单体双范畴的对称性移位

RAFFAEL STENZEL

摘要。我们证明，单体双范畴上的每个编织都会在其幺半群双范畴上诱导出一个幺半结构；若前者是半对称的或对称的，则后者相应地是带编织的或对称的。这推广了 Joyal 和 Street 关于幺半范畴的经典定理。本文给出的证明应用了 ∞-运算子可加性定理，从而避免了大量计算。

arXiv:2602.15358v1 [math.CT] 17 Feb 2026

1. 引言

范畴化高维代数是众多数学研究活动的核心，在代数、拓扑学、几何、物理学和逻辑学等领域的基础研究与应用中均占据重要地位。这尤其适用于拓扑量子场论、K-理论和表示论等领域[BD98a, SP09, Lur17]。事实上，幺半范畴论早已是 Mac Lane 标准范畴论体系的一部分 [Lan71], ，此后发展为一门成熟的理论，并应用于众多学科 [JS93]。Kapranov–Voevodsky 开创了幺半双范畴论的研究 [KV94a, KV94b], ，此后该领域也取得了长足发展 [JY21]。发展二维理论，既是为了将其应用于物理学和拓扑学（弥补其一维对应理论的不足），也是由于它在一般低维范畴论形式化中具有基础性作用 [Gur13]。然而，二维的纯代数理论因其始终需要处理数量庞大、结构复杂的相干公理而以难以驾驭著称。维数达到 3 [Hof11], 或更高时，范畴化代数理论更是如此。另一方面，近年来，幺半 ∞-范畴论沿着 May 开创的运算子传统发展起来 [May72, Lur17]。在这一框架中，相干公理通过同伦论方法内置于理论机制之中，也因此更便于运用拓扑学和几何学思想。

本文是关于双范畴的 ∞-范畴代数系列论文中的第二篇。该系列的最终目标是运用 [Lur17] 中系统发展的高阶代数成果，为低维范畴论中一些原本计算冗长的结果给出相当直接的证明。为了说明本文主要结果的动机，以及高阶代数在证明该结果时的便利性，我们回顾一个关于幺半范畴的著名结果。

定理 3.4（Joyal–Street）。设$\mathcal{C}$ 为一个幺半范畴，Mon($\mathcal{C}$) 为其中幺半群所成的范畴 $\mathcal{C}$.（1）$\mathcal{C}$ 上的每个编织都会在 Mon($\mathcal{C}$) 上诱导出一个幺半结构。（2）$\mathcal{C}$ 上的每个对称性都会在 Mon($\mathcal{C}$) 上诱导出一个对称幺半结构。
在这两种情况下，相应的结构都是规范诱导的，即遗忘函子 Mon($\mathcal{C}$) $\to\mathcal{C}$与其定义域一样是幺半的。

我们将定理 3.4 称为幺半范畴的对称性移位，其缘由将在下文变得明了。证明该定理时，根据 Mac Lane 著名的相干定理，不失一般性地可以假设幺半范畴$\mathcal{C}$ 是一个严格幺半范畴。接着，假设$\mathcal{C}$ 配备了一个编织 β，则两个幺半群 A和 B 的张量积可以通过它们在$\mathcal{C}$中的底层对象的张量积显式计算。其乘法由以下复合给出

$$(A\otimes B)\otimes(A\otimes B)\xrightarrow{=}A\otimes(B\otimes A)\otimes B\xrightarrow{\beta}A\otimes(A\otimes B)\otimes B\xrightarrow{=}(A\otimes A)\otimes(B\otimes B)\xrightarrow{m_A\otimes m_B}A\otimes B. \quad (1)$$

相应的公理可以手工计算。本文的主要结果是以下二维对称性移位定理。

日期：2026年2月18日。

定理 4.21。 设$\mathcal{C}$ 为一个幺半双范畴，Mon($\mathcal{C}$)为$\mathcal{C}$中幺半群所构成的双范畴。

(1) $\mathcal{C}$ 上的每个编织都会在 Mon($\mathcal{C}$) 上诱导出一个幺半结构。(2) $\mathcal{C}$ 上的每个 syllepsis 都会在 Mon($\mathcal{C}$) 上诱导出一个编织幺半结构。(3) $\mathcal{C}$ 上的每个对称性都会在 Mon($\mathcal{C}$) 上诱导出一个对称幺半结构。

在每种情况下，相应的结构都是典范地诱导出来的，也就是说，遗忘函子 Mon($\mathcal{C}$) $\to\mathcal{C}$ 与其定义域一样具有幺半性。

再次强调，为了证明该定理，不失一般性，可以借助 Gordon, Power and Street 的相干定理 [GPS95]，假设幺半双范畴 $\mathcal{C}$ 是一个 Gray 幺半群。然而，这里首先需要谨慎对待幺半结构、编织、syllepsis 和对称性的精确定义。其次，即使经过将 $\mathcal{C}$ 半严格化为 Gray 幺半群的过程，仅仅由于需要逐一验证的公理数量众多，直接计算也会更加冗长复杂。第三，依次考察定理 3.4 和定理 4.21 时，显然可以看出其中呈现出某种规律。

本文的主要目标是表述并证明定理 4.21 的以下 ∞-范畴版本，从而回应上述三条评论。

定理 4.17. 设 $\mathcal{C}$ 是笛卡尔幺半 ∞-范畴 BiCat$^\times$ （由双范畴构成）中的一个 E_k-幺半群。设 $0 \le m \le k$ 为一个整数。那么，C 中 m 重伪幺半群构成的双范畴 Alg$_{\mathsf{E}_m}$($\mathcal{C}$) 带有一个典范的 E_{k-m}-幺半群结构。[1] 此外，双函子

$$U\colon \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_m}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$$

将一个 m 重伪幺半群映射到其底层对象的函子可提升为 E_{k-m}-幺半群的一个态射。

记号。 尽管在当前讨论的概念背景下，这一术语可能令人困惑，但按照惯常约定，“∞-范畴”指的是“(∞, 1)-范畴”。此外，由于本文通篇大量使用 [Lur17] 的结果，这里更确切地说，特指“拟范畴”。

非正式地说，定理 4.17 表明，赋值 Alg$_{\mathsf{E}_m}$(–) 会使其输入的对称度发生 m的平移。这启发了上面两个定理以及本文标题的命名。为了理解定理 4.17 与定理 4.21 之间的关系，我们注意到，在等价意义下，BiCat$^\times$ 中的 E_1-幺半群与 Kapranov–Voevodsky 原始代数意义下的幺半双范畴之间存在规范的一一对应关系。类似地，幺半双范畴 $\mathcal{C}$ 中的 E_1-代数所构成的双范畴，恰好由$\mathcal{C}$ 中的幺半群组成，这里的“幺半群”取原始代数意义。一般而言，较大整数 k 对应的 E_k-代数被理解为带有一定交换度的结合代数结构，并在 $k = \infty$处恢复完全交换性。因此，定理 4.17 中的界限 $0 \le m \le k$ 是通常所谓微观宇宙原理的一个实例。这一原理通常被认为是由 Baez 和 Dolan 提出的。该原理指出：“某些代数结构可以在任何赋有同一结构的范畴化版本的范畴中定义”，换言之，“微观宇宙的每一个特征 [. . .] 都对应于宏观宇宙的某个特征” [BD98b]。用这一术语来说，定理 4.17 以及随后定理 4.21 的核心论证，是一个简单的观察：宏观宇宙的集合本身是幺半的，而将宏观宇宙 $\mathcal{C}$ 映射到$\mathcal{C}$ 中微观宇宙的集合的赋值是一个幺半函子。于是，这些陈述基本上可通过可加性定理形式化地推出。我们将在提纲中对此作更详细的解释。

为了将双范畴上的高阶 E_k-结构与其代数对应物联系起来，需要按照 [Lur17] 的意义，将双范畴的笛卡尔幺半 ∞-范畴 BiCat$^\times$ 的高阶代数，与按照 [DS97] 和 [JS93] 的意义定义的双范畴二维代数，在定理 4.20 所规定的范围内等同起来。这一等同是本系列第一篇论文 [Ste26], 的主题；它将使我们能够从定理 4.17 证明定理 4.21，同时尽可能避免粘贴那些大胆的图表，而这种粘贴在二维代数中通常不可避免。

若能进一步刻画双范畴中 m-重伪幺半群结构与相应编织之间的关系（这留待未来工作），便可证明定理 4.21 的一个变体，它同样适用于具有额外幺半结构的伪幺半群双范畴（定理5.3）。相关工作。定理 4.21 最初由 Nick Gurski [Gur07] 发现，Nicola Gambino 也独立发现了该定理；两人均通过直接的代数计算给出了证明。然而，据我们所知，文献中尚无相关证明。关于与带编织（对称）幺半群相关联的模的2-范畴，且该幺半群位于带编织（半对称／对称）的多融合

[1] 这里，对于 $k = \infty, 0 \le m \le \infty$，我们设 $k - m = \infty$。

2-范畴中的类似论述见 [DY23，定理 A、B、C]。该结果同样是通过直接的代数计算证明的。

技术方面的提纲。为了理解高阶代数的同伦相干工具如何有助于证明定理 4.21，我们注意到，该定理先验地是关于约化三范畴的四范畴中构造的陈述。也就是说，实际上是在幺半双范畴的三范畴中。然而，尽管双范畴本身并非 (2,1)-范畴，人们很快就会意识到，定理 4.21 中的结构实际上是双范畴的 (3,1)-范畴 BiCat 中的构造。这是因为其中出现的每个概念都仅由高阶可逆胞来定义。此外，可以观察到，双范畴 Mon($\mathcal{C}$) 是一个 (3,1)-函子的逐对象取值

$$\mathrm{Mon}(-)\colon \mathrm{MonBicat} \to \mathrm{BiCat} \tag{2}$$

定义在幺半双范畴的 (3,1)-范畴上。为了定义函子 (2)，我们将利用如下事实：(3,1)-范畴 BiCat 可以实现为 2-范畴上 Lack 模型结构的通常底同伦 ∞-范畴。这使得我们能够把 (2) 的三维函子性问题归结为构造其同伦性质良好的一维呈示。于是，定理 4.21 中的陈述便是下列事实的形式推论：

(1) 我们可以将 (3,1)-范畴 MonBicat 替换为 $\mathrm{BiCat}^{\times}$ 中同伦相干幺半群构成的 (3, 1)-范畴 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathrm{BiCat}^{\times})$（引理 4.12）。(2) 函子 (2) 是笛卡尔幺半的（推论 4.11）。因此，它诱导出如下形式的提升

$$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_k}(\mathrm{Mon}(-))\colon \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_{k+1}}(\mathrm{BiCat}^{\times}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_k}(\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathrm{Bicat}^{\times})) \to \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_k}(\mathrm{BiCat}^{\times}).$$

(3) 带编织的、半对称的和对称幺半双范畴都是相应整数 k 各自对应的 E_k-代数（定理 4.20）。

这三个事实共同表明，我们感兴趣的结构在某个适当的 ∞-范畴中都是余表示的，并且 Mon(–) 是该 ∞-范畴中的一个态射。因此，定理 4.21 是后合成与可加性定理（定理 2.7 中回顾）的一个实例。

这一证明的好处之一是，它并非专用于二维代数，也适用于其他情形（例如第 2 节中的 ∞-范畴，或第 3 节中的普通范畴）。特别是，尽管它具有全局性质，却能导出任意单个幺半范畴中两个幺半群相乘的显式局部公式（1）（命题 3.6）。

论文结构。第 2 节回顾相关的 ∞范畴概念，并给出定理 4.17 的一个纯粹 ∞范畴版本，以作引入。第 3 节讨论将这一高阶代数片段直接应用于幺半范畴理论，主要也是为了引入。这包括定理 3.4 的一个 ∞ 范畴证明。第 4 节以半严格 Gray 幺半呈示的形式回顾双范畴的二维代数，讨论其相关的同伦论，并定义函子 (2)。此外，本节运用第 2 节的结果证明定理 4.17，继而证明定理 4.21。第 5 节讨论可能的未来工作。

致谢。本文旨在回答 Nicola Gambino 提出的问题；若没有他的推动和持续支持，本文便不会问世。在这一背景下运用高阶代数的想法，源自 Clark Barwick 和 James Cranch 的建议。作者谨向 John Bourke 致谢，感谢他提出的深刻见解；向 Amar Hadzihasanovic 致谢，感谢他盛情邀请作者前往塔林讨论研究结果；并向 Adrian Miranda 和 Mike Shulman 致谢，感谢他们富有帮助的讨论。本文所述研究得到美国空军科学研究办公室资助，资助编号为 FA9550-21-1-0007。

