)$。此外，$D_f(C)$ 的每个凸多胞体都内接于一个球面。（关于 $D_f(C)$ 的更多性质，例如参见 [2] 或 [14]。）我们还需要

$$\partial D_f(C) := \{\mathrm{conv}(S) \mid \mathrm{conv}(S) \in D_f(C) \text{ and } \mathrm{conv}(S) \subset \mathrm{bd}\,(\mathbf{C})\},$$

它也是一个多面体复形，其成员的相对内部以面面相接的方式划分 $\mathrm{bd}(\mathbf{C})$。我们称之为 C 的最远点边界德劳内复形 。在我们看来，$D_f(C)$ 和 $\partial D_f(C)$ 最重要的性质如下。

定理 *2.1.* 设 $C := conv(\{c_1, c2, \ldots, c_n\})$ 是任意一个 d 维凸多胞体，其顶点集为 $C := \{c_1, c2, \ldots, c_n\}$ *in* $\mathbb{E}^d$，其中 $n \geq d+1 \geq 3$。接下来，选择 $r > 0$，使得 $P_{C,r} = \cap_{i=1}^{n} B^d[c_i, r]$ 是一个基本 r-球多胞体，具有 n 个面，并以 $C = conv(C)$ 为其中心多胞体。那么，$P_{C,r}$ 的面以及底层的最远点 *Voronoi* 图 $V_f(C)$ 具有以下性质。

(i) $V_S = R_f^{-1}(S)$ 是 $V_f(C)$ 的一个 k 维面，当且仅当对于适当的 S 的子集 C，$conv(S) \in D_f(C)$ 是一个 $(d-k)$ 维凸多胞体，其中 $0 \leq k \leq d$。*(ii)* $V_S \cap bd(P_{C,r})$ 是 $P_{C,r}$ 的一个 $(k-1)$ 维面，当且仅当 $conv(S) \in \partial D_f(C)$ 且 $dim\,(conv(S)) = d-k$，其中 $1 \leq k \leq d$。*(iii)* 对于给定的中心多胞体 C，存在 $r_0 > 0$，使得对于所有 $r \geq r_0$，基本 r-球多胞体 $P_{C,r}$ 也是 $\mathbb{E}^d$ 的一个标准 r-球多胞体，并且 $P_{C,r}$ 的每个 $(k-1)$ 维面 $V_S \cap bd(P_{C,r})$ 都同胚于一个维数为 $k-1$ 的球，其中 $1 \leq k \leq d$。

