arXiv:2602.15565v1 [math.MG] 17 Feb 2026

乌雷松宽度与手术

Aleksandr Berdnikov、Brendan Isley

2026年2月18日

摘要

我们分析流形在连通和运算下乌雷松宽度的变化，具体而言，研究如何根据连通和的宽度界定各和项的宽度，反之亦然。我们的方法也适用于这些空间的万有覆盖，以及更一般类型的手术。最后，我们给出一些例子，说明估计中常数的最优性。

1 引言

乌雷松宽度是维数论中的一个经典概念，最初于20世纪20年代提出，用来衡量对于任意 k，我们能在多大程度上用一个 k 维空间近似某个空间。格罗莫夫在20世纪80年代和20世纪90年代，将这一主题重新带入人们的视野，并在标量曲率及相关概念 [6,10], 以及收缩几何 [5, 10, 11]的背景下对其进行了研究。关于乌雷松宽度的全面历史，可见论文 [1],第 2 节。

下面给出相关定义。

定义 1. 映射 $f\colon X \to Y$ 的宽度 $\mathrm{W}(f)$是其最大纤维的大小：

$$\mathrm{W}(f) := \sup_{y\in Y} \operatorname{diam}(f^{-1}(y))$$

定义 2. 完备度量空间 X 的乌雷松 k-宽度 $\mathrm{UW}_k(X)$是其投影到一个 k维空间的最小宽度：

$$\mathrm{UW}_k(X) := \inf\{w \text{ for which } \exists P^k, f : X \to P^k \text{ such that } \mathrm{W}(f) = w\},$$

其中， P^k 是一个单纯 k复形， f 是一个固有映射。

我们通常简称为 k-宽度。直观而言， k-宽度衡量空间X 能够在多大程度上被一个 k维对象近似。注意， k-宽度有一个由$(k-1)$-宽度给出的上界，因此在可能的情况下，低维宽度界更理想，但往往也更难证明。

空间 X 的宏观维数定义为

$$\dim_{mc}(X) = \min\{k \geq 0 : \mathrm{UW}_k(X) < \infty\}.$$

例如，圆柱面 $S^1 \times \mathbb{R}$ 的拓扑维数为 2，而其宏观维数为 1。

理解乌雷松宽度与手术之间的关系，有助于证明有用的结果。例如，克内泽–米尔诺素分解定理 [12]指出，紧致3维流形 M 可以在连通和运算下唯一分解为素3维流形：

$$M = X_1 \# \ldots \# X_s \# (S^2 \times S^1) \# \ldots \# (S^2 \times S^1) \# K_1 \# \ldots \# K_t,$$

其中每个 X_i 的基本群都是有限的，并且每个 K_j 都是非球面的。格罗莫夫在标量曲率理论中的一项重要结果表明，具有正标量曲率度量的紧3维流形 M 在其 Kneser–Milnor 素分解中不含非球面的连通和项（[8], 第 3 节 10。逆命题同样成立）。已知任何具有正标量曲率的完备3维流形，特别是具有正标量曲率的紧3维流形的万有覆盖，都具有有界1宽度（[7, 8]）。随后，格罗莫夫的证明利用这一点，根据几何群论中的斯塔林定理，对 π_1（M）施加限制。另一方面，如果我们知道，连通和的万有覆盖的1宽度上界意味着每个连通和项的万有覆盖也具有1宽度上界，那么我们就能将这一结果作为另一个广为人知的结果的直接推论，从而得到一种替代证明：格罗莫夫的结果表明，非球面的 n-流形的万有覆盖的宏观维数等于 n （[6], 第 2 节 $_{1\,2}$）。

乌雷松宽度与手术之间另一种可能的联系，源于一个本身就很自然且有趣的问题：如果我们有两个 k-宽度有界的流形，那么通过手术将这两个流形连接起来所构造的流形，是否也具有有界的 k-宽度?

本文将探讨这些问题，并针对若干特定情形给出定量答案。为表述我们的结果，我们先说明所考虑的手术类型。设 M_1 和 M_2 是两个 n 维流形，并假设 A 是一个带边界的紧致 n 维流形，且嵌入到 M_i 中（本文始终假设这些嵌入保持 A 的黎曼度量）。用 $M_1 \#_A M_2$ 表示通过以下连通和型构造所定义的空间：从 M_1 和 M_2 中分别移除嵌入其中的 A 的内部，再将 M_1 中的 ∂A 与 M_2 中的 ∂A 识别起来（所得空间沿 ∂A 可能不是光滑流形）。特别地，当 A 是球 $B^n \subset \mathrm{Int}(M_i)$ 时，从拓扑角度看，这与 M_1 和 M_2 的连通和一致。

现在我们可以陈述主要定理了。

定理 1。设 M_1 和 M_2 是完备 n维流形，且每个流形都包含一个带边界的紧致 n维流形 A 的嵌入副本。则对于 $i \in \{1, 2\}$ 和 $k \in \mathbb{N}$，我们有

$$\mathrm{UW}_k(M_i) \leq 2\,\mathrm{UW}_k(M_1 \#_A M_2) + \mathrm{diam}_{M_i}(A)$$

特别 地，如果 $M_1 \#_A M_2$ 的宏观维数上界为 k，那么每个 M也是如此 $_i$.

定理 1'。如果 M_1、M_2 是完备流形，且每个流形都包含一个带边界的紧致 n 维流形 A 的嵌入副本，那么对于 $k \in \mathbb{N}$，我们有

$$\mathrm{UW}_k(M_1 \#_A M_2) \leqslant \mathrm{UW}_k(M_1) + \mathrm{UW}_k(M_2) + \mathrm{diam}_{M_1 \# M_2}(\partial A).$$

在某些假设下，我们可以降低这些不等式中的上界：

定理 2. 若在定理 1 的设定下，我们有 $\dim(M_i) \geqslant 3$，且满足以下任一条件：

a) $k = 1$，且 ∂A 是单连通的（或更一般地，对于某个 i，$\pi_1(\partial A) \to 0 \in \pi_1(M_i \setminus \mathrm{Int}(A))$，或 $H^1(\partial A, \mathbb{Z}) \cong 0$），或

b) $k = n - 1$ 当 M_i 是无边界的完备定向流形且 ∂A 是连通的时，

那么我们可以得到一个更好的估计：

$$\mathrm{UW}_k(M_i) \le \mathrm{UW}_k(M_1 \#_A M_2) + \mathrm{diam}_{M_i}(A).$$

定理 2'. 若将定理 2 的条件 a) 与 b) 改为

a) $k = 1$ 且 $\pi_1(\partial A) \to 0 \in \pi_1(M_i)$ 对每个 i （或 $H^1(\partial A, \mathbb{Z}) \cong 0$），或

b) $k = n-1$， ∂A 是连通的，且要么 A，要么 $M_i \setminus \mathrm{Int}(A)$ 二者均为完备定向，其唯一边界为连通的 ∂A，或

c) A 是一个球 B^n，则

$$\mathrm{UW}_k(M_1 \#_A M_2) \leqslant \max_i(\mathrm{UW}_k(M_i)) + \mathrm{diam}_{M_1 \# M_2}(\partial A).$$

与定理 1 不同，定理 2 的方法在同时应用于若干连通和时，不会使估计中的各项叠加，也就是说，当单个 M 具有多个 A_i 、从而将其连接到其他彼此分离的 M_i 时亦然。我们在万有覆盖这一特殊情形中利用这一性质。在此情形下，我们能够证明：一个连通和的万有覆盖上的某些宏观维数界蕴含每个和项的万有覆盖上的同一界。然而，与先前所陈述的结果不同，我们在乌雷松宽度估计中并没有一个万有常数。