2. 幺半范畴及其中的幺半群

第一小节简要回顾 [Lur17] 中相关的定义、定理和例子。第二小节讨论定理 4.17 的一个直接的 ∞-范畴版本。

简要预备知识。

∞-Operad。 ∞-operad 的概念，在本质上以与 ∞-范畴概念推广范畴概念相同的方式，推广了（着色）对称多重范畴的概念。更精确地说，令 Fin_* 表示有限带基点集合与保基点函数的范畴。我们将 Fin_* 视为一个 ∞-范畴。我们回顾，一个 ∞-operad $\mathcal{O} \to \mathrm{Fin}_*$ 被定义为单纯集合的一个态射，它满足 Segal 条件，并且进一步对 Fin_* [中的所有惰性映射展现余笛卡尔提升Lur17,

定义 2.1.1.10]。每一个这样的态射 O $\to$Fin$_*$ 尤其是一个等纤维化，因此一个 ∞-operad 的定义域 O 始终是一个 ∞-范畴。后者有时被称为与该 ∞-operad 相关联的 ∞-算子范畴。我们常常仅通过其 ∞-算子范畴来指称一个 ∞-operad。该定义蕴含，一个 ∞-operad 的纤维 O($[n]$) 典范地等价于 n 元积 $\prod_{1\leq i\leq n}$O($[1]$)；特别地，O($[n]$) 中的一个元素本质上是 O($[1]$) 中元素的一个 n 元组。给定一个 n 元组 $\vec{x}$ $\in$O($[n]$) 以及单个对象 $y \in$ O($[1]$)，该定义进一步允许我们将映射空间 O($\vec{x}, y$) 视为 ∞-operad O 中从 $\vec{x}$ 到 y 的多重态射空间。对于一般对象 $\vec{y} \in$ O($[m]$)，映射空间 O($\vec{x}, \vec{y}$) 简单地分解为映射空间 O($\vec{x}$, y_i) 的积。特别地，每当该 ∞-operad 是单色的，即每当 O($[1]$) 可缩且收缩中心为 x 时，映射空间 O($(x, \dots, x)$ x) 便可被视为由与该 ∞-operad 相关联的 n 元运算所构成。

我们进一步回顾，对称幺半 ∞-范畴 $\mathcal{C}^\otimes \to$Fin$_*$ 是一个 ∞-拟运算，它对 Fin$_*$ [中的所有态射都给出余笛卡尔提升 Lur17，例 2.1.2.18]。特别地，对称幺半∞-范畴是一个余笛卡尔纤维化 $\mathcal{C}^\otimes \twoheadrightarrow$ Fin$_*$。通过 ∞-范畴的 Grothendieck 构造，它也可以等价地描述为 Fin$_* \to$ Cat$_\infty$ 中的一个 Segal 对象，其对象的 ∞-范畴是可缩的。实质上，也就是说，它是 Cat$_\infty$ 中的一个 ∞-范畴对象，具有单个对象和交换的复合。对称幺半 ∞-范畴 $\mathcal{C}^\otimes$ 的底层 ∞-范畴由单位元 $*$ $\in$Fin$_*$上的纤维 $\mathcal{C}$:=$\mathcal{C}^\otimes$($*$) 给出。

∞-拟运算的代数。给定一个 ∞-拟运算 $\mathcal{O}$，$\mathcal{O}$ 中位于 Fin$_*$ 中的惰性映射之上的余笛卡尔态射类称为$\mathcal{O}$中的惰性态射类。给定另一个 ∞-拟运算$\mathcal{V}$，可以考虑全子∞-范畴 Alg$_\mathcal{O}$($\mathcal{V}$) $\subseteq$ Fun$^{\mathrm{Fin}_*}$($\mathcal{O}$,$\mathcal{V}$)，它由那些保持惰性态射的、位于 Fin$_*$之上的单纯集合态射所张成。这个 ∞-范畴通常称为从∞-拟运算 $\mathcal{O}$ 到$\mathcal{V}$的 ∞-拟运算态射范畴，或者等价地，称为$\mathcal{O}$在$\mathcal{V}$中的 ∞-范畴代数。

命题 2.1。 设 $\mathcal{C}^\otimes$ 是一个对称幺半 ∞-范畴，$\mathcal{V}$ 是一个 ∞-代数。则 ∞- 范畴 代数$_\mathcal{V}(\mathcal{C}^\otimes)$ 继承 $\mathcal{C}^\otimes$的对称幺半结构。

证明。 [Lur17，例 3.2.44]。 □

例 2.2。 命题 2.1 使我们能够在以对称幺半 ∞-范畴$\mathcal{C}$为起点时，迭代地构造代数的 ∞-范畴。也就是说，给定 ∞-代数 $\mathcal{O}$ 和 $\mathcal{V}$，我们可以构造 ∞-范畴 Alg$_\mathcal{O}$(Alg$_\mathcal{V}$($\mathcal{C}^\otimes$)$^\otimes$)，它由$\mathcal{C}^\otimes$中的$\mathcal{V}$-代数里的$\mathcal{O}$-代数组成。此外，∞-范畴的 ∞-代数自身带有闭对称幺半结构 [Lur17，第 2.2 节5]。两个 ∞-代数 $\mathcal{O}$ 和 $\mathcal{V}$ 的相应张量积 $\mathcal{O} \otimes_{\mathrm{BV}} \mathcal{V}$ 是 Boardman-Vogt张量积的 ∞-代数版本。它诱导出一个等价

$$\mathrm{Alg}_\mathcal{O}(\mathrm{Alg}_\mathcal{V}(\mathcal{C}^\otimes)^\otimes) \simeq \mathrm{Alg}_{\mathcal{O}\otimes_{\mathrm{BV}}\mathcal{V}}(\mathcal{C}^\otimes)$$

对称幺半 ∞-范畴。

例 2.3。 本文的核心是小立方体 ∞-运算子 E$_k$ for $0 \leq k \leq \infty$。给定一个对称幺半 ∞-范畴 $\mathcal{C}^\otimes$， ∞-范畴 Alg$_{\mathrm{E}_1}$($\mathcal{C}^\otimes$)（本质上）是 $\mathcal{C}^\otimes$ 中结合幺半群的 ∞-范畴。E$_\infty$ 运算子由 ∞-范畴 Fin$_*$ 本身给出（更确切地说，由其到自身的恒等函子给出）。 ∞-范畴 Alg$_{\mathrm{E}_\infty}$($\mathcal{C}^\otimes$) 是 $\mathcal{C}^\otimes$ 中交换结合幺半群的 ∞-范畴。我们将在下文进一步讨论中间整数 $1 < k < \infty$ 。

例 2.4。 每个具有有限积的 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 都给出一个笛卡尔对称幺半 ∞-范畴 $\mathcal{C}^\times \to$Fin$_*$ [Lur17，第 2.4 节.1]。特别地，存在一个由 ∞-范畴构成的笛卡尔幺半 ∞-范畴 Cat$_\infty^\times$。此外，任意保有限积函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，若其定义在具有有限积的 ∞-范畴之间，则诱导出一个对称幺半函子 $F\colon \mathcal{C}^\times \to \mathcal{D}^\times$ [Lur17，推论 2.4.1.8]。

例 2.5。 </style}笛卡尔幺半范畴 Cat 中 E$_\infty$-代数构成的 ∞-范畴 SMonCat$_\infty$:=Alg$_{\mathrm{E}_\infty}$(Cat$_\infty^\times$)，等价于对称幺半 ∞-范畴的 ∞-范畴。事实上，根据定义，它的对象是从 Fin$_*$ 到 Cat$_\infty^\times$ 的 ∞-运算子态射，因此通过 ∞-范畴 Grothendieck 构造，它们给出了对称幺半 ∞-范畴。可以将 SMonCat$_\infty$ 中的态射视为对称幺半∞-范畴之间的强对称幺半函子。相比之下，对称幺半 ∞-范畴之间的一般 ∞-运算子态射则是松对称幺半函子。

例 2.6。同样，笛卡尔幺半 ∞-范畴 $\mathrm{Cat}_\infty^\times$ 中 E_1-幺半群构成的 ∞-范畴 $\mathrm{MonCat}_\infty := \mathrm{Alg}_{\mathrm{E}_1}(\mathrm{Cat}_\infty^\times)$，等价于幺半 ∞-范畴的 ∞-范畴。$\mathrm{MonCat}_\infty = \mathrm{Alg}_{\mathrm{E}_1}(\mathrm{Cat}_\infty^\times)$中的态射仍然是幺半 ∞-范畴之间的强幺半函子（而非其松版本）。为了将幺半 ∞-范畴的定义与低维范畴论中更熟悉的 Cat_∞ 内幺半群概念联系起来，我们回顾一下：存在一个嵌入 $\Delta^{op} \hookrightarrow \mathrm{Fin}_*$，它将自然数 n 映射到其对应的“切割” [Lur17，第 4 节 4.1.2]。沿此嵌入拉回余笛卡尔纤维化 $\mathrm{Cat}_\infty^\times \to \mathrm{Fin}_*$，得到余笛卡尔纤维化 $\mathrm{Cat}_\infty^\times \to \Delta^{op}$。这通过遗忘对称性，定义了与 $\mathrm{Cat}_\infty^\times$ 相关联的“平面”幺半 ∞-范畴。现在，∞-范畴 MonCat_∞ 等价于满子-∞-范畴 $\mathrm{Alg}_{\Delta^{op}}(\mathrm{Cat}_\infty^\times) \subseteq \mathrm{Fun}_{\Delta^{op}}(\Delta^{op}, \mathrm{Cat}_\infty)$，其对象由平面 ∞-运算子的态射构成。后者同样定义为保持惰性态射的截面 $\Delta^{op} \to \mathrm{Cat}_\infty^\times$；或者在此情形下，等价地定义为将 $[0]$ 映射到终端 ∞-范畴且满足 Segal 条件的函子 $\Delta^{op} \to \mathrm{Cat}_\infty$。本质上，这些是 Cat_∞ 中的 ∞-范畴对象，且只有一个对象。

最后，我们指出，若 $\mathcal{C}^\otimes$ 是一个（不必对称的）幺半 ∞-范畴，则 $\mathcal{C}^\otimes$ 中 E_1-代数的 ∞-范畴 $\mathrm{Alg}_{\mathrm{E}_1}(\mathcal{C}^\otimes)$ 仍可定义为平面 ∞-算畴中从 Δ^{op} 到 $\mathcal{C}^\otimes$ 的态射所成的 ∞-范畴 [Lur17，第 4.1 节.3].[2] 对于 $k > 1$，若 $\mathcal{C}^\otimes$ 本身仅仅是结合的且有单位元的，则 $\mathcal{C}^\otimes$ 中 E_k-代数的 ∞-范畴却不是一个良类型构造。然而，更一般地，存在一列典范包含

$$\mathrm{E}_1 \hookrightarrow \mathrm{E}_2 \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathrm{E}_k \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathrm{E}_\infty$$

这表明 E_∞ 是诸 E_k 的序贯余极限 [Lur17]。因此，每个 E_k 都可视为 E_∞ 的有限近似。特别地，每当 $\mathcal{C}^\otimes$ 本身对某个 $1 \le k \le \infty$ 是 $\mathrm{Cat}_\infty^\times$ 中的 E_k-代数时，可以类似地将 $\mathcal{C}^\otimes$ 视为纤维化于 ∞-算畴 E_k 上的 ∞-范畴（而不是纤维化于 $\mathrm{E}_\infty = \mathrm{Fin}_*$ 上，或纤维化于 $\mathrm{E}_1 \simeq \Delta^{op}$[3] 上）。于是，对任意 $0 \le m \le k$，我们仍可将 $\mathrm{Alg}_{\mathrm{E}_m}(\mathcal{C}^\otimes) \subseteq \mathrm{Fun}_{\mathrm{E}_k}(\mathrm{E}_m, \mathcal{C}^\otimes)$ 定义为由那些保持惰性态射的函子所张成的全子 ∞-范畴。

我们以回顾 ∞-运算子的可加性定理结束本预备章节。因此，我们回到例 2.2 中讨论的 ∞-运算子的 Boardman–Vogt 张量积。

定理 2.7 ([Lur17，定理 5.1.2。2])。设 $k_1, k_2 \ge 0$ 为整数。那么典范包含 $E_{k_i} \hookrightarrow E_{k_1+k_2}$ 诱导出 $E_{k_1} \otimes_{\mathrm{BV}} E_{k_2} \to E_{k_1+k_2}$ 个 ∞-运算子之间的等价。

