arXiv:2602.15525v1 [math.MG] 17 Feb 2026

基于戈罗夫–豪斯多夫距离的马祖尔–乌拉姆定理。

S. A. BOGATY，A. A. TUZHILIN

摘要：本文证明，两个巴拿赫空间线性等距，当且仅当它们之间的格罗莫夫–豪斯多夫距离有限，特别是为零。证明综合了许多研究者关于以线性满射等距映射逼近近似满射的近似等距映射所取得的结果。在有限维情形下，针对 I. Mikhailov 先前研究的结果，本文在较弱假设下给出了一种更简洁的证明。此外，在有限维情形下，本文还给出了一个基于有限（紧）子集的等距判别准则。

关键词：度量空间，格罗莫夫–豪斯多夫距离，巴拿赫空间，等距映射。A.A. Tuzhilin 的工作得到俄罗斯科学基金会（项目 25-21-00152）和北京大学中俄数学中心的资助。*Semeon A. Bogatyi*, bogatyi@inbox.ru*Alexey A. Tuzhilin*, tuz@mech.math.msu.su

著名的1932年马祖尔–乌拉姆定理指出，每个满射等距映射 $f\colon V \to W$ 实赋范空间之间的映射都是仿射的 [1]。该定理最简单的证明由 J. V¨ais¨al¨a [2] 于2003年给出，B. Nika [3]于2012年也给出了证明。对于严格赋范空间 W，即使不对映射 [4]作满射性假设，结论仍然成立。

1932年，斯特凡·巴拿赫在其著名专著《线性运算理论》中，将可度量化紧空间的同胚与其上的连续函数空间之间的（线性）等距映射联系起来 [5, 第十一章，§4，定理 3]。1937年，马歇尔·哈维·斯通 [6, 定理 83] 以及1942年，塞缪尔·艾伦伯格 [7, 定理 7.2] 去除了空间可度量性的假设。

定理 1。对于紧豪斯多夫空间 X 和 Y，以下条件等价：

(1) 空间 X 和 Y 同胚；(2) 实值连续函数的巴拿赫空间 $V = C(X)$ 和 $W = C(Y)$ 在 $\sup$- 范数下线性等距；(3) 度量空间 $V = C(X)$ 和 $W = C(Y)$ 等距。

强化马祖尔–乌拉姆定理的方法之一，源于 Hyers–Ulam 1945 年的定理 [8]。任意度量空间中点 x 和 x' 之间的距离记作 $|xx'|$。对于度量空间之间的映射 $f\colon X \to Y$，畸变 定义为

$$\operatorname{dis} f = \sup_{x,x' \in X} \Big| \big|f(x)f(x')\big| - |xx'| \Big|. \tag{1}$$

映射 f 称为 ε-等距映射 当且仅当 $\operatorname{dis} f \le \varepsilon$。

海尔斯–乌拉姆定理指出，对于每一个满射 ε-等距映射

$$f\colon V \to W,\ V = W$$

从完备欧几里得向量空间到其自身上的，且满足 $f(0) = 0$，存在一个双射线性等距映射 U: $V \to W$ 使得

$$\big\|f(v) - U(v)\big\| \le M = 10\varepsilon \quad for\ all\ v \in V. \tag{2}$$

这个等距映射 U由公式 $U(v) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} f(2nv)$给出。—

D.G. Bourgin（1946）证明，只要 W 属于一致凸巴拿赫空间类（包括 $1 < p < \infty$ 情形下的 $L_p[0,1]$ ），就存在 U 的这样一个线性等距映射。这里我们可以在（2）中取 $M = 12$ 。在 Hyers 与 Ulam（1947）随后的一篇论文中，对于 $V = C$（X）与 $W = C$（Y）为紧豪斯多夫空间上配备上确界范数的实连续函数巴拿赫空间、且f 为同胚这一情形，得到了肯定结果。特别地，我们可以取 $M = 21$。这项研究由 D.G. Bourgin [9]（1949）继续，他特别证明， f 的连续性与一一对应假设可以取消。这一结果是经典巴拿赫–斯通定理的重要推广。

1975年，R.D. Bourgin考虑了Hyers-Ulam问题，并主要研究了有限维情形。他证明，在此情形下，若我们假定 V 或 W 中单位球的极值边界点集是完全不连通的，则答案是肯定的。D.G. Bourgin（1978）证明了海尔斯–乌拉姆定理对$\dim V = \dim W = 2$成立。

P.M. Gruber [14]（1978）指出，若对于满足$f(0) = 0$的满射 ε-等距映射 f: $V \to W$，存在一个逼近线性等距映射 U， $U(0) = 0$，且(2)式右端带有某个常数M，则该等距映射是唯一的，并且我们可以假定$M = 5\varepsilon$。若另外已知 U 是连续的，则 $M = 3\varepsilon$。他还证明了有限维空间 V 与 W的 ε-等距映射存在逼近线性等距映射。

1983年，Gevirtz将海尔斯–乌拉姆定理推广到任意巴拿赫空间 V˘与 W。最后，1995年，M. Omladi˘c与P. Semrl证明 $M = 2\varepsilon$ 是一般巴拿赫空间中(2)的最佳常数。1998年，˘Semrl证明 $M = \gamma_V \varepsilon$ 成立，其中Gevirtz是Young常数。Gevirtz定理的其他证明发表于 [19]与 [20]。

满射性假设是这些结果的必要条件。具体而言，D.H. Hyers与S.M. Ulam [8] 已经给出了一个从实直线到欧氏平面的 ε-等距映射 f ，使得 $\Big\{\big|f(x) - U(x)\big| : \ x \in \mathbb{R}\Big\}$对任意等距映射 U: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$都是一个无界集。

事实上，R.D. Bourgin 已注意到 [12, 第 312]: 虽然以下结果针对满射 ε-等距映射给出，但应注意，若将“满射”替换为“$d_H(f(V)\ W) < \infty$”，只需对证明作少许修改。

但是，显然，关于非满射映射的首个明确表述的结果发表于1997年，涉及一维 $V = W = \ell_2^n$有限维空间的情形，见 [21]。我们给出 S.J. Dilworth [22,命题 2] 于1999年提出的一个稍具最终性的结果表述，并在此加以使用。