将 X 的万有覆盖记为 $\tilde{X}$；则

定理 3. 设 M 和 M' 是完备的 n流形（$n \geqslant 3$），且各自都包含一个带边界的连通紧致 n流形 A 的嵌入副本。假设 A和 ∂A 是单连通的，并且 ∂A上的距离函数在 M中的值至多是其在 $M\#_A M'$中的 C（$\geqslant 1$）倍。那么

$$\mathrm{UW}_1(\widetilde{M}) \leqslant C\,\mathrm{UW}_1(\widetilde{M\#_A M'}) + 2\,\mathrm{diam}_{\tilde{M}}(A).$$

此外，若 M和 M'都没有边界，则同样的估计对 $n-1$ 宽度也成立：

$$\mathrm{UW}_{n-1}(\widetilde{M}) \leqslant C\,\mathrm{UW}_{n-1}(\widetilde{M\#_A M'}) + 2\,\mathrm{diam}_{\tilde{M}}(A).$$

特别地，若 $M\#_A M'$的宏观维数至多为 1 或 $n-1$，则 M也满足同样的结论。

我们来谈谈定理中的常数 C 。之所以需要它，是因为尽管我们假设 ∂A 上的黎曼度量在其所在的每个空间中都相同，但距离函数未必如此，因为不同的环境空间中可能存在不同的捷径。若 $M \setminus A$ 在 M中是测地凸的，则不存在捷径，这意味着 $C = 1$。一般而言，

$$C = \sup_{x,y \in \partial A} \frac{d_{\tilde{M}}(x,y)}{d_{\widetilde{M\#_A M'}}(x,y)},$$

其中 x 和 y 应位于万有覆盖中的同一个 ∂A 副本内。注意， ∂A 的紧致性和光滑性保证了 $C < \infty$，并且 $C \geqslant 1$，因为在无穷小尺度上，距离函数会收敛到 ∂A 的距离函数。

处理这一技术细节的另一种方法是限制 ∂A 的副本数量。例如，如果 $M\#_A M'$可由最优投影 f 的单个纤维相交的 $f: M\#_A M' \to X^{n-1}$。在 $M\#_A M'$ 中，不同 ∂A 副本之间的距离大于 $\mathrm{UW}_{n-1}(M\#_A M')$，那么

这种情形实质上可归约为定理 2 的设定，因此我们可以得到关于覆盖空间的类似估计（这一点将在备注 1 中讨论）。

现在来看反向不等式：

定理 3′. 设 M 与 M' 为完备的 n-流形，各自包含一个单连通紧致 n-流形 A 的嵌入副本，且该流形具有单连通边界 ∂A。假设 ∂A 上的距离$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$函数在 $M\#_A M'$ 中至多是其在 M 中的 $C'(\geqslant 1)$ 倍。则

$$\mathrm{UW}_k(\widetilde{M\#_A M'}) \leqslant C' \max_i(\mathrm{UW}_k(\widetilde{M_i})) + 2\,\mathrm{diam}_{\widetilde{M\#_A M'}}(\partial A)$$

只要下列条件之一成立：

a) $k = 1$，或

b) $k = n-1$、M 与 M' 均无边界，或

c) A是一个球 B_n.

注意，在这个定理中，C' 与原文中的 C 不同，因为它以相反的方向比较 ∂A 上的度量。也就是说，

$$C' = \sup_{x,y\in\partial A} \frac{d_{\widetilde{M_1\#_A M_2}}(x,y)}{d_{\widetilde{M_i}}(x,y)},$$

注意，在万有覆盖中，x 和 y 应位于同一个 ∂A 副本中。

我们注意到，关于 $n-1$-宽度的定理 3 的非定量版本，已使用不同的方法在文献（[4], 定理 7.14）中针对连通和得到了证明。

本文的组织结构如下。第 2 节给出定理 1 的证明。第 3 节证明定理 2，第 4 节说明如何调整定理 2 的证明以证明定理 3。第 5 节列出一些反例，说明无法消除我们估计中的各种不理想常数。

作者谨此感谢 Yevgeny Liokumovich 就本文提出的许多宝贵意见。

2 简单的“无覆盖”情形：坍缩 A

在本节中，我们用一种直接的方法证明定理 1。首先需要一个引理，它使我们可以假设用于测量乌雷松宽度的映射是单纯映射。此引理引自（[3], 引理 3.9）。

引理 1. </style}设 X 是一个带有度量和单纯结构[1] 的拓扑空间，且 $h\colon X \to K$ 是到单纯复形 K 中的一个固有映射，对所有 $z \in K$，均有 $\mathrm{diam}(h^{-1}(z)) < W$。那么存在一个单纯固有映射 $h' : X' \to K'$，使得对所有 $z \in K'$，均有 $\mathrm{diam}((h')^{-1}(z)) < W$（其中 X'和 K' 分别是 X 和 K的细分）。

证明。令 K' 为 K 的一个细分，使得每个顶点$v \in K'$ 的开星 S_v 的原像直径小于 W。利用单纯逼近定理，将 h 逼近为一个单纯映射 h'（对应于 X的某个细分），使得对每个 $x \in X'$，$h'(x)$都包含在包含 $h(x)$的最小闭胞腔中。由此可知，h' 的每个纤维都包含在 K'中的某个开星 S_v 的原像内，因此其直径小于 W。 □

[1]也就是说，度量在单形上不必是平坦的

现在我们证明定理 1。

定理 *1* 的证明。设 $f\colon\ M_1\#_A M_2 \to P^k$ 是一个宽度为 W 的固有映射，其中 W 可任意选取为接近 $\mathrm{UW}_k(M_1\#_A M_2)$ 的值。我们希望将此映射从 $M_1 \setminus A$ 扩展到整个 M_1，方法是将 A 中的所有点映射到同一个点。由于 f 已经在 ∂A上定义，其像 $f(\partial A)$ 需要在 P^k中被压缩为一点。我们希望所得空间 $P^k/f(\partial A)$ 仍然是一个单纯 k-复形；本段的其余部分将处理这一技术细节。根据引理 1，我们可以假设，对于某个二元组 $(M_1\#_A M_2,\ \partial A)$ 的三角剖分，f 是单纯的。于是 $f(\partial A)$ 是 P^k 的一个子复形，而商 $P = P/f(\partial A)$ 可以赋予一个具有单纯结构的 k-复形（商映射本身不会是单纯的，但我们并不需要这一点）。

它在 $M_1 \setminus A$ 上的表现类似于 f，并将所有 A 映到同一点 p_A。为了估计此映射的纤维大小，我们需要考虑几种情况。设 x_1, x_2 是纤维 $F_{\hat{p}} := \hat{f}^{-1}(\hat{p})$ 中任意两个点，其中某个 $\hat{p} \in \hat{P}$。

- 如果 $\hat{p} \neq p_A := f(\partial A)/f(\partial A)$，那么 $F_{\hat{p}}$ 是某个 $p \in P$ 的原像。最短测地线 $\gamma \subset M_1\#_A M_2$ 从 x_1 到 x_2 的长度至多为 W，因为它们位于同一纤维 $f^{-1}(p)$ 中。如果 γ 与 $M_2 \setminus A$ 不相交，那么 M_1 中的 γ 副本会以长度 $\leqslant W$ 连接 x_1 和 x_2。如果 γ 与 $M_2 \setminus A$ 相交，那么 γ 并未全部包含在 $M_1 \setminus A$ 中，并且 $d(x_1, x_2)$ 可能与它在 $M_1\#_A M_2$ 中时有所不同。在这种情况下，令 y_1 和 y_2 分别为 γ 中 ∂A 的第一个和最后一个点，使得 γ 的弧段 $[x_i, y_i]$ 完全位于 $M_1 \setminus \mathrm{Int}(A)$ 中。于是

$$d_{M_1}(x_1, x_2) \leqslant \big(d_\gamma(x_1, y_1) + d_\gamma(y_2, x_2)\big) + d_{M_1}(y_1, y_2) \leqslant$$
$$\leqslant d_\gamma(x_1, x_2) + \mathrm{diam}_{M_1}(A) \leqslant W + \mathrm{diam}_{M_1}(A).$$

