用于任意二维 CFD 流场区域 CNN 就绪重建的新型基于距离的掩膜处理与自适应 α-形状方法

Mehran Sharifi、Gorka S. Larraona 和 Alejandro Rivas

纳瓦拉大学 *TECNUN* 机械工程与材料系，*Manuel de Lardizabal 13*，*20018* 多诺斯蒂亚 / 圣塞瓦斯蒂安，西班牙。

摘要

将散乱的计算流体力学数据集插值到均匀笛卡尔网格上，可能会扭曲真实几何形状，形成凸包型包络，并激活非物理区域。本文提出一种重建框架，在导出 CNN 可用场之前恢复物理一致的掩膜。该框架引入两种新策略：基于距离的掩膜处理，以及一种利用局部数据分辨率对 α 进行归一化的自适应 α-形状公式，并将其与经典 α-形状边界恢复方法进行比较。本文还提出一套定量的拓扑感知指标体系，用于评估保留率、无支撑区域的抑制效果、重叠一致性和连通性。在采用相同阈值规则（τ 设为最小 CFD 网格间距）的情况下，新型基于距离的方法在所考察的各种几何形状中表现稳健，速度比经典 α-形状方法快 $500\times-800\times$ 倍。当自适应 α-形状的控制参数设为 1 时，该方法保持稳定，且比经典变体快$1.7\times-2.6\times$；而经典变体需要针对具体几何形状调节 α。采用最小膨胀的轻量级边界膨胀后处理可进一步提高保留率，最高提升 2.96%，且无支撑激活可忽略不计（≤ 0.08 %）。总体而言，鉴于其准确性、稳定性、所需调参极少且成本低，推荐将基于距离的方法作为默认方案；若无法获取用于选择阈值的网格间距信息，自适应 α-形状则是很好的替代方案。配套的 Web 应用程序实现了端到端工作流程，可支持上传二维 ASCII 数据集、调整参数、生成掩膜和边界，以及导出 CNN 就绪输出。

关键词： 卷积神经网络（CNN）、计算流体力学（CFD）、内部流动、域重建、边界恢复技术、自适应 α-形状

符号说明

拉丁字母符号

$A_{0,1,2}$ ： 三角形面积，$[m^2]$
AVF ： 活性体积分数判据，[–]
B ： 结构元素，[–]
$\mathcal{B}$ ： 轴对齐包围盒，[–]
$\boldsymbol{c_\sigma}$ ： 外心，$[m]$
C ： 几何复形，[–]
CC ： 连通分量判据，[–]
d ： 空间维度，[–]
d^{NN} ： 最近邻距离，$[m]$
D ： 欧几里得距离图，$[m]$
$D(\boldsymbol{x}_j')$ ： 距离场值，$[m]$
e ： 德洛内边长，$[m]$
$\mathcal{E}$ ： 德劳内边集，[–]
EF ： 边界单元，$[m]$
$\boldsymbol{f}$ ： 采样场量，$[*]$
$\mathcal{g}$ ： 虚拟体素集，[–]
$\mathcal{G}$ ： 结构化网格节点集合，[–]
GF ： 幽灵分数准则，[–]
IoP ： 交并比准则，[–]
$\mathcal{I}$ ： 交集（或重叠）掩膜，[–]
$\boldsymbol{j}$ ： 多重索引向量，[–]
L ： 分段长度，$[m]$
L_{ac} ： 轴向弦长，$[m]$
L_c ： 弦长，$[m]$
$\mathcal{L}$ ： 结构化网格索引集，[–]
M ： 域内集合，[–]
$\boldsymbol{n}$ ： CNN 网格分辨率向量，[–]
n_{ef} ： 元素出现次数，[–]
N ： 数据样本数，[–]
N_e ： 唯一边数，[–]
$\boldsymbol{p}'$ ： 查询点，$[m]$
PR ： 点召回准则，[–]
Pre ： 精确率准则，[–]
$\mathcal{P}$ ： 散乱数据样本集合，[–]
q ： 场维度，[–]
r_0 ： 参考半径，[–]
r_c ： 切比雪夫半径，[–]
r_σ ： 外接半径，$[m]$
R ： 截面宽度，$[m]$
Rec ： 召回率判据，[–]
s ： 结构元素大小，[–]
S ： 外接球，$[m^2]$
Sh ： 点集的α-形，$[m^2]$
$\mathcal{U}$ ： 并集掩膜，[–]
$\boldsymbol{x}$ ： 数据点坐标向量，$[m]$
$\boldsymbol{x}'$ ： 网格节点 坐标向量，$[m]$

希腊字母符号

α ： α-形状pe 参数，$[m]$
α_a ： 自适应 α-形状参数，$[m^{-1}]$
β ： 控制参数，[–]

希腊字母符号（续）

γ ： 插值权重，[–]
δ ： 经验缩放系数，[–]
η ： 掩码扩展因子，[–]
λ ： 重心坐标，[–]
$\pi(\boldsymbol{x}_i)$ ： 网格索引映射，[–]
ρ ： 邻域缩放因子，[–]
σ ： 德劳内单纯形，$[m^2]$
τ ： 距离阈值，$[m]$
φ ： 出口叶片角，[°]
2ϕ ： 分叉角，[°]
χ ： 二值指示函数，[–]
ω ： 进口叶片角，[°]

下标

α ： α-形状法
av ： 活动体素
$a\alpha$ ： 自适应α-shape方法
c ： 连通隔室
db ： 基于距离的方法
eb ： 外部边界元素
ef ： 任意边界元素
f ： 最终值
i ： 进口截面值
in ： 内部值
k ： 任意重构方法
m ： 主截面（中间）值
max ： 最大值
min ： 最小值
o ： 出口截面值
opt ： 最优值
out ： 外层值

上标

$\bar{\cdot}$ ： 均值
$*$ ： 插值值

特殊算子

$\odot$ ： Hadamard 积
$\ominus$ ： 二值腐蚀
$\oplus$ ： 二值膨胀
$\cup$ ： 并集
$\cap$ ： 交集
Δ ： 网格间距
$(\cdot)^1$ ： 计数
$|\cdot|$ ： 集合基数
$|\cdot|_{(\alpha-v)}$ ： 单纯形测度
$\|\cdot\|_2$ ： 欧几里得范数
conv(.)： 凸包
det(.) ： 矩阵行列式
Del(.) ： 德劳内剖分
最大值（.）： 最大值

缩写	
2D	: 二维
3D	: 三维
AGB	: 地上生物量
APT	: 原子探针断层成像
BFS	: 广度优先搜索
CAA	: 聚类与调整
CFD	: 计算流体力学
CNN	: 卷积神经网络
CT	: 计算机断层扫描
DP	: 道格拉斯-普克算法
GAT	: 图注意力网络
GCN	: 图卷积网络
GeoGen	: 几何感知生成
GPU	: 图形处理器
GraphSAGE	: 图采样与聚合
KD	: K维
KPConv	: 核点卷积
激光雷达	: 激光探测与测距
MRF	: 马尔可夫随机场
MRI	: 磁共振成像
NDF	: 神经距离场
NN	: 最近邻
PFEM	: 粒子有限元法
RGB	: 红、绿、蓝
SDF	: 有符号距离场
TIN	: 三角不规则网
UAV	: 无人驾驶航空器
UDF	: 无符号距离场

1. 引言

卷积神经网络（CNN）已成为从结构化数据中提取层次化且具有空间相关性特征的强大架构之一 [1-3]。卷积神经网络最初为计算机视觉而开发 [4, 5], ，已被证明能够有效地从复杂的科学与工程数据集中学习多尺度表示 [6-8]。其优势在于卷积运算：通过局部感受野和权重共享，在捕捉空间依赖关系的同时，确保平移不变性和计算效率。通过结合卷积层、池化层、归一化层和激活层，卷积神经网络能够逐步学习物理场和模式的低级与高级抽象特征。在经过适当结构化和归一化的数据集上训练后，卷积神经网络可充当计算成本高昂的仿真的快速数据驱动代理模型，也可用于特征提取、降维和模式识别等多种任务 [9-12]。卷积神经网络能够近似边界条件与物理响应之间的非线性映射，从而在众多领域实现近实时预测与优化。在流体动力学和传热领域，卷积神经网络已用于重建速度 [13, 14], 、压力 [15, 16], 和温度 [17, 18] 场，预测湍流结构 [19, 20], ，并模拟对流、边界层发展和流动分离等热流体现象 [21-23]。它们能够加速高保真仿真，并支持高效热系统的设计，包括换热器、储能装置和相变过程 [24-26]。除了热流体领域，卷积神经网络还在材料科学的微观结构分析和性质预测 [27, 28], 、医学成像的分割与诊断 [29,30], ，以及地球科学的天气预报、地震解释和地下水建模[31-33]中发挥重要作用。卷积神经网络能够高效捕捉空间依赖关系并保持几何保真度，从而将数据驱动推理与物理可解释性相结合，这也促使人们开发预处理和域重建框架，以生成适用于CNN的结构化数据集。

卷积神经网络的性能从根本上取决于结构化且与网格对齐的数据集是否可用，因为卷积运算假设空间具有规则性，且相邻点均匀分布。这类表示能够支持一致的卷积核应用、高效计算，并在多个尺度上逐步提取特征。相比之下，大多数科学与工程数据集都是非结构化或散乱的，来自非规则网格、实验或存在缺失区域的点云 [34, 35]。为解决这一问题，基于点的神经网络

例如 PointNet [36], PointNet++ [37]、PointConv [38], 和核点卷积（KPConv） [39], , 以及基于图的架构，例如图卷积网络（GCN）[40], 、图采样与聚合（GraphSAGE）[41], 、ChebNet [42], 、图注意力网络（GAT） [43], 和 MeshCNN [44], ，均已得到开发，可直接处理非规则或非欧几里得数据。这些方法无需进行数据正则化，即可有效保留几何与拓扑关系。然而，对于大规模多维场，它们往往需要较高的计算成本，邻域构建也较复杂，并且在捕捉局部空间相关性方面效率有限 [45, 46]。相比之下，卷积神经网络利用具有明确定义感受野的结构化网格，可实现高效的卷积运算、空间平移不变性，并能在现代图形处理器（GPU）上轻松并行化。其可扩展性、计算效率和训练稳定性，使其尤其适用于大型科学与工程数据集。因此，通过数据重建和区域正则化，将非结构化或散乱数据转换为结构化、与网格对齐的表示，仍是一种实用且强大的方法 [5, 47]。然而，要准确恢复区域边界，尤其是在不规则或不连通区域附近的边界，仍是维持几何保真度和物理一致性的核心挑战。这是因为均匀网格插值本质上会扭曲几何形状，常常形成包含伪区域的凸包。因此，有必要采用能够从这些扭曲表示中解析出真实凹形物理边界的重建方法[48]。

基于距离的边界恢复方法通常通过阈值处理或水平集表述实现，为从散乱的科学或工程数据集重建几何区域提供了一种简单而高效的策略。其核心思想是计算结构化网格上每个点与最近散乱样本之间的距离场，通常使用高效的最近邻（NN）搜索，例如K维（KD）树 [49], ，然后根据距离阈值对网格节点进行分类。阈值范围内的点被识别为内部区域，其余点则被掩膜为外部区域。由于有符号距离场（SDF）本身能够捕捉几何邻近性，该方法无需显式网格划分即可表示复杂形状、不连通分量以及高度不规则的边界[50, 51]。表1对在不同科学与工程背景下应用该方法的相关研究进行了结构化概述。

表1 几何域重建中基于距离的边界恢复技术概述。

作者	应用域	研究目的	方法类型	主要贡献
Chang 等人 Chang 等人 [52]	几何处理	高效局部 SDF 生成用于多边形网格	局部 SDF，体素化	仅在窄带内计算体积 SDF 窄带；体素–三角形通过三角形列表进行归约；可扩展至大型网格；避免了 GPU 内存限制。
Calakli 和 Taubin [53]	隐式曲面重建	封闭曲面恢复自有向点样本	变分符号距离函数重建，对偶移动立方体	提出了光滑符号距离函数表述；法向直接积分；单一变分求解；自适应八叉树；高质量无裂缝网格；比基于泊松方程的方法更简单。
Sharma 和 Agrawal [54]	几何处理，横截面向重建	恢复平滑三维维（3D）曲面	全局一致平面上的有符号距离函数，Hermite 均值插值	重建的光滑闭合曲面由稀疏、无组织的横截面生成；提高了鲁棒性更好的法向；识别出阶梯状伪影由与切片对齐的法向量导致的伪影；概述了用于线性横截面的扩展方法。
Tang 和 Feng [55]	形状建模	多尺度隐式重建	自适应有符号距离函数，层次B-样条	构建了曲率自适应有符号距离函数；八叉树网格以恰当的尺度捕获了几何复杂度；层次B样条生成了稀疏良态系统；生成了细致、无裂缝的自适应网格 with 强运行时间/内存性能。
Krayer 和 Müller [56]	图形处理	鲁棒SDF计算	完全GPU驻留无符号距离，卷绕数使用射线映射确定符号	高性能 SDF 生成；射线映射减少射线–三角形测试；对孔洞、缺失区域以及自相交具有鲁棒性。
Chibane 等人 等人。 [57]	神经隐式重建	可学习的高分辨率表示用于开放曲面	神经距离场（NDF）	NDF 预测的无符号距离场无需闭合表面；重建开放且内部复杂的形状；支持法向和球体追踪渲染；实现了多目标回归。
Jiang等人 [58]	计算机视觉	优化三维几何形状源于图像	可微分的有符号距离场-基渲染，多分辨率优化	有符号距离场实现了灵活拓扑和水密表面；重建的精细的多视角三维模型；与神经网络集成，用于在没有三维真实值的情况下进行学习。
Lin 等人 [59]	计算机视觉	学习三维形状，使用仅使用二维-维（二维）轮廓	隐式符号距离函数，仅轮廓可微渲染	从每个物体的单一视角中学习；处理了复杂的拓扑结构；在合成数据集和单视图方法，应用于合成数据和。
Chen 等人 [60]	建筑建模	生成紧凑水密建筑网格	有符号距离场、自适应单元复杂的马尔可夫随机场（MRF）优化	构建了自适应多面体胞腔复形；从有符号距离场中提取多边形，无需进行等值面提取；学习了一个连续隐式占据场用于内外分类。
Long 等人 [61]	神经隐式重建	恢复曲面与	无符号距离场（UDF）、SDF，	使用 UDF 重建开放／非-闭合表面；引入了密度

		灵活拓扑	修正体积渲染	与无符号距离函数相关的函数；具有竞争力在封闭形状方面可与有符号距离函数方法相媲美。
Shim 等人 [62]	隐式形状合成	生成高分辨率三维形状	粗粒度有符号距离函数，超分辨率扩散	两阶段建模实现了精细的有符号距离场生成；基于分块的超分辨率管理内存；自然扩展至多类别生成和形状补全。
Esposito [63]	医学三维重建	重建复杂薄结构结构与解剖结构	NDF、CrossSDF、几何感知生成式（GeoGen）	重建了细小血管并保留了拓扑；支持手术规划并降低了计算机断层扫描（CT）剂量；通用有符号距离场框架 for 稀疏 3D 重建。
Li 等人 [64]	室内神经重建	重建室内曲面低纹理	平面引导的 SDF 正则化，自适应平面加权	引入伪平面检测并采用自适应权重；SDF平面正则化；改进了低纹理室内环境中的重建场景。
Hubert-Brierre 等人。[65]	隐式曲面渲染	加速有符号距离场求值构造树	SDF，优化节点，代理节点，法线扭曲	加速复杂构造树中的SDF求值；保留了Lipschitz/保守型SDF行为；在球体追踪中实现了显著加速，并加速了多边形化轻量级法线扭曲。

计算几何提供了另一类边界恢复方法，可根据散乱数据集中的局部关系推断域的形状 [66]。一种广泛使用的方法是 α-形状（或 α-复形），它通过对 Delaunay 三角剖分进行滤波，仅保留外接球半径低于指定 α 的单形，从而形成灵活的非凸边界，并捕捉凹陷、空腔和复杂拓扑 [67, 68]。然而，单一的全局α 可能会过度平滑边界，或在采样密度变化时使边界碎片化。自适应 α-形状变体通过在局部缩放 α，保留细薄特征、狭窄间隙和异质区域，从不规则数据中生成更稳健的适用于卷积神经网络的结构化掩码 [69, 70]。 α-形状及其自适应扩展已应用于激光雷达建模、医学成像、地球物理学、林业和粒子模拟，概述见 表 2。

表 2 α-形状与自适应 α-形状技术在边界恢复和几何重建中的概述。

作者	应用域	研究目的 研究目的	方法类型	主要贡献
Wei [71]	激光雷达城市建模	建筑物-边界提取	α-形状，多边形滤波，边界正则化	Used α-形状 to 捕获凹/凸轮廓，无需三角不规则网 三角不规则网 网络(TIN)；稳健的噪声去除；精细化的、一致的轮廓。
Li 等人 [72]	激光雷达建筑物	自动化轮廓提取	双阈值 α-形状，广度优先	Two α 值 改进的细节/完整性平衡；广度优先搜索确保了闭合边界；最小-

			广度优先搜索（BFS），最小平方细化	平方平滑优于 Douglas-Peucker（DP）算法；提升了几何保真度。
Al-Tamimi 等人 [73]	医学成像，磁共振成像（MRI）	脑肿瘤体积估计	活动轮廓，三维 α-形状	通过以下方式提高体积精度利用 α-形状；交互式 MATLAB 工具；比标准神经放射学方法具有更高的精确率。
Varytimidis 等 [74]	图像处理，特征检测	提取稳健的基于边缘的特征	各向异性α-形状、三角剖分滤波	开发了基于 α-滤波的特征检测方法，对尺度、旋转仿射变换和光照变化及模糊具有鲁棒性。
Gardiner 等人等。[75]	生物形态学，μ计算机断层扫描形状分析	测量三维形状复杂性不规则结构	多尺度 α 形状已用于	α 形状 to 捕获形态复杂度；最优 α 选定 当 α-shape 体积匹配体素体积；捕获凹陷优于经典度量。
Bonneau 等人 [76]	地质灾害、落石建模	落石块体体积估计	Power Crust，凸包，迭代 α-形状	结果表明，水密性至关重要； α-形状对 α-半径敏感，且密度；凸包会高估；Power Crust 密集但水密。
Still 等人 [77]	原子探针断层成像（APT）	改进聚类几何形状与组成估计	α-形状	围绕簇构建 α-形状网格以计算体积、面积和组成；处理 凹形簇优于椭球拟合；突显了固定 α 和聚类依赖性的局限。
Akdim 等人等人 [78]	通用三维重建	比较重建用于.....的方法扫描物体	滚球法，α-形状，基于模型的方法	发现滚球法取得了最高的-高质量网格，提供 α-形状最快的 重建；分类方法分为组合式与基于模型的。
Zhao 和 Hu [79]	隧道偏差，土木工程	重建隧道几何形状和可视化过度/不足挖掘	低参数 α-形状、体素滤波，KD树渲染	提出的 a fast α-形状重建流程与体素简化以及红、绿和蓝色（红、绿、蓝）偏差映射；实现了高速可视化隧道开挖误差。
Chen 和 Yao [80]	激光雷达建筑物	边界提取与伪影去除	α-形状，二维投影，递归高斯平滑，动态规划	基于 α-形状的受控边界；改进的 边界 提取准确率比聚类与调整（CAA）方法提高了 43.79%；减少了锯齿 伪影； 降低了复杂度，从 $O(n2)$ 降至 $O(n)$。
Ismail等人 [81]	建筑数字孪生	评估重建方法用于建筑点云	泊松，Ball 枢轴法，α-形，平滑细化	结果表明，泊松方法可生成水密但过度三角化的 网格； Ball 枢轴法可保留边缘，但会留下孔洞； α-形状对采样敏感；因此推荐采用混合方法。
Jang和 Kang [82]	无人机无人驾驶航空器（无人机）监测、河岸植被	植被-体积估算	α形	$\alpha \approx 0.75$取得了最佳精度；改进 河流管理气候不稳定性下的评估。
Fernández 等 [83]	粒子有限元法（PFEM），自由表面流	改进 PFEM 重网格	α-形状，水平集	替代的 α-形状边界检测采用水平集方法，使曲面更加平滑自由曲面；减少质量损失；

