MMPersistence：一个面向数学形态学、用于计算立方复形上持久同调的软件库

胡传申[a], [b]*

高雄大学应用数学系，台湾高雄 *81148*

[b] *ORCID*：*https://orcid.org/0000-0002-4476-7866*

通讯作者邮箱：chuanshenhu.official@gmail.com

胡传申博士于2022年在台湾国立台湾师范大学（NTNU）获得数学博士学位。随后，他先后在新加坡南洋理工大学物理与数学科学学院（SPMS）以及台湾中央大学（NCU）数学系担任博士后研究员。目前，他是台湾高雄大学应用数学系的助理教授。他的研究重点是开发基于拓扑学与几何的人工智能和计算模型，并将其应用于图像处理、复杂网络分析和分子科学。

MMPersistence：一个面向数学形态学的软件库，用于计算立方复形上的持久同调

数学形态学（MM）是图像处理中一种强大且应用广泛的框架。数学形态学运用集合论和离散几何原理，通过结构元素（SE）改变局部结构，利用腐蚀、膨胀、开运算和闭运算等数学形态学运算有效处理数字图像；而立方同调则能捕捉图像中的连通分支和环结构等全局拓扑特征。在 GUDHI 持久同调（PH）计算软件包（用于在立方复形上计算持久同调）的基础上，我们提出了*MMPersistence*软件库，将采用多种结构元素的数学形态学运算与持久同调计算相结合，以提取多尺度持续信息。通过使用不同形状的结构元素构建拓扑过滤，所提出的基于数学形态学的持续同调框架能够编码数字图像的空间特征与形态特征，相较于单独使用传统立方同调，可提供更丰富的局部几何信息，并为分析数字图像奠定统一基础，将拓扑洞见与形态学图像处理技术结合起来。

关键词：数学形态学；持久同调；拓扑数据分析；立方复形；计算拓扑；图像处理

AMS 学科分类：68U10，55N31，62R40

1. 引言

持久同调（PH）及其通过持久图（PDs）进行的可视化，尤其是在立方复形上计算时，在拓扑数据分析（TDA）中发挥着核心作用，并已广泛应用于数字成像数据研究（Kaczynski、Mischaikow 和 Mrozek，2006）。这种基于立方复形的 PH 框架为像素与体素数据提供了一种自然且计算高效的表示方式，可用于捕捉数字图像中的拓扑结构。持久同调在成像领域的应用十分广泛，涵盖医学与显微图像分析、分类、分割及相关图像处理

任务（Chung 和 Day，2018年；Edwards 等人，2021年；Vipond 等人，2021年；Aukerman 等人，2022年；Pritchard 等人，2023年；Chung 等人，2024年）。近年来，将数字图像中的拓扑数据分析特征融入深度学习架构，逐渐受到图像处理任务领域的关注。这表明，基于拓扑数据分析的表示不仅有望提升模型性能，还有助于提高其可靠性和可解释性（Hu 等人，2019年；Hu 等人，2021年；Gupta 等人，2023年；Wang 等人，2025年）。

将灰度图像视为定义在图像域上的函数，其像素值通常介于 0 和某个固定正数（例如 255）之间。传统的持久同调通过对不同像素值进行阈值化来考察下水平集过滤。鉴于像素值编码了结构强度，这种方法侧重于捕捉图像中拓扑结构的强度。具体而言，在下水平集过滤下，如果诱导持久同调中的某个同调类所表示的拓扑结构由强度值极端的像素构成，那么该结构会被视为更重要、更稳健。另一方面，由强度值较为适中的像素构成的结构，即使占据图像中更大的空间区域，也可能因其出生-死亡信息相对平均而被视为不那么重要（见图1）。

尽管基于下水平集过滤的传统持久同调已在数字图像分析及相关应用中展现出强大的能力，但其关注由特定像素值范围产生的拓扑结构，必然会忽略底层图像的某些几何和空间特征，如图1所示。图1(a)和图1(b)分别展示了一幅灰度图像及其通过下水平集过滤获得的对应持久图。相比之下，图1(c)展示了同一幅受到椒盐噪声干扰的图像，其中随机选取的像素被

赋予了可能的最高强度，而图1(d)则展示了由此得到的持久图。如图1(c)和图1(d)所示，与极端像素值相关的结构在持久图中可能呈现出不成比例的长寿命，即使它们在图像中的真实空间范围极为有限。特别是，当使用瓶颈距离作为（归一化）持久图上的度量时（Cohen-Steiner、Edelsbrunner 和 Harer 2005年；Chazal 等 2016年；Bubenik 和 Elchesen 2022年），图1(b)和图1(d)所示的持久图在其编码的持久信息方面表现出显著差异。

与纯粹的拓扑视角不同，数学形态学（MM）提供了一个广泛应用的框架，用于分析成像数据，重点关注数字图像中的几何信息和形状相关信息（Serra 1983；Haralick、Sternberg 和 Zhuang 1987年；Heijmans 1995年；Soille 2013；Najman 和 Talbot 2013）。数学形态学运算建立在集合论和离散结构之上，既可行又高效。将结构元素（SE）视为每个像素周围局部邻域的离散表示后，腐蚀、膨胀、开运算和闭运算等数学形态学运算通过检查并修改这些邻域内的像素值来变换数字图像。通过这种局部交互，数学形态学运算根据所选结构元素对图像区域进行重塑和改变，从而为图像分析提供额外的局部几何特征。这些运算是现代图像处理的基础组成部分（Haralick、Sternberg 和 Zhuang 1987年；Heijmans 1995年）。近年来，与数字图像处理中的卷积运算类似，数学形态学运算也被引入深度神经网络，为成像任务中的深度学习架构提供了一种替代性的几何视角（Franchi、Fehri 和 Yao 2020年；Shen 等，2022年）。

具体而言，图2概述了基于数学形态学的框架，用于对图1所示数字图像进行几何和拓扑分析。

如图所示，任何给定的灰度图像都可以通过阈值化转换为二值图像，随后可使用基于数学形态学的持久同调分析每个生成的二值图像，并用相应的持久图加以概括。与图1所示的基于次水平集的持久图相比，归一化后的基于数学形态学的持久图之间的平均瓶颈距离显著更小。这表明，面对具有极端像素值的小型拓扑结构时，基于数学形态学的持久同调更加稳健可靠——这些特征会对基于次水平集的持久图产生显著影响。本文将通过考察基于数学形态学的持久图的几何解释，探究这一现象背后的原因。

总之，本文介绍了一个名为 *MMPersistence* 的 Python 库，用于构建基于数学形态学的过滤，并对二维二值数字图像计算持久同调。此外，我们展示了该库在二值图像和灰度图像上的功能，并探讨了所得持久图中持久区间的出生与消亡的几何解释，尤其关注数字图像中局部拓扑结构所承载的空间信息。这项工作为拓扑数据分析社区提供了将持久同调应用于数字图像数据的另一种视角。

1.1. 相关工作

与发展成熟的下水平集过滤及其相关持久同调研究和应用相比，基于数学形态学的过滤及其持久性是拓扑数据分析社区中一个相对较新的方向。本文介绍的 Python 库实现了面向数字图像的基于数学形态学的过滤及其相关持久同调计算，依据的是我们先前研究中建立的理论基础（Chung, Day, and Hu（2022）；Chung 等（2024））。

从拓扑数据分析的角度来看，数学形态学运算——尤其是腐蚀、膨胀、开运算和闭运算——为构造数字图像的多参数过滤提供了系统框架。在我们先前的工作中，我们引入了数学形态学运算的交替序列，以局部操控图像中的几何结构，进而诱导出多参数过滤（Chung, Day, and Hu（2022））。这种方法为现有的、主要从点云数据导出的构造提供了互补视角。值得注意的是，由此得到的持久图和持久区间编码了额外的空间信息，例如对数字图像中孔洞尺寸的近似，而这些信息通常不包含在传统的下水平集–过滤中。

在生物医学图像分析中，我们先前的研究采用了基于数学形态学的过滤和持久同调，尤其侧重于开运算滤过（见第 2.3 节），以分析显微图像所捕获的线粒体结构（Chung 等（2024））。本研究提出了一种面向线粒体显微图像的形态学双滤过框架，将灰度阈值化与尺度变化的形态学开运算相结合。所得双滤子使持久同调能够同时捕获全局拓扑连通性与局部几何信息（如孔洞尺寸），从而稳健地定量区分相互连接与碎片化的线粒体网络。

近年来，基于数学形态学的过滤和持久同调作为有效工具，能够捕捉图像中超越经典卷积特征及基于下水平集的持久性的尺度依赖拓扑结构，因此日益受到拓扑数据分析和机器学习领域的关注。近期进展表明，数学形态学诱导的立方复形上的多参数过滤具有稳定且可微的向量化表示，从而能够无缝集成到深

度学习流程（Korkmaz 等人 2025）。这些进展凸显了将基于数学形态学的持久性作为一种有原则的拓扑先验纳入现代基于图像的深度学习架构，以提升表示学习能力和鲁棒性的潜力。

1.2. 论文结构

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍 MMPersistence 的主要方法，包括数学形态学（MM）、数字图像的持久同调（PH）以及基于数学形态学的持久性的预备知识。第 3 节展示 MMPersistence 在数字图像上的功能，并阐释基于数学形态学的持久性背后的几何意义。第 4 节讨论 MMPersistence 的局限性，以及进一步研究和实际应用的潜在方向。本文结论见第 5 节。

2. 材料与方法

本节介绍 MMPersistence 的主要理论基础。第 2.1 节介绍数字图像和数学形态学的背景与数学框架。第 2.2 节简要回顾同调和持久同调，以及它们在数字图像中的几何解释。第 2.3 节阐述基于数学形态学的过滤及其相关的持久同调。最后，第 2.4 节讨论灰度图像的基于数学形态学的双滤子及其对应的持久性。