- 若 $\hat{p} = p_A$，则 $f(x_i) \subset f(\partial A)$，因此令 $w_i \in \partial A$ 满足 $f(w_i) = f(x_i)$。
  假设 x_i 都在 A之外。令 γ_i 为 $M_1\#_A M_2$ 中从 x_i 到 w_i的一条最短测地线，并令 y_i 为 ∂A 在 γ_i 中的第一个点，使得 $[x_i, y_i) \subset M_1 \setminus A$。那么

$$d_{M_1}(x_1, x_2) \leqslant d_\gamma(x_1, y_1) + d_{M_1}(y_1, y_2) + d_\gamma(y_2, x_2) \leqslant$$
$$\leqslant d_\gamma(x_1, w_1) + \mathrm{diam}_{M_1}(A) + d_\gamma(w_2, x_2) \leqslant 2W + \mathrm{diam}_{M_1}(A).$$

  若 $x_i \notin A$，但 $x_j \in A$，则 $d_{M_1}(x_i,\ x_j) \leqslant d_\gamma(x_i,\ w_i) + d_{M_1}(y_i,\ x_j) \leqslant W + \mathrm{diam}_{M_1}(A)$。
  若 x_i 都在 A中，$d_{M_1}(x_1,\ x_2) \leqslant \mathrm{diam}_{M_1}(A)$

□

证明。（定理 1'的证明）若 $p_i\colon\ M_i \to P_i^k$ 是宽度与 $\mathrm{UW}_k(M_i)$ 相差不超过 ε 的映射，那么我们可以定义一个映射 $p_\#$，从 $M_1\#_A M_2$ 到 P_1，并将 P_2 沿 $p_i(\partial A)$ 粘合。在 $M_i \setminus \mathrm{Int}(A)$ 上，我们将 $p_\#$ 定义为 p_i的限制。于是，$p_\#$ 的纤维至多是 p_i的纤维沿 ∂A连接而成。因此，要从 $p^{-1}{}_\#(x)$ 中的一点到达另一点，至多需要经过一条链（p_i的纤维）-（∂A）-（p_j的纤维）。更精细的距离计算与定理 1 中的完全相同。

□

3 精细化的“无覆盖”情形：收缩 ∂A

定理 1 中系数 2 的原因是，当我们从映射 $M_1\#_A M_2 \to P^k$构造映射 $M_1 \to \hat{P}^k$ 时，将所有 A 都压缩到一个点，因此原本相交于∂A 的所有纤维都变成了一个更大的纤维。如果我们在将映射延拓到A时，不是压缩 A，而是使用 P^k 中 ∂A 的零伦，就可以避免这种纤维混合。接下来的引理使我们能够以一种有用的方式将映射延拓到一个领圈邻域。

引理 2. 设 $f\colon M \to P$ 是到复形 $P^{k>0}$ 的真单纯映射，且 Σ 是 ∂M 的一个紧致连通分支集合，使得 $f|_\Sigma$ 可缩。设 M_Σ 是M，并将一个领圈邻域 $\Sigma\times[0,1]$ 附接到 M（通过 $\Sigma\times\{1\}$）。那么存在一个真单纯映射 $f_\Sigma\colon M_\Sigma\to Q^k$，其中某个 $Q^k\supset P^k$满足：$f_\Sigma|_M = f$, $\Sigma\times\{0\}$是一个纤维 $f_\Sigma^{-1}(p_0)$，并且任何同时与 M和 $\Sigma\times[0,1]$相交的纤维都会经过 Σ：$f_\Sigma(\Sigma\times[0,1])\cap P^k = f(\Sigma)$。

证明。令 $H\colon \Sigma\times[0,1]\to P^k$是将 $f =: f_1$零伦到常值映射 $f_0\colon \Sigma\to p_0\in P^k$的零伦。通过采用单纯逼近，也可以使 H 成为单纯映射。我们还可以假设$f^{-1}(p_0) = \varnothing$且 $H^{-1}(p_0) = \Sigma\times\{0\}$，方法是令 p_0为一个新点，并用一条边将其附着到 P^k上。

我们希望在 $\Sigma\times[0,1]$上将 f定义为 H。然而，如果某个原始纤维 $f^{-1}(p)$离 Σ很远，而 H在同一点上也有非平凡纤维 $H^{-1}(p)\neq\varnothing$，那么我们就无法控制该纤维的大小。为避免这种情况，我们向 P^k添加额外胞腔，供 H专用。也就是说，令 P'为 P的一个副本（并分别取 f和 H的对应副本 f'和 H'），并定义

$$Q^k := P^k \bigcup H'(\Sigma\times[0,1])/\sim$$

其中等价关系 $\sim$将第一个副本中的 $f(\Sigma)$与第二个副本中的 $H'(\Sigma\times\{1\}) = f'(\Sigma)$识别起来。于是我们可以定义 f_Σ：将 $M\cup_\Sigma(\Sigma\times[0,1])\to Q^k$定义为在 M 上的 f，并定义为在 $\Sigma\times[0,1]$上的 H'。现在，任何同时位于 M 和 $\Sigma\times[0,1]$ 中的纤维都必须经过 Σ，因为它必须位于某个点 x 之上，而该点同时位于 P^k 和 $H'(\Sigma\times[0,1])$中；根据 Q^k 的构造，这意味着 $x\in f(\Sigma)$。 □

要将这个构造应用于我们的情形，需要确保 ∂A 上的可缩性：

引理 3。 设 $\Sigma^{n-1}\subset\partial M^n$ 是 ∂M 的一些连通分支 Σ_i 的紧致并。若 $f\colon M\to P^k$ 是到复形 P^k 的真单纯映射，则在某个 $Q^k\supset P^k$ 中，$f|_\Sigma$ 是可缩的，条件是以下任一情况成立：

- $k=1$ and $\pi_1(\Sigma_i)\to 0\in\pi_1(M)$ for each i, or $H^1(\Sigma,\mathbb{Z})\cong 0$, or
- $k = n-1$、M是完备定向的，$\dim(M)\geqslant 3$，且 $\partial M = \Sigma$是紧的并且连通。

证明。如果 $k=1$，那么 P^k是一个图。如果 $\pi_1(\Sigma_i)\to 0\in\pi_1(M)$，那么由复合可得 $f_*\colon \pi_1(\Sigma)\to\pi_1(P^1)$为 0，并且可以通过对骨架进行归纳来压缩 $f|_{\Sigma_i}$，因为所有对此的障碍都是 0；随后将所有 $f(\Sigma_i)$聚拢到一起，必要时添加边，使 P^1连通。另一个条件$H^1(\Sigma,\mathbb{Z}) = 0$同样禁止映射到连通图中的不可缩映射。只需检验单个连通分支 Σ_i即可。假设存在这样的映射 $f\colon \Sigma_i\to P^1$。那么 $\pi_1(P^1)$是自由的，因此它的任意子群也都是自由的，特别是 $I = f_*(\pi_1(\Sigma_i))$。如果 $f|_{\Sigma_i}$不可缩，那么 I 是一个非平凡群；由于它是自由的，因此存在一个满射 $g\colon I\to\mathbb{Z}$。那么该复合

$$\pi_1(\Sigma_i)\xrightarrow{f_*} f_*(\pi_1(\Sigma_i)) = I\xrightarrow{g}\mathbb{Z}$$

是满射，这与 $\mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma_i),\mathbb{Z})\cong\mathrm{Hom}(H_1(\Sigma_i,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$ 因万有系数定理而为零相矛盾。至此完成情形 $k=1$ 的证明。

现在转而假设 $k = n-1$ 与 M 是具有连通紧边界$\partial M = \Sigma$的完备定向。设 $f\colon M\to P^{n-1}$为固有映射。通过向 P^{n-1} 添加维数为 $\leqslant n-1$ 的胞腔，我们可以对 $i<n-1$令 $\pi_i(P^{n-1})\cong 0$，这意味着 P^{n-1}变得同伦等价于球面的楔和 $\bigvee_i S_i^{n-1}$。根据下面的引理 4（其中我们标记 $m=n-1$），这保证 f 在 ∂A 上是可缩的。 □