				改进的液滴网格划分；受控单元生成。
Wang等人 [84]	林业、树木重建	生成完整的三维树木模型	形态分割，α-形状，树干融合	α-形状约束的缺失枝条重建；优于最先进的方法；对噪声具有鲁棒性，遮挡和间隙。
Wang等人 [85]	林业、生物量估算	改进地上生物量（AGB）估算	α-形状，用于体素化的树冠体积	结合α形状与体素树冠体积最匹配“最优生物量”；地上生物量相关性为0.7905。
Yuan 等人 [86]	纺织工程	客观织物平滑度评估	三维/二维 α-形状面积比率，多视角拼接	在 730 次扫描中达到 95.81% 的准确率；α形状描述符追踪了专家评估；突出显示数据集、主观性、实验室条件，以及硬件约束。
Dey [87]	激光雷达建筑物	自适应屋顶-边界提取	自适应 α-形状，扫描线 α-选择，高斯平滑，动态规划	自适应 α 改进相对面积不同密度下的误差；扫描线感知机制处理了密度变化。提高了边界提取准确率较 CAA 提高了 40% 方法。
Yan 等人 [88]	《海洋工程》，	自动检测腐蚀空腔	自适应 α-形状，离群点去除，布料仿真滤波器	动态调整的自适应 α-形状至局部点云几何形状；保留了凹形和多尺度腐蚀空腔形状，尽管存在严重的声呐噪声；避免了过度平滑或碎片化。

以往基于距离的重建方法通常会计算每个查询点到已明确给定的物理边界的距离。尽管这有助于进行内外分类，但也会增加计算成本，尤其是对于曲线几何体，通常还需要进行基于梯度的法向估计。作为首项创新，本文提出的方法通过避免使用显式边界信息和进行边界距离计算，消除了对这些要素的依赖。该方法改为通过将结构网格点与输入样本直接进行最近邻比较来分类，并将问题重新表述为两个点集之间的距离计算。经典 α-shape 方法的一个关键局限是仅使用单一全局 α，这在复杂边界上往往行不通，因为不同区域需要不同的 α 值：平滑凸部需要较大值，而尖锐或凹特征需要较小值。为解决这一问题，本文提出自适应 α-shape 公式作为第二项创新，利用边界附近的局部平均边长统计，直接从德劳内剖分中计算空间变化的 α 值。这种数据驱动适配提高了重建边界与真实物理几何之间的一致性。第三项创新是一种与方法无关的边界膨胀细化方法，用于纠正笛卡尔网格上由离散化导致的边界覆盖不足。重建后，通过膨胀因子 η 对所得掩膜进行最小程度的膨胀，以包围可能因栅格化和亚体素对齐而遗漏的边界邻近样本，从而减少边缘遗漏，同时避免不必要地激活无支撑区域。

此外，本文提出一套拓扑感知指标，用于量化保留率、不支持区域抑制、重叠一致性和连通性。除这些方法学贡献外，本文还开发了一款专用 Web 应用程序，将从数据导入到 CNN 就绪输出生成的工作流程付诸实践。用户可以上传二维 ASCII 数据集，调整各重建策略的参数，并自动导出结构化输出。该平台还可直接从输入数据中识别并重建物理边界。借助这一交互式界面，用户可以轻松应用基于距离的分类、经典 α-shape 重建和自适应 α-shape 公式，从而支持可复现的边界恢复，并为机器学习任务高效准备数据。

尽管所提出的方法可扩展至高维情形，但当前评估仅限于二维几何，因为目标 CNN 工作流程以基于图像的输入进行运算。这一选择使重建、掩膜处理以及基于指标的评估步骤能够以直接且可解释的方式呈现并得到验证，同时仍能代表许多工程案例。对于三维配置，同一流程可通过基于切片的策略加以应用：将三维域分解为二维横截面，对每个切片采用相同的重建与后处理操作进行处理，所得切片堆叠既可用作一组二维训练样本，也可重新组装为体积表示以供进一步分析。本文其余部分组织如下。第2节介绍问题陈述与评估配置，并阐明域重建的动机。第3.1节至第3.5节给出完整的重建流程，首先是网格构造与插值，随后是经典基线以及两种所提出的边界恢复策略，最后是评估指标。第4节随后报告并讨论结果：第4.1节分析经典α-shape 参数如何影响边界恢复以及伪区域的纳入，第4.2节与第4.3节考察新型距离阈值和自适应控制参数如何支配几何保真度，第4.4节从掩膜生成运行时间方面比较各方法，第4.5节引入边界膨胀作为后处理步骤，以缓解残余的边缘遗漏。最后，第5节总结主要发现。集成式网络应用程序的简要教程见补充材料。

2. 问题陈述

受限几何中的内部流动是许多工程与生物医学系统的基础，包括管网、换热器、喷嘴、燃烧室和血管装置。尽管其表面看似简单，它们仍可能出现分离、回流、二次涡以及强烈的加速与减速。这些现象支配着压力损失、混合、传热与传质以及颗粒输运，因而需要准确的数值预测。

图1a-d展示了本研究所考虑的四种内部流动配置。第一种几何体如图1a所示，为突扩突缩管道。长度为L_i、宽度为R_i的直入口段突然扩张至长度为L_m、宽度为R_m的主管段，随后突然收缩至长度为L_o、宽度为R_o的出口段。这种扩张-收缩布置是具有突变面积变化的内部流动中广泛采用的典型几何。第二种配置如图1b所示，为总分支角为2ϕ的Y形分叉通道。入口分支的长度为L_i、宽度为R_i，并在交汇处分成两个子分支，每个子分支的长度为L_o、宽度为R_o。该几何形状体现了工程歧管中的流动分流以及理想化的生物分叉。图1c展示了第三种配置，即收敛-扩张喷管。长度为L_i、宽度为R_i的入口收缩段向最小宽度为R_m的喉部逐渐收窄，随后连接长度为L_o、宽度为R_o的扩张段。这种典型喷管布局常用于推进、计量和风洞试验段。图1d描绘了第四种配置，即带有上游管道和下游管道的弯曲涡轮通道。上游管道的长度为L_i、宽度为R_i，随后是由叶片弦长L_c、轴向弦长L_{ac}、进口叶片角ω和出口叶片角φ定义的叶片通道，最后连接长度为L_o、宽度为R_o的下游管道。该几何形状涵盖了具有叶片诱导转向的弯曲通道的基本尺寸特征。由于本文的主要目标是准确识别问题的物理边界，并在结构化CNN网格上重建计算域，因此，图1a-d中提及的所有几何尺寸均采用了先前验证研究中的数据，以保留其实际应用价值和工程相关性，具体汇总于表3中。

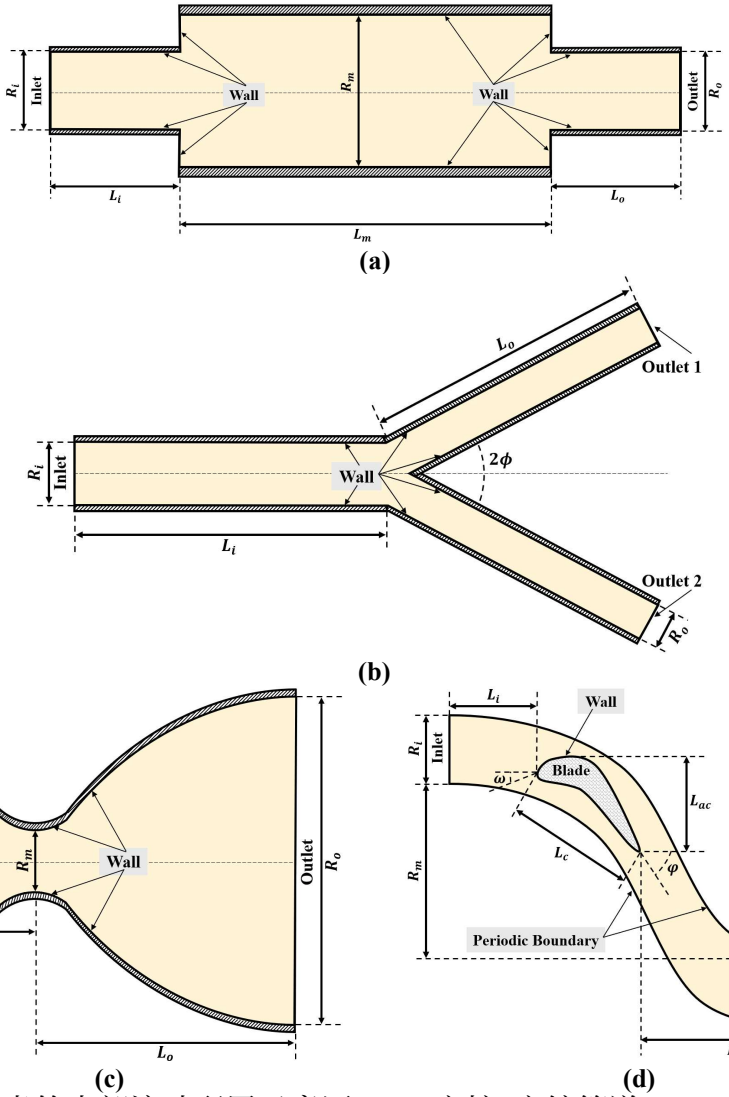


图1 本研究考虑的内部流动配置示意图：(a) 突扩–突缩管道，(b) Y形分流通道，(c) 收敛-扩张喷管，以及(d) 弯曲涡轮通道。

表3 图1a-d所示内部流动配置的几何尺寸 .

配置 $R_i(m)$	R_1										
突扩–收缩管道 [89]	0.025	0.050	0.025	0.2	0.3	0.2	–	–	–	–	–
Y形分叉通道 [90]	0.016	–	0.012	0.058	–	0.050	–	–	49.4	–	–
收敛–扩张喷管 [91]	0.80	0.63	2.37	0.78	–	2.59	–	–	–	–	–
弯曲涡轮通道 [92, 93]	0.030	0.026	0.030	0.022	–	0.043	0.047	0.037	–	48.8	79.5

完成所选几何形状的计算流体力学仿真后，下一步是将解场（包括速度分量、湍动能、比湍流耗散率、温度和热通量分量）插值到均匀笛卡尔网格上，以便在 CNN框架中使用这些数据。然而，如图 2a-d 所示，此时会出现一个关键挑战：一旦将这些变量映射到均匀网格上，几何表示就会发生失真，并在域内产生虚假的非物理区域。因此，需要一种稳健的重建策略，将网格插值过程中自然形成的凸包转换为凹边界，从而准确还原实际物理域。

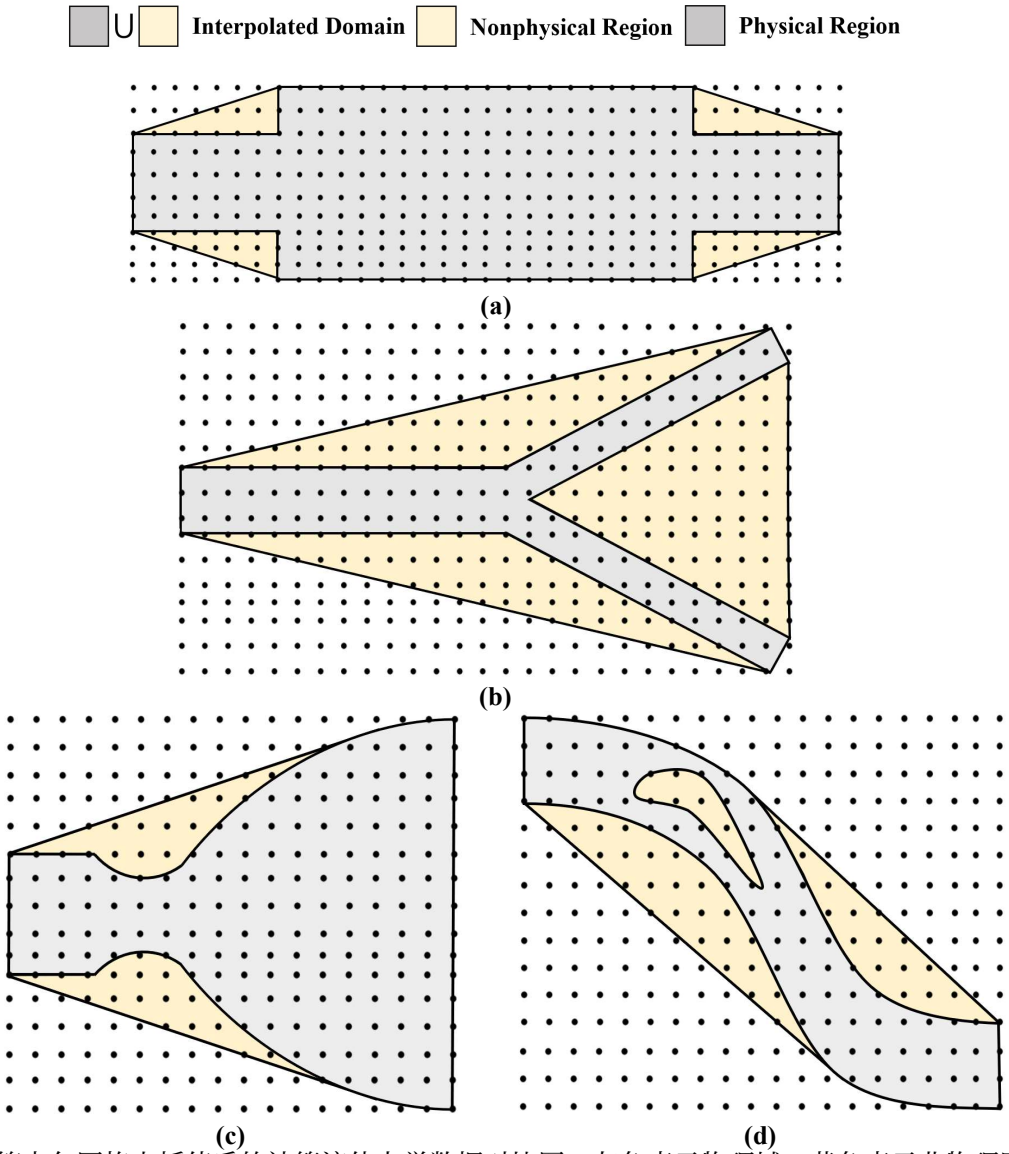


图 2 均匀笛卡尔网格上插值后的计算流体力学数据对比图，灰色表示物理域，黄色表示非物理区域。

3. 方法

本节介绍三种不同的重建策略，旨在生成散乱数据的结构化表示，同时准确识别物理域边界。首先介绍一些共同的预备内容，即数据点的定义、均匀笛卡尔网格的构建以及分段线性插值过程；随后介绍三种不同的重建方法：(i) 本文提出的基于距离的重建，(ii) 经典的 α- 形状重建基线方法，以及 (iii) 一种新颖的自适应 α- 形状 方案，该方案根据局部数据分辨率进行缩放。最后，本文引入一组定量指标，从数据保持、几何保真度和结构化网格上的拓扑一致性等方面评估这些重建方法。

3.1. Grid Construction and Interpolation

散乱数据样本集如图3a所示，定义如下：

$$\mathcal{P} = \{\boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{f_i}\}_{i=1}^{N}, \qquad \boldsymbol{x_i} \in \mathbb{R}^d, \qquad \boldsymbol{f_i} \in \mathbb{R}^q, \tag{1}$$

其中，N 表示样本总数，$d \in \{2,3\}$为空间维度，$\boldsymbol{f_i}$ 包含标量（$q = 1$）或多个分量（$q > 1$）。

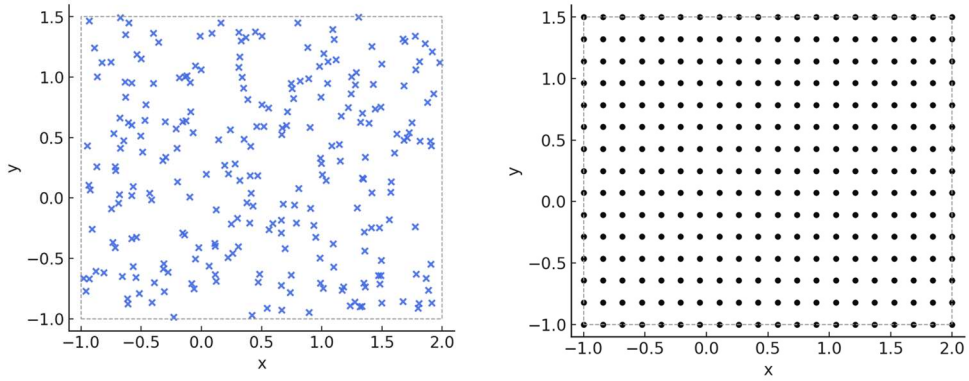


图3（a）散乱数据样本与（b）相应均匀网格表示的空间分布。

数据的轴对齐包围盒定义如下：

$$\mathcal{B} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d \big| \boldsymbol{x_{min}} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x_{max}}\}, \tag{2}$$

其中各分量分别满足不等式。如图3b所示，构建覆盖B的结构化网格，即张量积网格 [94]:

$$\mathcal{G} = \{\boldsymbol{x}'_{\boldsymbol{j}} | \boldsymbol{j} = (j_1, \ldots, j_d) \in \mathbb{N}^d, \mathbf{1} \leq \boldsymbol{j} \leq \boldsymbol{n}\}, \qquad \boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_d), \tag{3}$$

其中，网格点的坐标均匀分布为 [94]:

$$\boldsymbol{x}'_{\boldsymbol{j}} = \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{min}} + (\boldsymbol{j} - \mathbf{1}) \odot \Delta \boldsymbol{x}, \qquad \Delta \boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{max}} - \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{min}}}{\boldsymbol{n} - \mathbf{1}}. \tag{4}$$

这里，$\odot$ 表示 Hadamard 积，$\boldsymbol{n}$ 表示 CNN 网格分辨率向量，$\mathbf{1}$ 表示全 1 向量，$\Delta \boldsymbol{x}$ 中的除法按分量进行。

利用如下形式的分段线性插值函数，将散乱数据插值到结构化网格上：[95]

$$\boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{x}') = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i(\boldsymbol{x}') \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{i}}, \qquad \sum_{i=1}^{N} \gamma_i(\boldsymbol{x}') = 1. \tag{5}$$

权重 $\gamma_i(\boldsymbol{x}')$是相对于 $\{\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}\}_{i=1}^{N}$ [96-98] 的德劳内剖分定义的，且仅当顶点属于包含 $\boldsymbol{x}'$ 的唯一单纯形时，权重才非零。因此，对于任意查询点$\boldsymbol{p}' \in \mathrm{R}^d$，至多 $d+1$ 个样本会对 $\boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{x}')$ [99, 100], 产生贡献，如 图 4所示。