2.1. 数学形态学预备知识

本文聚焦于矩形区域上定义的二维（2D）数字图像的基于MM的持久同调计算。值得注意的是，我们

介绍数字图像与数学形态学技术的基础知识（Serra 1983；Haralick、Sternberg 和 Zhuang 1987年；Heijmans 1995年；Soille 2013；Najman 和 Talbot 2013），以及本文所采用的具体数学设定与表述。这些预备知识为将数学形态学方法与拓扑数据分析（TDA）工具相结合奠定了基础。

从数学上讲，一个二维矩形 P 是形如 $\{a, \dots, b\} \times \{c, \dots, d\} \subseteq \mathrm{Z}^2$的集合，其中 $a \leq b$ 和$c \leq d$是整数；而二维数字图像定义为一个函数$f: P \to \mathrm{R}_{\geq 0}$，它将每个像素映射为一个非负实数。实际应用中，为表示灰度图像，函数f 的取值为{0,1,… , 255}；为表示二值图像，其取值为{0,1}。此外，为了形式化描述形态学操作，我们用 I_P 表示定义在二维矩形P上的所有数字图像构成的集合，用 B_P 表示定义在P上的所有二值图像构成的集合。另外，在 B_P 和 I_P 上定义自然偏序≤：当且仅当对所有$\boldsymbol{x} \in P$，$f(\boldsymbol{x}) \leq g(\boldsymbol{x})$时，$f \leq g$。

一种广为人知的图像处理操作称为阈值化，常用于将灰度图像转换为二值图像。具体而言，对于任意给定的阈值$t \in \mathrm{R}_{\geq 0}$，阈值化操作定义为函数$\tau_t: \mathrm{I}_P \to \mathrm{B}_P$，其定义为$\tau_t(f)(\boldsymbol{x}) = 0$，当$f(\boldsymbol{x}) \leq t$ 时；否则$\tau_t(f)(\boldsymbol{x}) = 1$。容易验证，对于任意$f, g \in \mathrm{I}_P$，当且仅当对所有阈值$t \in \mathrm{R}_{\geq 0}$，$f \leq g$ 当且仅当$\tau_t(f) \leq \tau_t(g)$。此外，根据上述定义，较大的阈值会产生较暗的二值图像；也就是说，只要$s \leq t$，就有$\tau_t(f) \leq \tau_s(f)$。

给定一个结构元素（SE）——二维格点 Z^2 的一个子集——即可定义基本形态学操作：腐蚀、膨胀、开运算和闭运算。具体而言，SE B 是 Z^2 的一个包含原点 $\mathbf{0} = (0,0)$ 的非空子集，相应的腐蚀 ϵ_B 与膨胀 δ_B 运算被定义为相对于该 SE 的函数 $\epsilon_B, \delta_B: \mathrm{I}_P \to \mathrm{I}_P$，如下所示：

$$\epsilon_B(f)(\boldsymbol{x}) = \min_{\substack{\boldsymbol{b}\in B \\ \boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}\in P}} f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}) \quad \text{and} \quad \delta_B(f)(\boldsymbol{x}) = \max_{\substack{\boldsymbol{b}\in B \\ \boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\in P}} f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}), \tag{1}$$

其中 $\epsilon_B(f)(\boldsymbol{x})$ 和 $\delta_B(f)(\boldsymbol{x})$ 表示图像 $\epsilon_B(f)$ 与 $\delta_B(f)$ 在像素 $\boldsymbol{x}$ 处的像素值。随后，开运算与闭运算是由下式定义的函数 O_B, C_B: $\mathrm{I}_P \to \mathrm{I}_P$

$$O_B = \delta_B \circ \epsilon_B \quad \text{and} \quad C_B = \epsilon_B \circ \delta_B, \tag{2}$$

分别如此。改变结构元素 B 可能会相应地产生不同的形态学操作$\epsilon_B, \delta_B, O_B, C_B$。值得注意的是，当 $B = \{\mathbf{0}\}$时，这些操作在 I_P 上与恒等函数相同。

数学形态学运算在不同结构元素下的一些性质，有助于构造拓扑过滤（见第 2.2 节和第 2.3 节）。例如，对于满足 $B_1 \subseteq B_2$的结构元素 B_1 和 B_2，有

$$\epsilon_{B_2}(f) \le \epsilon_{B_1}(f) \quad \text{and} \quad \delta_{B_1}(f) \le \delta_{B_2}(f) \tag{3}$$

对于任意图像 $f \in \mathrm{I}_P$均成立。这两个序关系可直接由公式（1）的定义得出。然而，对于开运算和闭运算，条件 $B_1 \subseteq B_2$ 不足以保证对所有 $f \in \mathrm{I}_P$，不等式 $O_{B_2}(f) \le O_{B_1}(f)$ 和 $C_{B_1}(f) \le C_{B_2}(f)$ 均成立（例如，参见 Heijmans 1995; Hu 2022）。

在本文的演示中，我们聚焦于方形结构元素，记作 S_n for$n = 1,2, \ldots$，且满足 $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \cdots$。具体而言，方形结构元素可通过以下递归形式定义：令 $S_1 = \{\mathbf{0}\}$，并定义

$$S_n = \begin{cases} S_{n-1} \cup (S_{n-1} + \boldsymbol{e}_1) \cup (S_{n-1} + \boldsymbol{e}_2) \cup (S_{n-1} + \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2), & \text{if } n \text{ is even} \\ S_{n-1} \cup (S_{n-1} - \boldsymbol{e}_1) \cup (S_{n-1} - \boldsymbol{e}_2) \cup (S_{n-1} - \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2), & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases} \tag{4}$$

其中，$\boldsymbol{e}_1 = (1,0)$、$\boldsymbol{e}_2 = (0,1)$ 和 $\pm$ 分别表示欧几里得平面中集合的闵可夫斯基和与闵可夫斯基差。方形结构元素已广泛用于

构造数学形态学-数字图像过滤（Chung, Day, and Hu（2022）；Chung 等人（2024））。

图 3 展示了一个通过阈值化从灰度图像生成的二值图像示例，以及分别应用形态学操作 ϵ_B、δ_B、O_B 和 C_B 后得到的相应图像。直观而言，腐蚀 ϵ_B 和膨胀 δ_B 操作分别会使二值图像中的白色区域缩小和扩大。相比之下，开运算 O_B 和闭运算C_B 操作分别会去除某些较小的白色区域和黑色区域，同时保留图像中主要的白色和黑色结构组分。

2.2. 数字图像的持久同调

从由黑色像素所决定的拓扑视角来看，每个二值图像 $f \in B_P$ 都可以视为嵌入在 R^2 中的一个拓扑子空间 $\mathcal{X}_f$。本文将二值图像中的每个黑色像素视为 R^2，中的一个闭单位正方形，其中任意两个这样的正方形互不重叠；具体而言，它们只能沿边界相交，即相交于一条公共边或一个公共顶点，但绝不会在内部相交。因此，二值图像 $f \in B_P$ 中所有黑色像素构成的集合会形成一组闭二维正方形及其边和顶点，从而在 R^2 中构成一个立方复形（例如参见 Kaczynski、Mischaikow 和 Mrozek，2006）。相应的拓扑子空间 $\mathcal{X}_f \subseteq R^2$ 定义为所有这些闭正方形的并，因此是 R^2 的一个紧子集。图 4 的面板 (d)–(g) 展示了定义在矩形区域 $P \subseteq Z^2$，上的二值图像示例，以及面板 (h)–(k) 中描绘的相应拓扑空间。

同调是一种由拓扑空间诱导出的代数结构，用于捕捉并表达子空间中连通分支和环的结构

$\mathcal{X}_f \subseteq \mathrm{R}^2$与给定的二值图像 $f \in \mathrm{B}_P$相关。形式上，$\mathcal{X}_f$ 关于二元域 $\mathbb{F}_2 = \mathrm{Z}/2\mathrm{Z}$ 的第 0 阶和第 1 阶（奇异）同调 群 分别记作 $H_0(\mathcal{X}_f; \mathbb{F}_2)$ 和 $H_1(\mathcal{X}_f; \mathbb{F}_2)$，或简记为 $H_0(\mathcal{X}_f)$ 和 $H_1(\mathcal{X}_f)$（例如参见 Kaczynski、Mischaikow 和 Mrozek，2006；Greenberg 和 Harper，2018年；Munkres，2018年）。

作为$\mathbb{F}_2$上的向量空间，第0同调群$H_0(\mathcal{X}_f)$是由与黑色像素所形成的连通分支相对应的基元素生成的$\mathbb{F}_2$-向量空间。另一方面，第1同调群$H_1(\mathcal{X}_f)$是由与黑色像素所围成的环结构（或孔洞）相对应的基元素生成的$\mathbb{F}_2$-向量空间。特别地，$\mathcal{X}_f$的第0和第1贝蒂数，记作$\beta_0(\mathcal{X}_f)$和$\beta_1(\mathcal{X}_f)$，或简记为β_0 和β_1，分别是向量空间$H_0(\mathcal{X}_f)$和$H_2(\mathcal{X}_f)$（在$\mathbb{F}_2$上）的维数，并分别计数拓扑空间$\mathcal{X}_f$中连通分支与环的数目。图5中的(a)–(d)分图给出了由二值图像诱导的拓扑空间示例，以及相应的贝蒂数对(β_0, β_1)。

持久同调（PH）通过考虑拓扑空间的滤波序列（称为过滤），并追踪拓扑特征在该过滤中的演化，从而扩展了经典同调。从数学上讲，拓扑空间的过滤是一个塔式序列

$$\mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{X}_1 \subseteq \mathcal{X}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{X}_n \tag{5}$$