引理 4. 设 M 是一个维数为 $m+1\geqslant 3$、带有紧致连通边界 ∂M 的完备定向流形，且 P^m 是一个与 $\bigvee_i S_i^m$ 同伦等价的单纯复形。若 $f\colon M\to P^m$ 是一个正则映射，则 $f|_{\partial M}$ 是零伦的。

证明。我们先概述论证的几何思路。

如果 M 是一个带紧边界的完备 $m+1$维流形，且 $P=\bigvee_i S_i^m$，那么可以通过正则值 $p_i \in S_i^m$的原像来直观理解到 P 的光滑映射；这些原像将是余维为 m的子流形。在 M 中，如果映射是适当映射，那么这些子流形将是一组两端都位于 ∂M 上的弧。如果 M 是定向的，且 ∂M 是连通的，那么每条弧的两个端点对映射 $f|_{\partial M}$的“度”贡献大小相等、符号相反，因此“总度”必定为零。

现在我们将这一论证表述得更严谨。由于 $P^m \sim \bigvee_i S_i^m$，我们可以选取胞腔 $C_i \subset P$，使得基本类 $[C_i] \in H^m(P,\ P \setminus \mathrm{Int}(C_i))$ 构成 $H^m(P^m)$ 的一组基。对于维数不超过 $m-1$ 的骨架，将映射 $f|_{\partial M}$ 收缩的障碍为零，因为 $\pi_k(\bigvee_i S_i^m) \cong 0$ 对于 $k<m$ 成立。在维数 m 时，障碍属于

$$H^m(\partial M, \pi_m(\bigvee_i S_i^m)) \cong \pi_m(\bigvee_i S_i^m) \cong H_m(\bigvee_i S_i^m) \cong \bigoplus_i \mathbb{Z}_i$$

其中第一个等式用到 ∂M 是一个闭、连通且可定向的 m 维流形，因此 $H^m(\partial M, G) \cong G$；第二个等式则用到 $m>1$ 来得到 Hurewicz 同构。在这些同构下，障碍变成基本类 $[\partial M]$ 的像 $f_*([\partial M]) \in H_m(P)$，只需验证它与每个 $[C_i]$ 的配对为 0。这是成立的，因为 $[\partial M]$ 是一个边界：

$$f_*([\partial M]) \frown [C_i] = \partial[M] \frown f^*([C_i]) = [M] \frown d(f^*([C_i])) = [M] \frown f^*(d[C_i]) = [M] \frown f^*(0) = 0.$$

若 M 紧致，这个计算对通常的同调也成立；但若它不紧致，则 $[M]$ 只在 Borel-Moore 同调中存在，此时为了使配对有意义，$f^*([C_i])$ 必须属于紧支撑上同调。不过，f 是一个固有映射，因而保证了这一点。因此，使 $f|_{\partial M}$ 可缩的所有障碍都为 0，也就是说，它是可缩的。 □

定理 *2* 的证明。考虑一个固有映射 $f\colon M_1 \#_A M_2 \to P^k$，其宽度 $\mathrm{W}(f)$ 任意接近 $\mathrm{UW}_k(M_1 \#_A M_2)$（根据引理 1，我们可以假设 f 是单纯的）。根据引理 3，我们可以向 P^k 添加单形，使其在边界 ∂A 上可缩；引理 2 则允许我们再添加一些单形，并将 f 从 $M_1 \setminus A$ 延拓到 ∂A 内部的一个领圈邻域（并进一步将其作为常值映射延拓到 A 的其余部分），从而得到 $f_A\colon M_1 \to Q^k$，使得 $f_A(A)$ 和 $f_A(M_1 \setminus A)$ 仅在 $f_A(\partial A)$ 处相交。

我们断言，宽度 $\mathrm{W}(f_A)$ 至多为 $\mathrm{W}(f) + \mathrm{diam}_{M_1}(A)$。考虑 $q \in Q^k$。令 $x_1, x_2 \in f_A^{-1}(q)$。如果 x_i 都在 A 中，那么 $d_{M_1}(x_1,x_2) \leqslant \mathrm{diam}_{M_1}(A)$。如果 x_i 都在 $M_1 \setminus A$ 中，那么，使用定理 1 的证明中第一点所用的相同估计，我们得到 $\mathrm{diam}(f_A^{-1}(q)) \leqslant \mathrm{W}(f) + \mathrm{diam}_{M_1}(A)$。最后，令 $x_1 \in M_1 \setminus A$ 和 $x_2 \in \mathrm{Int}(A)$。由于这些区域在 f_A 下的像仅在 $f_A(\partial A)$ 处相交，因此存在 $w \in \partial A$，使得 $f_A(w) = f_A(x_1) = f_A(x_2)$。令 y 为 ∂A 在 $M_1 \#_A M_2$ 中从 x_1 到 w 的最短测地线 γ 上的第一个点，使得 $[x_1, y) \subset M_1 \setminus A$。那么

$$d_{M_1}(x_1,x_2) \leqslant d_\gamma(x_1,y) + d_{M_1}(y,x_2) \leqslant d_\gamma(x_1,w) + \mathrm{diam}_{M_1}(A) \leqslant \mathrm{W}(f) + \mathrm{diam}_{M_1}(A).$$

□

定理 *2'* 的证明。我们从近最优映射 $p_i\colon\ M_i \to P_i^k$ 开始；在情形 a) 和 b) 中，通过对 $M_i \setminus \mathrm{Int}(A)$ 或 A 应用引理 3，确保 $p_i|_{\partial A}$ 可缩；而在情形 c) 中，注意到 $p_i|_A$ 本身就是 $p_i|_{\partial A}$ 的一个收缩。利用引理 2，我们可以将 p_i 延拓到 ∂A 的一个领圈邻域，使领圈的另一侧边界是 p_i 的单个纤维。本情形略有不同之处在于，我们希望领圈位于 A 的外侧；不过，可以通过一个将其向外推的同胚来实现，而且该同胚在 M_i 上可以任意接近恒等映射。现在，我们可以将两个 p_i 粘合成一个映射

$$p_\#\colon M_1 \#_A M_2 \to P_1 \cup P_2 / x_1 \sim x_2,$$

其纤维要么是 $p^{-1}\#(x_i) = \partial A$，要么位于单个 $M_i \setminus A$ 中，并且其宽度与原来类似，有 $\mathrm{W}(p_i) + \mathrm{diam}(\partial A)$ 这样的上界（此外，将领圈向 A 外侧推时会产生一个任意小的修正项）。

□

4 覆盖空间

为处理万有覆盖的情形，我们希望得到一个能一次处理多个连通和的定理 2 的版本：

引理 5. 假设定理 2 的条件成立，但将单个连通和替换为一个流形N，它通过相应的 A_i（彼此不相交地嵌入 N中，且每个都位于相应的 N_i中）与多个 N_i相连，从而得到 $N_\# := N\#_{\bigcup A_i}\bigcup N_i$。如果 ∂A_i上的距离函数在 N中至多是其在 $N_\#$中的 $C \geqslant 1$ 倍，那么在相同假设下，我们得到

$$\mathrm{UW}_k(N) \leq C\,\mathrm{UW}_k(N_\#) + 2\sup_i(\mathrm{diam}_N(A_i)).$$