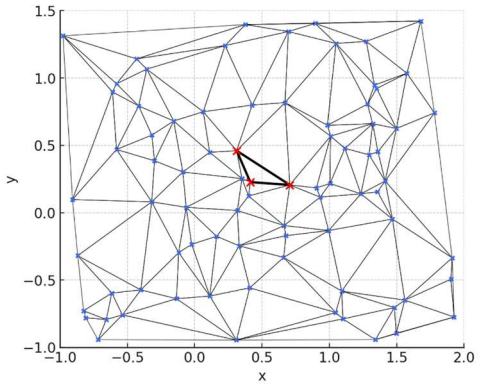


图 4 散乱数据样本的 Delaunay 三角剖分，用于定义分段线性插值的局部单纯形。

特别地，如果 $\boldsymbol{p}'$ 位于德劳内单纯形 σ: ＝凸包$(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}_0}, \ldots, \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}_d})$ 中，则插值函数可化为以下重心形式 [101, 102]:

$$\boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{p}') = \sum_{m=0}^{d} \lambda_m(\boldsymbol{p}') \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{i}_m}, \tag{6}$$

其中，λ_m（$\boldsymbol{p}'$）表示 相对于 的重心坐标，满足（），并且当 $\boldsymbol{p}' \in \sigma$ [103] 时，λ_m（$\boldsymbol{p}'$）≥ 0。

为评估方程 (6)，根据顶点坐标计算 $\boldsymbol{p}'$ 在其所属单纯形内的重心坐标，如图5所示。仿射表示如下：

$$\boldsymbol{p}' = \sum_{m=0}^{d} \lambda_m \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}_m}, \qquad \sum_{m=0}^{d} \lambda_m = 1, \qquad \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}_m} \in \mathbb{R}^d. \tag{7}$$

权重向量 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \dots, \lambda_d)^T$ 可通过求解线性方程组 [101, 104]得到：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}_0} & \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}_1} & \cdots & \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}_d} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}' \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

另一种等价形式是用单纯形测度比定义重心坐标，如 [101, 104]所示：

$$\lambda_m(\boldsymbol{p}') = \frac{|\sigma_m(\boldsymbol{p}')|_{(a-v)}}{|\sigma|_{(a-v)}}, \qquad \sigma_m(\boldsymbol{p}') := \mathrm{conv}\left(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}_0}, \dots, \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}_{m-1}}, \boldsymbol{p}', \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}_{m+1}}, \dots, \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}_d}\right). \tag{9}$$

此处 $|\cdot|_{(a-v)}$ 表示二维中的面积和三维中的体积。单纯形测度可用以下紧凑形式计算 [101, 104]：

$$|\sigma|_{(a-v)} = \frac{1}{d!} \left|\det\left[\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}_1} - \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}_0}, \dots, \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}_d} - \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}_0}\right]\right|, \tag{10}$$

由方程 $\boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{p}')$ 定义的插值场 (6)为散乱数据集提供了平滑且连续的表示，并构成后续重建过程的基础[105]。

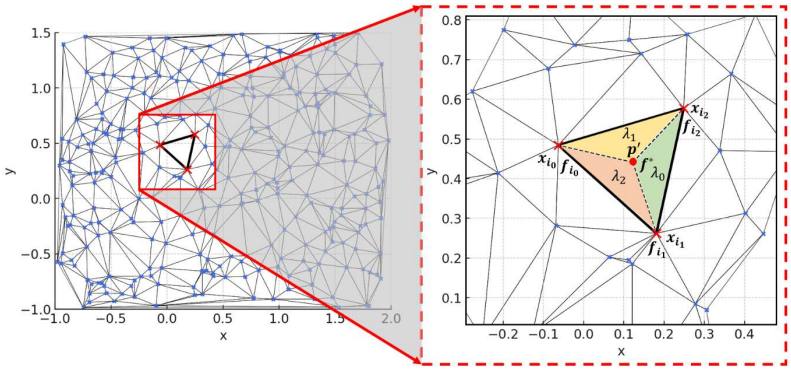


图5 所属德劳内单纯形内重心插值的几何解释。

3.2. 基于距离的重建

本节及后续章节的主要目标是改进由网格插值自然形成的凸包包络，使其成为能够准确还原

真实物理几何形状。 本节通过提出的基于距离的掩膜策略来实现这一目标。该策略将均匀笛卡尔网格节点与原始散乱样本进行比较，以识别并抑制插值过程中引入的非物理区域，如图6所示。

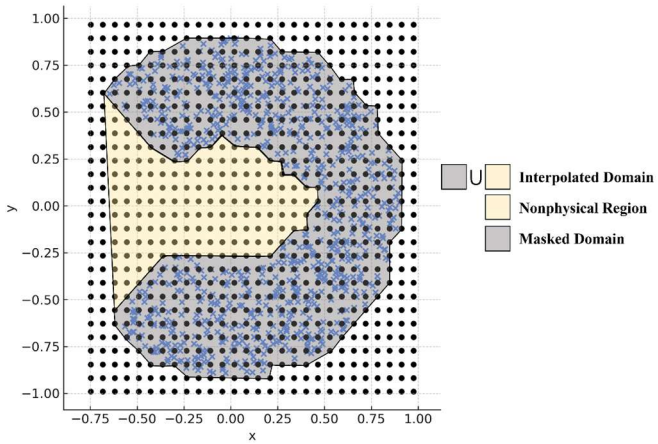


图6 散乱样本与掩膜处理后的均匀网格之间的对比，突出显示物理域（灰色）和非物理区域（黄色）。

对于每个网格节点$\boldsymbol{x}_j' \in \mathcal{G}$，到最近采样点的欧几里得距离按[106]计算：

$$D(\boldsymbol{x}_j') = \min_{1 \le i \le N} \left\| \boldsymbol{x}_j' - \boldsymbol{x}_i \right\|_2, \tag{11}$$

其中 $\|\cdot\|_2$ 表示在 R^d中的欧几里得范数。汇总所有网格节点上的这些值，即可得到距离图 $\mathrm{D} = \{D(\boldsymbol{x}_j')\}$；在样本密集支持的区域中，距离图的值较小，而在样本稀疏或可能属于非物理区域的区域中，距离图的值较大 [54, 107], ，如 图7所示。

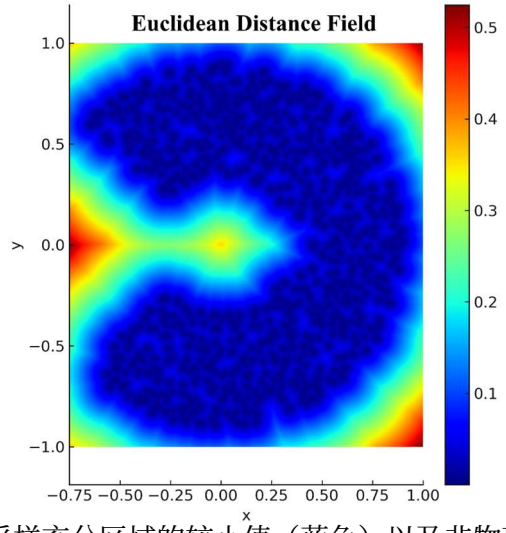


图7 欧几里得距离场显示采样充分区域的较小值（蓝色）以及非物理区域附近的较大值（红色）。

随后定义一个二值指示函数，用于识别位于用户指定阈值 $\tau > 0$ 范围内的网格节点：

$$\chi_{db}(\boldsymbol{x}_j') = \begin{cases} 1, & \text{if } D(\boldsymbol{x}_j') < \tau, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{12}$$

该方法选择样本点云周围的保守管状邻域。选择过小的τ 可能导致稀疏采样区域覆盖不足和内部空洞，而过大的τ则可能延伸到真实边界之外，尤其是在凹陷附近。一个实用的默认值是τ =最小值$_{1\le i\le d}$（Δx_i），这可确保与网格分辨率保持一致，并在边界精度和几何完整性之间取得适当平衡[51, 108]。

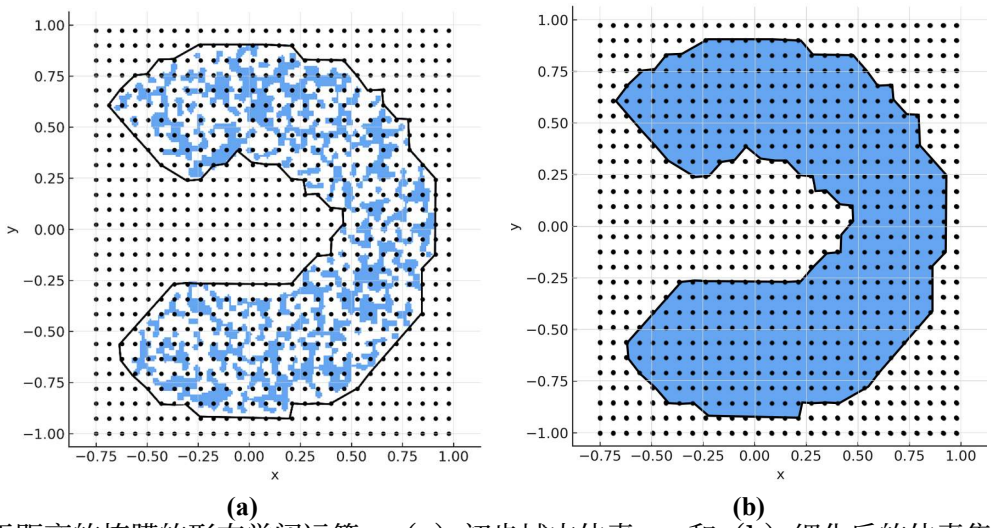


图8 基于距离的掩膜的形态学闭运算：（a）初步域内体素M_{db} 和（b）细化后的体素集合$M_{db,\ f}$。

为移除初步掩膜中的任何非物理空洞或不连通区域 $M_{db} = \{\boldsymbol{x}_j' \in \mathcal{G} | \chi_{db}(\boldsymbol{x}_j') = 1\}$，如图8a所示，并获得更平滑的连通表示，对$\chi_{db}$ （定义见公式（12））应用形态学闭运算[51, 109]：

$$\chi_{db,f} = (\chi_{db} \oplus B) \ominus B, \tag{13}$$

其中，$\oplus$ 和$\ominus$ 分别表示二值膨胀和腐蚀。膨胀首先在切比雪夫意义下将χ_{db}向外扩张最多 $r_c = \frac{s-1}{2}$ 个体素，从而闭合狭窄间隙和接缝；随后进行腐蚀，以恢复外边界，同时保留新形成的桥接连接和填充的针孔[110, 111]。

结构元素 B 取为立方邻域 [110, 112]：

$$B = \{(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3 | |a| \le r_c, |b| \le r_c, |c| \le r_c\}, \tag{14}$$

其中，(a,b,c)是在索引空间中的无量纲整数体素偏移。参数 $r_c = \frac{s-1}{2}$ 是切比雪夫（L_∞）半径，等于立方体边长的一半；s 是满足 $s \geq 1$ [113]的奇数。较大的 s 值可以填补较宽的间隙，但可能会过度平滑细薄特征；较小的值能更好地保留细节，但可能留下孤立的孔洞。如图 8b 所示，所得域内体素集合 $M_{db,f} = \{\boldsymbol{x}_j' \in \mathcal{G} | \chi_{db,f}(\boldsymbol{x}_j') = 1\}$比 M_{db} 更贴合物理几何形状，并且对局部采样不规则性 [114, 115]更具鲁棒性。

3.3.α 形状重建

沿用基于距离的方法，第二种方法称为经典的 α-形状重建，为恢复物理域 [116, 117] 的真实凹边界提供了一个数学上严谨的框架。与在欧几里得意义上进行局部运算的距离阈值化不同，α-形状方法基于数据点之间的拓扑与几何关系，全局重建域边界。它通过引入可调的长度尺度参数 α 来控制边界凹度[118]，从而有效推广了凸包。

给定式 (1) 中的数据点集 $\mathcal{P}$，首先构建德劳内复形 Del($\mathcal{P}$)，以建立邻近样本 [99, 119]，之间的连通性，如图 4所示。Del($\mathcal{P}$) 中的每个单纯形σ： ＝凸包$(\boldsymbol{x}_{i_0}, \ldots, \boldsymbol{x}_{i_d})$ 都对应一个唯一的空外接球 S（$\boldsymbol{c}_\sigma$， r_σ），并满足以下关系 [120]：

$$\left\|\boldsymbol{c}_\sigma - \boldsymbol{x}_{i_m}\right\|_2 = r_\sigma, \qquad m = 0, \ldots, d, \tag{15}$$

$$\|\boldsymbol{c}_\sigma - \boldsymbol{x}\|_2 > r_\sigma, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{P} \backslash \{\boldsymbol{x}_{i_0}, \ldots, \boldsymbol{x}_{i_d}\}. \tag{16}$$

这里, $\boldsymbol{c}_\sigma$ and r_σ 分别对应于.....的外心和外接半径 σ。

给定一个尺度参数 $\alpha > 0$，α复形 $C_\alpha \subseteq$Del($\mathcal{P}$)定义为由外接半径不超过 α 的所有德劳内单纯形组成的子复形，如下所示 [121], 如图9所示：

$$C_\alpha = \{\sigma \in \text{Del}(\mathcal{P}) | r_\sigma \leq \alpha\}. \tag{17}$$

为确保拓扑闭包，还会包含每个选定单纯形的所有面。实际上，α可以与结构化网格的空间分辨率相关联，该分辨率由 [122]给出：

$$\alpha \approx \delta \left[\min_{1 \leq i \leq d} (\Delta x_i)\right], \qquad 0.5 \leq \delta \leq 2, \tag{18}$$

其中 δ 是经验缩放系数。 较小的 α 值可保留精细的边界起伏，但可能会使较薄或稀疏采样区域变得碎片化；较大的值则会生成更平滑的重建结果，但会牺牲局部几何细节 [123]。

点集的 α-形状随后定义为该复形的几何实现：

[68]:

$$\mathrm{Sh}_\alpha(\mathcal{P}) = \bigcup_{\sigma \in C_\alpha} \sigma. \tag{19}$$

其边界 $\partial\mathrm{Sh}_\alpha(\mathcal{P})$ 提供了物理域的重建几何，如 图9 所示。随着 α 的变化，所得形状会在离散数据云与其凸包之间连续过渡，具体如下 [123]：

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \mathrm{Sh}_\alpha(\mathcal{P}) = \mathcal{P}, \tag{20}$$

$$\lim_{\alpha \to \infty} \mathrm{Sh}_\alpha(\mathcal{P}) = \mathrm{conv}(\mathcal{P}). \tag{21}$$

此外，α-复形与 α-形状通过以下关系保持拓扑一致：

$$\partial C_\alpha(\mathcal{P}) = \partial\mathrm{Sh}_\alpha(\mathcal{P}), \tag{22}$$

这确保 $\mathrm{Sh}_\alpha(\mathcal{P})$ 是一个有界多胞体，其边界由 $C_\alpha(\mathcal{P})$ [68] 的暴露单形构成。

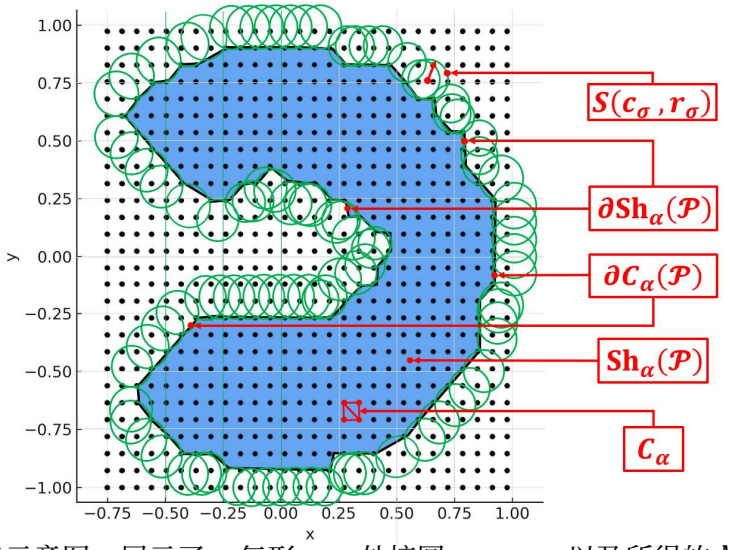


图 9 α-形状重建示意图，展示了 α-复形 C_α、外接圆 $S(x_\sigma,\ r_\sigma)$以及所得的 $M_{\alpha,\ f}$ 其由 $\mathrm{Sh}_\alpha(\mathcal{P})$ 及其边界 $\partial\mathrm{Sh}_\alpha(\mathcal{P})$定义。

对于计算实现，式 (15) 至 (17) 中使用的 r_σ 可以解析地表示。对于顶点为 $\boldsymbol{x}_{i_0}$、$\boldsymbol{x}_{i_1}$、$\boldsymbol{x}_{i_2}$，且边长为 $e_{2,1} = \|\boldsymbol{x}_{i_1} - \boldsymbol{x}_{i_2}\|_2$、$e_{2,0} = \|\boldsymbol{x}_{i_0} - \boldsymbol{x}_{i_2}\|_2$ 和 $e_{1,0} = \|\boldsymbol{x}_{i_0} - \boldsymbol{x}_{i_1}\|_2$ 的德劳内三角形，其外接半径为 [124, 125]：

$$r_\sigma = \frac{e_{2,1}e_{2,0}e_{1,0}}{4A_{0,1,2}}, \tag{23}$$

其中 $A_{0,1,2}$ 为三角形面积，使用$|\cdot|_{(a-v)}$ 方程中定义的算子计算。（10 ）.