的拓扑空间 $\mathcal{X}_i$，其中每个 $\mathcal{X}_i$ 都是 $\mathcal{X}_{i+1}$的子空间。通常，拓扑空间 $\mathcal{X}_0$ 设为空集。根据同调的函子性，公式 (5) 中的过滤诱导出以下向量空间和线性变换序列：

$$0 \xrightarrow{\phi_0} H_q(\mathcal{X}_1) \xrightarrow{\phi_1} H_q(\mathcal{X}_2) \xrightarrow{\phi_2} \cdots \xrightarrow{\phi_{n-1}} H_q(\mathcal{X}_n), \tag{6}$$

其中 $q = 0,1$ 是持久性计算所关注的维数，而线性变换 $q = 0, 1$ 是由 $\mathcal{X}_i \subseteq \mathcal{X}_{i+1}$ 在 $i = 0,1,\ldots, n-1$中的拓扑包含所诱导的。图5中的面板 (a)–(d) 展示了拓扑空间 $\mathcal{X}_{f_1} \subseteq \mathcal{X}_{f_2} \subseteq \mathcal{X}_{f_3} \subseteq \mathcal{X}_{f_4}$的过滤示例，对应于二值图像 $f_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq f_4$的递减序列。具体而言，图4中的二值图像 f_1, f_2, f_3, f_4 是通过对图4(a)所示的灰度图像 f进行阈值化操作 $\tau_i(f)$ 得到的，其中 $i = 1$ 为 2、3、4。

持久图（PD），或称持久性条形码（PB），通过记录几何对象的过滤过程中拓扑特征的出生—死亡区间，为持久同调提供了一种紧凑的概括。持久图与动力系统、莫尔斯理论和微分几何有着深刻联系（例如，参见 Frosini 1992年；Barannikov 1994年；Robins 1999年），刻画了连通分支和环等拓扑结构如何随着底层空间沿过滤变化而演化（Carlsson 等人，2005年；Cohen-Steiner、Edelsbrunner 与 Harer，2005年；Ghrist 2008年）。一般而言，在空间$\mathcal{X}_b$ 中于其出生值处出现的特征，若在消失之前能在更大的参数范围内持续存在，则被认为更为稳健。

形式上，PD（或 PB）是由若干对 (b, d) 构成的多重集，这些对称为持久区间（PIs），分别编码拓扑特征在由公式 (5) 给出的过滤过程中出现和消亡的时间 b和 d。图5展示了一个由二值图像诱导的过滤玩具示例，以及与之对应的 PD 和 PB 表示。具体而言，第一行（子图 (a)–(d)）构成了嵌入在欧几里得平面 R^2，中的拓扑空间过滤，并附有相应的 PD 和 PB

用于追踪过滤的持久信息在0和1维中的信息。在此示例中，该过滤的 0 阶和 1 阶持久图（或 PB ）由以下多重集给出

$$\mathrm{PD}_0 = \{(1,2),(1,\infty)\} \text{ and } \mathrm{PD}_1 = \{(1,4),(2,3),(2,3),(2,4)\}, \qquad (7)$$

它们编码了过滤过程中连通分支和环的诞生与死亡信息。更具体地说，第一幅图像中诞生了两个连通分支，其中一个在第二幅图像中并入另一个，对应于持久图像 (1,2) 和 $(1,\infty)$。另一方面，一个由黑色像素围成的环在第一幅图像中诞生，并在第四幅图像中消亡。此外，第二幅图像中还出现了三个环结构：其中两个在第三幅图像中消亡，另一个则在第四幅图像中消亡。

从直观角度来看，持久图和持久条形码从不同方面呈现持久图像 (b,d)。具体而言，持久图将每个持久图像表示为 R^2 中的一个点，主要强调这些点与 R^2 中对角线 $\{(x,x) \mid x \in \mathrm{R}\}$ 之间的几何关系，例如距离。相比之下，持久条形码强调持久图像的寿命 $d-b$ 以及相同区间的重数。例如，在公式 (7) 所示的持久图 PD_1 中，持久图像 (2,3) 出现两次，对应的持久条形码中用两条条形表示。图5的底部一行展示了对应的持久图和持久条形码，体现了这两种表示方式各自的特点。

如图 4 和图 5 所示，本文重点关注二维二值图像的立方复形表示所产生的拓扑过滤，以及相关的持久图和 PB 信息。此外，我们还研究由数学形态学（ MM）滤过所诱导的生灭信息的几何解释；这些滤过通过对数字图像执行数学形态学运算构造而成。

2.3. 基于数学形态学的数字图像持久同调

利用数学形态学运算，可以构造数字图像的过滤。具体而言，MMPersistence 库实现了基于给定二值图像构造的腐蚀、膨胀、开运算和闭运算滤过。在数学上，给定一个二值图像$f \in \mathrm{B}_P$ 和一个结构元素滤波序列 $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots \subseteq B_n$，可以得到以下拓扑空间滤过：

$$\mathcal{X}_f \subseteq \mathcal{X}_{\epsilon_{B_1}(f)} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{X}_{\epsilon_{B_n}(f)} \quad \text{and} \quad \mathcal{X}_{\delta_{B_n}(f)} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{X}_{\delta_{B_1}(f)} \subseteq \mathcal{X}_f. \tag{8}$$

请注意，第二个过滤中的排序与结构元素的排序相反，因为使用较大的结构元素进行膨胀会侵蚀掉更多黑色像素（见公式（3））。值得注意的是，通过组合公式（8）中的过滤，也可以考虑如下组合过滤：

$$\mathcal{X}_{\delta_{B_n}(f)} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{X}_{\delta_{B_1}(f)} \subseteq \mathcal{X}_f \subseteq \mathcal{X}_{\epsilon_{B_1}(f)} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{X}_{\epsilon_{B_n}(f)}. \tag{9}$$

值得注意的是，由于当 $B = \{\mathbf{0}\}$ 时，对于每个 $f \in \mathrm{I}_P$，都有 $\epsilon_B(f) = f = \delta_B(f)$，因此公式（8）和（9）中的结构元素 B_1 通常选取为满足 $B \neq \{\mathbf{0}\}$。具体而言，本文主要考虑参考公式中定义的方形结构元素，用于修改给定的数字图像并生成持久同调计算所需的过滤。

也可以利用开运算和闭运算构造类似的过滤。形式上，假设 $f \in \mathrm{B}_P$ 是一个二值图像，且 $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots \subseteq B_n$ 是一系列满足以下条件的结构元素

$$O_{B_{i+1}}(f) \leq O_{B_i}(f) \quad \text{and} \quad C_{B_i}(f) \leq C_{B_{i+1}}(f) \tag{10}$$

对于每一个 $i = 1$、2、……、$n - 1$。随后得到以下过滤：

$$\mathcal{X}_{C_{B_n}(f)} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{X}_{C_{B_1}(f)} \subseteq \mathcal{X}_f \subseteq \mathcal{X}_{O_{B_1}(f)} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{X}_{O_{B_n}(f)}, \tag{11}$$

因此相应的 持久同调及其持久图或持久条形码即可计算。值得注意的是，可以证明，对于定义在矩形图像域上的任意数字图像以及任意矩形结构元素滤波序列 $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots \subseteq B_n$，公式（ 10 ）中的不等式对图像域上的每一幅（灰度）图像均成立（例如，参见 Hu 2022）。特别地，公式（4）中定义的方形结构元素滤波序列满足该假设，从而为持久同调提供了计算上切实可行的过滤。

更一般地，假设 γ_1、 γ_2、 ...、 γ_n: $\mathrm{B}_P \to \mathrm{B}_P$ 是作用于二值图像的图像操作，且对于每个 $f \in \mathrm{B}_P$，都有 $\gamma_1(f) \leq \gamma_2(f) \leq \cdots \leq \gamma_n(f)$。则可诱导出以下拓扑空间过滤:

$$\mathcal{X}_{\gamma_n(f)} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{X}_{\gamma_1(f)}. \tag{12}$$

MMPersistence 库还提供了一个平台，用于计算一系列二值图像的持久同调；这些图像对应的拓扑空间满足方程（12）中给出的性质。

2.4. 基于数学形态学的灰度图像持久性

理论上，基于数学形态学的持久性框架也可以扩展到灰度图像。形式化地，对于任意灰度图像 $f \in \mathrm{I}_P$、阈值 $0 \leq t_1 < t_2$，以及满足方程（10）中条件的结构元素 $B_1 \subseteq B_2$ ，以下腐蚀和开运算的偏序图成立:

$$\begin{array}{ccc} \epsilon_{B_1}(\tau_{t_2}(f)) & \to & \epsilon_{B_1}(\tau_{t_1}(f)) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \epsilon_{B_2}(\tau_{t_2}(f)) & \to & \epsilon_{B_2}(\tau_{t_1}(f)) \end{array} \quad \text{and} \quad \begin{array}{ccc} O_{B_1}(\tau_{t_2}(f)) & \to & O_{B_1}(\tau_{t_1}(f)) \\ \uparrow & & \uparrow \\ O_{B_2}(\tau_{t_2}(f)) & \to & O_{B_2}(\tau_{t_1}(f)) \end{array}, \tag{13}$$

其中，对于二值图像 $f, g \in$ ，箭头 $f \to g$ B_P 表示关系 $f \leq g$。另一方面，在考虑形态学膨胀和闭运算时，这些图示

$$\begin{array}{ccc} \delta_{B_1}(\tau_{t_2}(f)) & \to & \delta_{B_1}(\tau_{t_1}(f)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \delta_{B_2}(\tau_{t_2}(f)) & \to & \delta_{B_2}(\tau_{t_1}(f)) \end{array} \quad \text{and} \quad \begin{array}{ccc} C_{B_1}(\tau_{t_2}(f)) & \to & C_{B_1}(\tau_{t_1}(f)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_{B_2}(\tau_{t_2}(f)) & \to & C_{B_2}(\tau_{t_1}(f)) \end{array} \tag{14}$$

