arXiv:2602.15577v1 [math.RA] 17 Feb 2026

半单化弗兰克李代数

MICHIEL SMET

ABSTRACT. Frank李代数是只存在于特征 3 的域上的单李代数。这些代数带有特定的内导子，使其成为范畴 $\mathbf{Rep}(\alpha_3)$ 中的代数。我们将半单化函子应用于这些 Frank李代数，得到模接触李超代数。

我们还得到一类单的 J-元代数，其伴随约当代数并非单代数。

INTRODUCTION

Kannan [Kan24] 最近构造了一些只存在于特征 3 和 5 的域上的单李超代数，涉及张量范畴。这促使其他人考虑针对不同类型代数的类似构造，例如 [DGES24, EEK25]。与本文最相关的是这一构造的一个特例：它从特征为 3 的域上的一个 J-元代数所得到的李代数出发，参见例如 [CE25, Sme26]。具体而言，在上述两篇文章中，作者指出，任何一个 L 由 J-元代数得到的李代数 A都带有规范的 $\mathbb{Z}$-分次

$$L = L_{-2} \oplus L_{-1} \oplus L_0 \oplus L_1 \oplus L_2.$$

如果 J 是幺元的，则存在相应的元素 $1 \in L_2$。关于内导子 ad1，李代数 L 成为一个$\mathbf{Rep}(\alpha_3)$-代数，即对称张量范畴$\mathbf{Rep}(\alpha_3)$中的一个代数。$\mathbf{Rep}(\alpha_3)$上的半单化函子将 L 映射为一个 operad李超代数 $\mathrm{InDer}(A) \oplus A$。

本文将研究 Frank李代数 $\mathcal{F}(n)$。这类单李代数仅存在于特征为 3 的域上，并且可以构造为模接触李代数 $K(3; (1, 1, n))$ 的子代数。Frank [Fra73] 是最早构造出这一类代数的人。利用 Strade 的 [Str04] 对这些代数的描述，我们立即得到一个 $\mathbb{Z}$-分次和一个内导子，这与涉及 J-三元代数的情形类似。我们证明，半单化函子下的像是模接触李超代数 $K(1,1; n)$。

在最后一节中，我们还证明 Frank 李代数可以由某些J三元代数构造得到。最值得注意的是，这种构造给出了一类单 J三元代数，其伴随约当代数 J 并非单代数，这与 [Hei81 定理 6.1]相矛盾。我们讨论了该定理的证明，并指出，单 J三元代数要么具有单的伴随约当代数 J，要么具有按 [BK66]意义下的退化伴随约当代数。

概要。 第 1 节回顾相关李（超）代数的构造。第 2 节介绍作用于 $\mathbf{Rep}(\alpha_3)$ 上的半单化函子，并将其应用于 Frank 代数，以得到模接触李超代数。第 3 节介绍 J-三元代数，定义 Frank 代数对应的 J-三元代数，并利用它反例证明 [Hei81 定理 6.1]。

1. Basic definitions

全文中，我们都在特征为 3 的域 Φ上进行讨论。

1.1. 构件。 我们使用 Strade [Str04, 2.1] 所定义的代数 $\mathcal{O} = \mathcal{O}(1; n)$、$W = W(1; n)$。具体而言，$\mathcal{O}$ 是一个除幂代数，其基元素为 $x^{(i)}$，其中 $0 \leq i < 3^n$，运算为[1]

$$x^{(i)}x^{(j)} = \binom{i+j}{i} x^{(i+j)}$$

对 $k \geq 3^n$ 使用 $x^{(k)} = 0$。这是一个除幂代数，因为元素 $x^{(i)}$ 的行为类似于 $x^i/(i!)$。

映射 $\partial(x^{(i)}) = x^{(i-1)}, i = 1, \ldots, 3^n - 1$ 定义了 $\mathcal{O}$ 的一个导子。我们常将 1 记作$x^{(0)}$，并将 x 记作 $x^{(1)}$。

令 W 表示 $\mathcal{O}$ 的特殊导子，即所有满足 $f \in \mathcal{O}$ 的 $f\partial$ 的集合。这构成一个单李代数，其运算为

$$[f\partial, g\partial] = (f\partial(g) - g\partial(f))\partial.$$

我们可以为 $\mathcal{O}$ 赋予第二种 W-模结构，定义如下：

$$f\partial \cdot_{(\mathrm{div})} g = f\partial(g) + \partial(f)g = \partial(fg).$$