一旦获得 $\mathrm{Sh}_\alpha(\mathcal{P})$，其多边形边界便定义了一个几何掩膜，用于限定插值网格。随后，根据方程 （2） 至 （4）定义的每个网格节点均被分类为：

$$\chi_\alpha(\boldsymbol{x}'_j) = \begin{cases} 1, & \text{if } \boldsymbol{x}'_j \in \mathrm{Sh}_\alpha(\mathcal{P}), \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{24}$$

从而得到最终的域内集合 $M_{\alpha,f} = \{\boldsymbol{x}'_j \in \mathcal{G} | \chi_\alpha(\boldsymbol{x}'_j) = 1\}$，如图9所示。该方法能够自然地处理外部凹陷和内部空腔，无需启发式阈值或形态学滤波器 [126, 127]。

3.4. Adaptive α-Shape Reconstruction

尽管经典的 α 形重建提供了可靠的拓扑框架，但其性能高度依赖于人工指定的尺度参数 α。由于 α 被定义为数据集坐标单位下的绝对长度尺度，采样密度或坐标缩放的变化可能导致边界重建结果 [128, 129] 不一致。为缓解这一局限，本节提出一种新颖的自适应且与分辨率无关的公式。

基于式(1) 中定义的数据点集及其对应的德劳内剖分[99, 119] （如图 4所示），所有唯一边的集合表示为：

$$\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_{N_e}\}, \tag{25}$$

其中，N_e 为唯一边的总数。随后将特征长度尺度定义为德劳内边平均长度 [117]：

$$\bar{e} = \max\left(\frac{1}{N_e}\sum_{e=1}^{N_e}\|\boldsymbol{x}_{e,1} - \boldsymbol{x}_{e,2}\|_2, 10^{-12}\right), \tag{26}$$

其中 $\boldsymbol{x}_{e,1}$ 和 $\boldsymbol{x}_{e,2}$ 表示边 e的端点。随后，将自适应α 参数 α_a按此长度尺度归一化，得到 [130]：

$$\alpha_a = \frac{\beta}{\bar{e}}, \tag{27}$$

其中，$\beta > 0$ 是一个无量纲控制参数，可独立于绝对几何单位调节边界凹度。

对于每个单纯形 $\sigma \in \mathrm{Del}(\mathcal{P})$，其特征外接球为 $S(\boldsymbol{c}_\sigma,\ r_\sigma)$ 满足式 (15) 和(16)，自适应 α-复形中保留的单形子集记为 [131]：

$$C_{a\alpha} = \{\sigma \in \mathrm{Del}(\mathcal{P}) | r_\sigma \le \alpha_a^{-1}\}, \tag{28}$$

从而仅保留形状良好且外接半径较小的单形。每个保留的单纯形$\sigma \in C_{a\alpha}$ 包含一组边界单元，记为 EF_σ [67]。每个边界单元 ef 在所有保留单形中的出现次数计算如下：

$$n_{ef} = \sum_{\sigma \in C_{a\alpha}} \mathbf{1}(ef \in EF_\sigma), \tag{29}$$

其中 $(\mathbf{1} \cdot \in 0,1\ )\{\}$ 为计数函数 [132]。仅出现一次的边界单元定义外边界，如下 [131] 所示：

$$EF_{eb} = \{ef \in \cup_\sigma EF_\sigma \,|n_{ef} = 1\}. \tag{30}$$

自适应 α-形状由这些暴露边界单元的凸包取并集得到：

$$\mathrm{Sh}_{a\alpha}(\mathcal{P}) = \bigcup_{ef \in EF_{eb}} \mathrm{conv}(ef), \tag{31}$$

其形成一条闭合多边形曲线，表示重建域 [131] 的边界 $\partial \mathrm{Sh}_{a\alpha}(\mathcal{P})$。

最后，采用与式(24)相同的规则对结构化网格节点进行分类，得到最终的域内集合$M_{a\alpha,f} = \{\boldsymbol{x}_j' \in \mathcal{G} | \chi_{a\alpha}(\boldsymbol{x}_j') = 1\}$，该集合界定了结构化网格中物理有效的部分。这种自适应形式在保持 α-shape框架理论严谨性的同时，增强了其在尺度和采样密度各异的数据集上的稳健性、可重复性和几何一致性[117, 128, 129]。因此，它为域重建提供了一种可靠且与分辨率无关的工具，适用于结构化网格表示和基于 CNN 的分析。

3.5. 重建评估指标

为客观评估所提出的重建策略相较于经典基线的表现，本节引入了一组定量指标。综合来看，这些指标通过衡量各方法保留原始散乱样本、抑制缺乏依据或外推区域，以及在结构化网格上再现物理域预期几何形状和连通性的能力，来评估重建保真度和拓扑。表4列出了针对各方法评估的全部指标 $k \in \{db, \alpha, a\alpha\}$，其中 db、 α 和 $a\alpha$ 分别指基于距离的方法、经典 α-形状方法和自适应 α-形状方法。

Ta表 4 评估重建精度和拓扑的定量标准 .

编号	标准	符号	定义	衡量内容
1	点召回率	精确率$_k$	$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\chi_k(\pi(\boldsymbol{x}_i))$	边界数据保留率
2	幽灵比例	几何伪影$_k$	$\frac{\lvert g_k\rvert}{\lvert M_k\rvert} = \frac{\sum_{j\in\mathcal{L}}\mathbf{1}\left[\chi_k(j)=1,\ D\left(x_j'\right)>r_0\right]}{\sum_{j\in}\mathbf{1}[\chi_k\, j=1]}$ ()L	不支持的活动区域
3	活动体积分数	AVF$_k$	$\frac{N_{av,\,k}}{\lvert\mathcal{L}\rvert} = \frac{\sum_{j\in}\chi_k(j)\ \mathrm{L}}{\prod_{i=1}^{d} n_i}$	相对掩模尺寸
4	连通分量	$N_{c,\,k}$	$M_k = \cup\ \mathrm{CC}_{i=1}^{N_{ck}}{}_{k}^{i}$，$\mathrm{CC}_k^i \cap \mathrm{CC}_k^s = \emptyset\ \ (i \neq s)$	域碎片化
5	交集交并比	交并比$_k$	$\frac{\lvert \mathrm{I}_k\rvert}{\lvert \mathcal{U}_k\rvert} = \frac{\sum_{j\in}\mathbf{1}[\chi_k\, j=1\ \wedge\ \chi_\alpha\, j=1]()0\,\mathrm{L}}{\sum_{j\in}\mathbf{1}[\chi_k\, j=1\ \vee\ \chi_\alpha\, j=1]()0\,\mathrm{L}}$	与经典 α-形状的全局重叠
6	精确率	精确率$_k$	$\frac{\lvert \mathrm{I}_k\rvert}{\lvert M_k\rvert} = \frac{\sum_{j\in}\mathbf{1}[\chi_k\, j=1\ \wedge\ \chi_\alpha\, j=1]0()\mathrm{L}}{\sum_{j\in}\mathbf{1}[\chi_k\, j=1]}$ ()L	经典 α-形状之外的泄漏
7	召回率	召回率$_k$	$\frac{\lvert \mathrm{I}_k\rvert}{\lvert M_\alpha\rvert} = \frac{\sum_{j\in}\mathbf{1}[\chi_k\, j=1\ \wedge\ \chi_\alpha\, j=1]0()\mathrm{L}}{\sum_{j\in}\mathbf{1}[\chi_\alpha\, j=1]}$ ()L	缺少经典α-形状覆盖

备注：

1. 精确率$_k$ 衡量映射到重建掩膜内部的原始样本所占的分数。2. 几何伪影$_k$ 量化距离数据云超过参考半径r_0 的活跃网格节点，表明存在缺乏支持或外推的潜在非物理区域。3. AVF$_k$ 是相对于完整网格归一化后的活跃掩膜大小。4. $N_{c,k}$ 统计不连通分量，反映拓扑碎片化。5. 交并比$_k$、精确率$_k$和召回率$_k$ 将该方法 k 与经典α-形状参考掩膜进行比较，其中交并比$_k$ 概括总体一致性，精确率$_k$ 惩罚假阳性，召回率$_k$ 惩罚假阴性。

在表4中， $\chi_k(\boldsymbol{j}) \in \{0,1\}$表示与方法$k$相关联的二值指示函数，用于定义活跃索引集$M_k = \{\boldsymbol{j} \in \mathrm{L}:\ \chi_k(\boldsymbol{j}) = 1\}$。这里，$\mathrm{L} = \{1,\dots, n_1\} \times \dots \times \{1,\dots, n_d\}$是结构化网格索引集，而$\pi(\boldsymbol{x}_i)$将每个样本位置$\boldsymbol{x}_i$ 映射到其对应的网格索引。对于基于重叠的指标（IoU$_k$、Pre$_k$和Rec$_k$），以 α-形状掩膜作为参考。因此，交集集和并集集分别定义为$\mathrm{I}_k = M_k \cap M_\alpha$ 和 $\mathcal{U}_k = M_k \cup M_\alpha$。对于幽灵比例（GF$_k$），参考半径为$r_0 = \rho\overline{d^{\mathrm{NN}}}$，其中$\rho > 0$ 是邻域缩放因子，$\overline{d^{\mathrm{NN}}}$ 是数据云内的平均最近邻距离，计算方式为

as:

$$\overline{d^{\mathrm{NN}}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} d_i^{\mathrm{NN}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\min_{\substack{1\le m\le N\\ m\neq i}} \|\boldsymbol{x_i} - \boldsymbol{x_m}\|_2\right). \tag{32}$$

4. 结果与讨论

本节将针对一系列关键参数，对各重建方法的性能和准确性进行细致分析：0。$01 \le \alpha \le 7000$、$\frac{1}{8}\Delta \le \tau \le 8\Delta$和0。$01 \le \beta \le 100$。为此，所有案例均采用约24000至36000个单元的中等分辨率 CFD 网格，以确保离散化能够代表标准工程仿真，同时保持计算开销可控。 不过，所提出的方法具有普适性，可应用于任意 CFD 网格。关于卷积神经网络网格的选择，模型参数的最优值对网格分辨率高度敏感。因此，最好使用高分辨率卷积神经网络网格来确定这些值，以便识别出最佳参数设置，并在必要时将其应用于较粗的卷积神经网络网格。因此，本研究采用了分辨率为$n_x = n_y = 1000$ 的高分辨率网格。

4.1. 经典 α-形状重建：α 的影响

在第 2 节的评估配置中， α 参数设定了按外接半径滤除单形的严格程度，而各项指标呈现出一致的 α依赖关系。当 α较小时，重建较为宽松，可能跨越凹陷或间隙，从而得到极高的 PR_α 和较大的 AVF_α，但由于部分体素缺乏充分的数据支持，GF_α 也会升高。随着 α 增至中等范围，较大的外接半径单形会被移除，边界向有数据支持的区域收缩，因此 GF_α 迅速下降，AVF_α 随之收缩，而 PR_α 通常仍接近 1；拓扑通常得以保留，且 $N_{c,\alpha} \approx 1$。若 α 过大，则在狭窄或稀疏采样区域中滤波过于严格，导致连接丢失和碎片化，表现为 PR_α和 AVF_α 急剧下降，以及 $N_{c,\alpha}$上升。由于各项指标在不同几何形状中均呈现相同的权衡结构，且这一结构随 α 变化，故前三个案例的详细结果（图 1a-c）见附录。因此，如图 10a 和图 11a 所示，此处仅讨论最复杂的几何形状，即弯曲涡轮通道。

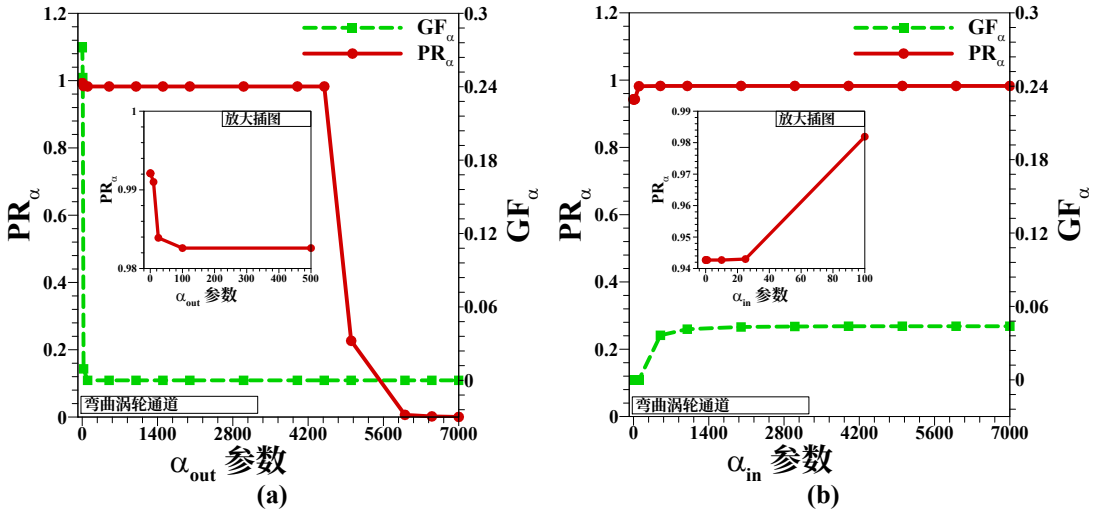


图10 弯曲涡轮通道中α 参数对精确率$_\alpha$ 和几何伪影$_\alpha$ 的影响：(a) 外边界和(b) 内边界。

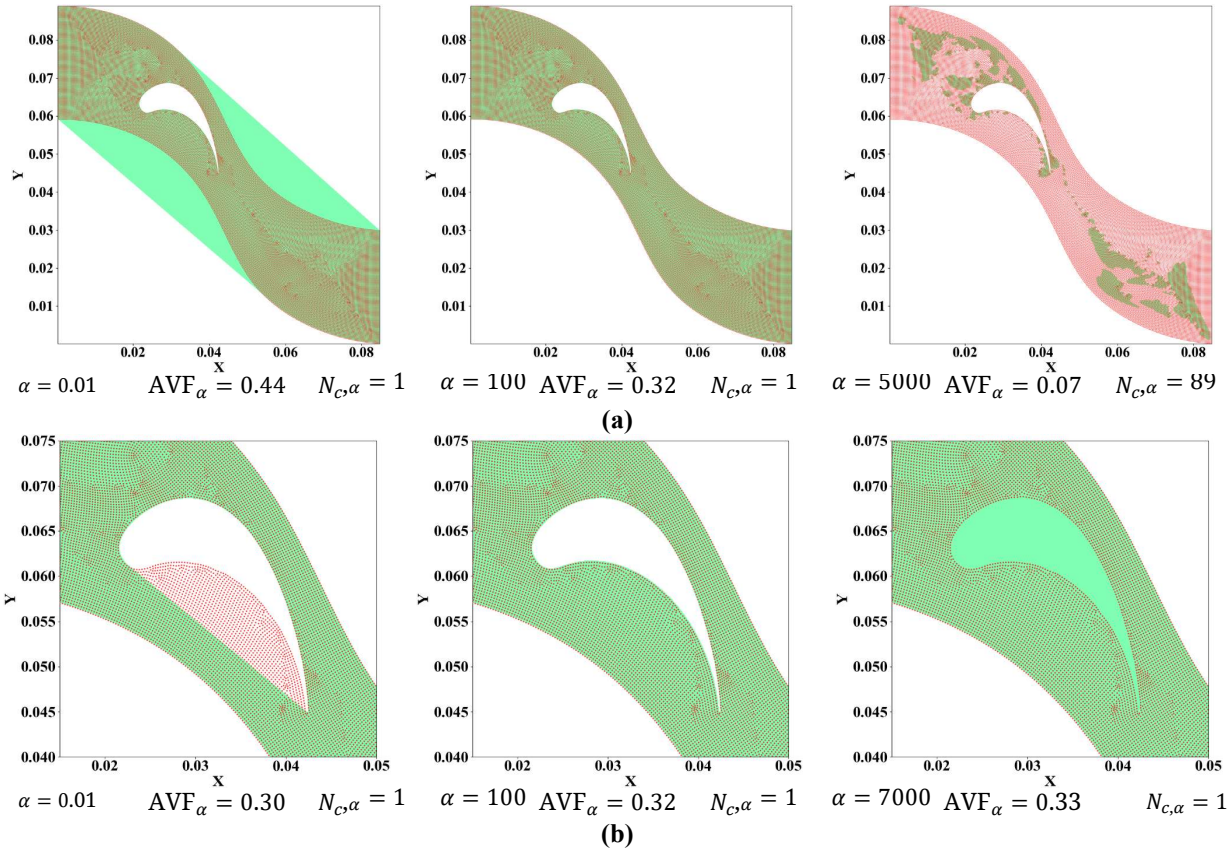


图 11 α-形状重建结果：弯曲涡轮通道：(a) 外边界和 (b) 内边界。绿色区域表示重建域，红色点表示计算流体力学数据。

对于**弯曲涡轮通道**外边界（图10a 和 图11a），PR$_\alpha$ 在 $\alpha_{out} \leq 10$范围内保持较高且几乎不变，随后在 $25 \leq \alpha_{out} \leq 4500$范围内略低但保持稳定，然后

在 $\alpha_{out} = 5000$ 之后发生塌缩。在此范围内，GF_α 从 $\alpha_{out} = 0.01$ 时的约 0.272 降至 $\alpha_{out} = 10$ 时的 0.248，到 $\alpha_{out} = 25$ 时降至约 0，并在 $\alpha_{out} \geq 100$ 保持为 0。与此同时，AVF_α 从 α_{out} 非常小时的约 0.44 降至 $\alpha_{out} = 100$ 时的约 0.32，随后一直持平，直至最终塌缩。重建在 $\alpha_{out} = 4500$ 之前始终保持拓扑连通，且 $N_{c、\alpha} = 1$；而 $\alpha_{out} = 5000$ 会引发严重碎片化，表现为 $N_{c、\alpha}$ 急剧上升，同时 PR_α 和 AVF_α 下降。这表明存在一个宽广且条件良好的 α_{out} 区间，在抑制缺乏支持的外部区域激活的同时，不会损害边界连通性。弯曲涡轮通道的内部边界重建（图10b 和图11b）表现出明显不同的敏感性，因为内侧 α-形状定义了一个从网格掩膜中扣除的排除区域。PR_α 在 $\alpha_{in} \leq 25$ 时基本保持在约 0.943，随后在 $\alpha_{in} = 100$ 时急剧升至约 0.982，此后保持稳定。$GF_\alpha = 0$ 持续至 $\alpha_{in} = 100$，但在 $\alpha_{in} \geq 500$ 时升至约 0.036 至 0.044。相应地，AVF_α 在 $\alpha_{in} \leq 25$ 时几乎恒定在 0.302 左右，在 $\alpha_{in} = 100$ 时升至约 0.317，并在 α_{in} 较大时接近约 0.333。对于所有 α_{in}，空腔始终是单个连通分量，且 $N_{c、\alpha} = 1$。从几何角度看，较小的 α_{in} 会产生过大的内部复形，移除超出预期的区域，从而降低 PR_α，同时由于该操作是扣除式的，$GF_\alpha = 0$ 仍保持不变。在 $\alpha_{in} \approx 100$ 附近，内边界与采样轮廓更为吻合，先前被排除的样本得以恢复，使 PR_α 和 AVF_α 增加。在 α_{in} 非常大时，内部重建对预期的空腔移除限制不足，留下由邻近采样点提供较弱支持的残余内部体素。这解释了 GF_α 的增加，而 $N_{c、\alpha}$ 并未发生变化。

表5 根据重建指标确定的最佳α 值。

配置	$\alpha_{out,opt}$	$\alpha_{in,opt}$
突扩–突缩管道	100	–
Y形分叉通道	1000	–
收敛-扩张喷管	10	–
弯曲涡轮通道	100	150

每种几何形状的最优α 值列于表 5，随后将在下一节中使用这些值来评估另外两种重建方法。

4.2. 基于距离的重建：τ 的影响

基于距离的重建由阈值τ 控制，见式(12)，该阈值定义了半径为τ 、在结构化网格上评估时围绕散乱点集的缓冲带。在

归一化形式中，$\frac{\tau}{\Delta}$ 设定有效掩膜厚度。当$\frac{\tau}{\Delta}$非常小时，缓冲带收缩为窄层，因此精确率$_{db}$较低，因为许多边界邻近样本落在邻域之外。在这一保守状态下，几何伪影$_{db}$ 接近0，精确率$_{db}$ 接近1，表明这是严格的数据支持的掩膜，且大体位于参考 α形之内。当$\frac{\tau}{\Delta}$ 从0.25增大到0.5时，精确率$_{db}$ 急剧上升并趋近1，而几何伪影$_{db}$ 仍可忽略，交并比$_{db}$ 与召回率$_{db}$ 在约$\frac{\tau}{\Delta} \approx 0.5$至1的窄范围内达到峰值。对于更大的$\frac{\tau}{\Delta}$，精确率$_{db}$ 与召回率$_{db}$ 趋于饱和，但几何伪影$_{db}$ 增大，交并比$_{db}$ 与精确率$_{db}$ 均下降，反映出向远离任何数据点的体素发生过度扩张。在所有情形中（图 12a-d与图 13a-d），这一行为保持一致，敏感性主要由几何凹性、分支结构、曲率和局部点间距决定。