仍然成立，但垂直偏序的方向相反。因此，考虑方程（13）和（14）中图像对应的黑色像素集合，可以得到由此诱导的拓扑空间双滤子。

双滤子，或更一般地说，多重滤子，考虑由多个参数化的过滤拓扑空间，例如阈值和上文介绍的一列所选结构元素的索引。与单参数过滤及其相应的持久同调相比，这种基于数学形态学的框架提供了更丰富的几何和拓扑信息，从而为成像数据分析带来更细致的见解（Chung, Day, and Hu（2022）；Chung 等人（2024）；Korkmaz 等人 2025）。

3. 结果

本文的结果部分分为三部分。第 3.1 节介绍 MMPersistence 应用于二值图像时的功能，说明基于数学形态学的过滤所产生的出生值与死亡值的几何意义，以及由此得到的持久图。在第 2.4 节所述框架的基础上，第 3.2 节将讨论扩展至灰度图像，并给出相应的几何解释。最后，第 3.3 节介绍运行 MMPersistence 所需的编程环境和软件依赖。

3.1. 用于二值图像的基于数学形态学的持久性

第 3.1 节介绍了在二值图像上构造的形态学滤子的持久性，重点讨论腐蚀、开运算、膨胀和闭运算，并探讨

持久图的计算，以及所得持久图像的几何解释。值得注意的是，本文主要关注与基于数学形态学的过滤相关的 1 阶持久图。0 阶持久图的几何分析可视为对偶情形，只需交换二值图像中白色像素与黑色像素的角色即可得到。

3.1.1: 基于腐蚀和开运算滤过的持久性

腐蚀和开运算都具有这样的性质：逐步扩大给定二值图像中的黑色像素集合。具体而言，对于任意嵌套的结构元素序列 $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots \subseteq B_n$，可按公式（3）构造基于腐蚀的过滤，其中相应的黑色区域构成递增序列，即 $\mathcal{X}_f \subseteq \mathcal{X}_{\epsilon_{B_1}(f)} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{X}_{\epsilon_{B_n}(f)}$。类似地，对于满足公式（10）的结构元素序列，例如公式（4）中定义的结构元素，可得到基于开运算的过滤；在连续的开运算下，黑色像素集合单调增长，即 $\mathcal{X}_f \subseteq \mathcal{X}_{O_{B_1}(f)} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{X}_{O_{B_n}(f)}$。

图6展示了一个具有代表性的示例：其中的二值图像 f 包含六个一维孔洞，并展示了与结构元素为 S_n （按公式（4）定义）的腐蚀滤过 $\mathcal{X}_f \subseteq \mathcal{X}_{\epsilon_{S_1}(f)} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{X}_{\epsilon_{S_{61}}(f)}$ 相对应的0 阶和 1 阶持久图。在此示例中，孔洞呈不同大小的矩形形状，这反映在 1 阶持久图中

$$\mathrm{PD}_1 = \{(0,8),(0,14),(0,22),(0,28),(0,41),(0,61)\}. \quad (15)$$

具体而言，死亡值编码了矩形孔洞结构的宽度。传统的同调计算通常会忽略孔洞尺寸等几何信息，从而使这些孔洞在拓扑上无法区分。请注意，在此示例中，对于所有 $n =$，开运算滤过都会产生相同的持久图，因为 $O_{S_n}(f) = \epsilon_{S_n}(f)$

2，……，
61。

与之前讨论的矩形孔洞不同，图7展示了一个 500×500 二值图像示例，以及使用公式（4）中定义的方形结构元素（$n = 2, \ldots, 26$）构造的腐蚀过滤和基于开运算的过滤所诱导的相应持久图。图7中的输入二值图像包含五条粗细不一、形状较不规则的白色曲线，它们共同形成五个孔洞结构。通过应用腐蚀过滤和开运算过滤，可以计算出相应的持久图。由于原始图像中的孔洞具有几何不规则性，所得的第一持久图（持久图$_1$）比公式（15）中的复杂得多；具体而言，其中包含大量出生值为正的持久图像。这一现象是因为腐蚀过程会部分去除曲线的不规则区域，从而在滤过值大于零时产生额外的孔洞结构。不过，出生值为零的持久图像与五个原始孔洞一一对应，其死亡值反映了曲线的粗细。这为数字图像中拓扑结构的大小和“厚度”提供了定量且具有数学可解释性的描述。此外，如图7所示，持久图$_1$, 中出生值为正的持久图像形成五个不同的簇，其中重叠区间（0,1）构成其中一个簇。在此情形下，死亡值相近的持久图像往往会聚集在一起，从而在持久图中形成簇结构。

此外，尽管腐蚀和开运算都会移除或削弱二值图像中的白色对象，但由此产生的持久图呈现出不同的持久图像分布。如图7所示，开运算往往会消除较小或较薄的白色结构，同时保留较为稳健的结构。相比之下，腐蚀会均匀地移除或削弱所有白色结构。由于这些几何性质存在差异，

由持久图$_1$ 腐蚀滤过诱导的持久图通常呈现出更分散的持久图像分布，这反映了其中存在大量碎片化的白色连通分量。

3.1.2：基于膨胀和闭运算过滤的持久性

与采用基于腐蚀和开运算的操作来检测二值图像黑色区域中孔洞大小的做法不同，基于膨胀和闭运算的操作能够促进白色区域（即孔洞）的连通性。这些操作更容易消除分隔相邻孔洞的细窄黑色界面，从而使邻近的白色结构合并；这一过程由所得持久图中对应的死亡值所刻画。

图8展示了两幅500×500 二值图像，以及使用公式（4）中定义的结构元素 S_n （$n = 2, \ldots, 26$）构造的膨胀滤过所诱导的相应持久图和持久条形码。在这些示例中，两幅二值图像均包含孔洞结构，但几何排列存在显著差异。具体而言，第一幅图像中的孔洞比第二幅图像中的孔洞聚集得更密集，而第二幅图像中的孔洞则分为两个主要簇。这种几何差异清晰地反映在诱导的一维持久图中。特别是，第二幅图像的持久图$_1$ 包含一个持久区间（2,26），其寿命为24，显著长于第一幅图像的持久图$_1$ 中观察到的任何持久区间。这一现象提供了一种定量且具有严谨数学依据的方法，用于表征数字图像中孔洞结构的空间稀疏性和连通性。在我们之前的研究中，我们采用基于膨胀和闭运算的过滤及其对应的持久图，对显微图像中线粒体结构的连通性进行量化，从而表征线粒体网络的鲁棒性（Chung 等人，2024）。

图 9 展示了另一个基于膨胀的过滤及其对应持久图的示例。该二值图像包含黑色圆盘区域内的两个孔洞。尽管这两个孔洞的几何形状和大小相同，但由于它们在圆盘中的空间位置不同，因此对应的持久区间也不同。具体而言，左侧的孔洞比右侧的孔洞更靠近圆盘边界，因此在相应的持久图中寿命较短。

总之，基于腐蚀和开运算的操作及其相关的持久性表示，不仅能够捕捉孔洞结构的大小与形状信息，还能捕捉其在二值图像中的相对空间位置，因此，相较于传统的基于下水平集的持久性方法，它们能更全面地几何刻画拓扑特征。

3.2. 基于数学形态学的持久性：灰度图像

受公式 (13) 和 (14) 中观察结果的启发，所提出的基于数学形态学的持续同调框架可扩展至灰度图像。形式上，设 $f\colon P \to \mathrm{R}_{\geq 0}$ 为一幅灰度图像，$t \in \mathrm{R}_{\geq 0}$ 为一个阈值。通过阈值化，可得到相应的二值图像$\tau_t(f)\colon P \to \{0, 1\}$。对于构造在 $\tau_t(f)$ 上的任意基于数学形态学的过滤，随后即可计算其相关持久性。对于 $q \in \{0,1\}$，我们将给定的、针对 $\tau_t(f)$ 构造的基于数学形态学的过滤的第 q 个持久性图记为

$$\mathrm{PD}_q{}^{\zeta\cdot}(f, t), \tag{16}$$

其中，$\zeta.$ 表示作用于 I_P 上的一系列数学形态学运算（例如腐蚀、膨胀、开运算和闭运算）。考虑一组阈值 t_1、t_2、……、t_m，可得到以下持久图序列：

$$\mathrm{PD}_q{}^{\zeta_\cdot}(f,t_1),\mathrm{PD}_q{}^{\zeta_\cdot}(f,t_2),\ldots,\mathrm{PD}_q{}^{\zeta_\cdot}(f,t_m). \tag{17}$$

因此，通过汇总公式（17）中所示的持久信息（例如采用直接拼接的方式），所得持久图序列便为输入灰度图像提供了多尺度特征表示。

本文并未按照方程（13）和（14）所定义的关系计算双滤子及其持久性，而是从特征表示视角出发，提出了一种将 MMPersistence 应用于灰度图像分析的直接方法。将基于数学形态学的双滤子与成像数据的多参数持久性计算工具（如 RIVET（RIVET开发者 2020年））相结合，是捕捉多尺度几何结构和复杂空间相互作用的一种有前景的方向。

为量化传统子水平集滤子与基于数学形态学的过滤所诱导的持久图之间的差异，我们采用瓶颈距离（Cohen-Steiner、Edelsbrunner 和 Harer，2005年；Chazal 等，2016年；Bubenik 和 Elchesen，2022年）。在这一距离下，所有有限持久图构成一个度量空间（例如，参见 Oudot，2015年）。在此情形下，持久图像的分布和模式越相似，两个持久图之间的瓶颈距离就越小，反之亦然。本文将瓶颈距离用于与从灰度图像计算得到的传统持久同调进行比较，以展示基于数学形态学的持久同调在捕捉数字图像中拓扑结构的形状和几何信息方面的优势。