□

可加性定理的非正式表述是：在对称幺单 ∞-范畴 $\mathcal{C}^\otimes$ 中，给对象 A 赋予 E_k-交换代数结构，等价于在 $\mathcal{C}^\otimes$ 中给 A 赋予 k 个相容的结合代数结构。

**范畴 ∞的E_k<style id='7'}-代数的幺半性。为了阐释定理 4.17，本节讨论其一个直接的 ∞-范畴版本（推论 2.10）。本质上，它仅用到了这样一个事实：将 E_k-幺半 ∞-范畴 $\mathcal{C}^\otimes$ 映至其中 E_m-代数所成的 ∞-范畴 $\mathrm{Alg}_{\mathrm{E}_m}(\mathcal{C}^\otimes)$ 的函子，本身是幺半的（针对 $0 \le m \le k$）。

因此，我们回顾一下，对于任意整数 $0 \le k \le \infty$，∞-算子系 E_k 有一个对象 u。这个对象诱导出一个态射 $\{u\}\colon \{*\} \to \mathrm{E}_k$，它是 Fin_* 上的单纯集合之间的态射。与 $\{u\}$ 前复合诱导出一个遗忘函子

$$U\colon \mathrm{Alg}_{\mathrm{E}_k}(\mathcal{C}^\otimes) \to \mathcal{C} \tag{3}$$

对任意对称幺半 ∞-范畴 $\mathcal{C}^\otimes$。

引理 2.8. 设 $\mathcal{C}^\times$ 是一个笛卡尔幺半 ∞-范畴，且 $0 \le k \le \infty$ 是一个整数。那么，∞-范畴 $\mathrm{Alg}_{\mathrm{E}_k}(\mathcal{C}^\times)$ 仍然具有有限积，并且遗忘函子

$$\mathrm{Alg}_{\mathrm{E}_k}(\mathcal{C}^\times)^\times \to \mathcal{C}^\times$$

是对称幺半的。特别地，这适用于 $\mathrm{MonCat}_\infty := \mathrm{Alg}_{\mathrm{E}_1}(\mathrm{Cat}_\infty^\times)$。

[2]记号 $\mathrm{Alg}_{\mathrm{E}_1}(\mathcal{C}^\otimes)$ 在非对称情形下并不理想；在这种一般性下，该对象记作 $\mathrm{Alg}_{\mathrm{A}_\infty}(\mathcal{C}^\otimes)$。不过，就本文的目的而言，此时似乎不值得引入更多记号。[3]这个等价应理解为 Lur17 意义下的等价，即定理 4.1.3。14]。

证明。 遗忘函子 $U\colon \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_k}(\mathcal{C}^\times) \to \mathcal{C}$ 会创建 $\mathcal{C}$ [Lur17, 推论 3.2.2.5] 中存在的所有极限。特别是，由于根据假设，$\mathcal{C}$ 有有限积，这就证明了该结论（例 2.4）。

□

命题 2.9. 设 $0 \le k \le \infty$。函子 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_k}(-)\colon \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_k}(\mathrm{Cat}_\infty) \to \mathrm{Cat}_\infty$ 保持有限积，因此导出一个对称幺半函子

$$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_k}(-)\colon \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_k}(\mathrm{Cat}_\infty)^\times \to \mathrm{Cat}_\infty^\times.$$

证明。 两个 E_k-幺半 ∞-范畴 $\mathcal{C}^\otimes \twoheadrightarrow \mathsf{E}_k$、$\mathcal{D}^\otimes \twoheadrightarrow \mathsf{E}_k$ 的积由它们的纤维积 $\mathcal{C}^\otimes \times_{\mathsf{E}_k} \mathcal{D}^\otimes \twoheadrightarrow \mathsf{E}_k$ 给出。根据定义，函子 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_k}(-)$ 是整体截面函子 $\mathrm{Fun}_{\mathsf{E}_k}(\mathsf{E}_k, -)$ 的子函子，其逐点由那些保持惰性态射的 E_k 上的映射所张成。整体截面函子 $\mathrm{Fun}_{\mathsf{E}_k}(\mathsf{E}_k, -)$ 保持积（即它将 E_k 上的拉回映射为 hom-∞-范畴的积）。$\mathcal{C}^\otimes \times_{\mathsf{E}_k} \mathcal{D}^\otimes$ 中的态射是惰性的，当且仅当它在 $\mathcal{C}^\otimes$ 和 $\mathcal{D}^\otimes$ 中的两个投影都是惰性的。因此，$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_k}(-)$ 也保持有限积。□

推论 2.10。 令 $0 \le k \le \infty$，并设 $\mathcal{C}^\otimes$ 是一个 E_k-幺半 ∞-范畴。那么对于所有 $0 \le m \le k$，由 $\mathcal{C}^\otimes)$ 中的 E_m-幺半群构成的 ∞-范畴 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_m}($ 是一个 E_{k-m}-幺半 ∞-范畴。[4]

证明。 令 $0 \le m \le k < \infty$。根据命题 2.9，该函子

$$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_m}(-)\colon \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_m}(\mathrm{Cat}_\infty^\times)^\times \to \mathrm{Cat}_\infty^\times$$

是对称幺半的。令 $\mathcal{C}^\otimes$ 为一个 E_k-幺半 ∞-范畴。根据可加性定理，我们可以将 $\mathcal{C}^\otimes$ 视为 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_m}(\mathrm{Cat}_\infty^\times)^\times$ 中的一个 E_{k-m}-代数。态射的复合

$$\mathsf{E}_{k-m} \xrightarrow{\mathcal{C}^\otimes} \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_m}(\mathrm{Cat}_\infty^\times)^\times \xrightarrow{\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_m}(-)} \mathrm{Cat}_\infty^\times$$

从而为 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_m}(\mathcal{C}^\otimes)$ 定义了一个 E_{k-m}-幺半结构。对于 $k = \infty$ 及任意 $0 \le m \le \infty$，该陈述直接由命题 2.1 得出。

□

令 $U\colon \mathrm{MonCat}_\infty^\times \to \mathrm{Cat}_\infty^\times$ 表示遗忘函子，它将幺半 ∞-范畴 $\mathcal{C}^\otimes$ 映射到其底层 ∞-范畴 $\mathcal{C}$（引理 2.8）。那么，对于（不一定对称的）幺半 ∞-范畴 $\mathcal{C}^\otimes$，只要 $k = 1$，便可以更一般地定义遗忘函子 (3)。由此得到一个自然变换

$$\pi\colon \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(-) \to U$$

底层函子之间的自然变换由在对象 $u \in \mathsf{E}_1$ 处求值给出。对于幺半 ∞-范畴 $\mathcal{C}^\otimes$，它将 $\mathcal{C}^\otimes$ 中的 E_1-代数映射到其底层基对象。类似地，还存在一个自然遗忘函子

$$\pi\colon \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_m}(-) \to U \tag{4}$$

从 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_m}(-)\colon \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_k}(\mathrm{Cat}_\infty^\times) \to \mathrm{Cat}_\infty$ 到 $U\colon \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_k}(\mathrm{Cat}_\infty^\times) \to \mathrm{Cat}_\infty$，对所有 $0 \le m \le k$ 均成立。

推论 2.11。 设 $0 \le k \le \infty$，并假设 $\mathcal{C}^\otimes$ 是一个 E_k-幺半 ∞-范畴。那么，对所有 $0 \le m \le k$，遗忘函子 $\pi_{\mathcal{C}^\otimes}\colon \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_m}(\mathcal{C}^\otimes) \to \mathcal{C}$ 关于推论 *2.10* 所给出的 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_m}(\mathcal{C}^\otimes)$ 上的诱导 E_{k-m}-代数结构，是 E_{k-m}-幺半的。

证明。 令 $0 \le k \le \infty$。函子 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_m}(-)\colon \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_m}(\mathrm{Cat}_\infty^\times) \to \mathrm{Cat}_\infty$ 和 $U\colon \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_m}(\mathrm{Cat}_\infty^\times) \to \mathrm{Cat}_\infty$ 均保有限积。因此，自然变换 (4) 可提升为一个 2-胞

$$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_m}(\mathrm{Cat}_\infty^\times)^\times \;\overset{\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_m}(-)}{\underset{U}{\Downarrow \pi}}\; \mathrm{Cat}_\infty^\times$$

关于 Fin_* 上由 [Lur17, 推论 2.4.1.8] 给出的对称幺半函子。设 $\mathcal{C}^\otimes$ 是一个 E_k-幺半 ∞-范畴。与推论 2.10 的证明一样，我们将 $\mathcal{C}^\otimes$ 视为 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_m}(\mathrm{Cat}_\infty^\times)^\times$ 中的一个 E_{k-m}-代数。我们

[4] 对于 $k = \infty$、$0 \le m \le \infty$，我们再次设 $k - m = \infty$。

回顾一下，$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_{k-m}}(-) \subseteq \mathrm{Fun}^{\mathrm{Fin}_*}(\mathsf{E}_{k-m}, -)$ 按逐点定义为一个全子范畴。因此，E_{k-m}-代数 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 导出了这个 2-胞

$$\mathsf{E}_{k-m} \xrightarrow{\mathcal{C}^{\otimes}} \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_m}(\mathrm{Cat}_\infty^{\times})^{\times} \overset{\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_m}(-)}{\underset{U}{\Downarrow \pi}} \mathrm{Cat}_\infty^{\times} \tag{5}$$

只需通过前复合，即可得到 ∞-幺半算子。顶端的复合恰好是推论 2.10 中 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 上 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_m}$ 的 E_{k-m}-幺半结构。底端的复合等价于对

$$\mathsf{E}_{k-m} \to \mathsf{E}_k \xrightarrow{\mathcal{C}^{\otimes}} \mathrm{Cat}_\infty^{\times}$$

∞-幺半算子态射的典范限制。因此，图表 (5) 定义了一个如所述的 E_{k-m}-幺半结构 π。对于 $n = \infty$ 和任意 $0 \le m \le \infty$，结论可类似地得出。事实上，Lur17, Example 3.2.4.4] 已明确涵盖了这一情形。□

注 2.12. 推论 2.11 的证明关键地用到了 $\mathrm{Cat}_\infty^{\times}$ 是笛卡尔的这一事实。事实上，对于一般的对称幺半∞-范畴之间的两个对称幺半函子 $F, G\colon \mathcal{C}^{\otimes} \to \mathcal{D}^{\otimes}$，底层函子之间的自然变换 $\pi\colon F \to G$ 未必能自动提升为从 F 到 G 本身的对称幺半自然变换。不过，当 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 和 $\mathcal{D}^{\otimes}$ 是笛卡尔的时，这一结论成立，因为此时幺半性由有限积的泛性质保证。

通俗地说，推论 2.11 表明，E_{k+m}-幺半范畴中的 E_m-幺半群所构成的 ∞-范畴上的幺半结构，直接由其底层对象上的逐点幺半结构诱导而来。对于定理 4.17，我们不需要这一结论本身，而需要它的双范畴版本。不过，我们会在推论 4.13 中单独证明这一版本，其证明完全类似。

3. 幺半范畴及其中的幺半群

为了直接由推论 2.10 推出定理 4.17，我们希望将双范畴幺半范畴理论中的相关部分嵌入幺半 ∞-范畴理论中。正如本节将要阐明的，在幺半 1-范畴这一特殊情形下，这相当直接。

因此，我们回顾一下：标准脉络函子 $N\colon \mathsf{Cat} \to \mathsf{Set}^{\Delta^{op}}$ 将小范畴范畴映到单纯集合范畴，是关于 Cat 上典范模型结构的同伦局部化的 Quillen 右伴随；另一方面，它也是关于 Set 上∞-范畴的 Joyal 模型结构的 Quillen 右伴随。特别地，它诱导出一个完全忠实且保极限的函子

$$N\colon \mathrm{Ho}_\infty(\mathrm{Cat}) \to \mathrm{Cat}_\infty \tag{6}$$

从小范畴的（局部群胚）2-范畴到小 ∞-范畴的 ∞-范畴。由于 ∞-范畴 $\mathrm{Ho}_\infty(\mathrm{Cat})$ 和 Cat_∞ 是完备的，根据例 2.4，我们可以将它们都视为笛卡尔幺半 ∞-范畴。由此直接得到定理 4.17 的以下普通范畴版本。

命题 3.1. 设 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 是笛卡尔幺半 ∞-范畴$\mathrm{Ho}_\infty(\mathrm{Cat})^{\times}$ 中的一个E_k-代数。设 $0 \le m \le k$ 为一个整数。那么，$N(\mathcal{C}^{\otimes})$中$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_m}(N(\mathcal{C}^{\otimes}))$ 这一 ∞-范畴的E_m-代数再次构成一个范畴，并且具有一个规范的E_{k-m}-代数结构，位于$\mathrm{Ho}_\infty(\mathrm{Cat})^{\times}$中。此外，函子

$$\pi(N(\mathcal{C}^{\otimes}))\colon \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_m}(N(\mathcal{C}^{\otimes})) \to \mathcal{C}^{\otimes}$$

它将一个E_m-代数映到其底层对象，并提升为E_{k-m}-代数的一个态射 .