定理2. 如果 ε、 $\delta \ge 0$ 和 f: $V \to W$ 是巴拿赫空间之间的一个 ε-等距映射，满足条件 $f(0) = 0$，并且将空间 V δ-满射地映射到某个闭子空间$L \subset W(d_H\big(L, f(V)\big) \le \delta)$，则存在一个双射线性等距映射 U: $V \to L$使得

that

$$\big\|f(v)-U(v)\big\| \le M = 12\varepsilon + 5\delta \text{ for all } v \in V. \tag{3}$$

2000年，J. Tabor独立证明了所述定理对 $L = W$ 成立，右端（3）的常数为 $M = 2\varepsilon + 35\delta$ 。最近，得到了将Dilworth–ˇ Tabor定理更简单地归结为格维茨定理的结果。2003，P. Semrl和J. V¨ais¨al¨a证明了（3）的右端可以取 $M = 2\varepsilon + 2\delta$ 。他们还证明了带有 $M = 2\varepsilon$ 的通用估计对 $L = W$成立。

对于度量空间之间的映射 $f\colon X \to Y$和 $g\colon Y \to X$，余畸变 为

$$\operatorname{codis}(f,g) = \sup_{x\in X, y\in Y} \Big|\big|f(x)y\big| - \big|x\,g(y)\big|\Big|. \tag{4}$$

定义（1）和（4）并未假设所讨论的映射（可能是多值映射）具有连续性。对于多值映射， $f(x)$ 和 $g(y)$ 可以分别取自这些集合中的任意点。

对于任意两个度量空间 X 和 Y，格罗莫夫–豪斯多夫距离 定义为

$$d_{GH}(X,Y) = \inf_{f,g} d_H\big(f(X), g(Y)\big),$$

其中， $f\colon X \to Z$和 $g\colon Y \to Z$是到所有可能的度量空间Z中的等距嵌入。定义格罗莫夫–豪斯多夫距离 [27]还有另一种重要的方法:

$$d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\inf_{f,g}\Big\{\max\big\{\operatorname{dis} f,\, \operatorname{codis}(f,g),\, \operatorname{dis} g\big\} \,\Big|\, f\colon X\to Y,\, g\colon Y\to X\Big\}. \tag{5}$$

对于任意两个度量空间 X 和 Y，我们按照 [28, 29] 中的定义，将连续格罗莫夫–豪斯多夫距离 定义为:

$$d^c_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\inf_{\substack{f,\,g-\\ \text{continuous}}}\Big\{\max\big\{\operatorname{dis} f,\, \operatorname{codis}(f,g),\, \operatorname{dis} g\big\} \,\Big|\, f\colon X\to Y,\, g\colon Y\to X\Big\}.$$

显然， $d_{GH}(X,\ Y) \le d^c_{GH}(X,\ Y)$。

定理 3。 对于实巴拿赫空间 V 和 W，以下条件等价 t:

(1) 空间 V 和 W 线性等距 ;

(2) 空间 V 和 W 等距; (3) $d^c_{GH}(V, W) = 0$; $(3')\, d^c_{GH}(V, W) < \infty$; $(4')\ d_{GH}(V, W) < \infty$; (5) 单位球 B_V 和 B_W 等距。

证明。 蕴含关系 (1)$\Longrightarrow$(2)$\Longrightarrow$(3)$\Longrightarrow$(3′)$\Longrightarrow$(4′) 以及 (1)$\Longrightarrow$(5) 显然成立。

（4′）$\Longrightarrow$（1）。由条件 $d_{GH}(V,\ W) < D < \infty$可知，存在映射 $f\colon V \to W$和 $g\colon W \to V$，使得 dis $f < D$且 codis$(f,\ g) < D$。第一个不等式恰好意味着映射 f 是一个 D-等距映射。第二个不等式意味着，对于每个向量 $w \in W$，不等式 $\big|f\big(g(w)\big)\,w\big| < D$成立，即映射 f 是 D-满射的。由 Dilworth–Tabor 定理可知，存在一个线性满射等距映射 $U\colon V \to W$。

蕴含关系 (5)$\Longrightarrow$(1) 正是 Mankiewicz 定理 [30]。 □

推论 4. 对于实巴拿赫空间 V 与赋范空间 W，下列条件等价：

(1) 空间 W 线性等距嵌入到 V 中，作为一个稠密子空间；(2) 空间 W 等距嵌入到 V 中，作为一个稠密子集；(4) $d_{GH}(V,W)=0$；(4′) $d_{GH}(V,W)<\infty$。

备注 5. 如果空间 V 或 W 中至少有一个是有限维的，那么定理 3 和推论 4 的一个重要部分（蕴含式（4′）$\Longrightarrow$(1)）已由 I. Mikhailov 证明。他的证明相当复杂，但并不依赖于更为复杂的ε-等距理论。

我们给出第三种证明，以强调即使在有限维情形下，蕴含式（4′）$\Longrightarrow$(1)，即关于等距映射存在性的定理，也远比等距映射逼近定理简单。由此，我们不妨回顾一下乌拉姆的一般问题：如何用完美对象逼近一个相当好的对象。

命题 6. 对于实赋范空间 $K_V\subset V$ 和 $K_W\subset W$ 的锥形子集，以下条件等价：

(4) $d_{GH}(K_V,\ K_W)=0$;
(4′) $d_{GH}(K_V,\ K_W)<\infty$。

证明。(4′)$\Longrightarrow$4。令 $d_{GH}(K_V,\ K_W)<D<\infty$。由于对于锥形子集，我们对每个 $\lambda>0$都有 $K=\lambda K$，因此得到 $d_{GH}(K_V,\ K_W)=d_{GH}(\lambda K_V,\ \lambda K_W)=\lambda d_{GH}(K_V,\ K_W)$。因此，$d_{GH}(K_V,\ K_W)=0$。□

对于任意两个赋范空间 V 和 W，卡德茨距离在 [32] 中定义为

$$d_K(V,W)=\inf_{f,g} d_H\big(f(B_V),g(B_W)\big),$$

其中 $f\colon\ V\to Z$ 和 $g\colon\ W\to Z$ 是到所有可能的赋范空间 Z中的线性等距嵌入。显然，$d_{GH}(B_V,\ B_W)\le d_K(V,\ W)$。

对于任意两个同构赋范空间 V和 W，巴拿赫—马祖尔距离定义如下 [5, 第十一章 §6] 的注：

$$d_{BM}(V,W)=\log\big(\inf_f \|f\|\cdot\|f^{-1}\|\big),$$

其中 f 遍历 V 与 W之间所有可能的同构映射。对于不同构的空间，我们令 $d_{BM}(V,W)=\infty$。

定理 7. 对于赋范空间 V 和有限维赋范空间 W，以下条件等价：

(1) 空间 V 和 W 线性等距；*(3)* $d^c_{GH}(V,W)=0$；*(3′)* $d^c_{GH}(V,W)<\infty$；*(4)* $d_{GH}(V,W)=0$；*(4′)* $d_{GH}(V,W)<\infty$；*(5)* 单个球 B_V 和 B_W 等距；*(6)* $d_{BM}(V,W)=0$；*(7)* $d^c_{GH}(B_V,B_W)=0$;

(8) $d_K(V,W)=0$;
(9) $d_{GH}(B_V,B_W)=0$.