定理 2.1 的证明：第 (i) 部分是众所周知的。（例如，参见 [2] 或 [14]。）为证明第 (ii) 部分，设 $V_S \cap \mathrm{bd}(\mathrm{P}_{C,r})$ 是 $\mathrm{P}_{C,r}$ 的一个 $(k-1)$ 维面，其中$1 \leq k \leq d$。这里，$V_S = R_f^{-1}(S)$ 是 $V_f(C)$ 的一个 k 维面，其中 $V_f(C)$ 对应于 C 的一个适当子集 S；它必定有一条无界边，例如 e（因为 $V_f(C)$ 的每个顶点都位于 $\mathrm{int}\,(\mathrm{P}_{C,r})$ 中，且 $V_S \cap \mathrm{bd}(\mathrm{P}_{C,r}) \neq \emptyset$）。由第 (i) 部分，存在一个一一映射 ϕ，将 $V_f(C)$ 的闭面族映到多面体复形 $D_f(C)$ 的所有成员构成的族上，且该映射是反包含的。因此，由第 (i) 部分可知，$\phi(\mathrm{cl}(V_S)) = \mathrm{conv}(S) \in D_f(C)$，且 $\dim(\mathrm{conv}(S)) = d-k$。现在，假设 $\mathrm{conv}(S) \in D_f(C) \setminus \partial D_f(C)$。我们将如下推出矛盾。由第 (i) 部分，$\phi(\mathrm{cl}(e)) \in D_f(C)$ 是一个 $(d-1)$ 维凸多胞体（内接于球面），且包含 $\mathrm{conv}(S)$。由于 $\mathrm{conv}(S) \notin \partial D_f(C)$，因此 $\phi(\mathrm{cl}(e)) \in D_f(C) \setminus \partial D_f(C)$，这意味着存在两个 d 维凸多胞体 $\mathrm{Q}_1 \in D_f(C)$ 和 $\mathrm{Q}_2 \in D_f(C)$，使得 $\phi(\mathrm{cl}(e)) = \mathrm{Q}_1 \cap \mathrm{Q}_2$。再由第 (i) 部分，$\phi^{-1}(\mathrm{Q}_1)$ 和 $\phi^{-1}(\mathrm{Q}_2)$ 是 $\mathrm{cl(e)} = \phi^{-1}(\phi(\mathrm{cl}(e)))$ 的两个顶点，这意味着 e 有界，矛盾。因此，我们已经证明，若 $V_S \cap \mathrm{bd}(\mathrm{P}_{C,r})$ 是 $\mathrm{P}_{C,r}$ 的一个 $(k-1)$ 维面，则 $\mathrm{conv}(S) \in \partial D_f(C)$，且 $\dim(\mathrm{conv}(S)) = d-k$，其中 $1 \leq k \leq d$。为证明反方向，取满足 $\mathrm{conv}(S) \in \partial D_f(C)$ 且 $\dim(\mathrm{conv}(S)) = d-k$ 的 $S \subset C$，其中 $1 \leq k \leq d$。由第 (i) 部分，$V_S = R_f^{-1}(S)$ 是 $V_f(C)$ 的一个 k 维面。为了证明 $V_S \cap \mathrm{bd}(\mathrm{P}_{C,r})$ 是 $\mathrm{P}_{C,r}$ 的一个 $(k-1)$ 维面，我们需要证明 $V_S \cap \mathrm{bd}(\mathrm{P}_{C,r}) \neq \emptyset$。由于 $\mathrm{conv}(S) \in \partial D_f(C)$，因此存在 $\mathrm{C} = \mathrm{conv}(C)$ 在 $\mathbb{E}^d$ 中的一个支撑超平面 H，且满足 $S \subset H$。由于 $\mathrm{conv}(S)$ 是一个内接于球面的凸多胞体，因此存在一列 $(d-1)$ 维球面 $S^{d-1}(\mathrm{p}_n, r_n)$（$n =$ 取 1, 2, . . .），使得 $\lim_{n \to +\infty} S^{d-1}(\mathrm{p}_n, r_n) = H$，且由$S^{d-1}(\mathrm{p}_n, r_n)$ 围成的闭 d 维球对所有 $n = 1$、2、. . . 都包含 C。由此可得 $\{\mathrm{p}_1, \mathrm{p2}, \ldots, \mathrm{p}_n, \ldots\} \subset R_f^{-1}(S)$，这意味着 V_S 是 $V_f(C)$ 的一个无界面，因此 $V_S \cap \mathrm{bd}(\mathrm{P}_{C,r}) \neq \emptyset$。第 (ii) 部分证毕。

最后，为了证明第 (iii) 部分，设$\mathbf{P}_{C,r}$ 是一个 d维的基本 r球多面体，其中心多胞体为$\mathbf{C} = \mathrm{conv}(C)$，顶点为 $C := \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}$，位于 $\mathbb{E}^d$ 中，其中 $n \geq d+1 \geq 3$ 且 $r > 0$。令 $S'(\mathbf{p}\ s) := S^{d-1}(\mathbf{c}_{i_1}, r) \cap S^{d-1}(\mathbf{c}_{i_2}, r) \cap \cdots \cap S^{d-1}(\mathbf{c}_{i_k}, r)$ 为

$\mathrm{P}_{C,r}$ 的一个任意 l 维支撑球 $F := S^l(\mathrm{p}\ s) \cap \mathrm{P}_{C,r} = S^l(\mathrm{p}\ s) \cap \mathrm{bd}(\mathrm{P}_{C,r}) \neq \emptyset$, $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq n$，且 $0 \leq l \leq d-1$。由于对所有 $1 \leq j \leq k$， $S^{d-1}(\mathbf{c}_{i_j}, r) \cap \mathrm{bd}(\mathrm{P}_{C,r}) = \mathrm{cl}\left(R_f^{-1}(\mathbf{c}_{i_j})\right) \cap \mathrm{bd}(\mathrm{P}_{C,r})$ 成立，因此