证明。设 $\mathsf{C}^{\otimes}$ 是 $\mathrm{Ho}_\infty(\mathsf{Cat})^{\times}$ 中的一个 E_k-代数。由于嵌入 (6) 是笛卡尔幺半的，因此可推出 $N(\mathsf{C}^{\otimes})$ 是 $\mathsf{Cat}_\infty^{\times}$ 中的一个 E_k-代数。根据推论 2.10，$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_m}(N(\mathsf{C}^{\otimes}))$ 是 $\mathsf{Cat}_\infty^{\times}$ 中的一个 E_{k-m}-代数。现在，$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_m}(N(\mathsf{C}^{\otimes}))$ 是某个范畴中函子的 ∞-范畴的全子范畴，因此它本身也是一个范畴（即等价于某个范畴的脉络）。由此，注记 2.11 中的函子$U\colon \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_m}(N(\mathsf{C}^{\otimes})) \to N(\mathsf{C})$ 也是范畴之间的函子。此外，嵌入 (6) 反映 E_m-代数结构。因此，$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_m}(N(\mathsf{C}^{\otimes}))$ 是 $\mathrm{Ho}_\infty(\mathsf{Cat})^{\times}$ 中的一个 E_{k-m}-代数，并且 $U\colon \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_m}(N(\mathsf{C}^{\otimes})) \to N(\mathsf{C}^{\otimes})$ 也是 E_{k-m}-幺半的。□

为了推出一个类似于定理 4.21 的命题 3.1 的代数版本，以下幺半范畴论中的代数概念指的是 Joyal 和 Street [JS93] 的相关概念。

命题 3.2. 设 C 为一个范畴。那么，以下概念之间存在等价关系：

(1) C 上的幺半结构与 C 在 $\mathrm{Ho}\infty(\mathrm{Cat})^\times$ 中的 E_1-代数结构；*(2)* C 上的带编织幺半结构与 C 在 $\mathrm{Ho}\infty(\mathrm{Cat})^\times$ 中的 E_2-代数结构；*(3)* C 上的对称幺半结构与 C 在 $\mathrm{Ho}\infty(\mathrm{Cat})^\times$ 中的 $\mathsf{E}\infty$-代数结构。

此外，设 $f\colon C \to D$ 是范畴 C 与 D 之间的一个函子。

(1) 假设 $C^\otimes$ 和 $D^\otimes$ 是幺半的。那么，f 上的强幺半结构与 E_1-结构之间存在等价（将其视为相关联的 E_1-幺半群的态射）。*(2)* 假设 $C^\otimes$ 和 $D^\otimes$ 是带编织幺半的。那么，f 上的带编织幺半结构与 E_2-结构之间存在等价（将其视为相关联的 E_2-幺半群的态射）。*(3)* 假设 $C^\otimes$ 和 $D^\otimes$ 是对称幺半的。那么，f 上的对称幺半结构与 $\mathsf{E}\infty$-结构之间存在等价（将其视为相关联的 $\mathsf{E}\infty$-幺半群的态射）。

证明。该 第一组三个陈述见 [Lur17, Example 5.1.2.4].[5] 第二组三个陈述可以沿用类似此处的第 (3) 部分显然成立）。 □

因此，每个幺半范畴$\mathcal{C}^\otimes$ 都会产生一个 E_1-幺半 ∞-范畴 $N(\mathcal{C}^\otimes)$。如果前者带编织（对称），则后者可以扩展为 $\mathrm{Cat}_\infty^\times$ 中相应的 E_2-幺半群（$\mathsf{E}\infty$-幺半群）。对于下面的命题，请回忆（带编织的）幺半范畴内部的（交换）幺半群的定义，以及这类对象之间的态射的定义 [JS93, Section 5]。因此，对每个幺半范畴$\mathcal{C}^\otimes$，都可以赋予范畴 $\mathrm{Mon}(\mathcal{C}^\otimes)$，即$\mathcal{C}$中的幺半群范畴。

命题 3.3. 设 $C^\otimes$ 是一个幺半范畴。

(1) ∞-范畴 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(N(C^\otimes))$ 自然等价于 $C^\otimes$ 中幺半群的范畴 $\mathrm{Mon}(C^\otimes)$。*(2)* 若 $C^\otimes$ 是带编织的，则 ∞-范畴 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_2}(N(C^\otimes))$ 自然等价于 $C^\otimes$ 中对称（或交换）幺半群的范畴$\mathrm{CMon}(C^\otimes)$。

证明。第 (1) 部分源于如下观察：$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(N(\mathcal{C}^\otimes))$（在自然等价的意义下）是函子 $A\colon \Delta^{op} \to \mathcal{C}$ 的范畴，这些函子将 A 展现为 $\mathcal{C}^\otimes$ 中幺半群 M 的 Bar 构造。形式上，这由 [Lur17，例 4.1.6.18] 连同 [Lur17，定理 5.4.3.5]给出。

对于第 (2) 部分，若$\mathcal{C}^\otimes$ 是编织幺半的，我们有等价

$$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_2}(N(\mathcal{C}^\otimes)) \simeq \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(N(\mathcal{C}^\otimes))) \simeq \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(N(\mathrm{Mon}(\mathcal{C}^\otimes))) \simeq \mathrm{Mon}(\mathrm{Mon}(\mathcal{C}^\otimes))$$

根据第 (1) 部分和可加性定理（定理 2.7）。后者根据经典的 Eckmann-Hilton 论证，同构于 $\mathrm{CMon}(\mathcal{C}^\otimes)$。□

定理 3.4。设 $C^\otimes$ 是一个幺半范畴。

(1) $C^\otimes$ 上的每个编织都会在 $\mathrm{Mon}(C^\otimes)$上诱导出一个幺半结构。*(2)* $C^\otimes$ 上的每个对称编织都会诱导出：*(a)* $\mathrm{Mon}(C^\otimes)$上的一个对称幺半结构；*(b)* 范畴 $\mathrm{CMon}(C^\otimes)$上的一个对称幺半结构。

在每种情况下，相应的结构都是规范诱导的，也就是说，遗忘函子 $\mathrm{Mon}(C^\otimes) \to C^\otimes$和 $\mathrm{CMon}(C^\otimes) \to C^\otimes$ 与其定义域一样，都带有幺半结构。

证明。设 $\mathrm{C}^\otimes$ 是一个单幺范畴，并将其视为 $\mathrm{Ho}\infty(\mathrm{Cat})^\times$ 中的 E_1-代数。对于第 (1) 部分，给定 C 上的一个编织 β，令 C^β 为它在 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathrm{Ho}\infty(\mathrm{Cat})^\times)$ 中对应的 E_1-代数，其底层 E_1-代数是 $\mathrm{Ho}\infty(\mathrm{Cat})^\times$ 中的 $\mathrm{C}^\otimes$。那么 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathrm{C}^\otimes)$ 是 $\mathrm{Ho}\infty(\mathrm{Cat})^\times$ 中的一个 E_1-代数，其底层范畴为 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathrm{C}^\otimes)$，并且遗忘函子 $U\colon \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathrm{C}^\beta) \to \mathrm{C}^\otimes$ 根据命题 3.1 是 E_1- 代数的态射。由命题 3.3 和命题 3.1 可知，范畴 $\mathrm{Mon}(\mathrm{C}^\otimes)$ 是幺半范畴，并且遗忘函子 $\mathrm{Mon}(\mathrm{C}^\beta) \to \mathrm{C}^\otimes$ 也是幺半函子。

[5] 同上引文中的论证略显简略，但结合 [JS93 的命题 5.2—5.4] 来看是正确的（这些命题本身也略显简略，但确实是正确的）。

第 (2) 部分的证明方式相同，此外只需用到在此语境下对称性是一个不动点这一点（这由 Baez–Dolan–Lurie 稳定化定理 [Lur17，例 5.1.2.3] 得出）。□

注 3.5. 定理 3.4 是众所周知的，尽管证明方法不同；尤其是第 (2) 部分.(b) 可以 be 在……中找到，例如 [JS93 的第 5] 节。

在 (1) 中，我们讨论了一个公式：只要 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 是辫幺半范畴，就可以手动定义 $\mathrm{Mon}(\mathcal{C}^{\otimes})$ 上的幺半结构。在两个幺半群的张量积上，乘法由两个分量的乘法以及 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 上的编织直接定义。本节最后指出，用于证明定理 3.4 的整体构造也能忠实地恢复这些二维代数的局部构造。

命题 3.6. *设 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 是一个带编织的幺半范畴。通过定理 3.4.1 中在 $\mathrm{Mon}(\mathcal{C}^{\otimes})$ 上抽象定义的幺半结构，$\mathcal{C}^{\otimes}$ 中两个幺半群的张量积上的乘法，恰好由复合式 (1) 给出。*

证明. 将幺半范畴 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 映射到其关联的幺半群范畴 $\mathrm{Mon}(\mathcal{C}^{\otimes})$，这一过程具有函子性。例如，给定幺半范畴之间的一个（强）幺半函子 $F\colon \mathcal{C}^{\otimes} \to \mathcal{D}^{\otimes}$，则有一个自然同构

$$\chi_F\colon F(-)\otimes F(-) \xrightarrow{\simeq} F(-\otimes -) \tag{7}$$

作为其数据的一部分。诱导函子 $\mathrm{Mon}(F)\colon \mathrm{Mon}(\mathcal{C}^{\otimes}) \to \mathrm{Mon}(\mathcal{D}^{\otimes})$ 随后将 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 中的幺半群 $\vec{A}$ 及其乘法 $m_A\colon A\otimes A \to A$ 映射为幺半群 $F(\vec{A})$，其乘法为

$$F(A)\otimes F(A) \xrightarrow{\chi_F} F(A\otimes A) \xrightarrow{F(m_A)} A.$$

对幺半 ∞-范畴以及其中的 E_1-代数的 ∞-范畴，基本上也有同样的结论。确切地说，设 $F\colon \mathcal{C}^{\otimes} \to \mathcal{D}^{\otimes}$ 是幺半 ∞-范畴之间的一个幺半函子。其数据的一部分是一个自然等价

$$\chi_F\colon F(A)\otimes F(B) \xrightarrow{\simeq} F(A\otimes B) \tag{8}$$

对于每一对对象 $A, B \in \mathcal{C}$。根据对象 $A\otimes B$ 的定义，通过相对于泛乘法 $d_1\colon [2]\to[1]$（位于 Δ^{op} 中，且定义域固定为 $(A,B) \in \mathcal{C}^{\otimes}([2])$）的余笛卡尔提升给出，并假设 F 保持笛卡尔态射。[6] 设 $\vec{A}$ 是 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 中的一个 E_1-幺半群，且设 $m_A\colon A\otimes A \to A$ 是其对应的乘法。那么，命题 2.9 中的笛卡尔幺半函子

$$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(-)\colon \mathrm{MonCat}_{\infty}^{\times} \to \mathrm{Cat}_{\infty}^{\times} \tag{9}$$

诱导出一个函子

$$\mathrm{Alg}_{v}(F)\colon \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{C}^{\otimes}) \to \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{C}^{\otimes})$$

该函子将 $\vec{A}$ 映射为 $\mathcal{D}^{\otimes}$ 中的一个 E_1-幺半群 $F(\vec{A})$，其构造方式是将 $\vec{A}\colon \mathsf{E}_1 \to \mathcal{C}^{\otimes}$ 与 F 后复合。特别地，其乘法 $m_{F(A)}\colon F(A)\otimes F(A) \to F(A)$ 定义为以下复合

$$\begin{array}{ccc} F(A)\otimes F(A) & \xrightarrow{\chi_F} & F(A\otimes A) \\ & \searrow^{m_{F(A)}} & \downarrow{\scriptstyle F(m_A)} \\ & & F(A). \end{array} \tag{10}$$