证明。 蕴含关系

$$(1)\Longrightarrow(3)\Longrightarrow(4)\Longrightarrow(9),\ (1)\Longrightarrow(3')\Longrightarrow(4'),\ (1)\Longrightarrow(5)\Longrightarrow(7)\Longrightarrow(9),$$
$$(1)\Longrightarrow(6)\ (1)\Longrightarrow(8)\Longrightarrow(9)$$

显而易见。

蕴含关系 (4′)⟹(4) 可由命题 6 得出。

蕴含关系 (6)⟹(1) 在 S. Banach 的 [5, note To ChapterXI, §6] 中被提及，并称这是与 S. Mazur 共同得到的结果。

(9)⟹(5)。对于有限维空间 W，单位球 B_W 是紧的，因而是全有界的。于是单位球 B_V 也是全有界的。因此，根据里斯定理，空间 V 也是有限维的。故单位球 B_V 是紧的。对于紧空间，它们之间的距离为零意味着它们等距。因此，单位球 B_V 和 B_W 等距。□

注 8. 请注意，有限维空间 W 仅在证明蕴含关系 (6)⟹(1) 和 (9)⟹(5) 时才会用到。一般情况下（无限维情形），定理 3 不能包含条件 (8) 和 (9)。M.I. Ostrovskii [33, 定理 1，c)] 构造了可分巴拿赫空间 V 和 W，使得 $d_{GH}(B_V,\ B_W)=d_K(V,\ W)=0$, 然而，$d_{BM}(V,\ W)=\infty$。

引理 9 (P.L. Renz [12, 引理 2.8])。 设 V 与 W 为赋范线性空间，且$f\colon\ V\to W$ 为任意 ε-等距映射。则存在连续的 4ε-等距映射$f^*\colon V\to W$，使得对每个 $v\in V$都有 $\left\|f^*(v)-f(v)\right\|\le 2\varepsilon$。

引理 10。 设 V与 W为赋范线性空间，使得 $\min\{\dim V,\ \dim W\}<\infty$，并设 $f\colon\ V\to W$为满足 $\operatorname{dis} f<\infty$ 的映射。则 $\dim V\le\dim W$。

证明。 由引理 9，我们可以假定 f 是连续的。假设 $\infty>\dim V>\dim W$。则由博苏克–乌拉姆定理，对每个 $R>0$ 存在 $v\in V$，使得$\|v\|=R$且 $f(v)=f(-v)$。由此可得 $\operatorname{dis} f\ge\left|\left\|f(v)-f(-v)\right\|-\left\|v-(-v)\right\|\right|=2R$。矛盾。

设 $\infty=\dim V>\dim W$。取一个子空间 $L\subset V$，使得 $\dim L=\dim W+1$。那么，根据已经讨论过的情形，$\dim W\ge\dim L>\dim W$。□

引理 11 (DallasWebster [12, 命题 4.1])。 设 V 和 W 是赋范线性空间，$f\colon\ V\to W$ 是连续映射，且 维数$W<\infty$，维数 $W\le$维数 V，维数$f<\infty$。那么 维数$W=$维数 V，且 f 是满射。

证明。 根据引理 10，我们有 $\dim V=\dim W$，然后应用 [12, 命题 4.1]。□

定理 12。 对于赋范空间 V 和有限维赋范空间 W，以下条件等价：

(1) 空间 V和 W 是线性等距的；(3″) 维数 $W\le$维数V并且存在一个映射 $f\colon\ V\to W$，使得 $\operatorname{dis} f<\infty$。

证明。 蕴含关系 (1)$\Longrightarrow$(3′) 是显然的。

(3′)$\Longrightarrow$(1). 根据引理 9，我们可以假设映射 f 是连续的。根据引理 11，$\dim W = \dim V$，且映射 f 是满射的。进一步，我们应用 [14,定理 3]。□

注 13. 请注意，此处给出的所有结果都隐含地假设，所要解决的问题是寻找（构造）一个满射线性等距映射。然而，自然存在四个问题：

(1) 寻找满射逼近等距映射；(2) 寻找满射等距映射；(3) 寻找（线性）逼近等距映射；(4) 寻找（线性）等距嵌入。

另有一些独立的问题：

(5) 寻找能够推出等距映射的线性的条件；(6) 寻找 Figiel算子 T [34] 存在以及其逆线性算子（等距映射）存在的条件。

在此，适合回顾一下 A.D. Alexandrov 的问题 [35, 36]。

(7) 对于保持距离 1 的每个映射 $f\colon X \to Y$（不一定连续），它何时是等距映射?

在论文 [37] 中，还提出了另外四个问题，它们依据给定的 ε-等距映射的性质加以区分：

(1) f 是满射且 $\varepsilon = 0$；(2) f 不是满射且 $\varepsilon = 0$；(3) f 是满射且 $\varepsilon \neq 0$；(4) f 不是满射且 $\varepsilon \neq 0$。

1953年，F.S. Beckman 和 D.A. Quarles, Jr. 得到了以下结果，该结果现已成为教科书中的经典范例：欧几里得 n-空间 $E^n(2 \leq n < \infty)$ 上保持某个唯一非零长度的变换，必定是 E^n 的欧几里得（刚性）运动。保持三角形的单位面积 [39,即可推出等距性质。定理 5]。J.A. Lester [40]对等距判据作了出色的综述。作为 Alexandrov 问题弱化版本的一个解答，我们引用 A. Fogt [41]的一个优美结果。设 V和 W是两个赋范空间，$f\colon V \to W$，$f(0) = 0$是保持距离等式的连续满射（即，$\|xy\| = \|zw\|$ 推出$\|f(x) - f(y)\| = \|f(z) - f(w)\|$）。那么 $f = \lambda U$，其中 λ是非零实数，且U 是从 V 到 W上的线性等距映射。