为了比较持久图像尺度不同的持久图，例如源自传统子水平集滤子和基于数学形态学的过滤的持久图，我们将所有出生值与死亡值重新缩放至区间 [0,1]，以此对持久图进行归一化。具体而言，由灰度图像的下水平集过滤得到的持久图，通常具有出生值和

死亡值位于范围 [0,255]内。相比之下，对于由长度为 n的结构元素序列 $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots \subseteq B_n$ 所诱导的过滤构造的基于形态学的持久图，其出生值与死亡值的范围为 $[0, n+1]$，其中数值 $n+1$ 对应于全黑图像。

图10展示了MMPersistence针对灰度图像的计算流程，采用与图1和图2相同的设置。如图所示，由原始图像f 与添加了椒盐噪声的噪声图像g 的次水平集滤子得到的归一化传统持久图（或持久条形码）之间的瓶颈距离为

$$d_B(\mathrm{PD}_1(f), \mathrm{PD}_1(g)) \approx 0.4353. \tag{18}$$

相比之下，通过固定一个阈值（例如$t = 100$）并采用基于开运算的过滤来估计椒盐噪声的尺寸信息，相应归一化形态学持久图之间的瓶颈距离为

$$d_B({\mathrm{PD}_1}^{O_{B\cdot}}(f, 100), {\mathrm{PD}_1}^{O_{B\cdot}}(g, 100)) \approx 0.091. \tag{19}$$

图2概述了在考虑多个阈值以及$t = 50$、100和150对应的平均瓶颈距离时所得到的结果。值得注意的是，平均距离与公式（19）中报告的值一致，因为三个单独的距离几乎相同。这一现象的产生是因为大多数椒盐噪声伪影对应于靠近对角线的持久区间，具体而言是形如(0,0.091)的区间。

与仅基于像素值的传统持久图或持久条形码信息相比，基于数学形态学的持久性对图像中拓扑结构的大小和形状更为敏感。这种增强的几何感知能力能够实现更具信息量的

以及对图像结构的稳健表征，尤其是在存在噪声或复杂空间模式的情况下。

3.3. 软件与代码环境

MMPersistence 库使用 Python 实现，并基于 GUDHI 库提供的立方复形功能构建（Dłotko 2025年；GUDHI项目 2025年）。MMPersistence 的开发及全部实验均在 Google Colab 平台上进行，使用的是于2025年10月10日 08:52:57 编译的 Python 3.12.12版，编译器为 GCC 11.4.0。值得注意的是，MMPersistence 中持久图的可视化与绘制依赖于 Persim 包，该包属于 Scikit-TDA项目（Saul 与 Tralie，2019年）。另一方面，GUDHI 库支持持久条形码的可视化。更多信息，包括我们的 Python 实现及其依赖项（NumPy、Numba、OpenCV、Matplotlib 等），可在代码可用性声明及所链接的 GitHub 仓库中获取。

4. 讨论与未来工作

本节讨论所提出的 MMPersistence 库的局限性、尚待解决的问题和未来发展方向，尤其关注其更深层次的几何解释，以及它在现实世界成像任务中的潜在应用。

4.1. 局限性

尽管基于数学形态学的持久性能够捕捉数字图像中拓扑结构的空间信息和尺寸信息，但仍有待建立更严谨的数学表述并开展理论分析。例如，虽然基于膨胀和闭运算的操作可以连接孔洞结构，但 1 阶持久图中持久区间的确切几何解释，例如它们反映的是

稀疏性、连通性还是位置信息（如图8和图9所示），仍未得到充分理解。此外，0 阶和 1 阶持久图中的持久区间之间的关系仍是一个开放问题，图8中的示例便体现了这一点。再者，由于腐蚀、膨胀、开运算和闭运算会作用于图像中的所有像素，因此难以精确确定基于数学形态学的持久图中各个持久区间的几何意义，例如识别它们对应的特定孔洞结构或空间区域。

另一方面，除了更深入地研究基于数学形态学的数字图像持久性的几何意义外，MMPersistence 的若干计算方面也值得进一步探索。尤其是提高形态学操作的效率，特别是腐蚀和膨胀的效率，将显著加快基于数学形态学的过滤构建以及相关持久图的计算。此外，利用基于GPU的并行化和经过优化的底层实现，是推动该框架扩展至更大图像和计算需求更高的应用的一条有前景的途径。

4.2. 其他图像操作产生的持久性

未来工作的一个方向是将卷积等更多图像操作纳入数字图像持久同调计算的拓扑过滤构造中，从而提取更丰富的几何信息，以便对图像结构进行更精细的分析。特别是，为了更好地捕获局部拓扑与几何信息，开发局部图像操作（如局部腐蚀、局部膨胀、局部开运算和局部闭运算）及其相关过滤与持久性表示，是一条重要且有前景的途径。

4.3. 面向实际应用的未来方向

除在过滤构造中采用更多图像处理技术之外，未来工作还将把基于数学形态学的过滤及其持久图表示扩展到更广泛的真实世界成像应用。通过整合基于数学形态学的持久性，联合编码数字图像中的拓扑演化以及具有形态学意义的几何信息（例如连通性、碎片化和特征孔洞尺寸），该框架为分析复杂结构模式提供了一种原理性方法，其分析范围超出了传统基于下水平集的持续性所能刻画的内容。有前景的方向包括在生物医学和显微成像任务（如结构表征、分类和质量评估）上开展系统验证，这建立在已有结果之上：基于数学形态学的过滤能够有效量化线粒体网络中的连通性与鲁棒性（Chung 等人，2024）。更一般而言，将基于数学形态学的持久性整合到机器学习模型中是一个有前景的方向，既可将向量化持久性摘要用作几何感知特征，也可将其直接嵌入学习架构，作为融入拓扑信息的组件。

5. 结论

总之，本文研究了基于数学形态学技术从二维数字图像构建的拓扑过滤中所产生子结构的几何和拓扑含义。我们提出了 Python 库 MMPersistence，并通过数字图像示例展示了其功能。结果表明，该框架能够提供传统基于下水平集过滤的持久同调所未能捕捉到的额外几何信息。此外，通过将 MMPersistence 作为开源资源发布，本文提供了一个免费

且易于访问的 Python 环境工具，支持与深度神经网络集成，并推动其在图像处理及相关现实世界任务中的广泛应用。

代码可用性所提出的 MMPersistence 库的 Python 代码可在以下 GitHub 仓库中获取：https://github.com/ChuanShenHu/MMPersistence。MMPersistence 的演示图像也可在 GitHub 仓库中获取。所有图像均由作者制作，不涉及版权问题。

致谢 本研究的主要部分是在作者受聘于台湾台湾中央大学（NCU）数学系担任博士后研究员期间启动并完成的。本研究的部分构想与理论基础，是作者在台湾国立台湾师范大学数学系攻读博士课程期间开展研究时形成的。所提出代码库（MMPersistence）的实现、几何解释与演示，均是在作者受聘于 NCU 期间完成的。作者衷心感谢台湾国家科学及技术委员会（NSTC）提供经费支持（补助编号：NSTC 114-2811-M-008-069），该项目由 Dr. John M. Hong（NCU）主持。作者使用 Grammarly 和 ChatGPT-5 润饰语言；所有知识内容均由作者独立完成。

术语表

2D	二维
PD	持久性图
PB	持久性条形码
PH	持久同调
PI	持久区间
MM	数学形态学
MMPersistence	提出的 Python 库（基于数学形态学的持久性）
SE	结构元素

TDA 拓扑数据分析

利益披露声明 作者未报告任何潜在利益冲突。**ORCID** 胡传申
https://orcid.org/0000-0002-4476-7866

参考文献

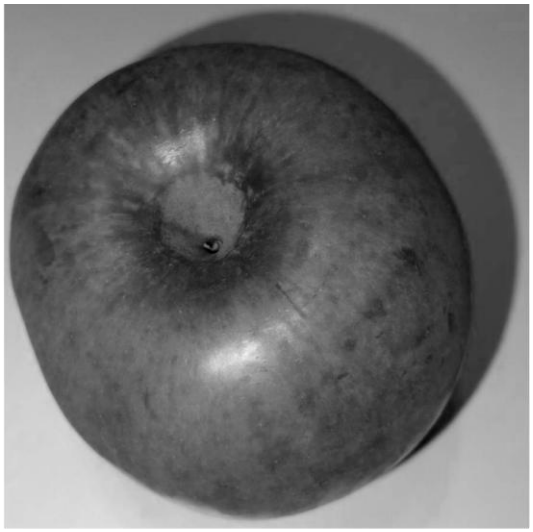
Aukerman, A.; Carrière, M.; Chen, C.; Gardner, K.; Rabadán, R.; 与 Vanguri, R. 2022年。基于持久同调的乳腺癌免疫微环境表征：一项可行性研究。《计算几何杂志》，12(2)：183–206。Barannikov, S. 1994年。框架莫尔斯复形及其不变量。《苏联数学进展》，21：93–116。Botnan, M.; 与 Lesnick, M. 2023年。多参数持久性导论。载于代数表示与相关结构：代数表示国际会议（*ICRA 2020*），2020年11月9–25日，77–150。Bubenik, P.; 与 Elchesen, A. 2022年。持久图、瓶颈距离与Wasserstein距离的普适性。《计算几何》，105–106：101882。Carlsson, G.; Zomorodian, A.; Collins, A.; 与 Guibas, L. J. 2005年。形状的持久条形码。《形状建模国际期刊》，11(2)：149–187。Chazal, F.; de Silva, V.; Glisse, M.; 与 Oudot, S. 2016年。《持久模的结构与稳定性》。瑞士：Springer Cham。ISBN 978-3-319-42543-6。Chung, Y.-M.; 与 Day, S. 2018年。拓扑保真度与图像阈值化：一种持久同调方法。《数学成像与视觉杂志》，60：1167–1179。Chung, Y.-M.; Day, S.; 与 Hu, C.-S. 2022年。面向数学形态学的多参数持久性框架。《科学报告》，12(1)：6427。Chung, Y.-M.; Hu, C.-S.; Sun, E.; 与 Tseng, H. C. 2024。线粒体图像分析中的形态学多参数滤过与持久同调。《公共科学图书馆·综合》，19(9)：1–30。Cohen-Steiner, D.; Edelsbrunner, H.; 与 Harer, J. 2005年。《持久图的稳定性》。载于 第二十一届计算几何年度研讨会论文集（*SoCG*），263–271。