证明. 论证与定理 2 完全相同：给定一个真单纯映射 $f\colon N_\# \to P^k$，其宽度 $W(f)$可任意接近 $\mathrm{UW}_k(N_\#)$，引理 3 和引理 2 的组合允许我们将$f|_{\partial A_i}$ 延拓到 A_i（先延拓到 ∂A_i 在 A_i内部的领圈邻域，再将其作为常值映射延拓到A_i的其余部分）。为将这些引理逐一应用于单个 A_I，我们将 ∂A_I 视为完备流形 $N_\# \setminus (N_I \setminus A_I)$ 的紧边界。我们得到 $f_i\colon A_i \to Q_i^k \supset P^k$，使得 $f_i(A_i) \cap P^k = f(\partial A_i)$。我们可以将这些延拓粘合起来：令 Q^k 为沿 P^k粘合 Q_i^k 所得的并，从而可以通过令 $f_N = f_i$ 在 A_i 上、 $f_N = f$ 在 $N \setminus \bigcup_i A_i$ 上来定义$f_N\colon N \to Q^k$。

为了估算 $p \in P^k$ 上纤维的大小，考虑 $x_1, x_2 \in f_N^{-1}(p)$。假设 x_i都不在任何一个 A_j 中。令 γ_0 为 $N_\#$ 中从 x_1 到 x_2 的一条最短测地线。如果它进入 $N_1, \cdots N_n$，我们希望删去这些部分。我们对 γ 进行归纳修改：令 y_i 和 z_i 分别为 N_i 在 γ_{i-1} 中的第一个点和最后一个点，并令 γ_i 为 $\gamma_{i-1} \setminus [y_i, z_i]$。不妨设，与为剩余的 $N_{i+1}, \cdots N_n$ 类似定义的线段相比，$[y_i, z_i]$ 是 γ_{n-1} 中最长的此类线段，因此，对于每个剩余的 N_m，它们在 γ_i 中的点不可能位于切割线段 $[y_i, z_i]$ 的两侧。这意味着没有任何 $[y_i, z_i]$ 与先前的切割相交，因此所有 $[y_i, z_i]$ 在 γ_0 中互不相交。现在我们可以用 N 中相应的替代部分替换切下的部分：令 β_i 为 N 中从 y_i 到 z_i 的一条最短测地线。将 β_i 拼接到 γ_n 中以替换 $[y_i, z_i]$，即可得到 N 中一条从 x_1 到 x_2 的路径 α。根据 C 的定义，$|\beta_i| \leqslant C|[y_i, z_i]|$，因此

$$d_N(x_1, x_2) \leqslant |\alpha| = |\gamma_n| + \sum_i |\beta_i| \leqslant |\gamma_n| + \sum_i C|[y_i, z_i]| \leqslant C(|\gamma_n| + \sum_i |[y_i, z_i]|) = C|\gamma_0| \leqslant C\,\mathrm{W}(f).$$

如果 x_i 落在某个 A_j 内，让 $w_i \in \partial A_j \cap f_N^{-1}(p)$，改为让 γ_0 从 w_1 到 w_2，这样我们就有

$$d_N(x_1, x_2) \leqslant d(x_1, w_1) + |\gamma_0| + d(w_2, x_2) \leqslant C\,\mathrm{W}(f) + 2\sup_i(\mathrm{diam}\,A_i).$$

最后，$q \in Q_i^k \setminus P^k$ 上的纤维大小受 $\mathrm{diam}\ A_i$ 限制。 □

定理 *3* 的证明。 这里给出一个标准观察，它将该定理归结为我们刚刚证明的引理 5：

引理 6. 如果 A和 ∂A 是单连通的，那么万有覆盖 $pr_\#$：

$\widetilde{M\#_A M'} \to M\#_A M'$（即其总空间）是万有覆盖 M_g和 M'_h（沿着$\widetilde{\ }$它们各自的 A副本）所构成的连通和（由多个副本组成）。 ∂A_i的每个副本都将 $M\#_A M'$分隔开。

根据引理 6，令 $N \supset A_i$ 为参与 $M\#_A M'$ 连通和分解的 M 的一个副本；也就是说，它通过 A 的副本 A_i 与完备流形 N_i 相连，而每个完备流形都包含 ∂A_i 另一侧的所有内容，使得 $M\#_A M' = N\#_{A_i} \bigcup N_i$。由于万有覆盖是可定向的，因此引理 5 适用，由此我们得出

$$\mathrm{UW}_k(\tilde{M}) = \mathrm{UW}_k(N) \leqslant C\,\mathrm{UW}_k(N\#_{A_i} \bigcup N_i) + 2\sup_i \mathrm{diam}_N(A_i) = C\,\mathrm{UW}_k(\widetilde{M\#_A M'}) + 2\,\mathrm{diam}_{\tilde{M}}(A).$$

□

备注 1. 注意，如果 $\mathrm{UW}_k(N_\#)$ 小于各个 ∂A_i in $N_\#$ 之间的距离，那么连接纤维中两点的最短测地线 γ_0 在 $N_\#$ 中不可能经过两个不同的 ∂A_i。因此，考虑给定的纤维时，我们可以忽略除可能与 γ_0 接触的那个之外的所有 N_i（设为 N'），并像定理 3 中那样论证；但在 N' 与其余 M 沿着 ∂A_1 作连通和的情形下，按定理 2 的方式估计纤维的大小，得到

$$\mathrm{UW}_k(\tilde{M}) \leqslant \mathrm{UW}_k(\widetilde{M\#_A M'}) + \mathrm{diam}_{\tilde{M}}(A).$$

引理 6 的证明. 由于 ∂A 是单连通的，覆盖空间 $pr_\#$ 在其上是平凡的，因此流形 $pr^{-1}\#(M \setminus \mathrm{Int}\ A)$ 的边界由 ∂A 的若干份副本组成。注意，每个 ∂A_i 都将 $\widetilde{M\#_A M'}$ 分隔开；否则它会有一条非平凡回路，而该回路只在一个方向上穿过 ∂A_i。称 N_0 为 $pr^{-1}\#(M \setminus \mathrm{Int}\ A)$ 的一个连通分支，并令 N 为将每个边界连通分支 ∂A_i 都用 $A_i \cong A$ 填充后的 N_0，这样覆盖空间 $pr_\#|_{N_0}\colon N_0 \to M \setminus \mathrm{Int}\ A$ 就可以延拓为 $pr\colon N \to M$。要证明它是万有覆盖空间，我们需要证明 $\pi_1(N) \cong 0$。

回想一下，每个 ∂A_i 都会将空间分开，因此对于每个 ∂A_i，我们都可以指定“另一侧的部分” N_i，使得 $\widetilde{M\#_A M'} \cong N\#_{A_i} \bigcup N_i$。于是，根据范·坎彭定理，$\pi_1(M\#_A M')$ 是一个以 $\pi_1(\partial A_i) \cong 0$ 为基的自由积，由 $\pi_1(N_0)$ 和 $\pi_1(N_i \setminus A_i)$ 构成。由于结果为 0，因此 $\pi_1(N_0) \cong 0$。同样，$\pi_1(N)$ 是一个以 $\pi_1(\partial A_i) \cong 0$ 为基的自由积，由 $\pi_1(N_0)$ 和 $\pi_1(A_i) \cong 0$ 构成，所以 $\pi_1(N) \cong 0$。因此，N 同胚于 $\tilde{M}$ 万有覆盖。□

*定理 3′ 的证明。*证明与定理 3 的证明基本相同，只需作类似于从定理 2 过渡到定理 2′ 时的修改。我们考虑近乎最优投影 $p_i\colon M_i \to P_i^k$。通过将引理 3 应用于 (在情形 a) 和 b) 中可定向且为万有覆盖的) $M_i \setminus A_i$，可以使它们在每个副本 ∂A_i 上都变为可缩；如果 A_i 是一个球，则 $p_i|_{\partial A_i}$ 已经由 $p_i|_{A_i}$ 变为可缩。利用引理 2，还可以进一步改变 p_i，使得 ∂A 的每个副本都成为独立纤维，这与定理 2′ 中的做法相同，但需注意相同的限制。这些映射 p_i' 可以沿着定义域中的 $\partial A_{i,\,j}$ 以及目标中的 $x_{i,\,j}$ 粘合，得到 $p\colon M_1\#M_2 \to P^k$。纤维大小的估计也与定理 3 中的完全相同（因为每个 $\partial A_{i,\,j}$ 都是一个独立纤维，其他任何纤维都局限于单个 N 部分内，正如定理 3 中那样），因此得到

$$\mathrm{UW}_k(\widetilde{M_1\#_A M_2}) \leqslant C' \max_i(\mathrm{UW}_k(\widetilde{M_i})) + 2\,\mathrm{diam}_{M_1\#M_2}(\partial A).$$