我们在第一段中已经指出，映射到严格凸赋范空间 W 中的每个等距映射 $f\colon V \to W$（不一定是满射）都是仿射的。非满射情形下的基本结果由 T. Figiel [34] 得出。设 V 和 W 是两个巴拿赫空间，$f\colon V \to W$，$f(0) = 0$是一个等距映射。那么存在唯一的有界线性算子$T(f) : \operatorname{span}\big(f(V)\big) \to V$，满足 $\big\|T(f)\big\| = 1$，使得 $T(f) \circ f = \mathrm{Id}_V$。

2003 年，G. Godefroy 和 N. Kalton [42, 43] 探讨了等距映射与线性等距映射之间的关系（参见注释 13 中的问题 (6)），并证明了以下深刻定理：设 V和 W是两个巴拿赫空间，$f\colon V \to W$，$f(0) = 0$是一个等距映射，且T 是 f的 ***Figel*** 算子 f。

(I) 若 V 是一个可分*Banach*空间，则存在一个线性等距映射 $S\colon V \to$张成$\overline{\big(f(V)\big)}$，使得 $T \circ S =$ 恒等映射$_V$，且 W 包含一组与 V线性等距的良补子空间。
(II) 若 V 是一个不可分弱紧生成*Banach*空间，则存在一个巴拿赫空间 W，使得存在非线性等距映射 $f\colon V \to W$，但 V与 W的任何子空间都不线性同构。

Y. Dutrieux 和 G. Lancien 研究过一个类似的问题。我们将引用他们提出的问题之一 [44, 第 500]页的问题（3）。

问题14。 如果两个可分巴拿赫空间具有相同的紧子集（有限子集），且这些子集在等距映射意义下相同，那么它们是否能彼此等距嵌入?

对于有限维空间，答案是肯定的。

命题15。 设 $\big(V, \|\cdot\|_V\big)$ 和 $\big(W, \|\cdot\|_W\big)$ 为赋范空间，使得维数 $W < \infty$，且每个满足 $\|v_0 - v_1\|_V = \ldots = \|v_0 - v_m\|_V = 1$的有限子集 $S = \{v_0, v_1, \ldots, v_m\} \subset V$都能等距嵌入 W。那么维数 $V \leq$维数 W。

证明。 假设 $\dim V > \dim W$。考虑 V的一个子空间 Z，使得 $\dim Z = \dim W + 1$。对每个正整数 n，在单位球面 S_Z 中取一个 n^{-1}-网 $S(n)$。假设对每个 $n \in \mathbb{N}$，有限子集 $Z(n) = S(n) \cup \{0_Z\} \subset Z$都等距嵌入到 W中：$i_n\colon Z(n) \to W$。将向量 $\overrightarrow{i_n\ 0_Z\ 0_W}$( ) 平移后，不失一般性地可以假设 $i_n(0_Z) = 0_W$。于是，$i_n\big(S(n)\big)$ 是单位球面 S_W的有限子集。由此得到的球面 S_W 的紧子集序列构成紧空间 S_W 中的点列，该空间由配备 Hausdorff距离d_H的紧子集组成。我们选取一个收敛子列 $\lim_{i\to\infty} i_{n_i}\big(S(n_i)\big) = K \subset S_W$。于是

$$d_{GH}(S_Z, K) \leq d_{GH}\big(S_Z, S(n_i)\big) + d_{GH}\big(i_{n_i}\big(S(n_i)\big), K\big) \leq$$
$$\leq n_i^{-1} + d_{GH}\big(i_{n_i}\big(S(n_i)\big), K\big) \to_{i\to\infty} 0.$$

由此得到的不等式链意味着 $d_{GH}(S_Z,\ K) = 0$。因此，紧集S_Z 和 $K \subset W$ 等距，这与Borsuk 定理矛盾。□

定理 16. 对于赋范空间 V 和有限维赋范空间 W，以下条件等价：

(1) 空间 V和 W 线性等距；$(5')\ \dim W \leq \dim V$，且存在等距嵌入 $f\colon B_V \to W$；(10) 空间 V 和 W 的紧子集在等距意义下相同；$(10')\ \dim W \leq \dim V$，且 V的每个有限子集都等距嵌入于 W

.

证明。 蕴含关系 (1)$\Longrightarrow$(10) 和 (1)$\Longrightarrow$(5′)$\Longrightarrow$(10′) 显然。

(10)$\Longrightarrow$(5′)。设 $f\colon B_W \to V$是紧集 B_W的一个等距嵌入。根据博苏克–乌拉姆定理，$\dim W \leq \dim V$。设 $\dim W < \dim V$。考虑一个子空间$L \subset V$，使得 $\dim L = \dim W + 1$。设 $f\colon B_L \to W$是紧集 B_L的一个等距嵌入。根据博苏克–乌拉姆定理，$\dim L \leq \dim W = \dim L - 1$。由此得到的矛盾表明，$\dim W = \dim V$，因此存在一个等距嵌入 $g\colon B_V \to W$，它将紧集 B_V 嵌入其中。

(5′)$\Longrightarrow$(1)。设 $\dim W < \dim V$。考虑子空间 $L \subset V$，使得 $\dim L = \dim W + 1$。由博苏克–乌拉姆定理，应用于等距嵌入 $f_{|B_L}\colon B_L \to$

W，不等式 $\dim\ L \le \dim\ W = \dim\ L - 1$ 成立。由此产生的矛盾表明 $\dim\ W = \dim\ V$。在等距映射 $f\colon\ B_V \to W$下，以 $0 \in V$为中心的单位球面 $S_V(0,1)$ 映射到以 $f(0) \in W$: $f\big(S_V(0,1)\big) \subset S_W\big(f(0)\ 1\big)$为中心的单位球面 $S_W\big(f(0)\ 1\big)$。由博苏克–乌拉姆定理可知 $f\big(S_V(0,1)\big) = S_W\big(f(0)\ 1\big)$。这意味着 $f\big(B_V(0,1)\big) = B_W\big(f(0)\ 1\big)$，并且根据 Mankiewicz 定理（满足定理 3 的条件 (5) 和定理 7 的条件 5），空间 V和 W 线性等距。

$(10') \Longrightarrow (5')$。根据命题15，$\dim\ W = \dim V$。因此，单位球 B_V是紧的；重复命题15的证明，我们构造一个等距嵌入$f\colon\ B_V \to W$。□