$$\emptyset \neq F = S^l(\mathbf{p}, s) \cap \mathrm{bd}(\mathbf{P}_{C,r}) = \mathrm{bd}(\mathbf{P}_{C,r}) \bigcap \left(\cap_{j=1}^{k} \mathrm{cl}\left(R_f^{-1}(\mathbf{c}_{i_j})\right)\right) \tag{1}$$

$$= \mathrm{bd}(\mathbf{P}_{C,r}) \bigcap \mathrm{cl}\left(R_f^{-1}(\{\mathbf{c}_{i_1}, \mathbf{c}_{i_2}, \ldots, \mathbf{c}_{i_k}\})\right) \tag{2}$$

按照定义 1.1 的含义，是$\mathbf{P}_C$的一个闭面，$_r$。此处根据第 (ii) 部分，我们得到 $\mathrm{conv}(\{\mathbf{c}_{i_1}, \mathbf{c}_{i_2}, \ldots, \mathbf{c}_{i_k}\}) \in \partial D_f(C)$，并且

$$\dim(F) = d - \dim\left(\mathrm{aff}(\{\mathbf{c}_{i_1}, \mathbf{c}_{i_2}, \ldots, \mathbf{c}_{i_k}\})\right) - 1 = l. \tag{3}$$

接下来，我们回顾以下概念。若 P 是 $\mathbb{E}^d$中的一个凸多面体集合，则衰退锥 $\mathrm{rec}(P)$定义为 $\mathrm{rec}(P) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{E}^d \mid \mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} \in P$对所有 $\lambda \geq 0$和$\mathbf{x} \in P\}$均成立。我们在引理 2.2 中观察到，最远点 Voronoi 图 $V_f(C)$ 的面相对于其仿射包具有满维衰退锥，并指出这一性质是引理 2.3 证明的关键。

引理 2.2。凸多面体锥$\mathrm{rec}\left(\mathrm{cl}\left(R_f^{-1}(\{\mathbf{c}_{i_1}, \mathbf{c}_{i_2}, \ldots, \mathbf{c}_{i_k}\})\right)\right)$ 是 $V_f(C)$ 的$(l+1)$维闭面$\mathrm{cl}\left(R_f^{-1}(\{\mathbf{c}_{i_1}, \mathbf{c}_{i_2}, \ldots, \mathbf{c}_{i_k}\})\right)$ 的衰退锥，它是尖凸的（即不包含直线）；此外，其维数等于

$$d - \dim\left(\mathrm{aff}(\{\mathbf{c}_{i_1}, \mathbf{c}_{i_2}, \ldots, \mathbf{c}_{i_k}\})\right) = l + 1.$$

引理 2.2 的证明：设 $S := \{\mathbf{c}_{i_1}, \mathbf{c}_{i_2}, \ldots, \mathbf{c}_{i_k}\}$. 那么 $V_S = R_f^{-1}(S)$ 是 $V_f(C)$ 的一个（l+1）维面，它生成了 $\mathrm{P}_{C,r}$ 的边界 $\bigcap \mathrm{cl}\left(R_f^{-1}(S)\right)$ 上的（ l）维面 $F =$，其中 $\mathrm{P}_{C,r}$。因此，由（ii）可知，$\mathrm{conv}(S) \in \partial D_f(C)$ 是中心多胞体 C 的一个（$d-l-1$）维面。现在，令 $\mathbf{s} \in \mathrm{relint}\,(\mathrm{conv}(S))$ 是 $\mathrm{conv}(S)$ 的任意一个相对内部点。那么，中心多胞体 C 在面 $\mathrm{conv}(S)$ 处的法锥 $N_{\mathbf{C}}(\mathrm{conv}(S))$ 定义为

$$N_{\mathbf{C}}(\mathrm{conv}(S)) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{E}^d \mid \langle \mathbf{x} - \mathbf{s}, \mathbf{y} \rangle \leq 0, \text{ for all } \mathbf{x} \in \mathbf{C}\}.$$