例如，函子 (9) 是笛卡尔幺半的，因此它诱导出一个函子

$$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(-))\colon \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathrm{MonCat}_{\infty}^{\times}) \to \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathrm{Cat}_{\infty}^{\times}). \tag{11}$$

设 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 是 MonCat_{∞} 中的 E_1-代数——或者等价地，是 $\mathrm{Cat}_{\infty}^{\times}$ 中的 E_2-代数——其乘法 $-\otimes-$ 为：$\mathcal{C}^{\otimes}\times\mathcal{C}^{\otimes} \to \mathcal{C}^{\otimes}$，其中对象属于 MonCat_{∞}。[7] 函子 (11) 将 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 映射为一个带有如下张量积的幺单oidal ∞-范畴 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{C}^{\otimes})$

[6] 要理解这一点，必须为 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 中一对对象的张量积选取指定代表元。通常可以通过对余笛卡尔纤维化 $\mathcal{C}^{\otimes} \twoheadrightarrow \Delta^{op}$ 进行非直化来实现。[7] 注意，$-\otimes-$ 的底层函子必然是 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 上的张量积，这可由 Eckmann-Hilton 论证得出。

其张量积定义为该复合

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{C}^{\otimes}) \times \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{C}^{\otimes}) & \xrightarrow[\simeq]{\chi_{\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(-)}} & \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{C}^{\otimes} \times \mathcal{C}^{\otimes}) \\ & \searrow^{-\otimes_{\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{C}^{\otimes})}-} & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(-\otimes-)} \\ & & \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{C}^{\otimes}). \end{array} \tag{12}$$

现在，设 $\vec{A}, \vec{B}$ 是 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 中的两个 E_1-幺半群，其乘法分别为 $m_A\colon A \otimes A \to A$ 和 $m_B\colon B \otimes B \to B$。我们希望计算它们的张量积 $\vec{A} \otimes \vec{B}$ 在 $\mathbf{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{C}^{\otimes})$ 中的（幺半群）乘法。因此，我们首先注意到，函子

$$\chi_{\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(-)}\colon \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{C}^{\otimes}) \times \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{C}^{\otimes}) \to \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{C}^{\otimes} \times \mathcal{C}^{\otimes})$$

在 (12) 中将 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 中的一对 E_1-代数 $(\vec{A}, \vec{B})$ 映射为 $\mathcal{C}^{\otimes} \times \mathcal{C}^{\otimes}$ 中显然的 E_1-代数 $\longrightarrow\!(A, B)$，其运算为逐分量运算。特别地，其乘法 $m_{(A,B)}$ 是态射

$$(A, B) \otimes (A, B) := (A \otimes A, B \otimes B) \xrightarrow{(m_A, m_B)} (A, B).$$

我们还需要计算 E_1-幺半群 $\mathbf{Alg}_{\mathsf{E}_1}(- \otimes -)(\longrightarrow\!(A, B))$ 的乘法。然而，$- \otimes -$ 本身只是一个幺半 ∞-范畴中的态射。因此，根据 (10)，它由以下复合给出

$$\begin{array}{ccc} (A \otimes B) \otimes (A \otimes B) & \xrightarrow{\chi_{-\otimes-}} & (A \otimes A) \otimes (B \otimes B) \\ & \searrow^{m_{\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(-\otimes-)(\overrightarrow{(A,B)})}} & \downarrow{\scriptstyle m_A \otimes m_B} \\ & & A \otimes B. \end{array}$$

最后，让我们将此应用于从一个带编织的幺半范畴出发的情形。我们在命题 3.1 中已经看到，函子 (9) 限制为一个函子

$$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(-)\colon \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathrm{Ho}_{\infty}(\mathrm{Cat}))^{\times} \to \mathrm{Ho}_{\infty}(\mathrm{Cat}))^{\times}.$$

此外，若 $F\colon \mathcal{C}^{\otimes} \to \mathcal{D}^{\otimes}$ 是幺半范畴之间的幺半函子，那么自然同构 (7) 正是通过命题 3.2 将其视为 $\mathbf{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathrm{Cat})^{\times}$ 中的态射时得到的自然等价 (8)。现在，若 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 是一个配备了编织 β 的幺半范畴，那么张量积 $\mathcal{C}^{\otimes} \times \mathcal{C}^{\otimes} \to \mathcal{C}^{\otimes}$ 可提升为一个幺半函子 [JS93，命题 5.2]。它所对应的 (7) 中的自然同构 $\chi_{-\otimes-}$ 由自然同构 $1 \otimes \beta \otimes 1$ 给出。特别地，设 $\vec{A}, \vec{B}$ 是 $\mathcal{C}^{\otimes}$ 中的两个幺半群。根据命题 3.3 的识别，张量积 $\vec{A} \otimes \vec{B}$ 在 $\mathbf{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{C}^{\otimes})$ 中的乘法由以下复合给出

$$\begin{array}{ccc} (A \otimes B) \otimes (A \otimes B) & \xrightarrow{1 \otimes \beta \otimes 1} & (A \otimes A) \otimes (B \otimes B) \\ & \searrow^{m_{\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(-\otimes-)(\overrightarrow{(A,B)})}} & \downarrow{\scriptstyle m_A \otimes m_B} \\ & & A \otimes B. \end{array}$$

这正是所述的公式（1）。 □

4. 幺半双范畴及其中的幺半群

与范畴不同，一般的双范畴 $\mathcal{C}$ 具有不可逆的 2-胞，因此若不采取进一步措施，就无法将其约化为 ∞-范畴结构。特别地，要为一般的双范畴 $\mathcal{C}$ 赋予幺半结构，所需条件不止是为其底层的局部群胚双范畴赋予幺半结构。因此，我们无法直接应用推论 2.10。不过，我们可以将双范畴的同伦论抽象地视为一个笛卡尔幺半 ∞-范畴，并证明一个合适版本的推论 2.10。

因此，本节将手动定义一个 ∞-范畴函子 $\mathbf{Alg}_{\mathsf{E}_1}(-)$，它把幺半双范畴 $\mathcal{C}$ 映射到其幺半群双范畴，并证明该函子是笛卡尔幺半的。由此，我们可以仿照推论 2.10 的论证，直接证明定理 4.17。为了高效处理繁琐的记账工作，我们主要采用模型范畴方法。因此，我们首先指出，定理 4.2 和定理 4.17 都可以用 Gray 幺半范畴来重述。我们回顾一下，Gray 幺半群是幺半范畴 $\mathbf{Gray} := (2\text{-}\mathbf{Cat}\ \otimes_{\mathrm{Gr}})$ 中的一个（严格）幺半群；该幺半范畴由 2-范畴和（严格）2-函子构成，并配备 Gray

张量积。因此，每个 Gray 幺半群都是一个幺半双范畴。反过来，有如下定理。

定理 4.1. 每个幺半双范畴 $\mathcal{C}$ 都与某个 *Gray* 幺半群 $\mathcal{C}$ 幺半等价。借助这一幺半等价，$\mathcal{C}$ 中的每个幺半群都会在 [DS97], 的意义下导出一个本质唯一的 $\mathcal{C}$ 中的伪幺半群，反之亦然。

证明。 第一条陈述是三范畴相干定理 [GPS95] 的一个常见特例。第二条陈述例如可以通过 [Lac00] 推导得出。□

定理 4.1 使我们能够将引言中各定理的证明归结为关于 2-范畴及其间 2-函子的陈述。同样，借助 [Lac02] 的下述定理，双范畴 ∞-范畴中的高阶代数也可以归结为 2-范畴 ∞-范畴中的高阶代数。

定理 4.2. 典范包含 $2\text{-Cat} \to \text{BiCat}$ 是相关模型范畴之间的右 *Quillen* 函子，并诱导出同伦 ∞-范畴的等价 $\text{Ho}_\infty(2\text{-Cat}) \simeq \text{Ho}_\infty(\text{BiCat})$ 。□

注 4.3。 尽管对于给定的幺半双范畴 $\mathcal{C}$，其中伪幺半群的概念是一个自然的考量对象，但文献中似乎既没有双范畴 Mon($\mathcal{C}$) 的标准定义，也没有相关三函子 Mon(–) 的标准定义。因此，我们将自由地按照最适合我们目的的方式来定义它，并采用 [DS97] 的 2-范畴观点。也就是说，我们将 Mon($\mathcal{C}$) 定义为：= PsMon($\mathcal{C}$)，即其相关 Gray 幺半群中的伪幺半群范畴。后者将在下文定义。

Gray 幺半群的同伦论。 本节中，我们考察带有 Lack [Lac02] 引入的典范模型结构的范畴 2-Cat。我们回顾同上引文中的结果：如此一来，Gray =(2-Cat $\otimes_{\text{Gr}}$) 成为一个单体模型范畴。令 GrMon 表示 Gray 幺半群及（严格）Gray 单体 2-函子构成的范畴。它是 Gray 上自由幺半群单子所对应的代数范畴，因此带有如下（单子）伴随。

$$\text{GrMon} \underset{U}{\overset{F}{\leftrightarrows}} 2\text{-Cat} \tag{13}$$

命题 4.4. 伴随 *(13)* 允许将 2-Cat 上的典范模型结构转移到 GrMon 上的一个模型结构，使得态射 f 在 GrMon 中是（平凡）纤维化，当且仅当 $U(f)$ 在 2-Cat 中是（平凡）纤维化。

证明。 要构造这个模型结构，只需证明单体模型范畴 Gray 满足幺半群公理 [SS00, 定义 3.3，定理 4.1]。这一点已在 [Lac02, 定理 7.7] 中证明。第二个陈述直接由 [SS00, 定理 4.1.(3)] 得出。

□

备注 4.5. 命题 4.4 中的 GrMon 模型结构，是 Lack 在 Gray 范畴的范畴上给出的模型结构 [Lac11] 的单对象版本。

因此，我们可以分别为两个对应的模型范畴赋予同伦 ∞-范畴 Ho$_\infty$(GrMon) 和 Ho$_\infty$(2-Cat)。接下来，我们想定义一个对称幺半函子

$$\text{Alg}_{\mathsf{E}_1}(-)\colon \text{Ho}_\infty(\text{GrMon})^\times \to \text{Ho}_\infty(2\text{-Cat})^\times \tag{14}$$

它将 Gray 幺半群映射为其中的伪幺半群 2-范畴。

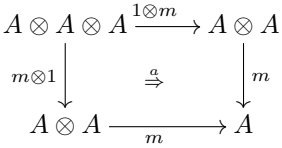
备注 4.6。 理想情况下，我们希望利用 Gray 是闭幺半范畴这一事实，完全通过抽象同伦理论来定义 ∞-范畴函子 (14)。例如，回顾 Lack 对 Gray 幺半群中伪幺半群的“相干”刻画：它们是从游走伪幺半群 PsM [Lac00] 出发的 Gray 函子。因此，若模型范畴 GrMon 是 Gray-富集的，我们就可以将函子 (15) 简单地定义为由 PsM 余表示的 Gray-富集函子。事实上，不难证明 Gray 幺半群 PsM 是余纤维的，因此与之关联的余表示函子自动就是 Quillen 右伴随。这样基本上就能结束讨论了。然而，(模型) 范畴 GrMon 似乎并非 Gray-富集的。这一缺陷归结为函子性对角

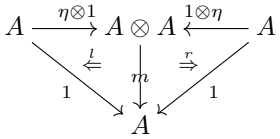
$\mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ 在 2-Cat 的笛卡尔结构中只能提升为伪函子 $\mathcal{C} \to \mathcal{C} \otimes_{\mathrm{Gr}} \mathcal{C}$，而不能提升为真正的 2-函子。因此，可以精确表述模型范畴 GrMon 在 Gray 中是弱富集的；不过，这反而使问题复杂化，而非简化。于是，我们基本上会沿用同一套做法，只是采取稍微更直接的方式。

下文定义 Gray 幺半群$\mathcal{C}$中的伪幺半群所构成的 2-范畴 PsMon($\mathcal{C}$)。其对象是 [DS97 第 3] 节中定义的伪幺半群。这里，给定 Gray 幺半群$\mathcal{C}$ 中的两个态射 $f_i\colon C_i \to D_i, i = 0, 1$，其中乘法为 $\otimes\colon \mathcal{C} \otimes_{\mathrm{Gr}} \mathcal{C} \to \mathcal{C}$，我们约定将复合 $(f \otimes 1) \circ (1 \otimes g)$（而非虽不相等但同构的选择 $(1 \otimes g) \circ (f \otimes 1)$）记作$f \otimes g\colon C_1 \otimes C_2 \to D_1 \otimes D_2$。