□

5 反例

这里我们给出一些例子，说明我们的定理中的某些常数无法改进——至少在足够一般的情形下是如此。

5.1 定理 1 中的常数2

首先，我们来讨论定理 1 及其估计

$$\mathrm{UW}_k(M_i) \le \mathbf{2}\,\mathrm{UW}_k(M_1 \#_A M_2) + \mathrm{diam}_{M_i}(A).$$

我们想说明这个公式中常数**2** 的必要性。例如，考虑 $k = 1$ 时的以下构造。令 C 为一个圆锥，其底面是长度为 4π 的圆，半径为 **1**，且 r : 令 $C \to [0,1]$ 为到顶点的距离函数。我们使用 $C_{r\leqslant a}$ 这样的记号，作为 $r^{-1}([0,a]) \subset C$的简写。定义

$$A = C_{r\leqslant 1-\varepsilon}, \quad M_1 = C, \quad \text{and} \quad M_2 = C_{r\leqslant 1-\varepsilon+\delta}$$

于是， $M_1 \#_A M_2$ 是一个厚度为 $\varepsilon+\delta$的（几乎）带，并且 $\mathsf{UW}_1(M_1 \#_A M_2) \leqslant \varepsilon+\delta$。不过，我们将验证

引理 7. 长度为 4π 的圆上的单位锥 C 的乌雷松1-宽度为 $\mathsf{UW}_1(C) = 2$。

因此我们有

$$\mathrm{UW}_1(M_1) = 2 = 2(1-\varepsilon) + 2(\varepsilon+\delta) - 2\delta = \mathrm{diam}(A) + \mathbf{2}\,\mathrm{UW}(M_1 \#_A M_2) - 2\delta,$$

令 $\delta \to 0$，这表明因子2是必要的。在这个例子中，空间是带边界的非光滑流形，但可以将它们替换为光滑闭（$n \geqslant 3$）流形 M_i^n，这些流形是原始 M_i^2的正则 δ'-邻域的边界（ M_i^2通过一个 δ'-小位移收缩到该邻域，因此其 UW_k 至少为 $\mathsf{UW}_k(C) - 2\delta'$）。然而，这样一来， A^3 就不再是圆盘了。事实上，如果 A 是一个维数为 $n \geqslant 3$的圆盘，则定理 2 适用，因子2就没有必要。

引理 7 的证明。假设 $\mathsf{UW}_1(C) < 2$，因此存在一个映射 $f\colon C \to P^1$，其宽度为 $W < 2$。根据引理 1，我们可以假设该映射是单纯的。我们的思路是使用一种纤维收缩式论证，将（某个） C 收缩到 ∂C，从而在同调中导出矛盾。

记 $f_\partial := f|_{\partial C}$。取非空纤维 $f_\partial^{-1}(p)$ 中的一个点 $x \in \partial C$；令 x 为 ∂C 的南极。于是北半圆上的每个点到 x 的距离都是 2，因此不会与 $f_\partial^{-1}(p)$ 相交。因此，原像 $f_\partial^{-1}(p)$ 包含在一个开南半圆内，我们将其记为 $S(p)$。假设这些包含纤维的半圆 $S(p)$可以连续地依赖于 p，并且整个 P^1 都在像 $f(\partial C)$ 中，因此我们有一个纤维化 $F\colon \mathcal{S} \to P^1$，其中 $\mathcal{S} = \{(x,\ p) \subset \partial C \times P$，且 $x \in S(p)\}$。将 F 拉回到 C 后得到的纤维是可缩的 $S(p)$，所以它存在一个截面 $s(x)$，其 ∂C 坐标在 ∂C 上的作用如同恒等映射。这样的截面给出一个从 C 到 ∂C的收缩，这就产生了矛盾。

我们假设 P^1 全部属于 f的像。若情况并非如此，我们只能在 $X = f^{-1}(f(\partial C))$ 上构造提升。子集 X在 C中形成一条链，位于“外边界”∂C 与“内边界” $\partial(C \setminus X)$之间；但就同调而言，截面 s 在内边界上是平凡的。事实上， $f(\partial(C \setminus X))$ 属于子复形 $f(\partial C)$及其补集（的闭包），也就是说，它不会进入 P的顶维胞腔。因此，截面 $s(\partial(C \setminus X))$ 可以取为经由 $P^{(0)}$分解，并且会在 $H_1(\partial C)$ 中消失。于是，截面 $s(X)$ 仍是 $[\partial C] \in H_1(\partial C)$ 的零同调，这就产生了矛盾。

我们还假设可以连续地选取半圆 $S(p)$，使其依赖于 p。为此，首先对任意一点 $p \in f(\partial C)$，选取其邻域 $U(p)$，使得在 $U(p)$ 上使用常数 $S(p)$ 即可（也就是说，对于 $q \in U(p)$，该邻域包含纤维 $f_\partial^{-1}(q)$）。这是可行的，因为对面的（闭）半圆 $N(p) = \partial C \setminus S(p)$ 是紧的，所以 $f(N(p))$ 是一个不包含 p 的闭集；因此，我们可以令 $U(p) := \partial C \setminus N(p)$。现在，利用从属于该覆盖空间的单位分解，在不同的半圆 $S(p)$ 之间进行插值，使它们连续地依赖于 p。 □

我们给出了一个反例，说明在 $k=1$ 时放宽 UW_k 中定理 1 的系数。如果 $k>2$，完全相同的推理仍然适用（包括引理 7 的证明）；只需将双倍大小的圆替换为 ∂C 个维数为 k 的双倍大小球面。

5.2 常数 C 定理 3，情形 $k=1$

我们重　　写出定理 3 中的估计如下　　way:

$$\mathrm{UW}_1(\widetilde{M_i}) - 2\,\mathrm{diam}_{\tilde{M_i}}(A) \le \mathbf{C}\,\mathrm{UW}_1(\widetilde{M_1 \# _A M_2}). \tag{1}$$

我们想说明，在当前设定下，这里的常数 $\mathbf{C}$ 无法取为统一常数（至少对于更一般的度量空间，或维数为 $n \geqslant 4$ 的流形而言）。思路是从M_1 （一个）有限群 Π 的 $K(\Pi,1)$的 2-骨架开始，使 $\mathrm{UW}_1(M_1)$ 很大；然后通过将每个基本域 A_i 替换成直径极小的空间，迫使 $M_1\#_A M_2$ 的直径变小（从而使 UW_1变小）。下面我们来描述具体细节。

令 $\Pi_n=(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{3n}$ 和 $K(\Pi_n,1)$ 为带有标准度量和胞腔结构的 $3n$ 射影空间的乘积；将 S^1 视为 $U(1)$，我们把 $\mathbb{R}P^\infty$ 的 1-胞腔视为 $U(1)/\{\pm 1\}$。2-骨架 $K(\Pi_n,1)^{(2)}$ 将作为一个（初步的） M_1，我们选取 A 为 M_1的大部分，具体而言，就是以基点为中心、半径为 $(\pi/2-\varepsilon)$ 的球的乘积（或者说，它与 2-骨架的交集）。令 M_2 为 A的一个倾斜加倍 $M_2=A\sqcup_{\partial A}A'$，其中 A' 在边界附近具有与 A相同的度量，但远离边界时度量小得多，因此整个 A' 到其中心的距离都不超过 ε。这一切都是为了使连通和 $M_1\#_A M_2$ 有效地将 M_1 的大部分从 A 缩小到 A'。万有覆盖中每个基本域内也会发生同样的情况，从而迫使

$$\mathrm{diam}(\widetilde{M_1\#_A M_2}) \leqslant (12n+2\sqrt{2}+2)\,\varepsilon, \tag{2}$$