现在，我们可以回顾一下，根据 [8] 的第 3 节

$$\mathrm{rec}(V_S) = -N_{\mathbf{C}}(\mathrm{conv}(S)) \text{ with } \dim(V_S) = \dim(N_{\mathbf{C}}(\mathrm{conv}(S))). \tag{4}$$

由于 $N_{\mathbf{C}}(\mathrm{conv}(S))$ 显然是 $\mathbb{E}^d$ 中一个尖锐的（$l+1$）维凸多面体锥，（4）完成了引理 2.2 的证明。 □

引理 *2.3.* 设 $p^* \in \mathbb{E}^{l+1}, l \geq 0$，且 Q 是 $\mathbb{E}^{l+1}$ 中一个无界闭的 $(l+1)$ 维凸多面体集合，其尖锐衰退锥维数为 $(l+1)$。那么存在 $s_0 > 0$，使得具有以下性质：对于所有 $s^* \geq s_0$，Q 的顶点都包含在 $B^{l+1}(p^*, s^*)$ 中，且 $bd\left(B^{l+1}(p^*, s^*)\right) =: S^l(p^*, s^*)$，使得 $S^l(p^*, s^*) \cap Q$ 与一个闭的 l 维欧几里得球同胚。

引理 2.3 的证明：设 $\{F_i(\mathrm{Q}) \mid i \in I_{\mathbf{Q}}\}$ 为 Q 的面族，并设 $H_i(\mathrm{Q})$ 是 $\mathbb{E}^{l+1}$ 中 $F_i(\mathrm{Q})$ 的超平面，它界定包含 Q 的闭半空间$H_i^+(\mathrm{Q})$，其中 $i \in I_{\mathbf{Q}}$。由于 $\dim(\mathrm{rec}(\mathrm{Q})) = l+1$，[3] 的定理直接推出，Q 可由 $\mathbb{E}^{l+1}$ 中的单个点光源照亮；也就是说，存在一点 $\mathrm{q} \in \mathbb{E}^{l+1}$，使得对于所有 $i \in I_{\mathbf{Q}}$，$\mathrm{q} \notin H_i^+(\mathrm{Q})$。现在，取 $s_0 > 0$，使得 Q 的顶点包含在 $\mathrm{B}^{l+1}(\mathrm{p}^*, s_0)$ 中，且 $\mathrm{q} \in \mathrm{B}^{l+1}(\mathrm{p}^*, s_0)$。此外，令 $\mathrm{q}_0 \in \mathrm{int}(\mathrm{Q}) \cap \mathrm{B}^{l+1}(\mathrm{p}^*, s_0)$。最后，令 $s^* \geq s_0$。显然，$\mathrm{B}^{l+1}(\mathrm{p}^*, s^*)$ 包含 Q 的顶点以及 q_0 和 q，因此，从 q_0 出发并经过 q 的半直线与 $S^l(\mathrm{p}^*, s^*)$ 相交，不妨设交点为 q^*。由此可得

$$\mathbf{q}^* \notin H_i^+(\mathbf{Q}) \text{ for all } i \in I_{\mathbf{Q}}, \tag{5}$$

也就是说，$\mathbf{q}^* \in S^l(\mathbf{p}^*, s^*)$ 作为点光源照亮 $\mathbb{E}^{l+1}$ 中的 $\mathbf{Q}$。定义闭的 l 维球冠 $C_i(\mathbf{p}^*, s^*)$ 为 $C_i(\mathbf{p}^*, s^*) := H_i^+(\mathbf{Q}) \cap S^l(\mathbf{p}^*, s^*)$，其中 $i \in I_{\mathbf{Q}}$。由 (5) 可得

$$\mathbf{q}^* \notin C_i(\mathbf{p}^*, s^*) \text{ for all } i \in I_{\mathbf{Q}} \text{ and } S^l(\mathbf{p}^*, s^*) \cap \mathbf{Q} = \bigcap_{i \in I_{\mathbf{Q}}} C_i(\mathbf{p}^*, s^*). \tag{6}$$