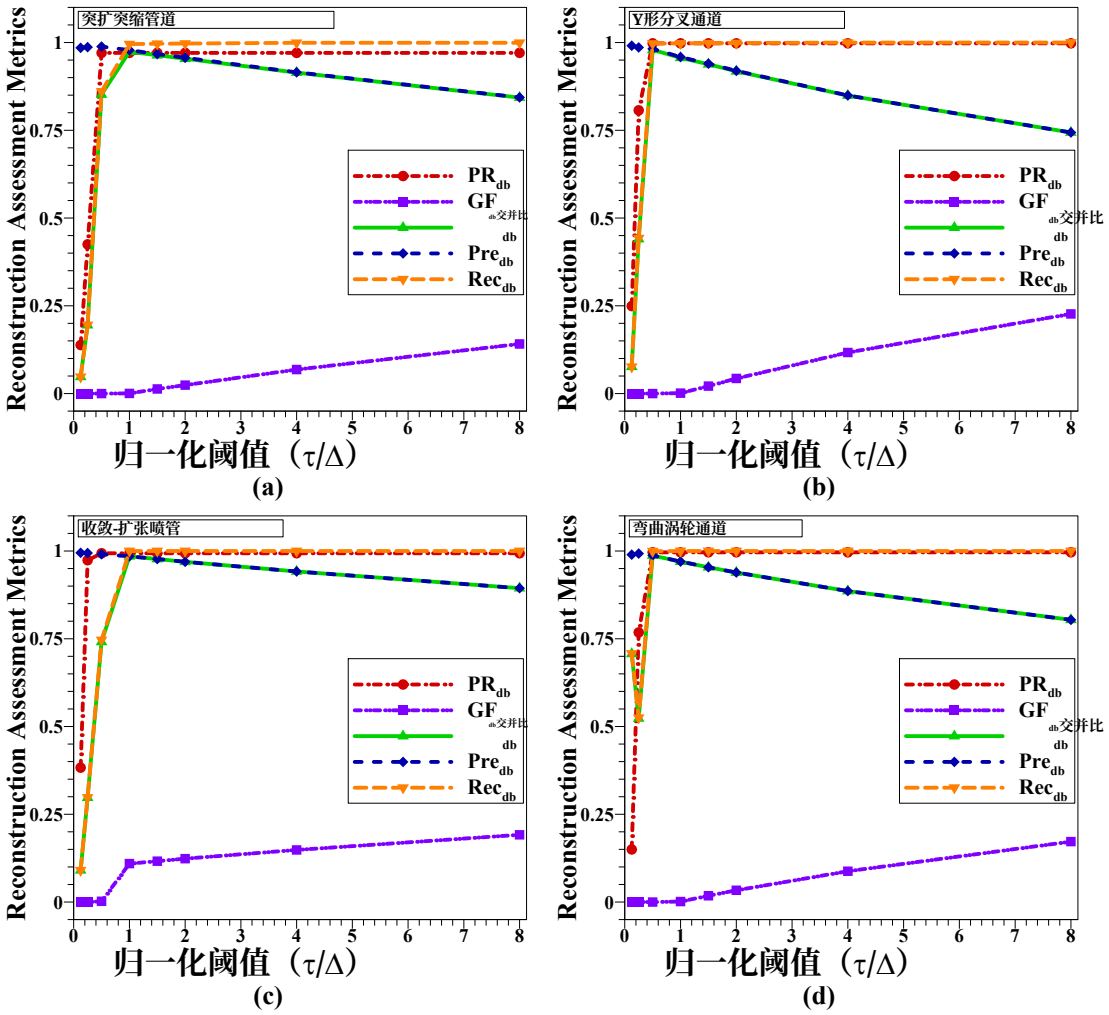
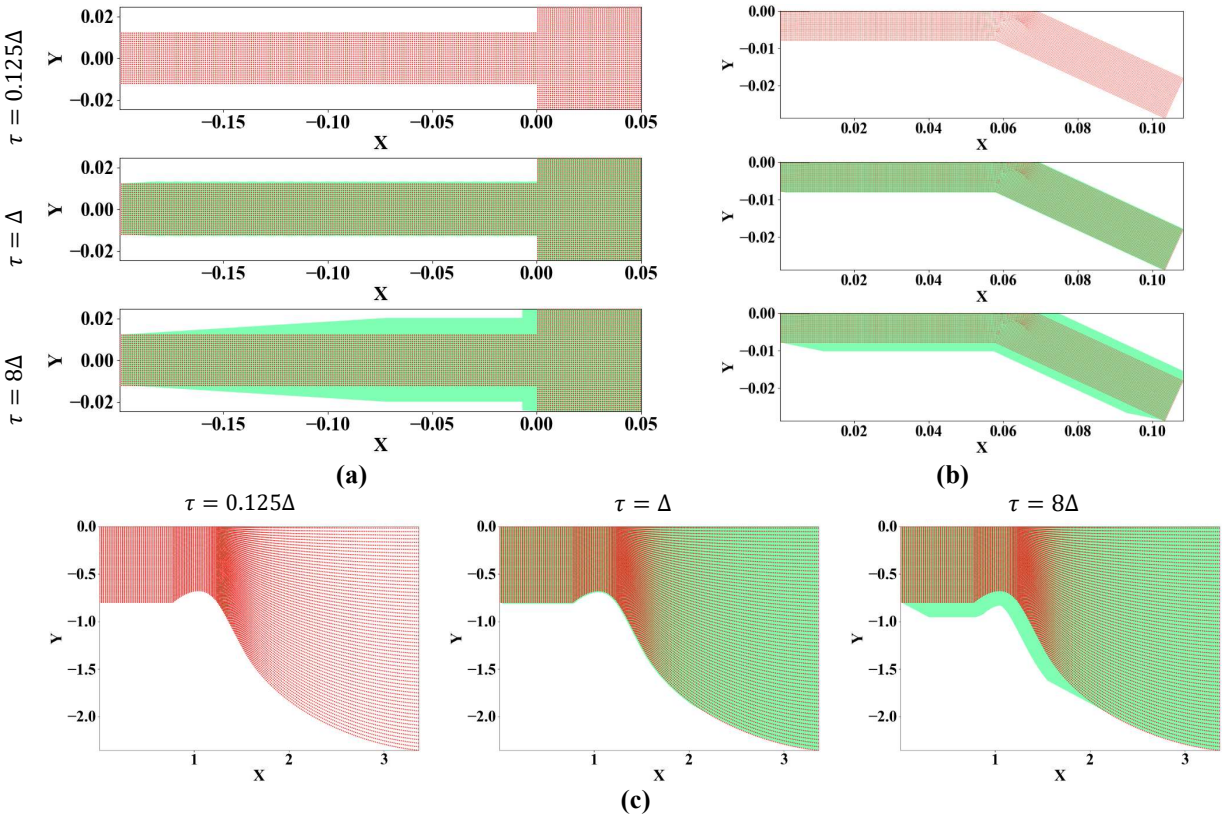


图12 τ 参数对四种几何形状重建指标的影响：(a) 突扩–突缩管道，(b) Y形分流通道，(c) 收敛-扩张喷管，(d) 弯曲涡轮通道。

对于突扩–突缩管道，对$\frac{\tau}{\Delta}$的响应尤为陡峭（图12a）。当$\frac{\tau}{\Delta}=0.125$和0.25时，重建结果仍然非常保守，$PR_{db}=0.1382$和0.4251，而$GF_{db}=0$和$Pre_{db}\approx 0.985-0.987$。将$\frac{\tau}{\Delta}$增至0.5后，$PR_{db}$升至0.9704，之后即使阈值进一步增大，数值也基本保持不变。与α-形状参考最吻合的情况出现在$\frac{\tau}{\Delta}=1$附近，此时$IoU_{db}=0.9738$、$Pre_{db}=0.9782$、$Rec_{db}=0.9954$，且GF_{db}仍可忽略不计。超过这一点后，增大缓冲带主要会增加虚假激活：GF_{db}从$\frac{\tau}{\Delta}=1.5$时的0.0131升至$\frac{\tau}{\Delta}=8$时的0.1413，同时IoU_{db}单调下降（IoU_{db}降至0.8431），Pre_{db}也从0.9670降至0.8436。如图13a所示，新增的激活体素集中在凹陷区域和角落区域，这些区域的数据支持较弱，附近样本也较少。对于**Y**形分流通道，由于凹形交汇处明显且子分支纤细，$\frac{\tau}{\Delta}$响应更为敏感（图12b）。在$\frac{\tau}{\Delta}=0.125$时，重建结果对域的覆盖不足，$PR_{db}=0.2492$、$GF_{db}=0$，且$Pre_{db}\approx 0.991$。将$\frac{\tau}{\Delta}$增至0.25后，$PR_{db}$升至0.8068；到$\tau/\Delta=0.5$时，召回率达到饱和，$PR_{db}=0.9976$。在$\frac{\tau}{\Delta}=0.5$时，$GF_{db}$仍为0，而$IoU_{db}=0.9792$、$Pre_{db}=0.9820$、$Rec_{db}=0.9971$，表明在严格的数据支持条件下，与$\alpha$-形状参考高度吻合。对于$\frac{\tau}{\Delta}\geq 1$，$PR_{db}$保持在0.9976，$Rec_{db}$基本为1，但$GF_{db}$从$\frac{\tau}{\Delta}=1$时的0.0012升至$\frac{\tau}{\Delta}=8$时的0.2269，同时$IoU_{db}$从0.9564降至0.7437，$Pre_{db}$也从0.9586降至0.7437。如图13b所示，缓冲带扩大后逐渐填充凹形交汇处，并开始跨越分支间隙，激活数据支持较弱、附近点较少的体素。对于收敛-扩张喷管，由于沿轮廓的边界到数据的距离逐渐变化，其响应更为平缓（图12c）。即使在$\frac{\tau}{\Delta}=0.25$时，召回率也已较高，$PR_{db}=0.9736$、$GF_{db}=0$，且$Pre_{db}=0.994$，表明较薄的缓冲带已能捕获大部分样本。将$\frac{\tau}{\Delta}$增至0.5后，PR_{db}升至0.9935，GF_{db}仍然很小；然而，$IoU_{db}=0.7412$且$Rec_{db}=0.7464$，说明在α-形状边界远离采样轨迹的部分区域，掩膜尚未达到参考区域的完整范围。最佳重叠出现在$\frac{\tau}{\Delta}=1$，此时$IoU_{db}=Pre_{db}=0.9848$且$Rec_{db}=1$（图13c），但虚假激活显著增加（$GF_{db}=0.1095$），这与较厚的缓冲带纳入数据支持较弱、附近点较少的体素相符。阈值更大时，GF_{db}在$\frac{\tau}{\Delta}=8$时升至0.1915，而IoU_{db}从$\frac{\tau}{\Delta}=1.5$时的0.9771降至$\frac{\tau}{\Delta}=8$时的0.8941，Pre_{db}也呈现相同趋势。在

这种情况下，$\frac{\tau}{\Delta} \approx 0.5$强调与数据的严格接近性，而$\frac{\tau}{\Delta} \approx 1$则以产生额外幽灵体素为代价，使结果与$\alpha$-形状参考达到最佳吻合。对于曲率较大、存在多个凹陷和狭窄间隙的弯曲涡轮通道，对$\frac{\tau}{\Delta}$的敏感性同样显著（图12d）。在$\frac{\tau}{\Delta} = 0.125$时，尽管$\mathrm{IoU}_{db} = 0.7070$，掩膜的$\mathrm{PR}_{db} = 0$仅为.1498，$\mathrm{GF}_{db} = 0$且$\mathrm{Pre}_{db} = 0.9896$。如图13d所示，即使缓冲带很薄，仍可与参考区域大幅重叠，同时排除许多边界邻近样本。在$\frac{\tau}{\Delta} = 0.25$时，$\mathrm{PR}_{db}$升至0.7679；到$\frac{\tau}{\Delta} = 0.5$时，召回率达到饱和，$\mathrm{PR}_{db} = 0.9961$。在此阈值下，$\mathrm{GF}_{db} = 0$、$\mathrm{IoU}_{db} = 0.9870$、$\mathrm{Pre}_{db} = 0.9876$且$\mathrm{Rec}_{db} = 0.9994$，表明在严格的数据支持条件下，与$\alpha$-形状参考几乎无法区分。对于$\frac{\tau}{\Delta} \geq 1$，$\mathrm{PR}_{db}$和$\mathrm{Rec}_{db}$仍保持饱和，但$\mathrm{GF}_{db}$从$\frac{\tau}{\Delta} = 1$时的0.0014升至$\frac{\tau}{\Delta} = 8$时的0.1722，而$\mathrm{IoU}_{db}$从0.9698降至0.8039，$\mathrm{Pre}_{db}$也呈现相同的下降趋势。图13d显示，这种性能退化是由缓冲带扩展至凹形外部凹坑以及数据支持较弱、附近点较少的空腔或间隙所致。



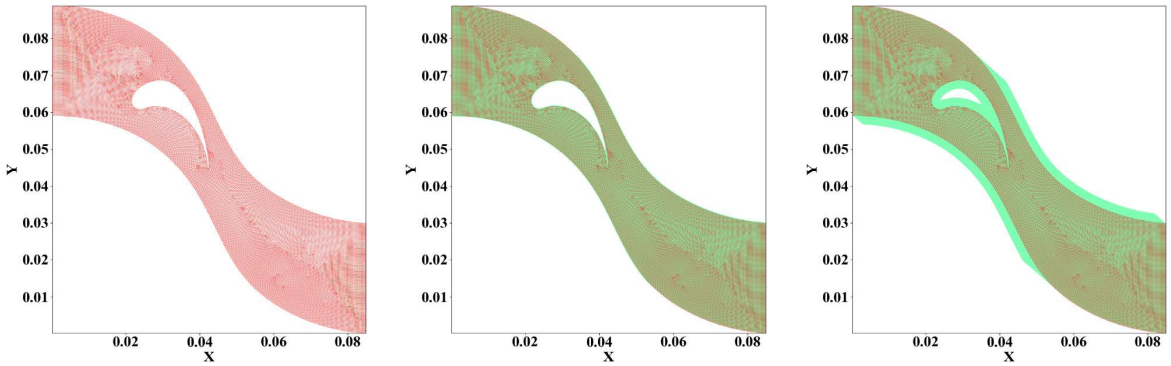
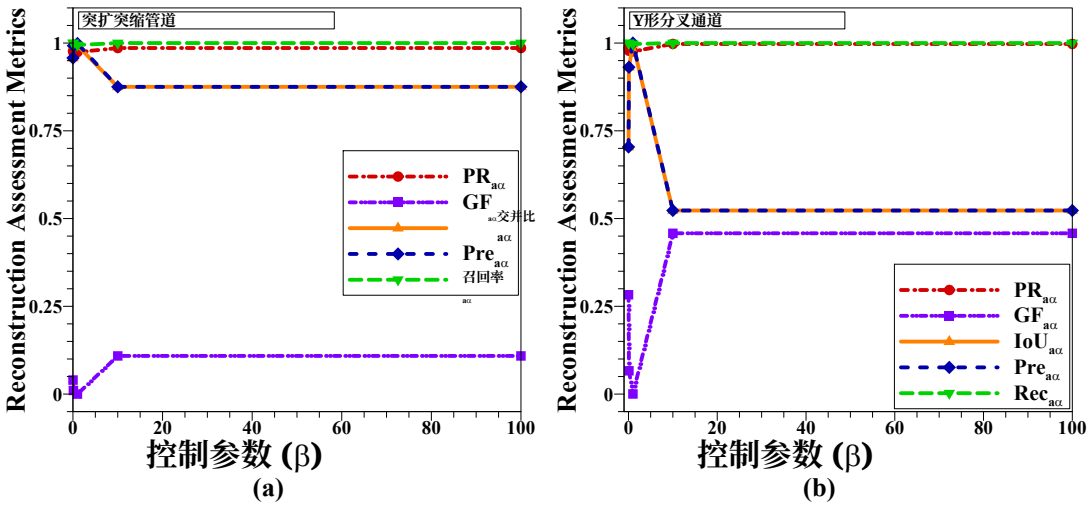


图13 基于距离的重建结果：(a) 突扩–突缩管道，(b) Y形分流通道，(c) 收敛-扩张喷管，以及 (d-e) 弯曲涡轮通道。绿色区域表示重建域，红色点表示计算流体力学数据。

4.3. 自适应 α-形重建：β的影响

在自适应 α-形重建中，β 通过公式 (27) 中的归一化尺度发挥作用，并根据局部分辨率 e 定义公式 (28) 中的外接圆半径截断阈值。较小的 β 会允许更大的外接半径，从而保留可能跨越凹陷的长单形，形成膨胀的近凸包络。较大的 β 会收紧截断阈值，仅保留短而形状良好的单形；栅格化后，边界可能因此过度简化。对于所有几何形状（图14a-d 和 图15a-d），对所有 β，精确率$_{a\alpha}$ 和 召回率$_{a\alpha}$ 均接近 1，因此，对 β 的主要依赖体现在 几何伪影$_{a\alpha}$、交并比$_{a\alpha}$ 和 精确率$_{a\alpha}$ 上；这些指标衡量数据云周围不受数据支持的激活。



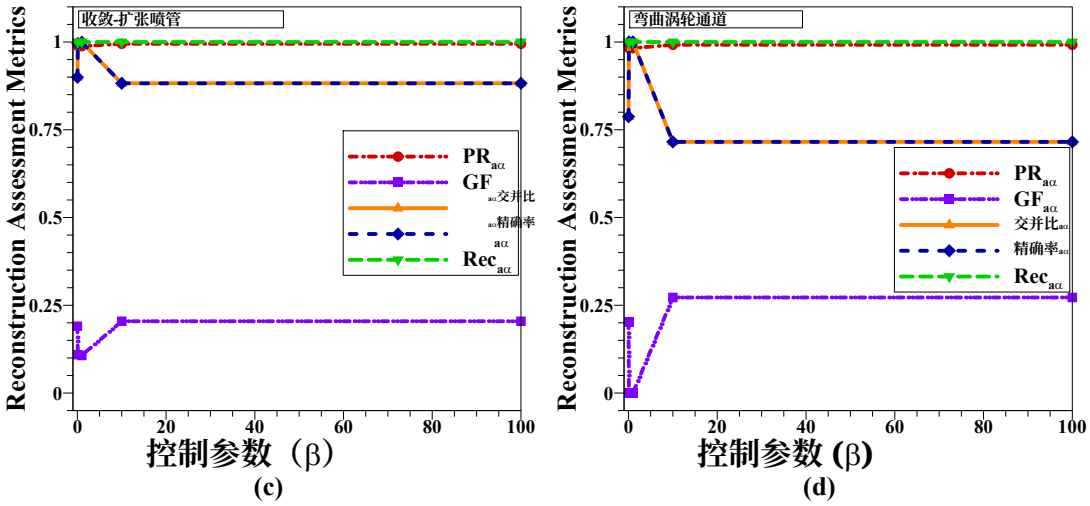
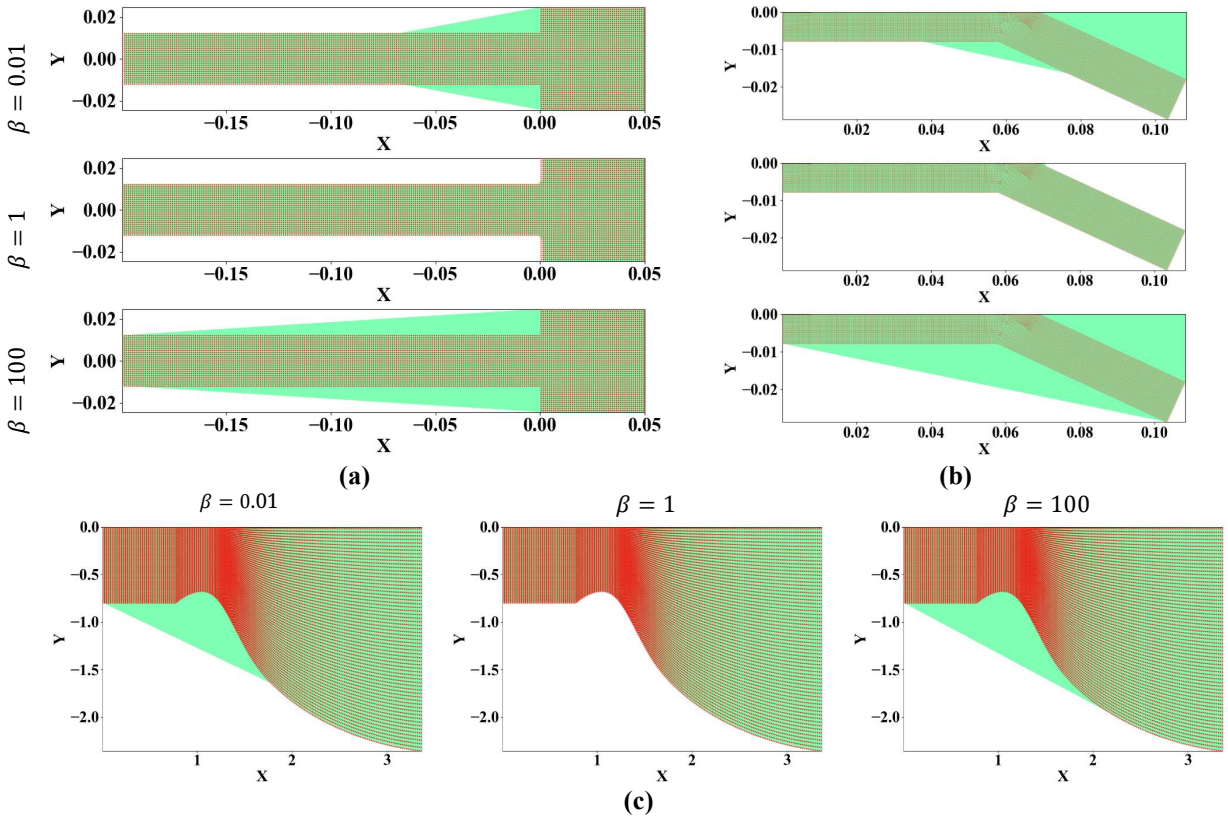