我们用 $\mathcal{O}_{(\mathrm{div})}$ 表示在考虑带有这第二种作用的 $\mathcal{O}$。对于这种第二种作用，我们有一个不可约模 $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}_{(\mathrm{div})}$，即

$$\mathcal{O}' = \bigoplus_{i=0}^{3^n-2} \Phi x^{(i)},$$

正如 Strade [Str04，命题 4.3.2] 所证明的。

1.2. 模接触李超代数。代数 $\mathcal{O}(1; n)$ 有一个超类比 $\mathcal{O}(1, 1; n) \cong \mathcal{O}(1; n) \otimes \Lambda(1)$，其中 $\Lambda(1)$ 是由单个生成元 θ 生成的格拉斯曼代数。因此，在 $\mathcal{O}(1, 1; n)$ 中，元素具有 $f + g\theta$ 的形式，其中 f 是偶部，$g\theta$ 是奇部，且 $f, g \in \mathcal{O}(1; n)$。将维特超代数 $W(1, 1; n)$ 定义为由元素 $f\partial + g\partial_\theta$ 构成的李超代数，其中 $f, g \in \mathcal{O}(1, 1; n)$；这里，$\partial$ 是 $\mathcal{O}(1; n)$ 上的自然导子，而 ∂_θ 表示与格拉斯曼代数的生成元相关联的导子，即对于 $\bar{i} = 0$，有 $\partial_\theta(f\theta^i) = if\theta^{i-1}$，1。$W(1, 1; n)$ 的偶部作用于 $\mathcal{O}(1, 1; n)$ 时保持奇偶性，而奇部则会翻转奇偶性。

在 [LZ05 中，BL14], 给出了模接触李超代数 $K(1, 1; n)$ 的定义。一种定义方式是将其定义为由映射的像生成的 $W(1, 1; n)$ 的子代数

$$D_K : \mathcal{O}(1, 1; \underline{n}) \longrightarrow W(1, 1; \underline{n})$$

定义为

$$D_K(x^{(i)}) = \theta x^{(i-1)}\partial_\theta + 2x^{(i)}\partial$$

and

$$D_K(x^{(i)}\theta) = x^{(i)}\partial_\theta + x^{(i)}\theta\partial.$$

在 [BL14], 中注意到，$K(1, 1; n) \cong \mathcal{O}(1, 1; n)$，后一个李超代数配备了如下括号

$$[a, b] = D_K(a)(b) - 2\partial(a)b.$$

[1] 特征 3 时涉及二项式系数，它们始终是整数，因此可以定义在任意域上

这个超代数不是单的，但其导出代数是单的。现在，我们给出 $K(1,\ 1;\ n)$ 及其导出代数的一个更简单的描述。

定义 1.1。我们引入李超代数 $W(1;\ n)\ \oplus \mathcal{O}_{(\mathrm{div})}$。其偶子代数为 $W(1;\ n)$，奇部为 $\mathcal{O}_{(\mathrm{div})}$（偶部通过 (div) 作用在其上），且括号$[x,y]=-xy\partial$ 满足 $x,\ y\in\mathcal{O}_{(\mathrm{div})}$。

引理 1.2。李超代数 $K(1,\,1;n)$ 同构于 $W(1;\,n)\ \oplus\mathcal{O}_{(\mathrm{div})}$。此外，导出代数 $K(1,\,1;\,n)^{(1)}$ 同构于 $W(1;\,n)\ \oplus\mathcal{O}'$。

证明。首先注意到 $[x^{(i)},x^{(j)}]=-x^{(i)}x^{(j-1)}+x^{(j)}x^{(i-1)}$，因为特征为 3。因此，$x^{(i)}\mapsto -x^{(i)}\partial$ 定义了这些李超代数偶部之间的同构。

我们还有 $[x^{(i)},x^{(j)}\theta]=-\theta(x^{(i-1)}x^{(j)}+x^{(i)}x^{(j-1)})$。因此，$x^{(j)}\theta\mapsto x^{(j)}$ 定义了从 $K(1,1;\,n)$ 的奇部到 $\mathcal{O}_{(\mathrm{div})}$ 的一个态射，该态射与 $W(1;\,n)$-作用 $f\partial\cdot_{(\mathrm{div})}g=f\partial(g)+g\partial(f)$ 相容。

此外，计算可得 $[x^{(i)}\theta,x^{(j)}\theta]=x^{(i)}x^{(j)}$。因此，括号 $\mathcal{O}\times\mathcal{O}\longrightarrow W(1;\,n)$ 与引理中描述的括号一致。

现在，我们确定导出代数。注意，$\mathcal{O}'$ 是 $\mathcal{O}(1;n)$ 的一个不可约子模，且 $W(1;\,n)$ 是单的。因此，$K(1,1;\,n)^{(1)}$ 必然包含 $W(1;\,n)\ \oplus\mathcal{O}'$。由于对于 $f,o\in\mathcal{O}$，$[f\partial,o]=\partial(fo)$，立即可得 $[W,\mathcal{O}]\subset\mathcal{O}'$。□