现在，令 $\pi_{\mathbf{q}^*} : S^l(\mathbf{p}^*, s^*) \to H^*$ 为立体投影，其中心（或极点）为 $\mathbf{q}^*$，将 $S^l(\mathbf{p}^*, s^*) \setminus \{\mathbf{q}^*\}$ 映射到 $\mathbb{E}^{l+1}$ 的超平面 H^* 上，其中 H^* 在 $\mathbf{p}^*$ 点与 $S^l(\mathbf{p}^*, s^*)$ 相切，该点与 $\mathbf{q}^*$ 直径相对。因此，由 (6) 可直接推出，对所有 $i \in I_{\mathbf{Q}}$，$\pi_{\mathbf{q}^*}(C_i(\mathbf{p}^*, s^*))$ 都是 H^* 中的一个闭 l 维欧几里得球，因此

$$\pi_{\mathbf{q}^*}\left(S^l(\mathbf{p}^*, s^*) \cap \mathbf{Q}\right) = \bigcap_{i \in I_{\mathbf{Q}}} \pi_{\mathbf{q}^*}\left(C_i(\mathbf{p}^*, s^*)\right) \tag{7}$$

是 l 维紧凸集，在 H^* 中具有非空内部，从而完成引理 2.3 的证明。

□

最后，将引理 2.3 应用于 $\mathbf{P}_{C,r}$ 的任意一个 l 维面 F，其表示由 (1)、(2) 和 (3) 给出，其中 $0 \leq l \leq d-1$，可得 F 与一个闭的 l 维欧几里得球同胚。由于需要考虑的 F 只有有限多个，定理 2.1 第 (iii) 部分中 r_0 的存在性也显而易见。至此，定理 2.1 的证明完成。 □

定理 2.1 第 (iii) 部分的证明以及标准 r-球多面体的欧拉-庞加莱公式（见 [4] 中的推论 6.10）可直接推出以下结论。

推论 2.4. 对于给定的中心多胞体$\mathbf{C}$，存在 $r_0 > 0$，使得对于所有 $r \geq r_0$，基本的 r-球多面体 $\mathbf{P}_{C,r}$ 也是 $\mathbb{E}^d$ 中的标准 r-球多面体，并满足以下欧拉-庞加莱公式：

$$1 + (-1)^{d+1} = \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i f_i(\mathbf{P}_{C,r}).$$

3 定理 1.3 和 1.6 的证明

定理 1.3 的证明：令 C := conv ($\{c_1, c2, \ldots, c_n\}$) 为一个任意的 d 维凸多胞体，其顶点集为 $C := \{c_1, c2, \ldots, c_n\}$ in $\mathbb{E}^d$，其中 $n \geq d+1 \geq 3$。接下来，选择 $r > 0$，使得 $P_{C,r} = \cap_{i=1}^{n} B^d[c_i, r]$ 是一个基本的 r-球多面体，具有 n 个面，且以 C $=$ conv(C) 为其中心多胞体。根据定理 2.1 的第 (ii) 部分，$V_S \cap$ bd($P_{C,r}$) 是 $P_{C,r}$ 的一个 $(k-1)$ 维面，当且仅当 conv(S) $\in \partial D_f(C)$ 且 dim (conv(S)) $= d-k$，其中 $1 \leq k \leq d$。因此，$P_{C,r}$ 的 $(k-1)$ 维面数 f_{k-1} 等于最远点边界德劳内复形 $\partial D_f(C)$ 中 $(d-k)$ 维凸胞 conv(S) $\in \partial D_f(C)$ 的数目。注意，每个 $(d-k)$ 维凸胞 conv(S) $\in \partial D_f(C)$ 都是中心多胞体 C 的某个 $(d-k)$ 维面的子集，并且 $\partial D_f(C)$ 是一个具有 n 个顶点、划分 bd(C) 的多面体复形。显然，从 C 的一个内部点向以所选内部点为中心的 $(d-1)$ 维球面作径向投影，$\partial D_f(C)$ 会生成一个 $(d-1)$ 维球面的球面多面体复形。关于多胞体顶点拉取的第 2.5 节中，我们回顾了：在讨论如何最大化多胞体的面数时，只需考虑单纯多胞体；类似地，对于球面复形，我们只需考虑单纯的球面复形（另见第 4.1 节 [11]）。最后，我们回顾 Stanley 的上界定理（[15]）：根据该定理，具有 n 个顶点的 $(d-1)$ 维球面的任意三角剖分中，$(d-k)$ 维面的数目至多为 $c_{d-k}(n,d)$，其中 $0 \leq k-1 \leq d-1$。因此，对于所有 $0 \leq k-1 \leq d-1$，均有 f_{k-1}($P_{C,r}$) $\leq c_{d-k}(n,d)$。定理 1.3 得证。