关于命题15，对于 $\dim\ V\ > \dim\ W$，自然会产生这样的问题：描述 V中不能嵌入 W 的最小有限子集，并估计这类子集到 W中子集的距离。若度量空间 S 中的每一对点都等距，则称其为等距（正单纯形）。K.M. Petty 证明了 [45, 定理4]: 在 n维赋范空间中，正单纯形的基数不超过 2^n。因此，在赋范空间 ℓ_∞^{n+1}中存在一个有（$2^n + 1$）个顶点的单纯形，它不能等距嵌入任何 n维赋范空间。

注意到，M. Gromov [46, 定理 3.3] 证明，紧致度量空间等距当且仅当它们的有限子集在等距意义下相同。F. Memoli 证明了 [47,定理 5.1] ，紧致度量空间之间修正后的格罗莫夫–豪斯多夫距离由它们有限子集之间的距离决定。P.J. Olver [48]证明了，光滑平面曲线 X 和 Y 刚性等距当且仅当它们的四点子集在等距意义下相同。P.J. Olver 还证明，嵌入于 $\mathbb{R}^3$ 中的两个光滑曲面 X 和 Y刚性等距当且仅当它们的四点子集在等距意义下相同。M. Boutin 和 G. Kemper 证明了 [49, 50] ，距离分布和三角形分布能够在度量意义下刻画光滑平面曲线。

文献 [51], [52, 定理 3.3] 提出了非满射映射具有线性的非常简单且几乎必要的条件。

我们在实二维向量空间 $\mathbb{R}^2$上固定某个范数 $\|\cdot\|$ ，并对赋范空间 V按如下方式定义 $W_V = V \oplus \mathbb{R}$ 上的范数： $\big\|(v,t)\big\|_W = \Big\|\big(\|v\|_V, t\big)\Big\|$。在许多论文 [8], [14, 定理 2], [51]中证明，对于特别选取的函数φ: $[0,\infty) \to [0,\infty)$，由公式 $f_\varphi(v) = \big(v, \varphi(\|v\|)\big)$ 给出的映射 $f_\varphi\colon\ V \to W_V$对某个 $\varepsilon \ge 0$是 ε-等距映射。

命题 17. 对每个正的 ε ，存在连续的 ε-等距映射 $f_\varepsilon\colon\ \ell_2 \to \ell_2$，使得对每个仿射子空间 $L \subset \ell_2$都有 $d_H\big(f_\varepsilon(\ell_2)\ \ L\big) = \infty$ 。

证明。 显然，若在平面上取欧几里得范数 $\|\cdot\|$，则对于希尔伯特空间 $V = \ell_2$，存在标准的线性等距映射 $H\colon\ W_{\ell_2} \to \ell_2 = V$。所需的映射现由公式 $f_\varepsilon = H \circ f_\varphi$: $V \to W_V \to V$ 给出，其中所需的函数 φ 在论文最后一段中有明确的表达式 [8]。 □

命题 18. 存在一个等距映射 $f\colon\ \ell_\infty \to \ell_\infty$，使得对于每个仿射子空间 $L \subset \ell_\infty$，都有 $d_H\big(f(\ell_\infty)\ \ L\big) = \infty$。

证明. 显然，若取上确界范数作为平面上的 $\|\cdot\|$ 范数，则空间 $V=\ell_\infty$ 具有一个标准的线性等距映射 $H\colon W_{\ell_\infty}\to\ell_\infty=V$。所需的映射由公式 $f=H\circ T_\varphi$: $V\to W_V\to V$给出，其中所需的函数$\varphi(t)=|t|$ 见本文最后一段。□

作者认为，核心的未解问题是第4996页的 [53, 问题 (II)、问题 1], [54, 问题 3.2、4.8(i)]。

问题 19. 对于两个巴拿赫空间 V, W，如果存在一个 ε-等距映射 $f\colon V\to W$，其中某个 $\varepsilon>0$，那么 W 是否包含 V的一个等距（不一定是线性的）副本?

D. Dai 和 Y. Dong [54, 推论 3.4], 在假设 V可分且 W 自反的情况下，证明了存在一个从 V到 W 的线性等距嵌入。L. Cheng、Q. Cheng、K. Tu 和 J. Zhang [55, 引理 2.1] 构造了一个嵌入到更大空间中的映射。

定理20. 设 $f\colon V\to W$ 是一个 ε-等距映射，且 ξ 是$\mathbb{N}$上的自由超滤子，即 $\xi\in\mathbb{N}^*=\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ 是紧斯通–切赫扩张 $\beta\mathbb{N}$中自然数集的增长部分上的一个点。那么

$$\Phi(v)=w^*-\lim_{\xi}\frac{f(nv)}{n}\ for\ all\ v\in V$$

定义一个等距映射 $\Phi\colon\ V\to W^{**}$。

我们强调，等距映射 $\Phi\colon V\to W^{**}$ 不一定是仿射的。对于命题 18 中的映射 f，等式 $\Phi=f$ 成立。但对于一致凸巴拿赫空间W，任意满足 $f(0)=0$ 的 ε-等距映射 $f\colon V\to W$，极限

$$\varphi(v)=\lim_{s\to\infty}\frac{f(sv)}{s}$$

对所有 $v\in V$ 都存在，且映射 $\varphi\colon V\to W$ 是一个线性等距映射 [26, 命题2.3]。

根据 A. Dvoretsky 关于 [56], [57] 近球面截面的定理可知，在任意无限维向量空间 W 中，对任意自然数 n，都存在一个子空间序列 $L_i^n\subset W$，使得

$$d_{BM}\big(\ell_2^n,L_i^n\big)\underset{i\to\infty}{\to}0\quad and\quad d_K\big(\ell_2^n,L_i^n\big)\underset{i\to\infty}{\to}0.$$

但距离 d_{BM} 和 d_K 都具有乘法性质，所述结论并不意味着 ℓ_2^n 可等距（线性）嵌入 W。

现在我们来介绍一些关于乘法型偏差较小的近似结果。

为了阐明在计算机数据处理时代，以近似重合作为对象重合的替代为何重要，我们引用 [26, 第 270 页]: “ ε-等距映射这一概念的动机，源于现实世界中的观测总会包含一些微小误差这一事实。因此，将现实世界中的点映射到数学模型中的点的映射 f 总是一个 ε-等距映射。但如果我们无法精确测量距离，就无法检验 f 是否为满射。因此，我们认为，研究既是 ε-等距又是 ε-满射的映射更加自然。显然，定理 2 和定理 3 允许将一些 ‘ 精确 ’ 陈述转化为 ‘ 近似 ’ 陈述。”