因为对于 $M_1\#_A M_2$ 中的任意一点，到达 A' 的最近副本至多需要 $\sqrt{2}\,\varepsilon$，然后需要 ε 到达其中心，并且若 $g,h\in(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{3n}$ 仅相差一个坐标，则从一个副本 A'_g 移动到另一个不同的副本 A'_h 需要 $4\,\varepsilon$。

另一方面，我们可以估计 $\mathrm{UW}_1($　　$\tilde{M}_1)$:

引理 8. 对于上面构造的 M_1 （$M_1:=K((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{3n},1)^{(2)}$），我们有

$$\mathrm{UW}_1(\tilde{M}_1) \geqslant \frac{n-2\sqrt{2}}{8}\pi$$

结合直径$(A)=\sqrt{2}(\pi-2\varepsilon)$，这表明 $\mathrm{UW}_1(\tilde{M}_1)-2$直径$(A)>1$ （当足够大时） n。并且由于根据 (2)，取 $\varepsilon\to 0$ 会迫使直径$(M_1\#_A M_2)\to 0$，因此 (1) 中的常数 $\mathbf{C}$ 必须趋于无穷，而不能是一致的。

这个例子使用了一个带有分片黎曼度量的 2-复形。可以取其微小法邻域的边界，将其转变为流形（为保持基本群不变，维数需要至少比原来的高 2）。集合 A可以保持为一个黎曼球（任何带边界的紧流形都可以用一个 ε-稠密的嵌入黎曼球“填满”）。

引理 *8* 的证明。 此证明的方法基于格罗莫夫的纤维收缩论证，是从下方估计 UW_k 的标准工具之一。我们将空间 X 映射到一个平面上，使 X 的一个可缩环路环绕平面中的一个大圆盘。如果 X 近乎一维（UW_1很小），那么我们就可以对该映射稍作同伦变形，使其通过它的一维

近似分解，但从同调的角度来看，这对于一个跨越大圆盘的映射是不可能的。该论证的细节可参见 [2]的推论 2.3 和 [9]的引理 5.2。为求简明，我们在此不加证明地照录推论 2.3，并以一种较不一般的形式陈述如下：

引理 9. 设 $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ 是从度量空间 X 出发的 1-利普希茨映射，且对于某个闭子集 $X_0 \subset X$，诱导映射 $f_*\colon H_n(X, X_0) \to H_n(\mathbb{R}^n, U_{2\rho}(f(X_0)))$ 非平凡（此处 $U_r(S)$ 表示 S 的半径为 r 的邻域）。那么 $\mathrm{UW}_{n-1}(X) \geqslant \rho$。

为了应用这个引理，我们希望某个零同调曲线 X_0 在某个 1-利普希茨映射 f 下被拉伸，使得 $f(X_0)$ 在其 2ρ- 宽邻域中不是零同调的。我们令 X_0 为以下测地线 $\gamma(t) \subset M_1$，其中 $t \in \mathbb{R}/(3n\,\mathbb{Z})$。我们令

$$\gamma(t) := (e^{i\pi x_1(t)}, \cdots, e^{i\pi x_k(t)}, \cdots) \subset \Big(\prod_{k=1}^{3n} U(1)\Big)^{(2)} \subset \tilde{M_1}$$

其中，对于整数 t，除 $k \in [t, t+n$ 外，所有 $x_k(t)$ 均为 0；对于 $k \in [t, t+n$，$x_k = 1$（指标 k 也视为属于 $\mathbb{Z}/(3n\,\mathbb{Z})$，即 $x_{k+3n} \equiv x_k$）。对于非整数 t，我们通过最近整数点之间的线性插值来定义 $x_k(t)$。

现在定义 f：$\tilde{M_1} \to \mathbb{R}^2$ 定义为 $f\colon x \mapsto (d(x, \gamma(0))\ d(x, \gamma(n)))$。

引理 10. 对于 t，$\tau \in \mathbb{Z}$ 距离 $d(\gamma(t)\ \gamma(\tau))$等于 $\sqrt{2}\pi/2$ 乘以 $\gamma(t)$和 $\bar{\gamma}(\tau)$中不同坐标的数量。

因此，我们可以描述 $f(\gamma(t))$，其中 $t \in \mathbb{Z}$。若以 $\Delta(n)$表示 $\mathbb{R}^2$ 上经过顶点$(0, n)$、$(n, 0)$和(n, n)的闭折线，则 $f(\gamma(t))$沿着 $\Delta(n)$的整点分布，并将这些点按$\sqrt{2}\pi$放大。因此，整个 $f(\gamma)$沿着 $\Delta' := \Delta(\sqrt{2}\pi n)$在任一坐标上的偏差至多为 $\pi/\sqrt{2}$（即 γ上相邻两个整点之间距离的一半）。由此可知，对于满足 $f(\gamma) \subset U_r(\Delta')$且 $U_r(\Delta') \sim S^1$的 r，$f(\gamma)$表示 $H_1(U_r(\Delta'))$的一个基元素；这分别由 $r \geqslant \pi$和 $r \leqslant r_0 = \sqrt{2}\pi n/4$保证。因此，将 γ视为一个 2-链时，它的任意收缩都会映射到 $H_2(\mathbb{R}^2, U_r(\Delta'))$中的一个基元素（当 r时），或者映射到 $H_2(\mathbb{R}^2, U_r(f(\gamma)))$中的一个基元素（当 $r \leqslant r_0 - \pi$时）。此时，我们可以将引理 9 应用于映射 $f/\sqrt{2}$（将其缩小以使其成为 1-利普希茨映射），并得出

$$\mathrm{UW}_1(\tilde{M_1}) \geqslant \frac{r_0 - \pi}{2\sqrt{2}} = \frac{n - 2\sqrt{2}}{8}\pi$$

□

引理 *10* 的证明。我们可以假设 $t \leqslant \tau \leqslant t+n$，其余情形由对称性得出。我们在 M_1 上定义一些有用的坐标：设 χ_i：$S_i^\infty \to \mathbb{R}$ 为到 $1 \in U(1) \subset S_i^\infty$的距离函数，它位于乘积 $\prod_{i=0}^{3n} S_i^\infty$ 的第 i 个 S^∞ 因子上，该乘积的 2-骨架为 $\tilde{M_1}$。函数

$$F_t^\tau = \sum_{i=t}^{i<\tau} \big(\chi_i - \chi_{i+n}\big)$$

在 2-骨架 $\tilde{M_1}$ 上是 $\sqrt{2}$-利普希茨的，因为在两个 1-胞腔的乘积上，它是梯度为 $(\pm 1, \pm 1)$ 的函数，并且它在 S_i^∞ 的二维胞腔上是 1-利普希茨的。由于 $F_t^\tau(\gamma(t)) = (\tau - t)\pi$ 且 $F_t^\tau(\gamma(\tau)) = -(\tau - t)\pi$，则

$$d(\gamma(t), \gamma(\tau)) \leqslant 2(\tau - t)\pi/\sqrt{2}.$$

另一方面，γ 是一条实现这一距离的路径。 □

5.3 常数 C 定理 3，情形 $k = n-1$

与上一节一样，我们想要证明估计式中的常数$\mathbf{C}$

$$\mathrm{UW}_{n-1}(\widetilde{M_i}) - 2\,\mathrm{diam}_{\widetilde{M_i}}(A) \le \mathbf{C}\,\mathrm{UW}_{n-1}(\widetilde{M_1 \#_A M_2}). \tag{3}$$

定理 3 的不能是一致的。我们构造一个空间 M_1，其万有覆盖具有很大的 UW_{n-1}，用一个大小有界的球 A 填满 M_1 的大部分并将其坍缩（通过与 $M_2 = A \sqcup_{\partial A} A'$ 取连通和，替换为小的 A'），从而使万有覆盖失去其大部分 UW_{n-1}。