□

定理 1.6 的证明：设 $P_{C,r}$（分别为 $P_{C',r}$）是一个以中心多胞体 C（分别为 C′）为中心的基本 r-球多面体，其顶点集为 $C := \{c_1, c2, \ldots, c_n\}$（分别为 $C' := \{c'_1, c'_2, \ldots, c'_n\}$），其中 $\mathbb{E}^d$, $d \geq 3$，且面格 L($P_{C,r}$) 和 L($P_{C',r}$) 同构，并且 $P_{C,r}$ 的内二面角等于 $P_{C',r}$ 中对应的内二面角。由于面格 L ($P_{C,r}$) 和 L($P_{C',r}$) 同构，定理 2.1 的第 (i) 和 (ii) 部分可直接推出，最远点边界德劳内复形 $\partial D_f(C)$ 和 $\partial D_f(C')$ 同构，其成员的相对内部以面面相接的方式划分 bd(C) =bd (conv(C)) 和 bd(C′) = bd (conv(C')))。$P_{C,r}$ 和 $P_{C',r}$ 的对应二面角相等这一假设，依据定理 2.1 的第 (ii) 部分，意味着多面体复形 $\partial D_f(C)$ 和 $\partial D_f(C')$ 的对应棱相等。由于多面体复形 $\partial D_f(C)$ 和 $\partial D_f(C)$ 的每个成员都是内接于球面的凸多胞体，因此，下面的陈述证明了 $\partial D_f(C)$ 和 $\partial D_f(C')$ 中对应的成员全等。

引理 3.1. 设**Q** 和**Q′** 是 $\mathbb{E}^d$、 $d \geq 2$ 中的 d维凸多胞体，其面格同构，且对应的棱长度相等。如果**Q** 和**Q′** 的每个 k面（$2 \leq k \leq d$）都内接于$(k-1)$球面，那么**Q** 和**Q′** 全等。

引理 *3.1* 的证明： 可以按 $d \geq 2$ 归纳证明该命题，具体如下。对于$d = 2$，需要证明：若一个凸多边形可以内接于 $\mathbb{E}^2$中的圆，那么由其边的长度和循环顺序可唯一确定该多边形（相差一个全等变换）。这一初等事实的证明留

给读者。然后我们假设，任意两个同构的“内接型”($d-1$)维多胞体，若其对应边长相等，则这两个多胞体全等。接下来，考虑Q 的任意一个($d-1$)维面（面） F及其对应的Q′的面 F'。应用归纳假设，可知 F与 F'全等。现在我们有两个 d维凸多胞体Q 和Q′ ，它们位于 $\mathbb{E}^d$ 中，且面格同构，对应的面均全等。最后，回顾 Alexandrov 定理（参见 [1]第 3 章）：若 $\mathbb{E}^d$ 中的两个 d维凸多胞体具有同构的面格，且对应的面全等，则这两个多胞体在 $\mathbb{E}^d$中全等。由于Q 和Q′满足 Alexandrov 定理的条件，因此Q 必与Q′全等，从而完成引理 3.1 的归纳证明。

□

作为引理 3.1 的直接推论，我们得到，最远点边界 Delaunay 复形 $\partial D_f(C)$ 和 $\partial D_f(C')$ 分别与划分 bd(C) = bd (conv(C)) 和 bd(C′) = bd (conv(C')) 的各成员的相对内部同构，并且这种划分以面面相接的方式进行，使得 $\partial D_f(C)$ 和 $\partial D_f(C')$ 中相应的成员全等。现在，我们回顾第 3 章中的 Alexandrov多胞体唯一性定理 [1]，其表述如下：设 Q 和 Q′ 是 d 维凸多胞体，位于 $\mathbb{E}^d$, $d \geq 3$ 中。若存在一个同胚f : bd(Q) $\rightarrow$ bd(Q′)，将它们的边界对应起来，并且 f 是一个内蕴等距，则 Q 和 Q′ 全等。由于不难看出，Alexandrov定理的条件通过多面体复形 $\partial D_f(C)$ 和 $\partial D_f(C')$ 对 bd(C) 和 bd(C′) 成立，因此我们得到 C 和 C′ 全等，从而 $\mathrm{P}_{C,r}$ 和 $\mathrm{P}_{C',r}$ 也全等。这就完成了定理 1.6 的证明。