推论 21. 对于紧豪斯多夫空间 X 与 Y，下列条件等价:

(0) 空间 X 与 Y 同胚；*(3′)* $d_{GH}^{c}\big(C(X)\ C(Y)\big) < \infty$；*(4′)* $d_{GH}\big(C(X)\ C(Y)\big) < \infty$；*(5)* 单位球 $B_{C(X)}$ 与 $B_{C(Y)}$ 等距；*(6′)* $d_{BM}\big(C(X)\ C(Y)\big) < \log 2$；*(9′)* $d_{GH}(B_V, B_W) < 1/5$。

证明。 等价关系(0)$\Longleftrightarrow$(6′)正是由 D. Amir [58] 和 M. Cambern [59]分别独立证明的定理。

等价关系 (0)$\Longleftrightarrow$(9′) 于2011年由 R. G´orak [60]证明。 □

2005年，Y. Dutrieux 和 N.J. Kalton [61] 以更强的要求证明了推论 21：“(9′) $d_{GH}(B_V, B_W) < 1/16$”和“(8′) $d_K(V, W) < 1/10$”。在条件 (6′) 中，常数 log 2 不能再减小 [62]。 [61] 中单独讨论了可数紧空间的情形，并得出了较弱的条件 (6′)、(8′) 和 (9′)。 [63]和 [64] 中表明，对于可数紧空间，(6′) 中可以取 log 3。 [65]中讨论了离散空间 X 的情形。

对于有限维赋范空间 n，诸如 $(6')$、$(8')$和 $(9')$ 这样的条件不能纳入定理 7。 所有等距 n 维赋范空间的等价类所构成的 ***Banach–Mazur*** 空间 $Q(n)$，配备 Banach–Mazur 距离 ，是紧的，参见 [66, 第 544]页。在 [67, 1。2], 该空间 $Q(n)$ 称为***Minkowski*** 空间。

1948年，F. John [68] 证明，对于任意空间 $V \in Q(n)$，不等式 $d_{BM}(\ell_2^n, V) \leq \log \sqrt{n}$ 成立，且这一上界是最佳的：当 ℓ_1^n 时等号成立。1996年，S. Ageev、S. Bogatyi 和 P. Fabel [69, 70, 71]证明，Banach–Mazur 紧体 $Q(n)$ 是紧的绝对收缩。去掉对应于欧几里得空间 ℓ_2^n 的点后得到的补集 $Q_{\mathcal{E}}(2) = Q(2) \setminus \{\ell_2^2\}$是一个 Q 维流形，且具有非平凡的四维上同调，因此它不是可缩的 [72]。因此，Banach–Mazur 紧体 $Q(2)$ 与希尔伯特立方体 $Q = I^{\aleph_0}$ [72]不同胚。对于任意有限 $n \geq 2$ [73], [74]，子集$Q_{\mathcal{E}}(n) = Q(n) \setminus \{\ell_2^n\} \subset Q(n)$ 是一个 Q 维流形。由于度量空间 $\big(Q(n)\ d_{BM}\big)$ 是紧的，因此不难由此并结合定理 7 推得，度量 d_{BM}、 d_{GH}^{c}、 d_K 和 d_{GH}在 $Q(n)$ 上生成相同的拓扑。

定理 16 中的条件 (5′) 与问题 19 可以如下联系起来。

问题 22. 对于巴拿赫空间 V和 W，若存在一个等距嵌入$f\colon B_V \to W$，那么是否存在一个(线性) 等距嵌入 $F\colon V \to W$(使得 $F|_{B_V} = f$)?

对于巴拿赫空间 V，令 $Q(V)$ 表示所有与V同构的巴拿赫空间所构成的空间，并赋予班纳赫–马祖尔度量 d_{BM}。

问题 23. 对于非同构的巴拿赫空间 V 和 W，空间$Q(V)$ 与 $Q(W)$ 是否不同胚(（即不同胚)?

命题 24. 如果紧集 $Q(2)$ 和 $Q(n)$ 等距，那么 $n = 2$。

证明。 由于所有一维赋范空间都彼此等距，因此可得 $\big|Q(1)\big| = 1$。所以，我们可以假设 $n \geq 2$。令 $f\colon Q(2) \to Q(n)$ 为一个等距映射。由于在点 $\{\ell_2^2\} \in Q(2)$ 处，空间 $Q(2)$ 在局部不同胚于希尔伯特立方体，并且

空间 $Q_\varepsilon(n) = Q(n) \setminus \{\ell_2^n\}$ 是一个 Q-流形，因此可得 $f\big(\{\ell_2^2\}\big) = \{\ell_2^n\}$。于是，

$$f\big(Q(2)\big) = f\big(B(\{\ell_2^2\}, \log\sqrt{2})\big) = B(\{\ell_2^n\}, \log\sqrt{2}) \subset Q(n).$$

等式 $\log\sqrt{2} = \log\sqrt{n}$ 蕴含所需的等式 $2 = n$。 □

作者所知的紧致集 $Q(n)$ 的直径估计，并不足以在度量上区分这些集合。

Amir-Cambern定理的其他证明由 H.B. Cohen [75]和 L. Drewnowski [76]给出。

注意，J. Benyamini [77] 本着海尔斯–乌拉姆定理乘法版本的精神，推广了Amir-Cambern定理。若 X 是紧致度量空间，$0 < \varepsilon < 1$，且 f 是从 $C(X)$ 到 $C(Y)$ 的线性映射，满足条件

$$\|\varphi\| \le \big\|f(\varphi)\big\| \le (1+\varepsilon)\|\varphi\| \quad for\ all\ \varphi \in C(X), \tag{6}$$

则首先，存在连续映射 f，将 Y 的闭子集 Y_1 映到 X；其次，存在线性等距映射 U，把 $C(X)$ 映入 $C(Y)$，使得

$$U(\varphi)(y) = \varphi \circ f(y) \quad for\ all\ y \in Y_1,$$

and

$$\|Uf\| \le 3\varepsilon.$$

Y. Beniamini 给出的例子证明，他的定理第二部分对于非度量空间一般并不成立。K. Jarosz 证明，Beniamini 定理的第一部分对于不可度量化空间同样成立。情形 $\varepsilon = 0$ 对应于 Holszty´nski 的定理 [79]。