设 T^n 为一个环面 $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$， $A \subset T^n$ 为其顶胞腔中的一个黎曼球，且在该胞腔内是 ε-稠密的。设 γ_i 为嵌入在 $T^n \setminus A$ 中且互不相交的环路，使得它们的类构成 $(N\mathbb{Z})^n \subset \mathbb{Z}^n \cong \pi_1(T^n)$ 的标准基。我们定义 M_1 为沿每个 γ_i 粘合一个圆盘D_i^2 的结果。为使其成为流形，粘贴应以手术方式进行，即将 γ_i 的管状邻域 $S^1 \times D^{n-1}$ 替换为 $D^2 \times S^{n-2}$。我们希望在 D^2 上有足够大的度量，稍后具体指定，但使另一个因子较小：$\mathrm{diam}(S^{n-2}) < \varepsilon$；该球面因子还迫使$n \geqslant 4$，从而使基本群 $\pi_1(M_1) \cong (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n$ 不受影响。

让我们验证这些 M_1 和 A 具有所需的度量性质。若 ε 足够小，且$\widetilde{\ }$替换 A' 的直径为 $< \varepsilon$，那么 $M_1 \#_A M_2$ 就是附着在 T^n的N^n层覆盖空间上的一簇把手 $D^2 \times S^{n-2}$；通过将 $A\widetilde{\ }$各副本的内部收缩至 A'，可将其压皱，使直径变为 < 1。因此，我们可以将 $M_1 \#_A M_2$ 映射到一个球面的楔和$\bigvee_i S_i^2$：将每个把手 $D^2 \times S^{n-2}$ 的球面连通分支压缩成圆盘，并将圆盘边界及剩余的环面部分映到楔和的基点。根据构造，这个投影$\widetilde{\ }$的宽度为 < 1，因此对于 $k \geqslant 2$，$\mathrm{UW}_k(M_1 \#_A M_2) < 1$。

另一方面，我们将证明

引理 11. 对于上文构造的 M_1，它是一个 T^n，沿着张成（$N\mathbb{Z}$）$^n \subset \pi_1$（T^n）的环路附着把手 $D^2 \times S^{n-2}$，我们有

$$\mathrm{UW}_{n-1}(\tilde{M}_1) \geqslant N/8$$

如果 D^2 上的度量足够大。

结合 $\mathrm{diam}(A) \leqslant \sqrt{n}$，令 $N \to \infty$ 对给定的 n 取值，即可证明 (3) 中 $\mathbf{C}$ 无界。

引理 *11* 的证明。 如果在构造 M_1 时，我们粘接实际的圆盘 D^2，而不是进行手术，那么原来的环面就会是我们空间的一个实际子集，并且 M_1 将有一个立方体 $[0, N/2]^n$ 的等距副本（至少当 D^2 的度量足够大，不会引入影响环面内距离的捷径时如此）。然而，在流形情形下，我们的构造在 T^n 上挖了一些孔，因此需要一种更灵活的论证。

再次，我们通过将立方体 $C := (0, N/2)^n \subset T^n$（或者更准确地说，将它在 M_1 中剩下的部分）映射到 $\mathbb{R}^n$ 中的同一个立方体上，来使用引理 9。我们将环面区域上的映射 $f : M_1 \to \mathbb{R}^n$ 定义为 1- 利普希茨映射 $\mathbb{R}/(N\mathbb{Z}) \to [0, N/2]$ 的乘积；这些映射在前半部分上是恒等映射，并将后半部分折回。为简单起见，我们将把映射 f 延拓到圆盘 D^2 上，因为对于实际的 $D^2 \times S^{n-2}$，构造是相同的，只是记号更繁杂。对于覆盖空间中 γ_i 的每个副本 $\tilde{\gamma}_i$，令 $\gamma_{i,C}$ 表示其中可能穿过立方体 C 的一半（即 i 坐标属于 $(0, N/2)$ 的部分），并令 $D_{i,C}$ 表示相应圆盘 D_i^2 中与 $\gamma_{i,C}$ 相邻的一半。我们将映射延拓到 D^2，使得 $f(\partial D_{i,C} \setminus \gamma_{i,C})$ 位于目标立方体 $(0, N/2)^2$ 之外（这是可行的，因为 $\partial\gamma_{i,C}$ 被映射到立方体的边界上）。 D_i^2 上的度量应选得足够大，以使该映射为 1-利普希茨映射。现在我们构造出了一个子集 $S := C \cup \bigcup D_{i,C}$，它被映射

通过 f 映射到 $[0,N/2]^2$ 上，使得 $f(\partial S)$ 位于 $(0,\ N/2)^2$ 之外。这意味着，我们可以将引理 9 应用于映射 $f\colon M_1 \to \mathbb{R}^n$。由于 $f(\partial S) \subset \mathbb{R}^n \setminus (0,\ N/2)^n$，对于任意 ρ，我们有如下复合：

$$H_n(S,\partial S) \subset H_n(\tilde{M}_1,\partial S) \xrightarrow{f_*} H_n\big(\mathbb{R}^n, U_{2\rho}(f(\partial S))\big) \to H_n\big(\mathbb{R}^n, U_{2\rho}(\mathbb{R}^n \setminus (0,N/2)^n)\big).$$

最后一个同调群在 $\mathbb{Z}$ 的情况下为 $2\rho < N/4$，此时整个复合是一个同构（$(0,\ N/2)^n$ 中的大多数目标点都不会被近二维 $D^2 \times S^{n-2}$ 命中，只有立方体 C 以度 1 映射到这些点）。因此，这些映射（包括中间的 f_*）对于˜任意 $\rho < N/8$都非零，故引理适用。因此，$\mathrm{UW}_{n-1}(M_1) \geqslant N/8$。 □

参考文献

[1] Alexey Balitskiy。《乌雷松宽度的界》。博士论文。麻省理工学院，2021。[2] Alexey Balitskiy 和 Aleksandr Berdnikov。《局部到整体的乌雷松宽度估计》。载于：纯粹与应用数学杂志 *f¨*（克雷尔杂志）2021.780（2021），第 265–274 页。[3] Alexey Balitskiy 和 Aleksandr Berdnikov。《通过乌雷松宽度测量映射的腰》。载于：美国数学会汇刊375.2（2022），第 1261–1279 页。[4] Luca F Di Cerbo、Alexander Dranishnikov 和 Ekansh Jauhari。《曲率、宏观维数与曲面的对称积》。载于：*arXiv* 预印本 *arXiv:2503.01779*（2025）。[5] Mikhael Gromov。《黎曼流形的填充》。载于：微分几何杂志18.1（1983），第 1–147 页。[6] Mikhael Gromov。《正曲率、宏观维数、谱隙与高阶特征》。载于：*21* 世纪前夕的泛函分析，第二卷：献给 *IM Gelfand* 八十寿辰。Springer，1996，第 1–213 页。[7] Mikhael Gromov 和 H Blaine Lawson。《完全黎曼流形上的正标量曲率与狄拉克算子》。载于：*IHÉS* 数学出版物´´58（1983），第 83–196 页。[8] Misha Gromov。《关于标量曲率的四讲》。载于：*arXiv* 预印本 *arXiv:1908.10612*（2019）。[9] Larry Guth。《曲面上的 Lipschitz 映射》。载于：几何与泛函分析 *GAFA*15.5（2005），第 1052–1090 页。[10] Larry Guth。《黎曼流形中的球体积与乌雷松宽度》。载于：拓扑学与分析杂志9.02（2017），第 195–219 页。[11] Yevgeny Liokumovich 和 Davi Maximo。《正标量曲率三维流形的腰不等式》。载于：标量曲率展望2（2023），第 799–831 页。[12] John Milnor。《三维流形的唯一分解定理》。载于：美国数学杂志84.1（1962），第 1–7 页。