Dłotko, P. 2025年。“立方复形。”V. 3.11.0。GUDHI 编辑委员会。https://gudhi.inria.fr/doc/3.11.0/。Edwards, P.; Skruber, K.; Milićević, N.; Heidings, J. B.; Read, T.-A.; Bubenik, P.; 与 Vitriol, E. A. 2021年。TDAExplore：通过基于拓扑的机器学习对荧光显微图像进行定量分析。Patterns，2(11)。Franchi, G.; Fehri, A.; 与 Yao, A. 2020年。深度形态学网络。模式识别，102：107246。Frosini, P. 1992年。用尺寸函数测量形状。载于 Casasent, D. P. 编，智能机器人与计算机视觉 X：算法与技术，第1607卷，122–133。Ghrist, R. 2008年。条形码：数据的持久拓扑。美国数学会通报，45(1)：61–75。Greenberg, M. J.; 与 Harper, J. R. 2018年。代数拓扑：入门课程。美国：CRC出版社。ISBN 978-0-4299-7095-5。Gupta, S.; Zhang, Y.; Hu, X.; Prasanna, P.; 与 Chen, C. 2023年。图像分割的拓扑感知不确定性。载于神经信息处理系统进展，第36卷，8186–8207。Curran Associates 公司。Haralick, R. M.; Sternberg, S. R.; 与 Zhuang, X. 1987年。利用数学形态学进行图像分析。IEEE 模式分析与机器智能汇刊，9(4)：532–550。Heijmans, H. J. A. M. 1995年。数学形态学：基于代数与几何的图像处理现代方法。SIAM评论，37(1)：1–36。Hu, C.-S. 2022年。由数学形态学产生的多参数持久同调上的层结构。博士论文，国立台湾师范大学，台北，台湾。Hu, C.-S.; Lawson, A.; Chen, J.-S.; Chung, Y.-M.; Smyth, C.; 与 Yang, S.-M. 2021年。TopoResNet：一种混合深度学习架构及其在皮肤病变分类中的应用。Mathematics，9(22)。Hu, X.; Fuxin, L.; Samaras, D.; 与 Chen, C. 2019年。拓扑保持型深度图像分割。美国：Curran Associates 公司。Kaczynski, T.; Mischaikow, K.; 与 Mrozek, M. 2006。计算同调。美国：Springer纽约。ISBN 978-0-3872-1597-6。Korkmaz, C.; Nuwagira, B.; Coskunuzer, B.; 与 Birdal, T. 2025年。CuMPerLay：学习立方多参数持久性向量化。载于论文集

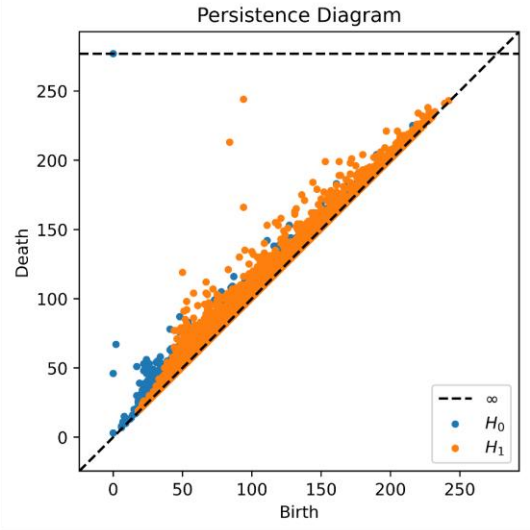
IEEE/CVF国际计算机视觉会议（ICCV），27084–27094。Munkres, J. R. 2018年。《代数拓扑基础》。美国：Chapman and Hall/CRC。ISBN 978-0-4299-6246-2。Najman, L.; and Talbot, H. 2013.《数学形态学：从理论到应用》。美国：Wiley & Sons, Incorporated, John。ISBN 978-1-1186-0078-8。Oudot, S. Y. 2015.《持久性理论：从箭图表示到数据分析》，第209卷。美国：美国数学会，普罗维登斯。Pritchard, Y.; Sharma, A.; Clarkin, C.; Ogden, H.; Mahajan, S.; and Sánchez-García, R. J. 2023年。持久同调分析能够区分非线性显微图像中的病理性骨微结构。《科学报告》，13(1): 2522。Robins, V. 1999.《从有限近似计算同调》。《拓扑学论文集》，24(1): 503–532。Saul, N.; and Tralie, C. 2019.“Scikit-TDA：面向Python的拓扑数据分析。”V. 1.1.1。Scikit-TDA项目。https://docs.scikit-tda.org/en/latest/index.html。Serra, J. 1983.《图像分析与数学形态学》。美国：学术出版社。ISBN 978-0-12-637240-3。Shen, Y.; Shih, F. Y.; Zhong, X.; and Chang, I.-C. 2022.深度形态学神经网络。《国际模式识别与人工智能杂志》，36(12): 2252023。Soille, P. 2013.《形态学图像分析：原理与应用》。德国：Springer柏林·海德堡，第2版。ISBN 978-3-662-05088-0。GUDHI项目。2025年。GUDHI用户与参考手册。GUDHI 编辑委员会，第3.11.0版。RIVET开发者。2020年。“RIVET。”V. 1.1.0。RIVET开发者。https://rivet.readthedocs.io/en/latest/index.html。Vipond, O.; Bull, J. A.; Macklin, P. S.; Tillmann, U.; Pugh, C. W.; Byrne, H. M.; and Harrington, H. A. 2021年。多参数持久同调景观可识别肿瘤中的免疫细胞空间模式。《美国国家科学院院刊》，118(41): e2102166118。Wang, F.; Zou, Z.; Sakla, N.; Partyka, L.; Rawal, N.; Singh, G.; Zhao, W.; Ling, H.; Huang, C.; Prasanna, P.; and Chen, C. 2025年。TopoTxR：一种拓扑引导的深度

卷积网络，用于在DCE-MRI中学习乳腺实质。医学图像分析，99:
103373。

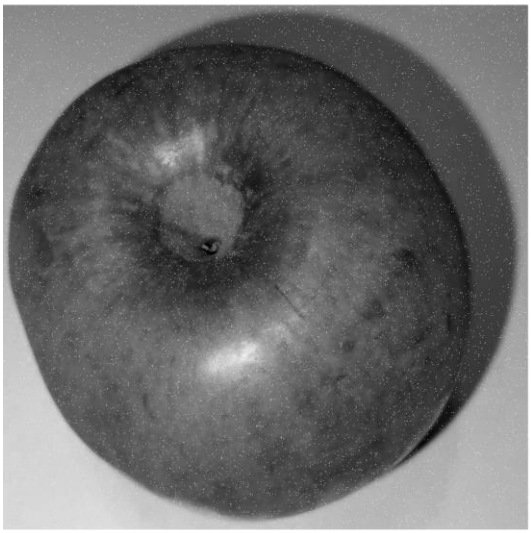
图1. 灰度图像以及根据像素值通过下水平集过滤得到的持久图（PDs）。(a) 一幅像素值范围为 0 到 255 的灰度图像。(b) (a) 中图像的持久图表示，包含 0 阶和 1 阶持久图。(c) (a) 中图像加入随机盐噪声后的修改版本，盐像素数量为 0.01 ×高度 × 宽度 的下取整，其中高度 和 宽度 表示图像的高度和宽度。(d) (c) 中图像的持久图表示，包含 0 阶和 1 阶持久图。所诱导的归一化的一阶持久图之间的瓶颈距离（见第 2.2 节）约为0.4353。



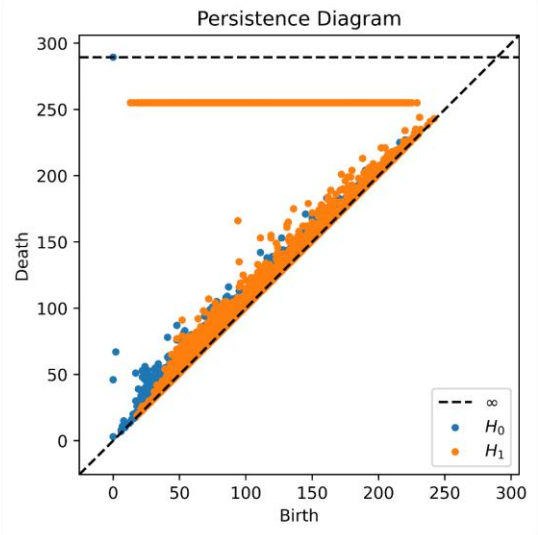
(a)



(b)



(c)



(d)

图2. 基于数学形态学的持久性用于分析灰度图像的概述。第一个面板展示原始灰度图像与含噪声的灰度图像。第二个面板展示由灰度数据利用方形结构元素构建的开运算滤过计算得到的阈值化图像的三对基于数学形态学的持久图（PDs）（见第 2.3 节）。第三个面板给出所诱导的归一化的一阶基于数学形态学的持久图之间的平均瓶颈距离，其值为 0.091。