作为一项在 (6) 中考虑不一定是线性映射的工作的成果，我们介绍了 [80]。在 [81]中，提出了逼近定理的加法-乘法版本。

文献

[1] S. Mazur 和 S. Ulam，《论赋范向量空间的等距变换》，《巴黎科学院院报》194 (1932)，946–948。[2] J. V¨ais¨al¨a，《Mazur-Ulam 定理的一个证明》，《美国数学月刊》110 (2003)，633–635。[3] B. Nica，《Mazur-Ulam 定理》，《数学展望》30 (2012)，397–398。[4] J. Baker，《赋范空间中的等距映射》，《美国数学月刊》78 (1971)，655–658。[5]S. Banach，《线性运算理论》，《数学专著》，PWN，华沙，1932；Chelsea，纽约，1955 年再版。MR 17，175。[6] M.H. Stone，《布尔环理论在一般拓扑学中的应用》，《美国数学会汇刊》41 (1937)，375–481。[7] S. Eilenberg，《拓扑学中的巴拿赫空间方法》，《数学年刊》43 (1942)，568–579。[8] D.H. Hyers 和 S. M. Ula m，《论近似等距映射》，《美国数学会通报》51 (1945)，288–292。[9] D.G. Bourgin，《近似等距映射》，《美国数学会通报》52 (1946)，704–714。[10] D.H. Hyers 和 S. M. Ulam，《论连续函数空间上的近似等距映射》，《数学年刊》（第 2 辑）48 (1947)，285–289。[11] D.G. Bourgin，《连续函数环上的近似等距乘法变换》，《杜克数学杂志》16 (1949)，385–397。MR 11，115。[12] R.D. Bourgin，《有限维巴拿赫空间上的近似等距映射》，《美国数学会汇刊》207 (1975)，309–328。[13] D.G. Bourgin，《二维 -等距映射》，《美国数学会汇刊》244 (1978)，85–102。[14] P.M. Gruber，《等距映射的稳定性》，《美国数学会汇刊》245 (1978)，263–277。

[15] J. Gevirtz，《巴拿赫空间上等距映射的稳定性》，美国数学会会刊 89 (1983)，633–636。[16] M. Omladič 和 P. Šemrl，《等距映射的非线性扰动》，《数学年刊》303 (1995)，617–628。[17] P. Šemrl，《等距映射的 Hyers–Ulam 稳定性》，《休斯敦数学杂志》24 (1998)，699–706。.[18] H.W.E. Jung，《包围空间图形的最小球》，《纯粹与应用数学杂志》123 (1901)，241–257。[19] T.M. Rassias，《等距映射与近似等距映射》，《国际数学与数学科学杂志》25 (2001)，73–91。[20] R. G´orak，《巴拿赫空间之间等距映射的扰动》，《数学研究》207，第 1 期（2011），47–58。[21] R. Bhatia 和 P. Šemrl，《欧几里得空间上的近似等距映射》，《美国数学月刊》104 (1997)，497–504。[22] S.J. Dilworth，《有限维赋范空间上的近似等距映射》，《伦敦数学会通报》31，第 4 期（1999），471–476。[23]J. Tabor，《满射性的稳定性》，《逼近理论杂志》105 (2000)，166–175。doi:10.1006jath.2000.3452，在线网址：http:www.idealibrary.com[24] S.A. Bogaty、E.A. Reznichenko、A.A. Tuzhilin，《Hyers–Ulam 定理中的满射映射与格罗莫夫–豪斯多夫距离》，[25] S.A. Bogaty、J.E. Ibragimov，《满射格罗莫夫–豪斯多夫距离》，《莫斯科大学学报》。系列 1：数学·力学，2026，第 6 期，1–5。[26] P. Šemrl 和 J. V¨ais¨al¨a，《巴拿赫空间的非满射近等距映射》，《泛函分析杂志》198 (2003)，268–278。[27] D. Burago、Yu. Burago、S. Ivanov，《度量几何教程》，《数学研究生丛书》33，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2001。[28] S. Lim、F. M´emoli、Z. Smith，《球面之间的格罗莫夫–豪斯多夫距离》，《几何与拓扑》27 (2023)，第 9 期，3733–3800。[29]S.A. Bogaty、A.A. Tuzhilin，《连续 Gromov–Hausdorff 距离》，《摩尔多瓦共和国科学院通报》，即将出版。[30] P. Mankiewicz，《赋范线性空间中等距映射的延拓》，《波兰科学院通报》数学、天文学与物理学系列 20 (1972)，367–371。[31] I. Mikhailov，《赋范空间之间的格罗莫夫–豪斯多夫距离》，arXiv:2407.01388 [math.MG](2024)，1–10。[32] M.I. Kadets，《关于子空间解的注记》，《泛函分析及其应用》9 卷，第 2 期，1975，73–74。[33] M.I. Ostrovskii，《论开度的性质及巴拿赫空间相关的邻近性刻画》，Teor. Funktsii, Funktsional. Anal. i Prilozhen. 42 (1984)，97–107（俄文）；英文译本见《美国数学会译丛》（第 2 辑）136 (1987)，109–119。[34] T. Figiel，《论赋范线性空间的非线性等距嵌入》，《波兰科学院通报》数学、天文学与物理学系列 16 (1968)，185–188。[35] A.D. Alexandrov，《集合族的映射》，《苏联数学文献》11 (1970)，116–120。[36] T.M. Rassias 和 P. Šemrl，《论 Mazur-Ulam 定理及保单位距离映射的 Aleksandrov 问题》，美国数学会会刊 118，第 3 期（1993），919–925。[37] L. Cheng、Y. Dong、W. Zhang，《巴拿赫空间非线性非满射 -等距映射的稳定性》，《泛函分析杂志》264 (2013)，713–734。[38] F.S. Beckman 和 D.A. Quarles, Jr.，《论欧几里得空间的等距映射》，美国数学会会刊 4 (1953)，810–815。[39] S.I. Bogataya、S.A. Bogaty、O.D. Frolkina，《保体积映射的仿射性》，《莫斯科大学学报》。系列 1：数学·力学，2001，第 6 期，10–15。[40] J.A. Lester，《保距变换》，《关联几何手册》第 16 章，1995。阿姆斯特丹：Elsevier Science，921–944。[41] A. Fogt，《保持距离相等的映射》，《数学研究》45，第 1 期（1973），43–48。[42] G. Godefroy 和 N. Kalton，《Lipschitz 自由巴拿赫空间》，《数学研究》159 (2003)，121–141。[43] G. Godefroy，《关于巴拿赫空间之间非线性嵌入的评注》，《休斯敦数学杂志》36，第 1 期，2010，283–287。