图14 β 参数对四种几何形状重建指标的影响：(a) 突扩–突缩管道，(b) Y形分流通道，(c) 收敛-扩张喷管，以及 (d) 弯曲涡轮通道。



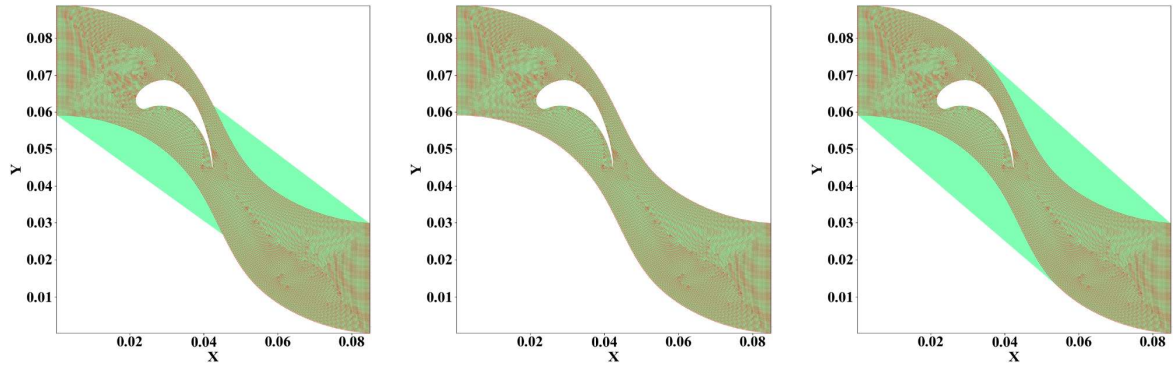


图15 自适应 α-形状重建结果：(a) 突扩–突缩管道，(b) Y 形分流通道，(c) 收敛-扩张喷管，以及 (d-e) 弯曲涡轮通道。绿色区域表示重建域，红色点表示计算流体力学数据。

对于突扩–突缩管道（图14a和图15a），精确率$_{a\alpha}$ 在所有 β下保持稳定（约0.97至0.99）。在 $\beta = 0.01$时，宽松的外接圆半径截断允许跨越凹陷间隙的长单形，从而产生轻度过度覆盖（几何伪影$_{a\alpha} \approx 0.04$，交并比$_{a\alpha} \approx 0.96$）。将β 增大至0.1和1会把截断阈值收紧到e的尺度，抑制这些跨越，并使几何伪影$_{a\alpha}$ 趋近于0，同时交并比$_{a\alpha}$ 和精确率$_{a\alpha}$ 趋近于1，因此掩膜在网格上与参考α形相匹配。对于$\beta \geq 10$，滤波器变得过度限制，边界被简化，不支持的激活增加（几何伪影$_{a\alpha} \approx 0.11$），使交并比$_{a\alpha}$ 和精确率$_{a\alpha}$ 降至约0.88，同时仍保持包含率（召回率$_{a\alpha} = 1$）。Y形分流通道是对β最敏感的情形，因为分叉顶点引入了尖锐凹性，且子分支较为细长（图14b和图15b）。在$\beta = 0.01$时，宽松的外接圆半径检验允许桥接交汇处的长单形，产生强烈过度覆盖（几何伪影$_{a\alpha} \approx 0.28$）和较低重叠（交并比$_{a\alpha} \approx 0.70$），尽管保留率较高（精确率$_{a\alpha} \approx 0.986$，召回率$_{a\alpha} = 1$）。将β 增大至0.1和1会修剪这些桥接单形，使边界向数据支持的壁面回缩，并迅速抑制虚假激活（几何伪影$_{a\alpha}$：$0.28 \rightarrow 0.066 \rightarrow \sim 0$），同时提高与参考的一致性（交并比$_{a\alpha}$：$0.70 \rightarrow 0.93 \rightarrow 0.9972$；精确率$_{a\alpha} \rightarrow 1$ 在$\beta = 1$）。对于$\beta \geq 10$，截断阈值变得过度限制，重建边界在分叉处被简化，并以粗略包围区域重新填充交汇处。包含率得以保持（召回率$_{a\alpha} = 1$，精确率$_{a\alpha} \approx 0.997$），但不支持的激活显著增加（几何伪影$_{a\alpha} \approx 0.458$），交并比$_{a\alpha}$ 降至约0.52。在收敛-扩张喷管（图14c和图15c）中，对β 的依赖性较弱，因为边界曲率和几何长度尺度平滑变化。在$\beta = 0.01$时，宽松截断阈值仍产生轻度过度覆盖，几何伪影$_{a\alpha} \approx 0.19$，交并比$_{a\alpha} \approx 0.90$。将 β 增大至0.1和1会收紧

外接圆半径阈值至大部分轮廓上e 的尺度，修剪大单形，并与参考达到近乎完全一致（交并比$_{a\alpha}$ 在$\beta = 1$处最高达~0.999，精确率$_{a\alpha}$ 和召回率$_{a\alpha}$ 基本为1）。对于$\beta \geq 10$，截断阈值在局部尺度变化附近变得过度限制，边界在栅格化后被简化。这增加了不支持的激活（几何伪影$_{a\alpha} \approx 0.20$），并使交并比$_{a\alpha}$ 和精确率$_{a\alpha}$ 降至约0.88，而精确率$_{a\alpha}$ 和召回率$_{a\alpha}$ 仍接近1。弯曲涡轮通道（图14d和图15d）包含多处凹陷、一条内部通道和狭窄间隙，因此对过度滤波和过滤不足高度敏感。在 $\beta = 0.01$时，宽松截断阈值允许桥接单形跨越内部空洞和急弯，产生膨胀的掩膜（几何伪影$_{a\alpha} \approx 0.20$，交并比$_{a\alpha} \approx 0.79$），同时保持较高的保留率和包含率（精确率$_{a\alpha} \approx 0.99$，召回率$_{a\alpha} = 1$）。对于$\beta = 0.1$和1，按e 进行归一化可抑制这些桥接，并在笛卡尔网格上与参考达到近乎精确的一致（几何伪影$_{a\alpha} = 0$，交并比$_{a\alpha}$ =精确率$_{a\alpha}$ =召回率$_{a\alpha} = 1$）。对于$\beta \geq 10$，截断阈值对细长特征变得过度限制，边界被简化，不支持的激活增加（几何伪影$_{a\alpha} \approx 0.27$），重叠降低（交并比$_{a\alpha}$ ≈0.72），而精确率$_{a\alpha}$ 和召回率$_{a\alpha}$ 仍保持较高。

4.4. 掩膜生成运行时间比较

表6显示出清晰的由方法决定的运行时间层级，掩膜生成时间取决于$\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_d)$。基于距离的方法生成掩膜仅需 $15 - 18\,ms$，表明其计算成本低且几乎恒定。相比之下，两种 α-形状变体生成每个掩膜都需要数秒，处理负担明显更重。在 α-形状系列中，自适应形式始终具有更高效率，在掩膜生成方面比经典的 α-形状快1.7 × 至2.6 × 倍。

表6 采用三种重建方法对所有几何形状进行掩膜生成的运行时间，使用$\tau = \Delta$、 $\alpha = \alpha_{opt}$和$\beta = 1$。

配置	掩膜生成时间（秒）		
	基于距离	自适应α-形状	经典
突扩–突缩管道	0.018	8.269	14.021
Y形分叉通道	0.017	5.026	9.307
收敛-扩张喷管	0.015	2.969	7.763
弯曲涡轮通道	0.016	4.054	9.313

4.5. 用于减少边缘遗漏的边界膨胀

在4.1至4.3节中，利用三种策略从散乱的计算流体力学数据集重建物理域；这些策略在广泛的参数范围内均可生成准确且实用的掩膜。然而，图13a-d和图15a-d表明，反复出现的体素化边缘效应会导致少量边界样本因亚体素几何形状和网格对齐误差而恰好落在掩膜之外，使精确率$_k$ 略低于1。因此，在重建后应用一种与方法无关的边界膨胀步骤，以较小的膨胀因子 η （例如，$\eta = 1.002$，或0.2%）对掩膜进行膨胀，从而包纳边界样本（图16a-b）。由于过度膨胀会激活无支撑区域并增加几何伪影$_k$，因此将 η 保持在最低限度，以推动精确率$_k$ 趋近1，同时确保几何伪影$_k$几乎不变。

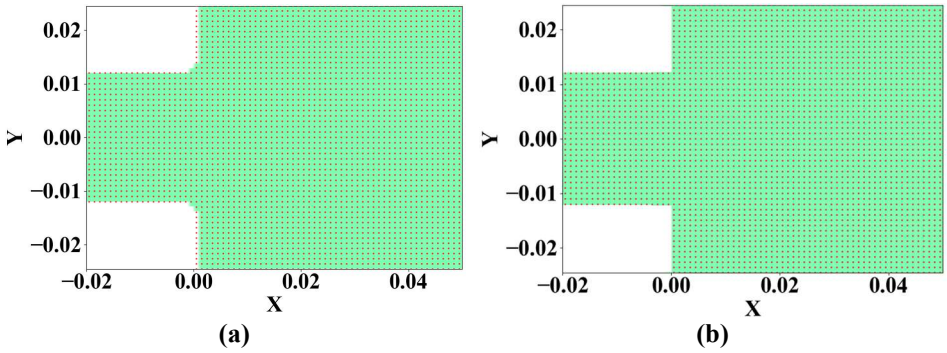


图 16用于缓解边覆盖不足的边界膨胀细化：(a) 原始掩膜，(b) 膨胀后的掩膜。绿色区域表示第一种几何体的重建域，红色点表示计算流体力学数据。

表 7 边界膨胀对基于距离和自适应 α-形状重建的精确率$_k$ 和几何伪影$_k$ 的影响。

配置	原始		膨胀后		原始		膨胀	
	PR_{db}	GF_{db}	PR_{db}	GF_{db}	$PR_{\alpha\alpha}$	$GF_{\alpha\alpha}$	$PR_{\alpha\alpha}$	$GF_{\alpha\alpha}$
突扩–突缩管道	0.9704	0.0004	1	0.0010	0.9741	0	1	0.0002
Y形分叉通道	0.9976	0.0012	0.9994	0.0015	0.9761	0.0003	0.9913	0.0005
收敛-扩张喷管	0.9935	0.1095	0.9978	0.1100	0.9881	0.1071	0.9951	0.1074
弯曲涡轮通道	0.9961	0.0014	0.9998	0.0017	0.9826	0	0.9964	0.0008

表 7量化了边界膨胀的影响，并显示所有几何形状均呈现一致趋势。对于基于距离的方法，在突扩-收缩管道中，精确率$_{db}$ 增加了3.05%；在 Y 形通道中增加了0.18%；在收敛-扩张喷管中增加了0.43%；在弯曲涡轮通道中增加了0.37%。自适应 α-形状方法也取得了类似的提升，在相同的几种情况下，精确率$_{\alpha\alpha}$ 分别提高了2.66%、1.56%、0.71%和1.40%。这些改进仅伴随着幽灵含量的微小变化：几何伪影$_{db}$ 分别增加了0.06%、0.03%、0.05%和0.03%，而几何伪影$_{\alpha\alpha}$ 分别增加了0.02%、0.02%、0.03%和0.08%。膨胀后，两种方法均趋于一致

，在所有情况下的 精确率$_k$ 和 几何伪影$_k$ 几乎完全相同，因此重构域和边界实际上难以区分，如 图 17a-d 所示。

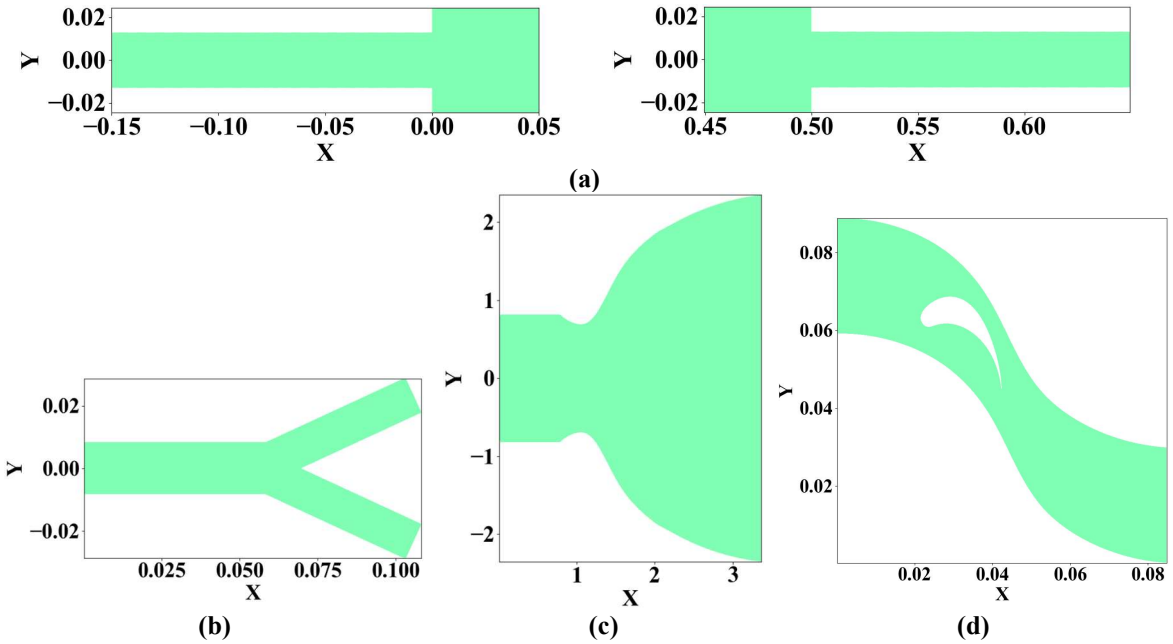


图17 (a) 突扩-收缩管道、(b) Y形分流通道、(c) 收敛-扩张喷管和 (d) 弯曲涡轮通道的最终域重建与边界恢复。

5. 结论

将散乱的计算流体力学数据集插值到均匀笛卡尔网格上，可能会形成凸包型包络并激活非物理区域，因此在导出 CNN 可用场之前，必须进行专门的域重建步骤。为此，本文开发并评估了一个重建框架，采用三种不同策略：新颖的基于距离的掩膜处理与形态学闭运算、经典的 α形边界恢复，以及一种新颖的自适应 α形公式，该公式利用局部数据分辨率对 α 进行归一化。为实现超越目视检查的客观评估，本文首次提出一组定量的拓扑感知评价指标，用于衡量恢复域的数据保留率、无支撑区域的抑制效果、重叠一致性和连通性。

参数鲁棒性呈现出清晰的层次。基于距离的策略凭借单一的通用选择$\tau = \min_{1\le i\le d\in\{2,3\}}(\Delta x_i)$，在所有测试几何形状上均能可靠运行，而自适应 α-形状方法在$\beta = 1$ 下保持稳定，无需针对具体案例重新调参。相比之下，经典α-形状公式需要对 α 参数进行依赖于几何形状的调节，以平衡边界

覆盖不足与纳入无支撑区域之间的取舍。例如，最优α值对突扩–突缩管道为100，对Y形分流通道为1000，对收敛-扩张喷管为10，对弯曲涡轮通道为$100-150$，这凸显了其对缩放和采样变化的敏感性。

计算成本也呈现相同趋势。值得注意的是，基于距离的方法在所有测试几何形状中的耗时几乎保持不变，每种配置下生成掩膜仅需约15至18 ms，整体速度仍快出多个数量级。与经典α-形基线相比，基于距离的方法约快500至800倍；自适应α-形技术则将运行时间缩短约1.7 × 至2.6 ×，始终快于经典变体，但慢于基于距离的方法。

边界膨胀是一种轻量且与方法无关的细化手段，可修正体素化边缘效应：部分边界邻近样本略微落在原本准确的掩膜之外。通过最小幅度、受控的$\eta = 0.2\%$膨胀，基于距离的掩膜保留样本比例提高0.18%至2.96%，自适应α-形方法则提高0.70%至2.59%，使所有案例的保留率都接近 1。此项改进仅导致无支撑区域激活略微增加：基于距离的方法增加0.03%至0.06%，自适应α-形方法最多增加0.08%，这表明该细化能够找回遗漏的边界样本，同时不会显著扩展至非物理区域。

总体而言，基于距离的方法是首选的默认方法，在准确性、鲁棒性、尽量减少参数调优和计算效率之间实现了最可靠的平衡。当无法获取设置基于距离的阈值所需的计算流体力学网格尺寸信息时，自适应α-形状方法仍是一个有力的替代方案。尽管本研究仅考察了四种几何形状，但专用的 Web 应用程序提供了端到端的工作流程，使用户能够上传任意几何形状的二维 ASCII 数据集、调整方法参数、自动重建边界并导出 CNN就绪输出。

附录： 附加 α 参数研究

对于**突扩–突缩管道**（图18a 和 图19a），精确率$_\alpha$ 从 $\alpha = 0.01$ 到 1000始终保持较高且近乎恒定，仅从约 0.9845略微下降至0.9726。在