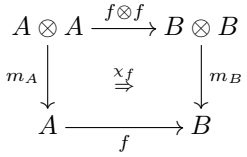
定义 4.7。 设$\mathcal{C}$ 是一个 Gray 幺半群，其乘法为 $\otimes\colon \mathcal{C} \otimes_{\mathrm{Gr}} \mathcal{C}$，单位元为 $I \in \mathcal{C}$。$\mathcal{C}$ 中的伪幺半群所构成的 2-范畴 PsMon($\mathcal{C}$) 由以下数据给出（更多详情参见例如 [McC00 第 2] 节）。

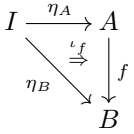
(1) 其对象是$\mathcal{C}$中的伪幺半群；也就是说，是对象 $A \in \mathcal{C}$ 以及态射 $m\colon A \otimes A \to A$ 和 $\eta\colon I \to A$ in $\mathcal{C}$，并配有可逆的2-胞





使得两个方程成立，用以表达结合子 a 的高阶结合律和单位律。(2) 给定两个伪幺半群 $\vec{A} = (A, m_A, \eta_A, a_A, l_A, r_A)$ 和 $\vec{B} = (B, m_B, \eta_B, a_B, l_B, r_B)$，一个态-$\vec{\ }$ $\vec{\ }$ $\vec{\ }$射 $f\colon A \to B$ 是$\mathcal{C}$ 中的态射 $f\colon A \to B$，并配有可逆的2-胞





满足相容条件。

(3) 给定从 $\vec{A}$ 到 $\vec{B}$ 的两个态射 $\vec{f} = (f, \chi_f, \iota_f)$ 和 $\vec{g} = (g, \chi_g, \iota_g)$，2-胞 $\alpha\colon \vec{f} \to \vec{g}$ 是$\mathcal{C}$ 中的2-胞$\alpha\colon f \to g$，并满足相容条件。

细胞的垂直复合和水平复合，以及恒等态射，都是直接由$\mathcal{C}$中的垂直复合和水平复合（及其恒等态射）诱导而来。

备注 4.8. 定义 4.7 也是 Gray 范畴 $\mathbf{PsMnd}(\mathcal{K})$ 的单对象版本；该范畴由 Gambino 和 Lobbia [GL21, 定理 2.5] 定义，用来描述 Gray 范畴 $\mathcal{K}$ 中的伪单子。因此，任意 Gray 幺半群 $\mathcal{C}$ 上的 PsMon($\mathcal{C}$) 构成一个 2-范畴这一事实，也可直接由同上文献推出。因此请注意，当我们将给定的 Gray 幺半群 $\mathcal{C}$ 视为只有一个对象 $*$ 的 Gray 范畴时，PsMon($\mathcal{C}$) $\subseteq \mathbf{PsMnd}(\mathcal{C})$ 由以下内容张成：$*$ [上的所有伪单子（GL21, 定义 1.5], ）；所有伪单子态射 (F, ϕ)，其中 F 是 $*$ [上的恒等 1_*（GL21, 定义 2.1], ）；所有伪单子变换 $(p, \bar{p})$，其中 p 是 1_* [上的恒等态射（GL21, 定义 2.3], ）；以及所有伪单子修正 α，它们自身就是恒等态射 1_{1_*} [（GL21, 定义 2.4]）。后者自动是平凡的。

设 $\mathcal{C}$ 和$\mathcal{D}$ 是 Gray 幺半群。每个 Gray 函子 $f\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 都会诱导一个 2-函子 PsMon($\mathcal{C}$) $\to$PsMon($\mathcal{D}$)。这一作用定义了一个函子

$$\mathrm{PsMon}(-)\colon \mathrm{GrMon} \to \text{2-Cat}. \tag{15}$$

命题 4.9。 当GrMon 配备命题 *4.4* 中的模型结构时，函子 *(15)* 保持平凡纤维化。此外，它还保持有限积。

证明。 根据 [Lac02], , 2-Cat 中的平凡纤维化恰好是那些在对象上满射、且在局部是同态范畴之间满对象的等价的 2-函子。由命题 4.4，GrMon 中的平凡纤维化恰好是那些底层 2-函子为 2-范畴间平凡纤维化的 Gray-函子。因此，设 $p\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$是 Gray 幺半群之间的平凡纤维化。为了证明 $p_*\colon$ PsMon($\mathcal{C}$) $\to$PsMon($\mathcal{D}$)

仍是 2-范畴之间的平凡纤维化，我们首先要证明，$\mathcal{D}$ 中的每个伪幺半群 A 都可以提升为$\mathcal{C}$ 中的一个伪幺半群 A，使得 $p_*(A) = A$；其次，$\mathcal{D}$中伪幺半群之间的每个态射 $f\colon A \to B$ 都可以提升为$\mathcal{C}$中伪幺半群之间的一个态射 $f\colon A \to B$，使得 $p_*(f) = f$；第三，p_* 是局部全忠实的。以上三项均可直接验证。

鉴于所有相关运算都是按分量定义的，PsMon(–) 保持有限积这一事实同样是显然的。□

备注 4.10。我们注意到，根据推论 3.4 的第 2.(a) 部分，2-Cat 上的 Gray 张量积可以提升为 GrMon 上的对称幺半结构。命题 4.9 中所述函子 (15) 保持有限积这一事实，是对 PsMon(–) 的明显失败所作的高阶范畴调整：$(\mathbf{GrMon}\ \otimes_{\mathrm{Gr}})\ \to (\text{2-Cat}\ \otimes_{\mathrm{Gr}})$ 不是对称幺半的，甚至不是松幺半的。事实上，我们只有一个锯齿链

$$\mathrm{PsMon}(\mathcal{C} \otimes_{\mathrm{Gr}} \mathcal{D}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{PsMon}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) \cong \mathrm{PsMon}(\mathcal{C}) \times \mathrm{PsMon}(\mathcal{D}) \xleftarrow{\sim} \mathrm{PsMon}(\mathcal{C}) \otimes_{\mathrm{Gr}} \mathrm{PsMon}(\mathcal{D})$$

自然弱等价，而不是单个箭头。这里，外侧的两个弱等价由命题 4.9、所有 2-范畴都是纤维化对象这一事实，以及存在自然的逐点平凡纤维化 $\otimes_{\mathrm{Gr}} \to \times$ 共同得到。事实上，本节的大部分讨论都源于这样一个事实：Gray 张量积 $\otimes_{\mathrm{Gr}}$ 并非笛卡尔积，但与笛卡尔积自然弱等价。这使得我们希望考察的构造只能是同伦相干的，而非严格的。这反过来也使得在底层 ∞-范畴中工作变得自然。

推论 4.11. 函子 $\mathrm{PsMon}(-)\colon \mathbf{GrMon} \to \text{2-Cat}$ 诱导出一个笛卡尔幺半函子

$$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(-) := \mathrm{Ho}_\infty(\mathrm{PsMon}(-))\colon \mathrm{Ho}_\infty(\mathrm{GrMon})^\times \to \mathrm{Ho}_\infty(\text{2-Cat})^\times \tag{16}$$

作用于底层 ∞-范畴。

证明。由命题 4.9 可知，函子 $\mathbf{PsMon}(-)\colon \mathbf{GrMon} \to \text{2-Cat}$ 保持平凡纤维化。由于 GrMon 中的所有对象都是纤维化对象，由 Brown 引理 [Hov99，引理 1.1.12]可知，它因此保持所有弱等价。因此，函子 PsMon(–) 诱导出所述的 ∞-范畴右导出函子 (16)。Ho_∞(GrMon) 和 Ho_∞(2-Cat) 中的二元积（进而所有有限积）都可以分别计算为 GrMon 和 2-Cat 中对应的普通范畴二元积（取纤维化对象）。根据命题 4.9，PsMon(–) 保持这些积。□

我们还需要将抽象定义的 ∞-范畴 Ho_∞(GrMon) 与笛卡尔幺半 ∞-范畴 $\mathrm{Ho}_\infty(\text{2-Cat})^\times$ 中 E_1-代数的 ∞-范畴联系起来。以下引理正是对此的说明。

引理 4.12。遗忘函子 $U\colon \mathbf{GrMon} \to \text{2-Cat}$ 诱导出一个右伴随

$$\mathrm{Ho}_\infty(U)\colon \mathrm{Ho}_\infty(\mathrm{GrMon}) \to \mathrm{Ho}_\infty(\text{2-Cat})$$

该右伴随提升为一个等价

$$\mathrm{Ho}_\infty(U)\colon \mathrm{Ho}_\infty(\mathrm{GrMon}) \to \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathrm{Ho}_\infty(\text{2-Cat})^\times).$$

证明。由幺半模型范畴 Gray 诱导的 Ho_∞(2-Cat) 上的幺半结构，通过 2-Cat 中自然的逐点平凡纤维化 $\otimes_{\mathrm{Gr}} \to \times$ 给出笛卡尔积。因此，根据 [Lur17 的整直化定理 4.1.8，4]由于所有条件均已满足，该陈述直接成立。□

E_k-代数在 ∞-2-范畴的范畴中。通过推论 4.11 和引理 4.12，我们构造出了一个函子

$$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(-)\colon \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathrm{Ho}_\infty(\text{2-Cat})^\times) \to \mathrm{Ho}_\infty(\text{2-Cat})^\times$$

∞-范畴的函子，它将一个 E_1-代数 A ——当其由 Gray 幺半群 $\mathcal{C}$ 表示时——映射到 2-范畴 $\mathbf{Alg}_{\mathsf{E}_1}(A) := \mathbf{PsMon}(\mathcal{C})$，即 $\mathcal{C}$ 中伪幺半群的 2-范畴。

推论 4.13。*2-范畴 $\mathcal{C}$ 在 $\mathrm{Ho}_\infty(\text{2-Cat})^\times$ 中的每个 E_{k+1}-幺半群结构，都会在 $\mathrm{Ho}_\infty(\text{2-Cat})^\times$ 中的 $\mathcal{C}$ 的伪幺半群 2-范畴 $\mathrm{PsMon}(\mathcal{C})$ 上诱导出一个 E_k-幺半群结构。*

证明。由推论 4.11 可知，函子 $\mathbf{Alg}_{\mathsf{E}_1}(-)$ 是笛卡尔幺半的，因此可提升为一个函子

$$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(-)\colon \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_k}(\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathrm{Ho}_\infty(\text{2-Cat})^\times)) \to \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_k}(\mathrm{Ho}_\infty(\text{2-Cat})^\times).$$

由可加性定理（定理 2.7），其定义域为 $\mathbf{Alg}^{\mathsf{E}_{k+1}}(\mathrm{Ho}_\infty(\text{2-Cat})^\times)$。□

此外，我们注意到函子

$$\mathrm{PsMon}(-)\colon \mathrm{GrMon} \to 2\text{-}\mathrm{Cat}$$

带有等　　备有到遗忘函子 $U\colon \mathsf{GrMon} \to 2\text{-}\mathsf{C}$ 的典范自然变换　　at
从该 a　　伴随（13）。事实上，对任意给定的 Gray 幺半群 $\mathcal{C}$，我们可以考虑自然 2-函子

$$\pi_{\mathcal{C}}\colon \mathrm{PsMon}(\mathcal{C}) \to U(\mathcal{C}) \tag{17}$$

→　　→　→　→将伪幺半群 $A \in \mathcal{C}$ 映到其底层对象 $A \in \mathcal{C}$，将伪幺半群的态射 $f\colon A \to B$ 映到其底层对象的底层态射 $f\colon A \to B$，并将 2-胞 α 映到其自身。

注 4.14. 在对象层面，自然变换 $\pi\colon \mathsf{PsMon}(-) \to U$ 由与 Gray-函子 $\{[0]\}\colon * \to \mathsf{PsM}$ 前复合给出。

推论　　**4.15.** 自然变换 *(17)* 诱导出一个笛卡尔幺半自然变换　　*on*

$$\pi\colon \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(-) \to U \tag{18}$$

从笛卡尔幺半函子 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(-)\colon \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathrm{Ho}_\infty(2\text{-}\mathrm{Cat})^\times)^\times \to \mathrm{Ho}_\infty(2\text{-}\mathrm{Cat})^\times$ 到笛卡尔幺半函子 $U\colon \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathrm{Ho}_\infty(2\text{-}\mathrm{Cat})^\times)^\times \to \mathrm{Ho}_\infty(2\text{-}\mathrm{Cat})^\times$。