注 1.3. 注意到，$W(1;n)\ \oplus\mathcal{O}'$ 是一个单李超代数，因为其偶部是一个单李代数，而奇部是该李代数的一个不可约模。因此，$K(1,\ 1;\ n)^{(1)}$ 是单的。

1.3. **Frank 代数**。考虑一个二维向量空间 U 以及其上的一个非退化斜对称形式 λ。定义 ϕ: $U\times U\longrightarrow\mathfrak{sl}(U)$ 如下:

$$\phi(u,u')(u'')=\lambda(u,u'')u'+\lambda(u',u'')u.$$

Strade [Str04, 4.4.D]将 Frank 代数 $\mathcal{F}(n)$ 定义为一类李代数，其底向量空间为

$$\mathcal{F}(n)=U\otimes\mathcal{O}_{(\mathrm{div})}\oplus(\mathfrak{sl}(U)\otimes\mathcal{O})\oplus\mathrm{Id}_U\otimes W,$$

u使用二维向量空间 U以及代数 $\mathcal{O}=\mathcal{O}(1;\ n)$ 和 $W=W(1;\ \underline{n})$.

为了描述括号，注意 $\mathrm{Id}_U\otimes W$ 是一个规范地同构于 W 的李子代数，并且 $(\mathfrak{sl}(U)\ \otimes\mathcal{O})$ 可以看作标量扩张到 $\mathcal{O}$后的 $\mathfrak{sl}(U)$。代数 $\mathrm{Id}_U\otimes W$作用于 $(\mathfrak{sl}(U)\ \otimes\mathcal{O})$，二者都自然地作用于 $U\otimes\mathcal{O}_{(\mathrm{div})}$。对于 $U\otimes\mathcal{O}_{(\mathrm{div})}\times U\otimes\mathcal{O}_{(\mathrm{div})}$上的括号，我们使用

$$[u\otimes f,v\otimes g]=\phi(u,v)\otimes(f\partial(g)-g\partial(f))+\mathrm{Id}\otimes\lambda(u,v)fg\partial.$$

注意到这些代数是单代数。这些代数与模接触李代数 $K(3;(1,\ 1,\ n))$ 有关，参见 [Str04, 4.4.D]。

注 1.4. Skryabin [Skr92] 构造这一类李代数时，李超代数 $K(1,\ 1;\ n)\ =W(1;\ n)\oplus\mathcal{O}_{(\mathrm{div})}$ 已经以某种方式出现了。具体而言，在尝试定义 Frank代数时，Skryabin 首先验证了限制在 $\mathcal{O}^3_{(\mathrm{div})}$ [Skr92, final equation page 393], 上的（超代数）雅可比恒等式，之后才证明 Frank 李代数上的雅可比恒等式。

注 1.5. 该构造得到一个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 分次，其中 $(\mathfrak{sl}(U)\otimes\mathcal{O})\oplus\mathrm{Id}_U\otimes W$ 是偶元素子代数，而 $U\otimes\mathcal{O}_{(\mathrm{div})}$ 是奇元素子空间。选取一个 $\mathfrak{sl}(U)$ 的环面，并取相应的权空间，可将此分次细化为一个 $\mathbb{Z}$-分次。在偶子空间上，

权空间的权为 0，2 和 -2；在奇子空间上，我们得到权 1 和 -1 （注意，在特征为 3 的域上，这些特征子空间确实彼此不同）。

2. Link between $K(1,1;\underline{n})$ and $\mathcal{F}(n)$

为了描述与 Frank 代数的联系，我们首先描述范畴 $\mathbf{Rep}(\alpha_3)$ 的半单化函子。关于 $\mathbf{Rep}(\mathcal{C}_3)$ 上类似函子的更详细描述，见 [Ost20 第 3]节，或关于极为详细的描述见 [DGES24]。关于 $\mathbf{Rep}(\alpha_3)$ 的更详尽描述，见 [Kan24 第 3]节。

回想一下，我们在特征 3 的域 Φ 上工作。

2.1. $\mathbf{Rep}(\alpha_3)$ 与半单化函子。 令 $\alpha_3(R) = \{k \in R | k^3 = 0\}$ 为交换的、结合的、有单位的 Φ-代数 R。它构成一个仿射代数群，运算为 $(k,l) \mapsto k+l$。坐标代数为 $\Phi[t]/(t^3)$。余乘法与余单位由 $\Delta(t) = t \otimes 1 + 1 \otimes t$ 和 $\epsilon(t) = 0$确定。