相同范围内，几何伪影$_\alpha$单调减少，从约 0.109 降至 $\alpha = 500$时的 0，而 AVF_α则从约 0.88 收缩至 0.77。在此区间内，重建结果始终保持拓扑连通，且$N_{c,\alpha} = 1$。仅在 $\alpha = 1430$时发生失败：精确率$_\alpha$骤降至约 0.34，AVF_α 降至 0.26，且$N_{c,\alpha}$ 增至 2，这表明过于严格的外接半径滤波导致了碎片化。对于**Y**形分流通道（图18b 和图19b），精确率$_\alpha$在 $\alpha = 1$之前基本保持为 1，随后逐渐下降，在 $100 \le \alpha \le 4500$时约为 0.976，之后于 $\alpha = 5000$骤降至 0.044。较小的α对应的几何伪影$_\alpha$ 非常高且几乎持平，约为 0.458（在 $\alpha = 10$时略有上升），随后在 $\alpha = 100$ 时急剧降至约 0.074，并在 $\alpha \ge 500$时接近 0。与此同时，AVF_α 从 $\alpha = 0.01$ 时的约 0.64 收缩至 $\alpha = 500$时的约 0.34，此后一直保持平台状态，直至最终骤降。在稳定范围内，重建结果始终保持连通，且$N_{c,\alpha} = 1$；随后在 $\alpha = 5000$ 处突然碎片化，此时$N_{c,\alpha}$ 增至 19。这种显著的敏感性与交汇处明显的凹性及细分支的存在相符：较宽松的 α 值会促使交汇处发生外接半径支撑桥接，而在较大的 α 下，过于严格的滤波会截断细长分支段并导致碎片化。对于收敛-扩张喷管（图18c 和图19c），精确率$_\alpha$ 在 $\alpha = 45$之前仅从 0.991 略微下降至 0.984，随后于 $\alpha = 50$ 骤降，并继续下降至 $\alpha = 125$时的 0.033。几何伪影$_\alpha$ 从 $\alpha = 0.01$ 时的约 0.204 降至 $10 \le \alpha \le 45$ 范围内的约 0.107，并在 $\alpha = 75$时达到 0。类似地，AVF_α 从约 0.71 平稳收缩至 $\alpha = 45$之前的 0.62，随后在 $\alpha = 50$ 之后迅速骤降，到 $\alpha = 125$时低于 0.01。直到 $\alpha = 75$，重建结果始终保持连通，且 $N_{c,\alpha} = 1$；之后开始出现碎片化，在 $\alpha = 100$时$N_{c,\alpha} = 2$，并在 $\alpha = 125$时达到 7。 $\alpha \approx 50$ 附近的急剧转变表明存在一个阈值：超过该阈值后，外接半径滤波开始移除表示局部最窄或支持最稀疏的边界段所必需的单形，导致覆盖不足迅速加剧，继而发生碎片化。

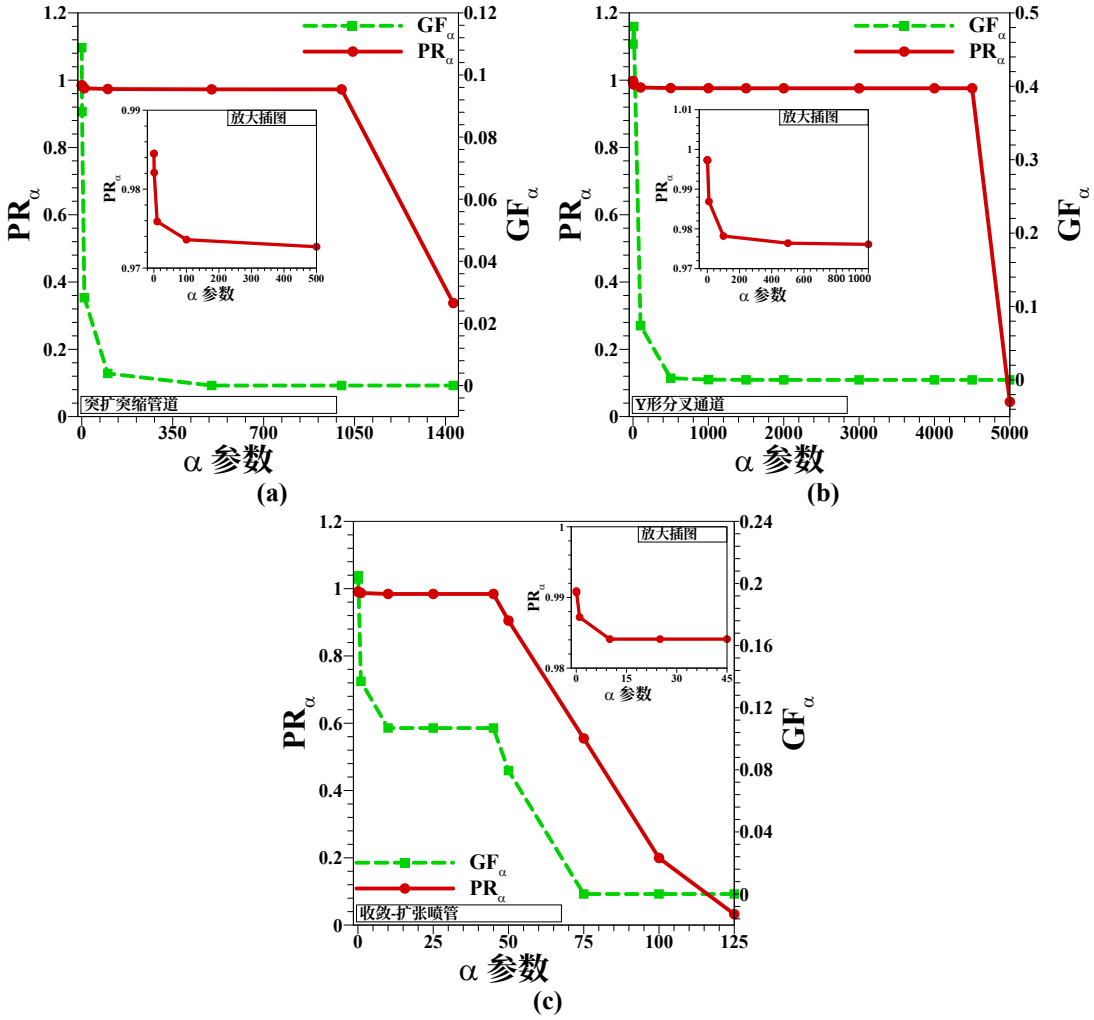
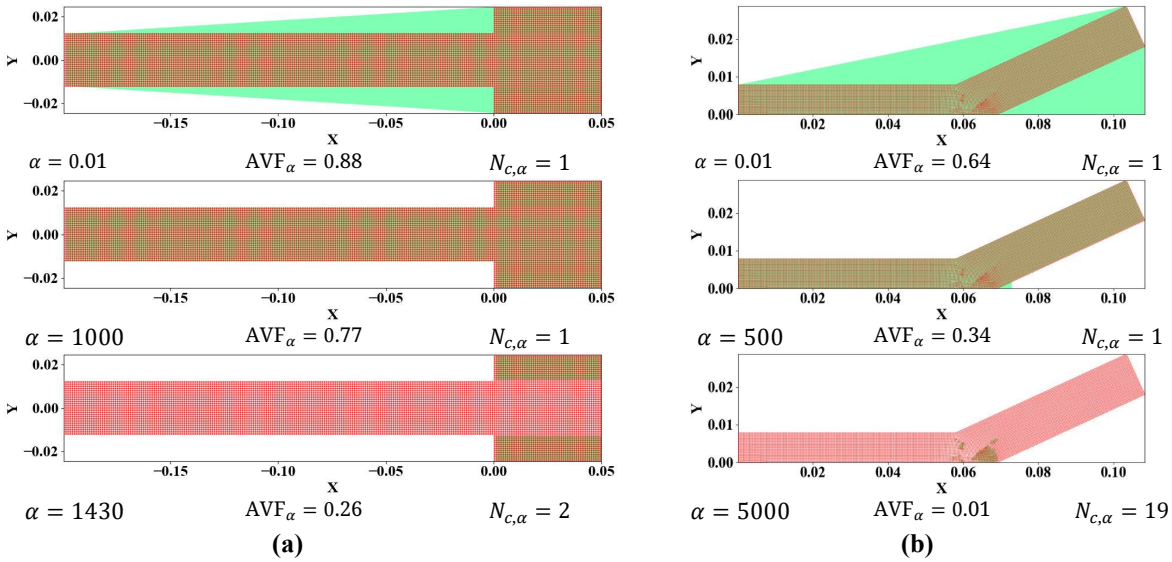


图18α 参数对精确率$_\alpha$ 和几何伪影$_\alpha$ 在三种几何形状中的影响：(a) 突扩–突缩管道，(b) Y形分流通道，以及 (c) 收敛-扩张喷管。



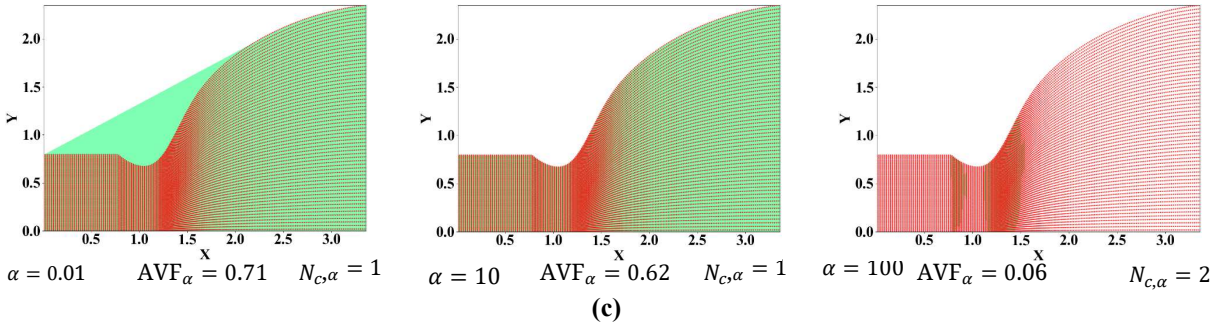


图 19 α-形状重建结果：(a) 突扩–突缩管道，(b) Y形分流通道，以及 (c) 收敛-扩张喷管。绿色区域表示重建域，红色点表示计算流体力学数据。

利益声明

作者声明，他们不存在可能影响本文所报告工作的已知竞争性经济利益或个人关系。

数据与代码可用性

如有合理需求，可向通讯作者索取数据。此外，集成式网络应用程序可通过以下网址访问 https://CFDtoCNN.streamlit.app，补充材料中还提供了简要教程。

致谢

本研究属于 MoReDigi 项目（基于物理的工业数字化降阶模型开发）的一部分，该项目由巴斯克政府通过 ELKARTEK 研究资助计划（KK-2024/00117）资助。

资金声明

本研究是 MoReDigi（基于物理的工业数字化降阶模型开发）项目的一部分，该项目由巴斯克政府通过 ELKARTEK 研究资助计划（KK-2024/00117）资助。

CRediT 作者贡献声明

Mehran Sharifi： 撰写——审阅与编辑、撰写——初稿、Visualization、验证、软件、资源、方法、调查、正式分析、数据整理、概念化。

Gorka S. Larraona： 撰写——审阅与编辑、监督、资源、项目管理、方法、调查、正式分析、数据整理、概念化、经费获取。

Alejandro Rivas： 写作审阅与编辑、监督、资源、项目管理、方法、调查、正式分析、数据整理、概念构思。

参考文献

[1] G. Shomron 和 U. Weiser，《卷积神经网络中的空间相关性与值预测》，IEEE计算机体系结构快报，第18卷，第1期，第10–13页，2018年。[2] Y. Liu、H. Pu 和 D.-W. Sun，《利用卷积神经网络（CNN）高效提取深层图像特征，用于检测和分析复杂食品基质》，食品科学与技术趋势，第113卷，第193–204页，2021年。[3] S. Talafha、D. Wu、B. Rekabdar、R. Li 和 G. Wang，《利用先进CNN架构对水工结构数据进行分类和特征提取》，载于2021年第三届跨学科人工智能国际会议（TransAI），2021年：IEEE，第137–146页。[4] D. Bhatt 等，《计算机视觉CNN变体：历史、架构、应用、挑战与未来前景》，《电子学》，第10卷，第20期，文章编号2470，2021年。[5] X. Zhao、L. Wang、Y. Zhang、X. Han、M. Deveci 和 M. Parmar，《卷积神经网络在计算机视觉中的应用综述》，《人工智能评论》，第57卷，第4期，文章编号99，2024年。[6] E. Eslami 和 H.-B. Yun，《用于道路图像多类分类的基于注意力的多尺度卷积神经网络（A+ MCNN）》，《传感器》，第21卷，第15期，文章编号5137，2021年。[7] Z. Chen、J. Li、H. Liu、X. Wang、H. Wang 和 Q. Zheng，《利用连接注意力机制学习多尺度特征以识别语音情感》，《应用专家系统》，第214卷，文章编号118943，2023年。[8] D. Das、D. R. Nayak、S. V. Bhandary 和 U. R. Acharya，《CDAM-Net：基于通道洗牌双重注意力的多尺度CNN，通过眼底图像高效检测青光眼》，《人工智能工程应用》，第133卷，文章编号108454，2024年。[9] R. Yamashita、M. Nishio、R. K. G. Do 和 K. Togashi，《卷积神经网络：概述及其在放射学中的应用》，《影像洞察》，第9卷，第4期，第611–629页，2018/08/01 2018，doi：10.1007/s13244-018-0639-9。[10] H. Fırat、M. E. Asker 和 D. Hanbay，《使用不同降维方法与三维/二维CNN对高光谱遥感图像进行分类》，《遥感应用：社会与环境》，第25卷，文章编号100694，2022年。[11] Z. Sun，《卷积神经网络（cnn）中的模式识别》，载于多模态信息分析国际会议，2022年：施普林格，第295–302页。[12] M. Krichen，《卷积神经网络：综述》，《计算机》，第12卷，第8期，doi：10.3390/computers12080151。[13] J. Shen 等，《一种基于CNN的方法：利用空间窗化表面波数据构建横向非均匀S波速度模型》，IEEE地球科学与遥感汇刊，2024年。[14] Z. Li、X. Huang、X. Zhu、C. Yu 和 Y. Dai，《车辆出水过程中基于Attention-Unet和Angle-CNN的速度流场与姿态预测分析》，《海洋工程》，第336卷，文章编号121807，2025年。[15] H. Wang、X. Fan、Y. Yang、G. Wang 和 F. Xie，《利用卷积神经网络预测激波/边界层相互作用中的壁面压力》，《流体》，第9卷，第8期，文章编号173，2024年。[16] Y. Ma、Z. Du、Q. Xu 和 J. Qi，《基于深度学习方法的压气机叶栅流场重构》，《航空航天科学与技术》，第155卷，文章编号109637，2024年。[17] W. Zhang、H. Zhou、X. Bao 和 H. Cui，《基于 CNN–LSTM 混合模型时空特征提取的能源桩出口水温预测》，《能源》，第 264 卷，文章编号126190，2023年。[18] X. Bai、L. Zhang、Y. Feng、H. Yan 和 Q. Mi，《基于CNN-BiLSTM和随机森林的多变量温度预测模型》，《超级计算杂志》，第81卷，第1期，文章编号162，2025年。[19] R. Zhao、S. Zhong 和 R. You，《卷积神经网络在城市风场模拟中高效湍流建模的应用》，《流体物理学》，第36卷，第10期，2024年。

[20] S. Ghosh、V. K. Shukla、A. Singh 和 J. Chanda，《一种用于数据驱动湍流预测和高保真流体动力学代理建模的物理嵌入式Transformer-CNN架构》，《欧洲力学杂志B辑：流体》，第204372页，2025年。[21] L. Deng、Y. Wang、Y. Liu、F. Wang、S. Li 和 J. Liu，《一种基于CNN的涡识别方法》，《Visualization学报》，第22卷，第1期，第65–78页，2019年2月1日，doi：10.1007/s12650-018-0523-1。[22] Z. Wang、Y. Xu、Y. Zhang、Z. Ke、Y. Tian 和 S. Zhao，《一种用于自然对流并与卷积神经网络耦合的加速格子玻尔兹曼方法》，《流体物理学》，第36卷，第2期，2024年。[23] L. Qiao 等，《利用CNN和MLP对超声速边界层中的斜向TS波进行数据驱动流动不稳定性分析的方法》，《国际传热与流体流动杂志》，第117卷，第110010页，2026年。[24] G. M. Hobold 和 A. K. da Silva，《利用卷积神经网络和贝叶斯统计自动检测膜态沸腾的起始》，《国际传热传质杂志》，第134卷，第262–270页，2019年。[25] H.-J. Lee、K.-T. Kim、J.-H. Park、G. Bere、J. J. Ochoa 和 T. Kim，《基于卷积神经网络的电池储能系统虚假电池数据检测与分类》，《IEEE能源转换汇刊》，第36卷，第4期，第3108–3117页，2021年。[26] Q. Wang、X. Li、C. Xu、T. Yan 和 Y. Li，《利用图像处理和卷积神经网络识别并跟踪板式换热器中的气泡》，《国际多相流杂志》，第138卷，第103593页，2021年。[27] M. K. Padhan、A. Rai 和 M. Mitra，《利用一维卷积神经网络（1D-CNN）预测多晶材料微观组织中的晶粒尺寸分布》，《计算材料科学》，第229卷，第112416页，2023年。[28] N. Wankhade、V. Sale、R. Yadav、P. Jikar、S. Gadgekar 和 N. Dhokey，《利用CNN进行冶金微观组织分类：钢材热处理分析的全面研究》，《今日材料：会议录》，2024年。[29] B. Kayalibay、G. Jensen 和 P. Van Der Smagt，《基于CNN的医学成像数据分割》，arXiv预印本 arXiv:1701.03056，2017年。[30] A. W. Salehi 等，《CNN与迁移学习在医学成像中的研究：优势、挑战与未来前景》，《可持续性》，第15卷，第7期，第5930页，2023年。[31] S. Kareem、Z. J. Hamad 和 S. Askar，《CNN和人工神经网络在天气预报中的预测能力评估：综述》，《可持续工程与创新》，第3卷，第2期，第148页，2021年。[32] H. Di、C. Li、S. Smith、Z. Li 和 A. Abubakar，《对地震解释卷积神经网络施加解释约束》，《地球物理学》，第86卷，第3期，第IM63–IM71页，2021年。[33] N. Zheng 等，《结合生成对抗网络和CNN的ILUES框架：高效估算地下水污染源和水力传导系数》，《水文学杂志》，第621卷，第129677页，2023年。[34] Y. LeCun、Y. Bengio 和 G. Hinton，《深度学习》，《自然》，第521卷，第7553期，第436–444页，2015年。[35] M. M. Bronstein、J. Bruna、Y. LeCun、A. Szlam 和 P. Vandergheynst，《几何深度学习：超越欧几里得数据》，《IEEE信号处理杂志》，第34卷，第4期，第18–42页，2017年。[36] C. R. Qi、H. Su、K. Mo 和 L. J. Guibas，《PointNet：面向三维分类与分割的点集深度学习》，载于《IEEE计算机视觉与模式识别会议论文集》，2017年，第652–660页。[37] C. R. Qi、L. Yi、H. Su 和 L. J. Guibas，《PointNet++：度量空间中点集的深度层次特征学习》，《神经信息处理系统进展》，第30卷，2017年。[38] W. Wu、Z. Qi 和 L. Fuxin，《PointConv：三维点云上的深度卷积网络》，载于《IEEE/CVF计算机视觉与模式识别会议论文集》，2019年，第9621–9630页。