证明。 对于任意给定的组合模型范畴 $\mathbb{M}$，箭头的 ∞-范畴 $\mathsf{Ho}_\infty(\mathbb{M})^{\Delta^1}$，即 $\mathsf{Ho}_\infty(\mathbb{M})$ 中的箭头范畴，是在赋予任一种具有逐点弱等价的模型结构时，范畴 $\mathbb{M}^{\Delta^1}$（即 $\mathbb{M}$ 中箭头的范畴）的同伦 ∞-范畴。特别地，我们要证明，自然变换 (17) 作为一个函子

$$\pi\colon \mathrm{GrMon} \to 2\text{-}\mathrm{Cat}^{\Delta^1}$$

下降为同伦 ∞-范畴上的自然变换。因此，只需证明 π逐点保持弱等价；这恰好由其定义域 $\mathsf{PsMon}(-)$ 和余定义域 U 均保持弱等价这一事实得到。

此外，正如推论 2.11 的证明中所示，两个各自带有笛卡尔幺半结构的函子之间的任意自然变换，都可以提升为本质唯一的笛卡尔幺半（即对称幺半）自然变换。□

推论 4.16. 设 $\mathcal{C}$ 是 E_{k+1}-幺半群，属于 $\mathrm{Ho}_\infty(2\text{-}\mathrm{Cat})^\times$，其中 $k \geq 0$ 任意；设 $U(\mathcal{C})$ 是其底层的 E_k-幺半群。令$\mathrm{PsMon}(\mathcal{C})$ 带有推论 *4.13* 中给出的相应 E_k-幺半结构。则态射 $\pi_{\mathcal{C}}\colon \mathrm{PsMon}(\mathcal{C}) \to U(\mathcal{C})$ 属于 $\mathrm{Ho}_\infty(2\text{-}\mathrm{Cat})$，并可提升为 E_k-幺半群的态射 $\pi_{\mathcal{C}}\colon \mathrm{PsMon}(\mathcal{C}) \to U(\mathcal{C})$。

证明。 这是推论 4.15 的直接形式推论（遵循推论 2.11 的蓝图）。事实上，自然变换 (18) 是 Fin_* 上余笛卡尔纤维化之间的余笛卡尔函子间的一个 2-胞。特别地，由于 $\mathsf{Alg}_{\mathsf{E}_k}(-) \subseteq \mathsf{Fun}^{\mathrm{Fin}_*}(\mathsf{E}_k, -)$ 按定义是逐点取全子范畴，每个 E_k-幺半群 $\mathcal{C} \in \mathsf{Alg}_{\mathsf{E}_k}(\mathsf{Ho}_\infty(\mathsf{GrMon})^\times)$ 都会通过与$\mathcal{C}$前复合，得到一个 E_k-幺半群态射 $\pi_{\mathcal{C}}\colon \mathsf{PsMon}(\mathcal{C}) \to U(\mathcal{C})$。□

最后，假设 $\mathcal{C}$ 是某个 $k \geq 1$ 对应的 $\mathsf{Ho}_\infty(2\text{-}\mathsf{Cat})^\times$ 中的一个 E_k-幺半群。根据推论 4.13 [8]，$\mathsf{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{C})$ 是 $\mathsf{Ho}_\infty(2\text{-}\mathsf{Cat})^\times$ 中的一个 E_{k-1}-幺半群。由可加性定理，我们因此可以对任意 $m \leq k$ 将这一构造迭代 m 次，从而得到一个 E_{k-m}-幺半群

$$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_m}(\mathcal{C}) := \mathrm{Alg}^{(m)}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{C})$$

在 $\mathcal{C}$ 中的 m 重伪幺半群。关于这一对象更具体的代数刻画将在猜想 5.1 中讨论。

定理 4.17。 设 $\mathcal{C}$ 是 E_k-幺半群，属于 $\mathrm{Ho}_\infty(2\text{-}\mathit{Cat})^\times$。设 $0 \leq m \leq k$ 为一个整数。则 *2*-范畴 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_m}(\mathcal{C})$ 具有一个典范的 E_{k-m}-幺半群结构。此外，*2*-函子

$$U\colon \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_m}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$$

它将一个 m 重伪幺半群映射到其底层对象，并提升为一个 E_{k-m}-幺半群态射。

证明。 由推论 4.13 和推论 4.16 立即可得。　　□

[8]当 $k = 1$ 时，$\mathsf{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{C})$ 上的 E_0-结构相当平凡。

注 4.18。 我们用 (2,1)-Cat 表示局部广群2-范畴所构成的范畴。它也带有一个典范的模型结构，以及一个典范的笛卡儿幺半嵌入

$$N\colon \mathrm{Ho}_\infty((2,1)\text{-Cat}))^\times \to \mathrm{Cat}_\infty^\times$$

∞-范畴的。该嵌入自动将 E_k-幺半群映射为 E_k-幺半 ∞-范畴。此外，函子 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(-)\colon \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathrm{Ho}_\infty(2\text{-Cat}))^\times \to \mathrm{Ho}_\infty(2\text{-Cat}))^\times$ 限制为一个笛卡尔幺半函子

$$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(-)\colon \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathrm{Ho}_\infty((2,1)\text{-Cat}))^\times \to \mathrm{Ho}_\infty((2,1)\text{-Cat}))^\times.$$

类似于命题 3.3，可以证明，对于 $\mathrm{Ho}_\infty((2,1)\text{-Cat}))^\times$ 中的每个 E_m-代数 $\mathcal{C}$，存在一个自然等价

$$N(\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_m}(\mathcal{C})) \simeq \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_m}(N(\mathcal{C})).$$

更一般地，若将任意给定的 2-范畴视为一个 $(\infty,2)$-范畴，并借助引理 4.12 将任意给定的 Gray 幺半群相应地视为一个幺半 $(\infty,2)$-范畴，则可作类似的观察。这为函子 $\mathrm{Ho}_\infty(\mathrm{PsMon}(-))$ 采用记号 $\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(-)$ 提供了依据。

2-范畴的 3-范畴中的半严格代数。 本节我们给出定理5.3的证明，该定理以尚待精确说明的代数术语表述。我们希望借助定理 4.17 来完成这一证明，而定理 4.17 本质上是以同伦论术语表述的。因此，要从定理 4.17 推出定理5.3，我们需要在相应的代数概念与同伦概念之间建立一种翻译。鉴于这些同伦概念的性质，所涉及的代数结构必须具有等价不变性。因此我们作如下记号约定。

记号 4.19。 下文中，2-范畴$\mathcal{C}$ 上的“幺半结构”一词指的是双范畴的幺半结构，而非$\mathcal{C}$上的 Gray 幺半结构。也就是说，它指的是一个与 Gray 幺半群 2-等价的 2-范畴$\mathcal{C}$ 。这种术语与 [DS97] 中幺半2-函子和 Gray 函子之间相应的区别一致。在这方面，“带编织的/半对称/对称幺半2-范畴”指的是底层双范畴为 2-范畴的带编织的/半对称/对称幺半双范畴。因此，所有这些概念都应理解为“完全弱”的。对于 2-函子，我们也采用相同的记号约定。也就是说，设$\mathcal{C}$ 和$\mathcal{D}$ 为 2-范畴$^{-}$，且各自带有一个（带编织的/半对称/对称）幺半结构。设$\mathcal{C}$ 为（完全弱的$^{-}$带编织的/半对称/对称）Gray 幺半群，并配有一个 2-等价$\mathcal{C}\ \to\mathcal{C}$ ，从而赋予$\mathcal{C}$ 相应的$^{-}$幺半结构。相应地，设$\mathcal{D}\ \to\mathcal{D}$ 。那么，一个（带编织的/半对称/对称）幺半 2-函子 $f\colon \mathcal{C}\ \to\mathcal{D}$，是一个 2-函子 $f\colon \mathcal{C}\ \to\mathcal{D}$，连同一个 [DS97] 意义下的（带编织的/半对称/对称）$^{-}$ $^{-}$ $^{-}$幺半 2-函子 $f\colon \mathcal{C}\ \to\mathcal{D}$，使得相应的方块在等价意义下交换。

在引理 4.12 中我们已经看到，对于每个 2-范畴$\mathcal{C}$，$\mathcal{C}$上的幺半结构与 $\mathrm{Ho}_\infty(2\text{-Cat})^\times$ 中$\mathcal{C}$ 上的 E_1-代数结构一一对应。给定两个幺半 2-范畴$\mathcal{C}$ 和$\mathcal{D}$ 以及一个 2-函子 $f\colon \mathcal{C}\ \to\mathcal{D}$，同样，$f$ 上的幺半结构与 $\mathrm{Ho}_\infty(2\text{-Cat})^\times$ 中f 上的 E_1-代数结构一一对应。这种一一对应可以如下扩展 [Ste26]。

定理 4.20. 以下集合之间存在相应等价类集合的双射：

*(1) {*幺半双范畴*}* $\cong$*{*E_1-代数于$\mathrm{BiCat}^\times$*}*；*(2) {*辫状单体双范畴*}* $\cong$ *{*E_2-代数于$\mathrm{BiCat}^\times$*}*；*(3) {sylleptic* 单体双范畴*}* $\cong$*{*E_3-代数于 $\mathrm{BiCat}^\times$*}*；*(4) {*对称单体双范畴*}* $\cong$*{*E_∞-代数于$\mathrm{BiCat}^\times$*}*。

这些双射对于从下至上的显然遗忘映射是自然的。相应的、它们之间的态射概念也同样如此。

定理 4.21 现在可以由定理 4.17 推导如下。

Theorem 4.21. 设 C 为一个幺半双范畴，且 $\mathrm{Mon}(C)$为 C 中幺半群所构成的双范畴。

(1) C 上的每个编织都会在 $\mathrm{Mon}(C)$上诱导出一个幺半结构。*(2)* C 上的每个 *syllepsis* 都会在 $\mathrm{Mon}(C)$上诱导出一个编织幺半结构。*(3)* C 上的每个对称性都会在$\mathrm{Mon}(C)$上诱导出一个对称幺半结构。

在每种情况下，相应的结构都是典范诱导的，也就是说，遗忘函子$\mathrm{Mon}(C)\ \to C$ 与其定义域一样具有幺半结构。

证明。 根据定理 4.1，假设幺半双范畴$\mathcal{C}$ 是一个 Gray 幺半群，我们需要证明

> (1) $\mathcal{C}$ 上的每个编织都会在 PsMon($\mathcal{C}$) 上诱导出一个幺半结构。(2) $\mathcal{C}$ 上的每个 syllepsis 都会在 PsMon($\mathcal{C}$) 上诱导出一个编织幺半结构。(3) $\mathcal{C}$ 上的每个对称性都会在 PsMon($\mathcal{C}$) 上诱导出一个对称幺半结构。

这里我们采用注 4.3 和记号 4.19 中的约定。此外，我们要证明遗忘函子

$$\mathrm{PsMon}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\pi_{\mathcal{C}}} \mathcal{C}$$

是（编织/对称）幺半的，只要$\mathcal{C}$ 是带编织的（半对称/对称）范畴。

对于第 (1) 部分，假设$\mathcal{C}$ 是一个带编织的 Gray 幺半群。由定理 4.20 的第 (1) 部分和引理 4.12，它给出 $\mathrm{Ho}_\infty(\mathrm{GrMon})^\times$ 中的一个 E_1-幺半群$\mathcal{C}$ 。由推论 4.13 可知，2-范畴 PsMon($\mathcal{C}$) 带有 $\mathrm{Ho}_\infty(2\text{-Cat})^\times$ 中的一个 E_1-幺半群结构。因此，再次由引理 4.12（结合模型范畴形式化处理），存在一个余纤维 Gray 单体 $\mathbb{L}$PsMon($\mathcal{C}$)，以及一个 2-范畴等价 $U(\mathbb{L}\mathrm{PsMon}(\mathcal{C})) \to \mathrm{PsMon}(\mathcal{C})$。最后，复合 2-函子

$$\mathbb{L}\mathrm{PsMon}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{PsMon}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\pi_{\mathcal{C}}} \mathcal{C} \tag{19}$$

依推论 4.16，它提升为 $\mathrm{Ho}_\infty(2\text{-Cat})^\times$ 中 E_1-幺半群之间的一个映射。由此可知，2-函子 (19) 依引理 4.12 等价于一个 Gray 函子，因而它是幺半的。这就证明了第 (1) 部分。