□

4 总结性评述

问题 4.1. 证明或证伪：定理 *1.3* 和 *1.6* 是否可推广至 $\mathbb{E}^d$, $d \geq 3$ 中的标准 r-球多面体。

注 4.2. 由于欧拉-庞加莱公式适用于 $\mathbb{E}^d$ 中的标准 r-球多面体，因此通过简单计算可知，定理 *1.3* 可推广至 $\mathbb{E}^3$ 的标准 r-球多面体；也就是说， $\mathbb{E}^3$ 中任意一个具有 n 个面的标准 r-球多面体，至多有 $c_2(n,3) = 2n-4$ 个顶点和 $c_1(n,3) = 3n-6$ 条棱。此外，回想一下，若一个3维标准 r-球多面体的每个顶点恰有3 条棱相交于此，则称其为简单多面体。 *[5]* 的主要结果证明了定理 *1.6* 针对3维标准 r-球多面体的一个局部版本，指出每个简单的标准 r-球多面体（ $\mathbb{E}^3$ ）关于其内二面角都是局部刚性的。

参考文献

[1] A. D. Alexandrov, 《凸多面体》（N. S. Dairbekov、S. S. Ku- tateladzeand 和 A.B. Sossinsky 英译）, *Springer-Berlin*, 2005。

[2] F. Aurenhammer 和 R. Klein，沃罗诺伊图，计算几何手册，North-Holland，阿姆斯特丹，2000，201–290。[3] K. Bezdek，关于无界闭凸集的照明，《以色列数学杂志》80/1-2（1992），87–96。[4] K. Bezdek、Zs. L´angi、M. Nasz´odi 和 P. Papez，球多面体，《离散与计算几何》38/2（2007），201–230。[5] K. Bezdek 和 M. Nasz´odi，欧几里得三维空间中的刚性球多面体，《离散与计算几何》49/2（2013），189–199。[6] K. Bezdek，球面排列讲义——离散几何方面，Fields 研究所专著 32，施普林格，纽约；Fields 数学科学研究所，安大略省多伦多，2013。[7] K. Bezdek，欧几里得三维空间中的全局刚性球多面体，《计算机科学汇刊》，载于《计算机科学讲义》8110（2013），施普林格，海德堡，158–169。[8] M. A. Goberna、J. E. Mart´ınez-Legaz、M. I. Todorov，关于最远点沃罗诺伊单元，《线性代数及其应用》583（2019），306–322。[9] Y. S. Kupitz、H. Martini 和 M. A. Perles，球多胞体与 V´azsonyi 问题，《匈牙利数学学报》126/1-2（2010），99–163。[10] P. McMullen，凸多胞体的面数最大值，《Mathematika》17（1970），179–184。[11] P. McMullen 和 G. C. Shephard，凸多胞体与上界猜想，伦敦数学会讲义系列，剑桥大学出版社，伦敦—纽约，1971。[12] H. Martini、L. Montejano 和 D. Oliveros，等宽体——凸几何及其应用导论，Birkh ¨auser-Springer，2019。[13]I. Pak，离散几何与多面体几何讲义，https://www.math.ucla.edu/pak/book.htm，1–442。[14] R. Seidel，d 维沃罗诺伊图面数的精确上界，DIMACS 系列《离散数学、理论与计算机科学》，美国数学会，《应用几何与离散数学》4（1991），517–529。[15] R. P. Stanley，上界猜想与 Cohen–Macaulay 环，《应用数学研究》54/2（1975），135–142。

K´aroly Bezdek 数学与统计学系，加拿大卡尔加里大学；数学系，匈牙利维斯普雷姆潘诺尼亚大学 电子邮箱：bezdek@math.ucalgary.ca