[44] Y. Dutrieux 和 G. Lancien, 《紧空间到巴拿赫空间的等距嵌入》, 泛函分析杂志 255（2008）, 494–501。[45] C. Petty, 《闵可夫斯基空间中的等边集》, 美国数学会会刊 1971, 29, N 2, 369–374。[46] M. Gromov, 《黎曼空间与非黎曼空间的度量结构》。Birkh¨auser Boston, 1999, Springer-Verlag New York, 2007。[47] F. M´emoli, 《戈罗夫–豪斯多夫距离的一些性质》, Discrete Comput Geom 48(2), 416–440（2012）。[48] P.J. Olver, 《联合不变量签名》, Found. Comput. Math. 1(1), 3–68（2001）。[49] M. Boutin, G. Kemper, 《根据距离或面积的分布重建 n 点构型》, Adv. Appl. Math. 32(4), 709–735（2004）。[50] M. Boutin, G. Kemper, 《利用分布对图进行无损表示》, 2007, arXiv:0710.1870[math.CO], 1–19。[51] T. Figiel、P. ˇSemrl 和 J. V¨ais¨al¨a, 《赋范空间的等距映射》, Colloq. Math. 92（2002）, N 1, 153–154, DOI 10.4064/cm92-1-13。MR1899245。[52] Y. Zhou, Z. Zhang, C. Liu, 《巴拿赫空间之间的线性等距映射与 ε-等距映射》, J. Math Analysis and Appl., 435（2016）, 754–764。[53] L. Cheng, Y. Zhou, 《度量保持映射的扰动及其稳定性刻画》, 《泛函分析杂志》266（2014）, 4995–5015。[54] D. Dai, Y. Dong, 《通过非线性 ε-等距映射研究巴拿赫空间的稳定性》, J. Math Analysis and Appl., 414（2014）, 996–1005。[55] L. Cheng, Q. Cheng, K. Tu 和 J. Zhang, 《关于巴拿赫空间 ε-等距映射稳定性的普适定理》, 《泛函分析杂志》269（2015）, 199–214。[56] A. Dvoretzky, 《关于凸体和巴拿赫空间的一些结果》, Proc. Internat. Sympos. Linear Spaces（耶路撒冷, 1960）。耶路撒冷: Jerusalem Academic Press, 1961, 123–160。[57] V .D . Milman, 《A. Dvoretsky关于凸体截面的定理的新证明》, 《泛函分析及其应用》, 1971, 第5卷, N 4, 288–295。[58] D. Amir, 《关于连续函数空间的同构》, Israel J. Math. 3（1965）, 205–210。[59] M. Cambern, 《关于小界同构》, 美国数学会会刊 18（1967）, 1062–1066。[60] R. G´orak, 《巴拿赫–斯通定理的粗略版本》, J. Math. Anal. Appl. 377（2011）, 406–413。[61] Y. Dutrieux 和 N.J. Kalton, 《(CK)-空间之间等距映射的扰动》, 《数学研究》166, 第2期（2005）, 181–197。[62] H.B. Cohen, 《(CX)巴拿赫空间之间的二界同构》, 美国数学会会刊, 50（1975）, 215–217。[63] Y. Gordon, 《同构函数空间之间的距离系数》, Israel J. Math. 8（1970）, 391–396。[64] L. Candido 和 E. M. Galego, 《畸变严格小于3的(CK)空间到(CS, X)空间的嵌入》, Fund. Math., 220（2013）, 83–92。[65] L. Candido 和 E.M. Galego, 《带有 γ 离散的($C_0\gamma, X$)与(C_0K, X)空间相差多远? 》, Fund. Math., 218（2012）, 151–163。[66] J.E. West, 《无限维拓扑中的公开问题》, 《拓扑学中的公开问题》, J. van Mill、G. M. Reed 编。North-Holland, 1990, 523–597。[67] M.I. Kadets, 《标准化空间的几何》, 《拓扑学中的公开问题》, 莫斯科, 1975, 99–127。[68] F. John, 《带附加不等式条件的极值问题》。《纪念 R. Courant 60岁生日的研究与论文集》, 1948年1月8日, 187–204。Interscience Publishers, Inc., 美国纽约州纽约市, 1948。[69] P. Fabel, 《博苏克–库拉托夫斯基会议》, Warsow, 1966, 5。[70] S. Ageev, S. Bogatyi, P. Fabel, 《第七届蒂拉斯波尔普通拓扑学及其应用研讨会》, 基希讷乌, 1996, 20–22。[71] S.M. Ageev, S. A. Bogatyi, P. Fabel, 《巴拿赫–马祖尔紧体 $Q(n)$是绝对收缩》, 《莫斯科大学学报》。第1辑: 数学与力学, 1998, N 1, 11–13。[72] S.M. Ageev, S. A. Bogatyi, 《巴拿赫–马祖尔紧体与希尔伯特立方体非同胚》, 数学科学成就, 1998, 53, N 1, 209–210。

[73] S.M. Ageev，S. A. Bogatyi，D. Repovsh，P. Fabel，非紧李群的扩张子，俄罗斯科学院报告，1998，362，N 2，151–154[74] S.M. Ageev，S. A. Bogatyi，D. Repovsh，欧几里得空间中的一点 Q_E (n) 在巴拿赫–马祖尔紧体中的补集 $Q(n)$ 是一个 Q-流形，数学科学成就，2003，58，N 3，185–186。[75] H.B. Cohen，用于 $C(X)$ 同构的二次对偶方法，泛函分析杂志，23（1976），107–118。[76] L. Drewnowski，关于*Amir-Cambern*定理的一点说明，函数与逼近数学评论，16（1988），181–190，亚当·密茨凯维奇大学出版社。[77] Y.Benyamini，连续函数空间之间的小映入同构，美国数学会会刊 83（1981），479–485。[78] K. Jarosz，连续函数空间的映入同构，美国数学会会刊 90，第3期（1984），373–377。[79] W. Holszty´nski，由连续函数空间的等距映射诱导的连续映射，《数学研究》26（1966），133–136。[80] K. Jarosz，巴拿赫–斯通定理的非线性推广，《数学研究》93，第2期（1989），97–107。[81] El´oi Medina Galego，Andr´e Luis Porto da Silva，*(E)* 空间的拟等距映射，它们确定K 所有欧几里得空间的 E，《数学研究》243（2018），233–242。