第 (2) 部分和第 (3) 部分遵循同样的模式。对于第 (2) 部分，假设$\mathcal{C}$ 是一个 sylleptic Gray 幺半群。由定理 4.20 的第 (2) 部分，它给出 $\mathrm{Ho}_\infty(\mathrm{GrMon})^\times$ 中的一个 E_2-幺半群$\mathcal{C}$ 。由此可知，依推论 4.13，2-范畴 PsMon($\mathcal{C}$) 带有 $\mathrm{Ho}_\infty(2\text{-Cat})^\times$ 中的一个 E_2-幺半群结构。特别地，依引理 4.12，存在一个余纤维 Gray 单体 $\mathbb{L}$PsMon($\mathcal{C}$)，以及 2-范畴之间的一个等价 $U(\mathbb{L}\mathrm{PsMon}(\mathcal{C})) \to \mathrm{PsMon}(\mathcal{C})$。由定理 4.20 第 (2) 部分的逆命题，Gray 幺半群 $\mathbb{L}$PsMon($\mathcal{C}$) 是带编织的。最后，复合 2-函子

$$\mathbb{L}\mathrm{PsMon}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{PsMon}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\pi(\mathcal{C})} \mathcal{C} \tag{20}$$

提升为一个 $\mathrm{Ho}_\infty(2\text{-Cat})^\times$ 中 E_2-幺半群的映射，由推论 4.16。由此可知，2-函子 (20) is 带编织的 m 幺半的，由定理 4.20。至此完成第 (2) 部分。

对于第 (3) 部分，假设$\mathcal{C}$ 是一个对称 Gray 单体。由定理 4.20 的第 (3) 部分，它给出 $\mathrm{Ho}_\infty(2\text{-Cat})^\times$ 中的一个 E_∞-幺半群 $\mathcal{C}$ 。由于 $\mathrm{Ho}_\infty(2\text{-Cat})$ 是一个 3-范畴，自然遗忘函子 $\mathrm{Alg}_{\mathrm{E}_\infty}(\mathrm{Ho}_\infty(2\text{-Cat})^\times) \to \mathrm{Alg}_{\mathrm{E}_k}(\mathrm{Ho}_\infty(2\text{-Cat})^\times)$ 对所有 $k \geq 4$ [Lur17，定理 5.1.2.2，例 5.1.2.3] 而言是一个等价。同样的结论适用于 $\mathrm{Alg}_{\mathrm{E}_\infty}(\mathrm{Ho}_\infty(\mathrm{GrMon})^\times)$。由此可知，$\mathcal{C}$ 等价地是 $\mathrm{Ho}_\infty(\mathrm{GrMon})^\times$ 中的一个 E_∞-幺半群 $\mathcal{C}$ ，并且 2-范畴 PsMon($\mathcal{C}$) 也经由推论 4.13 配备了 $\mathrm{Ho}_\infty(2\text{-Cat})$ 中的一个 E_∞-幺半群结构。因此，存在一个余纤维 Gray 单体$\mathbb{L}$PsMon($\mathcal{C}$)，以及由引理 4.12 给出的 2-范畴的等价 $U(\mathbb{L}\mathrm{PsMon}(\mathcal{C})) \to \mathrm{PsMon}(\mathcal{C})$。Gray 幺半群 $\mathbb{L}$PsMon($\mathcal{C}$) 由定理 4.20.3 的逆是对称的。最后，复合 2-函子

$$\mathbb{L}\mathrm{PsMon}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{PsMon}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\pi(\mathcal{C})} \mathcal{C} \tag{21}$$

通过推论 4.16，它提升为 $\mathrm{Ho}_\infty(2\text{-Cat})^\times$ 中 E_∞-幺半群的映射。由定理 4.20 可知，2-函子 (21) 是半对称（因而也是对称）幺半的。这就完成了第 (3) 部分。□

注 4.22。 命题 3.6 为根据定理 4.21 提取双范畴中两个伪幺半群之乘法的具体公式同样提供了一个蓝图。

5. 未来工作

给定一个 Gray 幺半群 $\mathcal{C}$，我们回顾了 2-范畴 BrMon($\mathcal{C}$) 的编织伪幺半群定义，其中 $\mathcal{C}$ 本身是带编织的；同样，当 $\mathcal{C}$ 本身具有对称性时，我们也回顾了 2-范畴 CMon($\mathcal{C}$) 的对称伪幺半群定义，这些内容来自 [McC00]。下面对其给出的刻画可以被视为可加性定理的一个代数性的二维版本；不过，在本文中我们将不再进一步探讨它。

猜想 5.1。 设 *C* 为一个 *Gray* 幺半群。

(1) C 上的每个编织都会诱导出 *2*-范畴 $\mathrm{Alg}_{\mathrm{E}_2}(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{BrMon}(\mathcal{C})$ 之间的一个等价。*(2) C* 上的每个 *syllepsis* 都会诱导出 *2*-范畴 $\mathrm{Alg}_{\mathrm{E}_3}(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{CMon}(\mathcal{C})$ 之间的一个等价。

注 5.2。 猜想 5.1 是 [JS93, 注 5.1] 的直接推广：它将 Cat 这一由范畴构成、配备笛卡尔幺半结构的 Gray 幺半群推广到一般的 Gray 幺半群 $\mathcal{C}$。也就是说，同上引文恰好就是针对 Gray 幺半群 $\mathcal{C}$ $=$Cat$^{\times}$ 的猜想 5.1。类似地，定理 4.20 本身也是对 [JS93, 注 5.1], 的推广，但方向正交，推广到了双范畴的三范畴。

假设猜想 5.1 成立，可以证明定理 4.21 的以下分层版本。

定理5.3。 设 C 是一个幺半双范畴，且$\mathrm{Mon}(C)$是 C 中幺半群构成的双范畴。假设猜想 *5.1* 成立。

(1) C 上的每个 *syllepsis* 都会在$\mathrm{BrMon}(C)$ （C 中带编织幺半群构成的双范畴）上诱导出一个幺半结构。*(2)* C 上的每个对称性都会诱导出 *(a)* $\mathrm{BrMon}(C)$上的一个对称幺半结构，以及 *(b)* $\mathrm{CMon}(C)$（对称幺半群构成的双范畴）上的一个对称幺半结构。

在每种情况下，相应的结构都是典范诱导的，也就是说，遗忘函子$\mathrm{BrMon}(C)$ $\to C$ 和$\mathrm{CMon}(C)$ $\to C$ 的幺半性与其定义域的幺半性相同。

证明。 再次假设幺半双范畴$\mathcal{C}$ 根据定理 4.1 是一个 Gray 幺半群，我们需要证明

(1) $\mathcal{C}$ 上的每个半对称都会在 2-范畴 BrMon 上诱导出一个幺半结构 $(\mathcal{C})$.
(2) $\mathcal{C}$ 上的每个对称性都会诱导出 (a) BrMon($\mathcal{C}$) 上的一个对称幺半结构，以及 (b) 双范畴 CMon($\mathcal{C}$) 上的一个对称幺半结构。

此外，我们还要证明，只要 $\mathcal{C}$ 是半对称的（对称的），遗忘函子 BrMon($\mathcal{C}$) $\to\mathcal{C}$ 就是带编织的（对称）幺半函子。只要$\mathcal{C}$ 是对称的，遗忘函子 CMon($\mathcal{C}$) $\to \mathcal{C}$ 就是对称幺半函子。

借助猜想 5.1，我们只需迭代地应用定理 4.21 即可完成证明。例如，设 $\mathcal{C}$是一个带有半对称的 Gray 幺半群。我们得到如下的一列 2-函子。

$$\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_2}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{PsMon}(\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{C})) \xrightarrow{\pi_{\mathrm{Alg}_{E_1}(\mathcal{C})}} \mathrm{Alg}_{E_1}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{PsMon}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\pi_{\mathcal{C}}} \mathcal{C} \tag{22}$$

这里，PsMon($\mathcal{C}$) 和 $\pi_{\mathcal{C}}$: PsMon($\mathcal{C}$) $\to \mathcal{C}$ 都由定理 4.21 赋予带编织的幺半结构。此外，Alg$_{\mathsf{E}_1}$($\mathcal{C}$) $\xrightarrow{\simeq}$ PsMon($\mathcal{C}$) 是赋予 2-范畴 PsMon($\mathcal{C}$) 其带编织幺半结构的辫 Gray 幺半群。因此，再次应用定理 4.21, PsMon(Alg$_{\mathsf{E}_1}$($\mathcal{C}$)) 和

$$\pi_{\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{C})} \colon \mathrm{PsMon}(\mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{C})) \to \mathrm{Alg}_{\mathsf{E}_1}(\mathcal{C})$$

是幺半的。同样，Alg$_{\mathsf{E}_2}$($\mathcal{C}$) $\xrightarrow{\simeq}$PsMon(Alg$_{\mathsf{E}_1}$($\mathcal{C}$)) 是赋予 2-范畴 PsMon(Alg$_{\mathsf{E}_1}$($\mathcal{C}$)) 幺半结构的 Gray 幺半群。因此，整个复合（22）是幺半的。相同的论证也适用于另外两种情况。□

参考文献

[BD98a] J. Baez 和 J. Dolan, 《范畴化》, Contemp. Math. 230 (1998), 1–36。[BD98b] , 《高维代数 III：n-范畴与 opetope 代数》, 《数学进展》135 (1998), no. 2, 145–206。[DS97] B. Day 和 R. Street, 《幺半双范畴与 Hopf 代双代数》, 《数学进展》129 (1997), 99–157。[DY23] T.D. D´ecoppet 和 M. Yu, 《非可逆缺陷的规范化：一个 2-范畴视角》, 《数学物理通讯》113 (2023), no. 36。[GL21] N. Gambino 和 G. Lobbia, 《伪单子与伪分配律的形式理论》, 《范畴理论及其应用》37 (2021), no. 2, 14–56。[GPS95] R. Gordon、A. J. Power 和 R. Street, 《三范畴的相干性》, 《美国数学会回忆录》117 558, 1 1995 85 ( ), no. – 。[Gur07] N. Gurski, 《伪幺半群的稳定性》, https://www.mat.uc.pt/ categ/ct2007/abstracts/Gurski.pdf, 2007, 葡萄牙阿尔加维 2007 年范畴理论会议摘要。[Gur13] N. Gurksi, 《三维范畴论中的相干性》, 剑桥大学出版社，2013。[Hof11] A. E. Hoffnung, 《2-范畴中的跨度：一个幺半三范畴》, arXiv:1112.0560，2011，v2 于 2013 年 9 月 18 日上传。[Hov99] M. Hovey, 《模型范畴》, 《数学调查与专著》第 63 卷，美国数学会，1999。[JS93] A. Joyal 和 R. Street, 《编织张量范畴》, 《数学进展》102 (1993), 20–78。[JY21] N. Johnson 和 D. Yau, 《二维范畴》, 牛津大学出版社，2021。[KV94a] M. Kapranov 和 V. Voevodsky, 《2-范畴与 Zamolodchikov 四面体》, 《纯数学专题讨论会论文集》56 (1994), 177–260。

[KV94b] ———, 编织幺半 *2*-范畴与 *Manin–Schechtman* 高阶辫群，纯粹与应用代数杂志 **92** (1994), 241–267。[Lac00] S. Lack, 《伪单子的相干方法》，《数学进展》**152** (2000), 179–202。[Lac02] ———, *2*-范畴的 *Quillen* 模型结构，K-理论 **26** (2002), no. 2, 171–205。[Lac11] ———, *Gray*-范畴的 *Quillen* 模型结构，K-理论 **8** (2011), no. 2, 183–221。[Lan71] S. Mac Lane, 《工作数学家的范畴论》，第 5 卷，Springer，纽约，1971。[Lur17] J. Lurie, 《高阶代数》，`http://www.math.harvard.edu/~lurie/papers/HA.pdf`，2017，最后更新于2017年9月18日。[May72] J. P. May, 《迭代环空间的几何》，《数学讲义》第 271 号，Springer-Verlag，柏林，纽约，1972。[McC00] J.C. McCrudden, 《平衡余群胚》，《范畴理论及其应用》**7**(2000), no. 6, 71–147。[SP09] C. J. Schommer-Pries, 《二维扩展拓扑场论的分类》，博士论文，加州大学伯克利分校，美国加利福尼亚州伯克利，邮编 94720-3840，2009。[SS00] S. Schwede 和 B. Shipley, 《幺半模型范畴中的代数与模》，伦敦数学会会刊 **80** (2000), no. 3, 491–511。[Ste26] R. Stenzel, 《双范畴的高阶代数与几何》，arXiv:2602.14424, 2026。