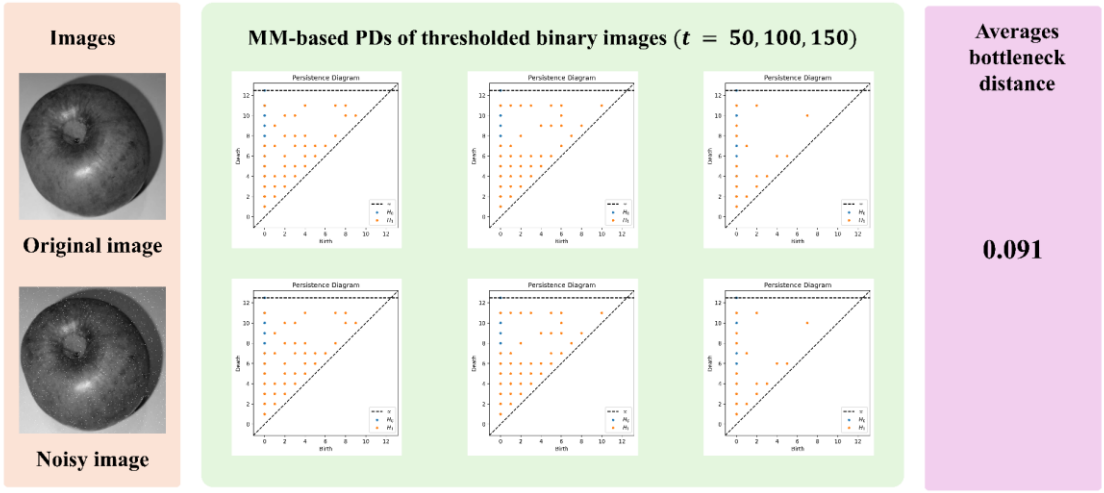


图3. 噪声灰度图像的示意图f，其像素值范围为0到255；使用阈值g 150进行阈值化后得到的图像，以及应用腐蚀ϵ_B、膨胀δ_B、开运算O_B和闭运算C_B 得到的图像，其中使用3×3 方形$B = S_3$ 作为结构元素（见公式（4））。

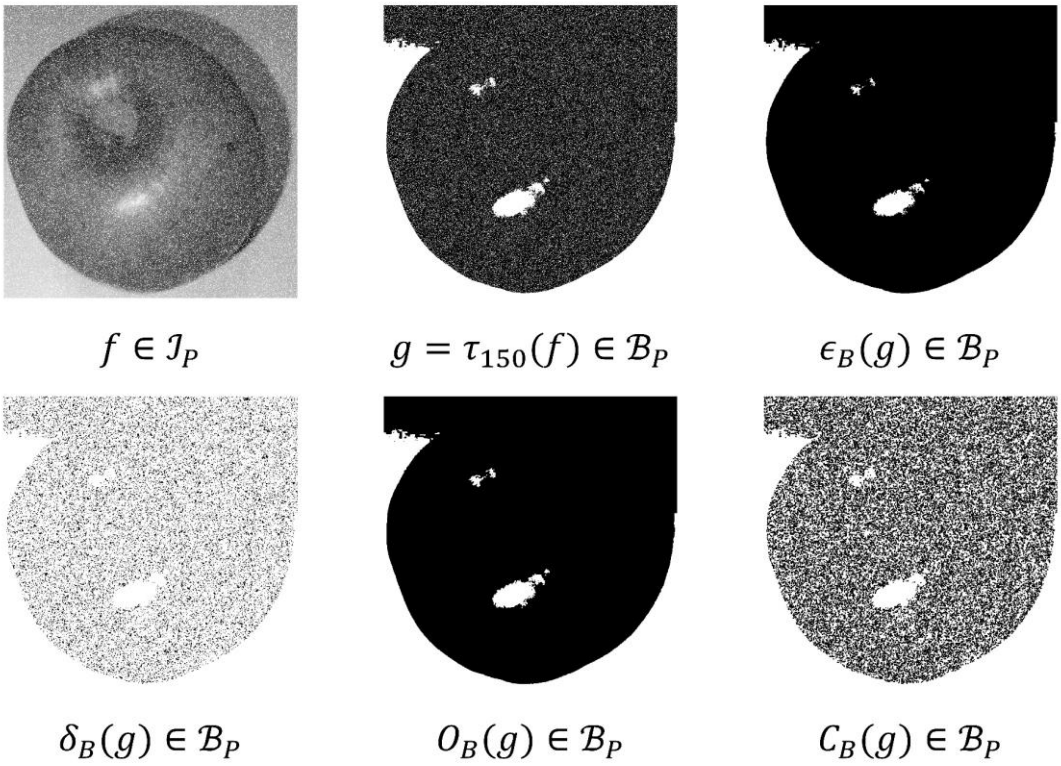


图4. 图像域、灰度图像以及带有相应拓扑空间过滤的二值图像序列的示例。(a) 一个5×5矩形图像域$P \subseteq \mathbb{Z}^2$。(b) 定义在f 上的灰度图像P ，其像素值范围为{1,2,3,4}。(c) 灰度图像f的另一种可视化方式，其中每个像素以灰色方块表示，其明暗反映像素值；颜色较深的方块对应较低的像素值。(d)–(g) 二值图像序列$f_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq f_4$，其中每个$f_i$ 通过以下方式对f 进行阈值化得到τ_i。(h)–(k) 与(d)–(g)所示二值图像序列相对应的拓扑空间过滤。

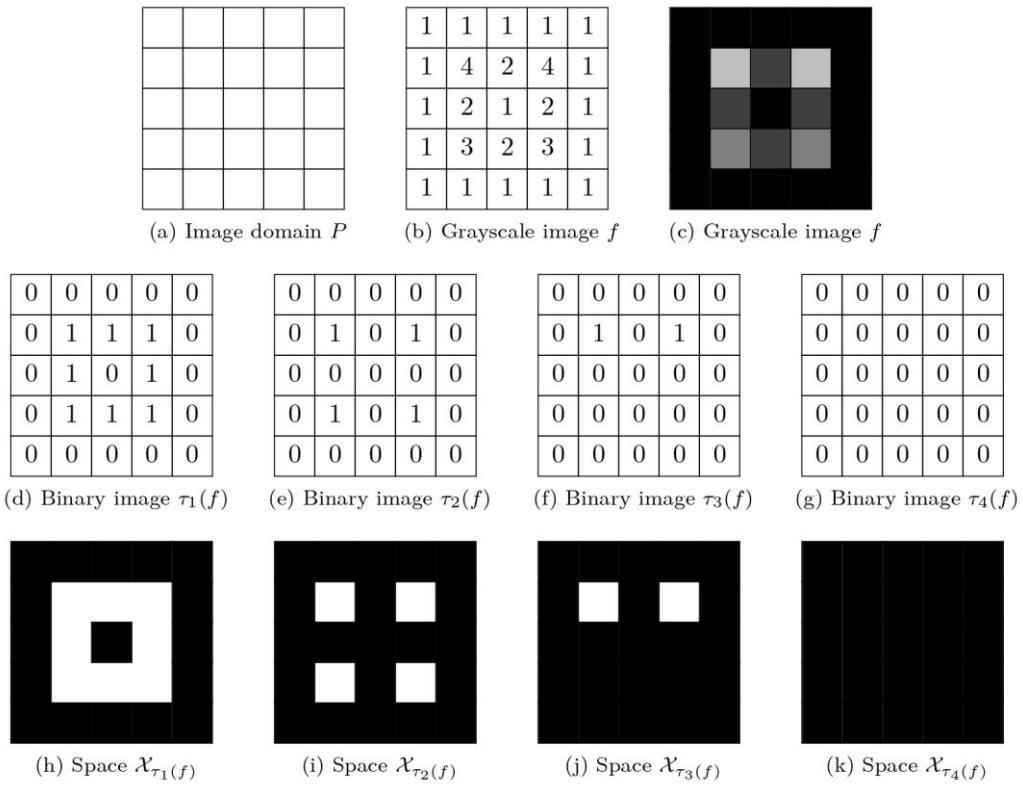
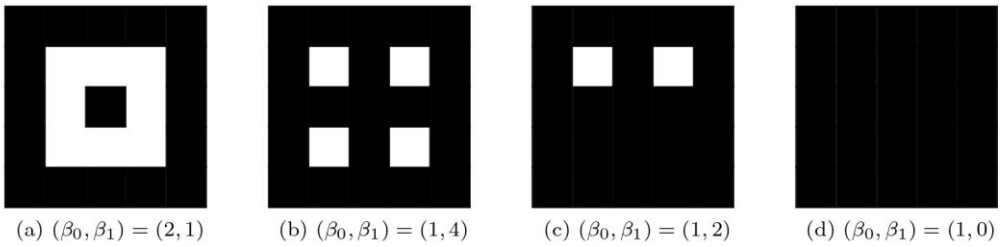
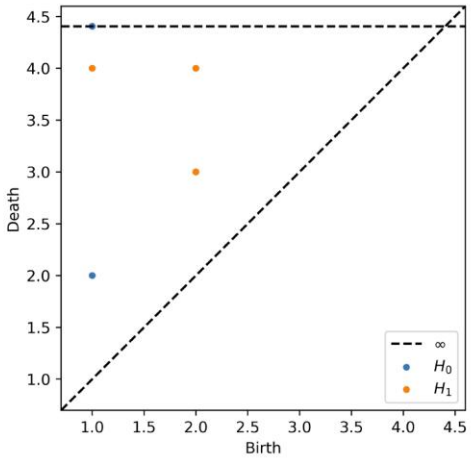