[39] H. Thomas、C. R. Qi、J.-E. Deschaud、B. Marcotegui、F. Goulette 和 L. J. Guibas，《KPConv：面向点云的灵活可变形卷积》，载于《IEEE/CVF国际计算机视觉会议论文集》，2019年，第6411–6420页。[40] T. Kipf，《利用图卷积网络进行半监督分类》，arXiv预印本 arXiv:1609.02907，2016年。[41] W. Hamilton、Z. Ying 和 J. Leskovec，《大规模图上的归纳表示学习》，《神经信息处理系统进展》，第30卷，2017年。[42] S. Tang、B. Li 和 H. Yu，《ChebNet：通过切比雪夫逼近利用整流幂单元高效、稳定地构建深度神经网络》，《数学与统计通信》，第1–27页，2024年。[43] P. Velickovic、G. Cucurull、A. Casanova、A. Romero、P. Lio 和 Y. Bengio，《图注意力网络》，《统计学》，第1050卷，第20期，第10–48550页，2017年。[44] R. Hanocka、A. Hertz、N. Fish、R. Giryes、S. Fleishman 和 D. Cohen-Or，《MeshCNN：一种以边为核心的网络》，《ACM图形学汇刊（ToG）》，第38卷，第4期，第1–12页，2019年。[45] X. Xu、X. Zhao、M. Wei 和 Z. Li，《图卷积网络综述：方法与应用》，Electronic Research Archive，第31卷，第7期，第4185–4215页，2023年，doi：10.3934/era.2023213。[46] S. Zhang、H. Tong、J. Xu 和 R. Maciejewski，《图卷积网络：全面综述》，Computational Social Networks，第6卷，第1期，第11页，2019年11月10日，doi：10.1186/s40649-019-0069-y。[47] L. Alzubaidi 等，《深度学习综述：概念、CNN架构、挑战、应用及未来方向》，《大数据杂志》，第8卷，第1期，第53页，2021年3月31日，doi：10.1186/s40537-021-00444-8。[48] X.-W. Zhou、Y.-F. Jin、Z.-Y. Yin、F.-T. Liu 和 X. Chen，《一种利用二阶锥规划进行弹塑性接触分析的新型改进型基于边的光滑粒子有限元法》，《计算力学与工程中的计算方法》，第441卷，第118016页，2025年6月1日，doi：https://doi.org/10.1016/j.cma.2025.118016。[49] P. Ram 和 K. Sinha，《重新审视最近邻搜索中的kd树》，载于《第25届ACM SIGKDD知识发现与数据挖掘国际会议论文集》，2019年，第1378–1388页。[50] J. Huang、Y. Li、R. Crawfis、S.-C. Lu 和 S.-Y. Liou，《完整的距离场表示》，载于《Visualization会议论文集，2001年。VIS'01》，2001年：IEEE，第247–561页。[51] M. W. Jones、J. A. Baerentzen 和 M. Sramek，《三维距离场：技术与应用综述》，《IEEE可视化与计算机图形学汇刊》，第12卷，第4期，第581–599页，2006年。[52] B. Chang、D. Cha 和 I. Ihm，《为大型多边形模型计算局部有符号距离场》，载于《计算机图形学论坛》，2008年，第27卷，第3期：Wiley Online Library，第799–806页。[53] F. Calakli 和 G. Taubin，《SSD：平滑有符号距离曲面重建》，载于《计算机图形学论坛》，2011年，第30卷，第7期：Wiley Online Library，第1993–2002页。[54] O. Sharma 和 N. Agarwal，《基于有符号距离的无组织平面截面三维曲面重建》，《计算机与图形学》，第62卷，第67–76页，2017年。[55] Y. Tang 和 J. Feng，《基于曲率自适应有符号距离场的多尺度曲面重建》，《计算机与图形学》，第70卷，第28–38页，2018年。[56] B. Krayer 和 S. Müller，《利用射线图在GPU上生成有符号距离场》，The Visual Computer，第35卷，第6期，第961–971页，2019年6月1日，doi：10.1007/s00371-019-01683-w。[57] J. Chibane 和 G. Pons-Moll，《用于隐式函数学习的神经无符号距离场》，《神经信息处理系统进展》，第33卷，第21638–21652页，2020年。

[58] Y. Jiang、D. Ji、Z. Han 和 M. Zwicker，“Sdfdiff：用于三维形状优化的有符号距离场可微渲染”，载于 IEEE/CVF计算机视觉与模式识别会议论文集，2020年，第1251–1261页。[59] C.-H. Lin、C. Wang 和 S. Lucey，“Sdf-srn：从静态图像中学习有符号距离三维物体重建”，《神经信息处理系统进展》，第33卷，第11453–11464页，2020年。[60] Z. Chen、H. Ledoux、S. Khademi 和 L. Nan，“利用深度隐式场从点云重建紧凑型建筑模型”，《国际摄影测量与遥感学会摄影测量与遥感杂志》，第194卷，第58–73页，2022/12/01/ 2022年，doi：https://doi.org/10.1016/j.isprsjprs.2022.09.017。[61] X. Long等人，“Neuraludf：学习无符号距离场，以对具有任意拓扑结构的曲面进行多视图重建”，载于 IEEE/CVF计算机视觉与模式识别会议论文集，2023年，第20834–20843页。[62] J. Shim、C. Kang 和 K. Joo，“用于三维形状生成的基于扩散的有符号距离场”，载于 IEEE/CVF计算机视觉与模式识别会议论文集，2023年，第20887–20897页。[63] S. Esposito，“有符号距离场在薄结构三维重建中的新型应用”，2025年。[64] J. Li、J. Yu、R. Wang 和 S. Gao，“用于神经室内场景重建的伪平面正则化有符号距离场”，《国际计算机视觉期刊》，第133卷，第6期，第3203–3221页，2025年。[65] P. Hubert-Brierre、E. Guérin、A. Peytavie 和 E. Galin，“加速有符号距离函数”，载于《计算机图形学论坛》，2025年：Wiley Online Library，第e70258页。[66] F. P. Preparata 和 M. I. Shamos，《计算几何：导论》。施普林格科学与商业媒体，2012年。[67] H. Edelsbrunner 和 E. P. Mücke，“三维阿尔法形状”，《ACM图形学汇刊》（TOG），第13卷，第1期，第43–72页，1994年。[68] K. Fischer，“阿尔法形状导论”，乌得勒支大学理学院信息与计算科学系，第17卷，第4页，2000年。[69] D. Cao、C. Wang、M. Du 和 X. Xi，“利用改进的三维阿尔法形状对机载激光雷达数据进行多尺度滤波的方法”，《遥感》，第16卷，第8期，第1443页，2024年。[70] Y. Fu 和 Y. Zhu，“用于提取激光目标边界点的自适应阈值 α-shapes 算法”，载于第五届数字信号与计算机通信国际会议（DSCC 2025），2025年，第13653卷：SPIE，第14–20页。[71] S. Wei，“基于激光雷达点云数据的建筑边界提取”，《国际摄影测量、遥感与空间信息科学档案》论文集，第37卷，第157–161页，2008年。[72] Y. Li、G. Gao、B. Cao、L. Zhong 和 Y. Liu，“使用双阈值阿尔法形状从点云中提取建筑边界”，载于2015年第23届地理信息学国际会议，2015年：IEEE，第1–4页。[73] M. S. Hamoud Al-Tamimi、G. Sulong 和 I. L. Shuaib，“利用阿尔法形状理论和磁共振图像对脑肿瘤进展进行三维可视化与体积测量”，《磁共振成像》，第33卷，第6期，第787–803页，2015/07/01/ 2015年，doi：https://doi.org/10.1016/j.mri.2015.03.008。[74] C. Varytimidis、K. Rapantzikos、Y. Avrithis 和 S. Kollias，“用于局部特征检测的 α-shapes”，《模式识别》，第50卷，第56–73页，2016/02/01/ 2016年，doi：https://doi.org/10.1016/j.patcog.2015.08.016。[75] J. D. Gardiner、J. Behnsen 和 C. A. Brassey，“阿尔法形状：测定形态多样结构的三维形状复杂度”，《BMC进化生物学》，第18卷，第1期，第184页，2018/12/05 2018年，doi：10.1186/s12862-018-1305-z。

[76] D. Bonneau、P.-M. DiFrancesco 和 D. J. Hutchinson，“用于三维岩崩体积分析的表面重建”，《ISPRS国际地理信息期刊》，第8卷，第12期，doi：10.3390/ijgi8120548。[77] E. K. Still、D. K. Schreiber、J. Wang 和 P. Hosemann，“用于原子探针断层数据聚类后属性测定的阿尔法形状分析（ASA）框架”，《显微学与微量分析》，第27卷，第2期，第297–317页，2021年，doi：10.1017/S1431927620024939。[78] K. Akdim、A. Mahdaoui、H. Roukhe、A. Hseini 和 A. Bouazi，“依据质量标准对多种三维重建方法进行研究与比较”，《软计算及其应用进展国际期刊》，第14卷，第125–137页，11/28 2022年，doi：10.15849/IJASCA.221128.09。[79] H. Zhao 和 Q. Hu，“隧道点云的三维重建与渲染可视化”，《国际摄影测量、遥感与空间信息科学档案》，第XLVIII-3/W1-2022卷，第93–101页，2022年，doi：10.5194/isprs-archives-XLVIII-3-W1-2022-93-2022。[80] Y. Chen 和 W. Yao，“基于特征降维从机载激光雷达数据中提取正交建筑边界”，《ISPRS摄影测量、遥感与空间信息科学年刊》，第V-2-2022卷，第351–358页，2022年，doi：10.5194/isprs-annals-V-2-2022-351- 2022。[81] F. Ismail、S. A. Shukor、N. Rahim 和 R. Wong，“从非结构化点云数据中进行表面重建以构建建筑数字孪生”，《先进计算机科学与应用国际期刊》，第14卷，第10期，2023年。[82] E. Jang 和 W. Kang，“利用无人机影像生成的三维点云和阿尔法形状估算河流中的河岸植被体积”，《应用科学》，第14卷，第1期，第20页，2023年。[83] E. Fernández、S. Février、M. Lacroix、R. Boman、L. Papeleux 和 J.-P. Ponthot，“一种基于水平集函数的粒子有限元法”，《计算物理学杂志》，第487卷，第112187页，2023/08/15/ 2023年，doi：https://doi.org/10.1016/j.jcp.2023.112187。[84] W. Wang等人，“突破分支结构的极限：基于不完整激光点云的稳健三维树木重建”，《应用地球观测与地理信息国际期刊》，第125卷，第103557页，2023/12/01/ 2023年，doi：https://doi.org/10.1016/j.jag.2023.103557。[85] F. Wang等人，“基于点云的树冠体积可改进树木生物量估算：评估不同的树冠体积提取算法”，《农业中的计算机与电子学》，第225卷，第109288页，2024年。[86] Z. Yuan、B. Xin、J. Zhang 和 Y. Xu，“利用点云数据评估三维织物平滑度，以提升质量控制水平”，《智能制造杂志》，第36卷，第5期，第3327–3343页，2025年。[87] E. K. Dey，“利用基于自适应邻域的 α-Shape 算法从激光雷达点云数据中提取屋顶边界点”，《IEEE开放获取》，第13卷，第163896–163906页，2025年，doi：10.1109/ACCESS.2025.3611301。[88] J. Yan、Y. Zhu、W. Xiong、C. S. Cai 和 J. Zhang，“一种基于声呐点云的水下钢结构缺陷检测方法”，《海洋工程》，第325卷，第120770页，2025/05/01/ 2025年，doi：https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2025.120770。[89] J. González、A. Meana-Fernández、I. V. Pérez 和 J. M. F. Oro，“采用数值方法研究圆管突变截面的局部损失系数”，《流体》，第9卷，第7期，doi：10.3390/fluids9070152。[90] G. Górski 和 K. Kucab，“腹主动脉及髂动脉中的血流时变模拟”，《欧洲生物物理学杂志》，第53卷，第7期，第429–445页，2024/11/01 2024年，doi：10.1007/s00249-024-01724-w。[91] H. W. Liepmann 和 A. Roshko，《气体动力学基础》。Courier Corporation，2001年。

[92] S. J. Hercus 和 P. Cinnella，“平面涡轮叶栅中不确定致密气体流的鲁棒形状优化”，载于流体工程分部夏季会议，2011年，第44403卷，第1739–1749页。[93] H. Hu、N. Hushmandi 和 M. Genrup，“燃气轮机叶片性能的数值研究：仿真模型与叶片几何形状的影响”，斯堪的纳维亚仿真学会，第184–191页，2023年。[94] J. H. Ferziger、M. Perić 和 R. L. Street，《流体动力学计算方法》。施普林格，2019年。[95] D. Delahaye、S. Puechmorel、P. Tsiotras 和 E. Feron，“飞机轨迹设计的数学模型：综述”，载于空中交通管理与系统，东京，2014年// 2014年：施普林格日本，第205–247页。[96] B. Delaunay，“论空球：纪念 Georges Voronoï”，《俄罗斯科学院院刊：数学辑》，第6期，第793–800页，1934年。[97] I. Alfaro、D. Bel、E. Cueto、M. Doblaré 和 F. Chinesta，“基于 α形状自然单元法的铝挤压三维仿真”，《计算力学与工程中的计算方法》，第195卷，第33-36期，第4269–4286页，2006年。αH. Si 和 K. Gärtner，“基于约束德劳内四面体剖分的三维边界恢复”，《国际工程数值方法杂志》，第85卷，第11期，第1341–1364页，2011年3月18日 2011年，doi: https://doi.org/10.1002/nme.3016。[98] Q. Du 和 D. Wang，“三维德劳内三角剖分的约束边界恢复”，《国际工程数值方法杂志》，第61卷，第9期，第1471–1500页，2004年。[99] S. H. Lo，“三维并行德劳内三角剖分”，《计算力学与工程中的计算方法》，第237-240卷，第88–106页，2012年9月1日 2012年，doi: https://doi.org/10.1016/j.cma.2012.05.009。[100] M. S. Floater，“广义重心坐标及其应用”，《数值学报》，第24卷，第161–214页，2015年。[101] G. Rizzieri、L. Ferrara 和 M. Cremonesi，“用于黏弹性与弹黏塑性自由表面流仿真的分区拉格朗日有限元方法”，《计算力学与工程中的计算方法》，第443卷，第118071页，2025年8月1日 2025年，doi: https://doi.org/10.1016/j.cma.2025.118071。[102] J. Warren、S. Schaefer、A. N. Hirani 和 M. Desbrun，“凸集的重心坐标”，《计算数学进展》，第27卷，第3期，第319–338页，2007年10月1日 2007年，doi: 10.1007/s10444-005-9008-6。[103] V. Skala，“齐次坐标中的重心坐标计算”，《计算机与图形学》，第32卷，第1期，第120–127页，2008年。[104] K. Hormann，“重心插值”，载于《逼近理论XIV：圣安东尼奥2013》：施普林格，2014年，第197–218页。[105] H. Chen、T. Xie、M. Liang、W. Liu 和 P. X. Liu，“一种基于局部切平面距离、通过聚类实现三维点云分割的方法”，《模式识别》，第137卷，第109307页，2023年。[106] Y. Zeng、T. A. Nguyen、B. Yan 和 S. Li，“一种用于曲线重建的基于距离的无参数算法”，《计算机辅助设计》，第40卷，第2期，第210–222页，2008年。[107] M. W. Jones 和 R. A. Satherley，“使用空间填充亚体素距离场的形状表示”，载于形状建模与应用国际会议论文集，2001年5月7日至11日 2001年，第316–325页，doi: 10.1109/SMA.2001.923403。[108] M. W. Jones，“使用体数据的面部重建”，载于 VMV，2001年，第1卷，第135–150页。[109] A. Narayanan，“使用核细分的快速二值膨胀/腐蚀算法”，载于《计算机视觉——ACCV 2006》，柏林，海德堡，P. J. Narayanan、S. K. Nayar 和 H.-Y. Shum 编，2006年// 2006年：施普林格柏林海德堡，第335–342页。

[111] M. Khosravy、N. Gupta、N. Marina、I. K. Sethi 和 M. R. Asharif，“形态学滤波器：源自自然几何腐蚀与膨胀的启发”，载于《仿生计算与优化：理论与应用》，S. Patnaik、X.-S. Yang 和 K. Nakamatsu 编。Cham：施普林格国际出版，2017年，第349–379页。[112] R. C. Gonzalez 和 R. E. Woods，《数字图像处理》。Editora Blucher，2000年。[113] A. Shakouri、H. J. van Waarde 和 M. K. Camlibel，“二次矩阵不等式所诱导集合的切比雪夫中心与半径”，《控制、信号与系统数学》，2025年10月23日 2025年，doi: 10.1007/s00498-025-00424-w。[114] S. F. Frisken 和 R. N. Perry，“基于距离场的设计”，ACM SIGGRAPH 2006年课程，第60–66页，2006年。[115] B. Chang、D. Cha 和 I. Ihm，“大型多边形模型的局部有符号距离场计算”，计算机图形学论坛，第27卷，第3期，第799–806页，2008年5月1日 2008年，doi: https://doi.org/10.1111/j.1467-8659.2008.01210.x。[116] S. Lou、X. Jiang 和 P. J. Scott，“形态学 α 形状方法在工程表面地形特征提取中的应用”，《测量》，第46卷，第2期，第1002–1008页，2013年。[117] R. C. dos Santos、M. Galo 和 A. C. Carrilho，“使用自适应 α 形状算法从激光雷达数据中提取建筑屋顶边界”，IEEE 地球科学与遥感快报，第16卷，第8期，第1289–1293页，2019年。[118] H. Edelsbrunner、D. Kirkpatrick 和 R. Seidel，“论平面中的点集形状”，IEEE 信息论汇刊，第29卷，第4期，第551–559页，2003年。[119] D. F. Watson，“n 维德劳内剖分的计算及其在沃罗诺伊多胞体中的应用*”，《计算机杂志》，第24卷，第2期，第167–172页，1981年，doi: 10.1093/comjnl/24.2.167。[120] M. Lacroix、E. Fernández、S. Février、L. Papeleux、R. Boman 和 J.-P. Ponthot，“面向粒子有限元法的高效基于水平集的网格自适应”，《计算力学与工程中的计算方法》，第450卷，第118644页，2026年3月1日 2026年，doi: https://doi.org/10.1016/j.cma.2025.118644。[121] M. Schewe、I. Noll、T. Bartel 和 A. Menzel，“面向基于粒子有限元法与相变模型的金属沉积仿真”，《计算力学与工程中的计算方法》，第437卷，第117730页，2025年3月15日 2025年，doi: https://doi.org/10.1016/j.cma.2025.117730。[122] S. H. Park、S. S. Lee 和 J. H. Kim，“一种使用加权 α 形状的表面重建算法”，载于模糊系统与知识发现国际会议，2005年：施普林格，第1141–1150页。[123] R. Ohbuchi 和 T. Takei，“使用阿尔法形状比较三维模型的形状相似性”，载于第11届太平洋计算机图形学与应用会议，2003年会议录，2003年：IEEE，第293–302页。[124] H. N. Ratliff，“任意三个二维点的曲率、外接半径与外心的笛卡尔公式”，2019年。[125] X. Chen 等人，“基于物理信息神经网络的血流动力学建模：一种渐进式边界复杂度方法”，《计算力学与工程中的计算方法》，第438卷，第117851页，2025年4月1日 2025年，doi: https://doi.org/10.1016/j.cma.2025.117851。[126] B. Albers、M. Kada 和 A. Wichmann，“机载激光雷达点云中建筑轮廓的自动提取与正则化”，国际摄影测量、遥感与空间信息科学档案，第41卷，第555–560页，2016年。[127] J. Hou、Y. Yuan 和 S. Schwertfeger，“区域图：使用沃罗诺伊图生成拓扑地图”，载于2019年第19届先进机器人国际会议（ICAR），2019年：IEEE，第509–515页。

[128] Y. Maillot、B. Adam和M. Melkemi，“由无组织点集进行形状重建”，载于国际图像分析与识别会议，2010年：施普林格，第274–283页。[129] B. Presles、J. Debayle、Y. Maillot和J.-C. Pinoli，“由点集自动识别二维形状”，载于 国际图像分析与识别会议，2011年：施普林格，第183–192页。[130] J. Giesen、F. Cazals、M. Pauly和A. Zomorodian，“共形 α 形状滤过”，*The Visual Computer*，第22卷，第8期，第531–540页，2006年。[131] E. Carlsson和J. Carlsson，“使用对偶主动集二次规划计算α 复形”，*Scientific Reports*，第14卷，第1期，第19824页，2024年。[132] P. Halmos，“测度论 Springer Verlag”，柏林—纽约，1974年。