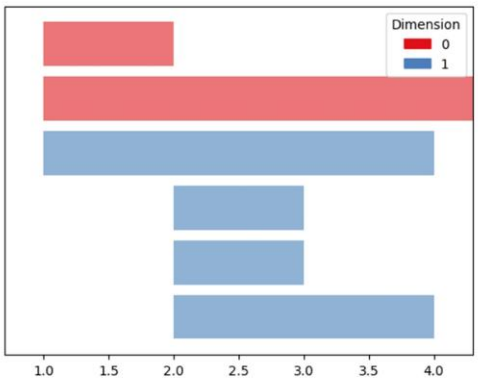
图5. 一个与图4共享的过滤示例，以及相应的持久性图和持久性条形码。在第一行（分图(a)–(d)）中，每个拓扑空间均标注了其 Betti 对 (β_0, β_1)，分别表示连通分支和环结构的数量。



(a) $(\beta_0, \beta_1) = (2, 1)$ (b) $(\beta_0, \beta_1) = (1, 4)$ (c) $(\beta_0, \beta_1) = (1, 2)$ (d) $(\beta_0, \beta_1) = (1, 0)$



(e) Persistence diagram



(f) Persistence barcode

图 6. 二值图像示例，以及由开运算滤过诱导的第 0 阶和第 1 阶持久图（使用平方结构元素 S_n，其定义见公式（4））和统计持久图像死亡值的直方图。图像中的六个孔洞结构及其对应的第一持久图均以 1 至 6 的索引标注。

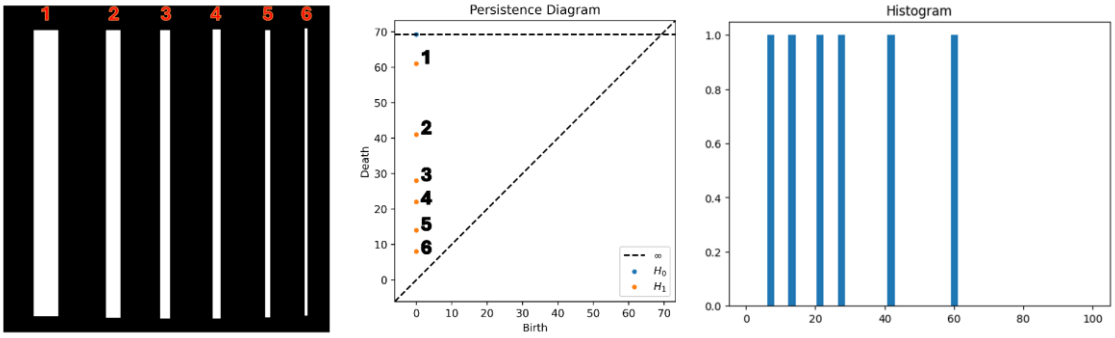


图7. 从二值图像构建的基于腐蚀和开运算的过滤示例及其对应的持久图。直方图展示了由这两种过滤诱导的第一持久图（持久图$_1$）中持久图像的死亡值分布。

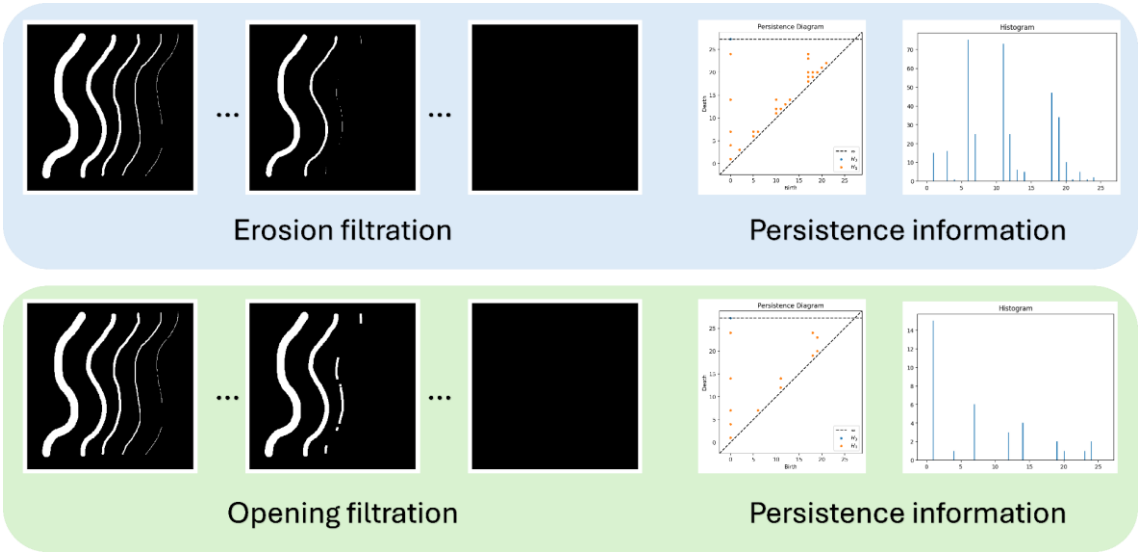


Figure 8. 由膨胀基诱导的二值图像及其持久图和持久条形码示例
d 过滤。

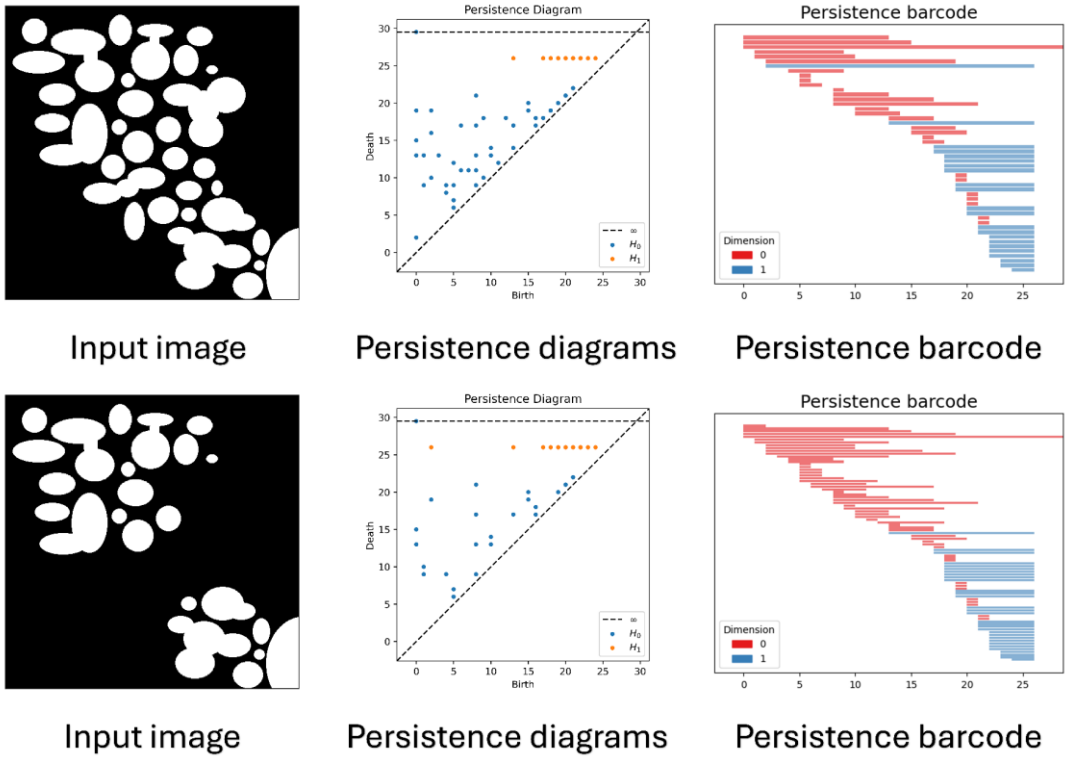
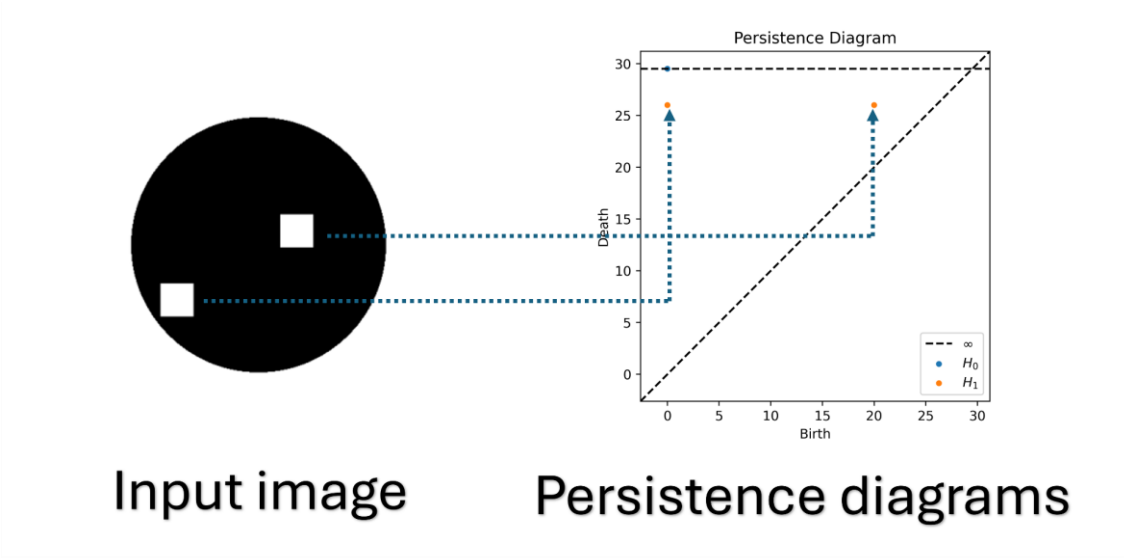


图9. 二值图像及其由基于膨胀的过滤诱导的 0 阶和 1 阶持久图。该图像包含两个形状和大小相同的一维孔洞，对应的持久图像以标注突出显示。



Fi图10. MMPersistence 处理灰度图像的计算流程，基于图1和图2中的示意图。