引理 2.1. α_3 在向量空间 V 上的表示与满足以下条件的映射 $f : V \longrightarrow V$一一对应： $f^3 = 0$，其中

$$k \cdot (1 \otimes_R v) = 1 \otimes_R v + k \otimes_R f(v) + k^2 \otimes_R f(f(v))/2$$

对所有 $k \in \alpha_3(R)$均成立。此外，若 V 是一个代数，则它关于 f 是一个 $\mathbf{Rep}(\alpha_3)$-代数，当且仅当 f 是一个导子。

证明。 α_3 在 V 上的作用对应于 $\Phi[t]/(t^3)$ 在 V 上的余作用 δ。我们定义 $f, g,$ 以及 h如下：

$$\delta(v) = 1 \otimes h(v) + t \otimes f(v) + t^2 \otimes g(v).$$

利用 $(\epsilon \otimes \mathrm{Id}) \circ \delta = \mathrm{Id}$，我们得出 $h(v) = v$。由 $(\Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \delta = (\mathrm{Id} \otimes \delta) \circ \delta$ 并比较标量，得到

$$2t \otimes t \otimes g(v) = t \otimes t \otimes f(f(v))$$

and

$$0 = t^2 \otimes t \otimes f(g(v)).$$

这证明了 α_3 的每个作用必然具有引理中所述的形式。反过来，即证明每个满足 $f^3 = 0$ 的 f 都定义了一个作用，这很容易验证。

对于第二个陈述，我们注意到 $k \cdot (1 \otimes vw) = (k \cdot (1 \otimes v))(k \cdot (1 \otimes w))$，这等价于 $f(vw) = f(v)w + vf(w)$ 和 $f(f(vw)) = f(f(v))w + vf(f(w)) + f(v)f(w)$。这证明了 V 是一个关于 f 的$\mathbf{Rep}(\alpha_3)$-代数，当且仅当 f 是一个导子。□

范畴$\mathbf{Rep}(\alpha_3)$的不可分解对象由（a）给出，其中 $a = 1$取 2 和 3，每个对象都有基底 $\{e_i | 1 \leq i \leq a\}$，其上的 $\Phi[f]/(f^3)$表示由 $f(e_i) = e_{i+1}$给出，记$e_l = 0$ 为 $l > a$。对象（2）和（3）不是单对象，也不能写成单对象的直和。因此，该范畴不是半单的。

我们可以半单化这个范畴 [Ost20，命题2.13] 以得到一个半单范畴$\mathbf{Rep}(\alpha_3)$。该范畴是通过商掉所有可忽略态射得到的，即态射f： $X \longrightarrow Y$ 使得对所有 u： $Y \longrightarrow X$有$\mathrm{Tr}(fu) = 0$。首先，我们指出(3)$\cong 0$，因为对所有 f： (3) $\longrightarrow$ (3)有$\mathrm{Tr}(f) = 0$。其次，所有态射(2) $\longrightarrow$ (1)与(1) $\longrightarrow$ (2)都是可忽略的，因此对 $i \neq j$有$\mathrm{Hom}((i),(j)) = 0$。最后，恒等映射$(i) \longrightarrow (i)$对于 $i = 1,2$不是可忽略的，从而证明$\mathrm{End}((i)) \cong \Phi$。

引理2.2. 范畴$\mathbf{Rep}(\alpha_3)$ 作为对称张量范畴等价于超向量空间范畴。

证明。 所讨论的两个范畴都由两个单对象生成，记为 O_0， O_1；它们的自同态空间均为一维，且这是唯一非平凡的同态空间，并且所有对象都同构于这些对象的直和。因此，只需证明用这些对象表示时，张量积和辫子相同。

对于超向量空间范畴，我们回顾一下，该范畴由一个一维向量空间 $O_0 \cong L_0$ 和一个一维向量空间 $O_1 \cong L_1$ 生成，其中 $L_i \otimes L_j \cong L_{i+j}$ 采用模2指标，辫子由下式给出

$$L_i \otimes L_j \ni a \otimes b \longmapsto (-1)^{ij} b \otimes a \in L_j \otimes L_i.$$

对于 $\mathbf{Rep}(\alpha_3)$，我们注意到 (1) 可以充当 O_0 ，而 (2) 可以充当 O_1。唯一不显然的同构是 $O_1 \otimes O_1 \cong O_0$，它成立是因为

$$(2) \otimes (2) \cong (3) \oplus (1),$$

在$\mathbf{Rep}(\alpha_3)$中，利用将 (2) $\otimes$(2) 分解为对称张量和反对称张量。

我们指出，$\mathbf{Rep}(\alpha_3)$是平凡辫化的。这意味着只有 (2) $\otimes$上的辫化可能非平凡。对元素 $e = (2)$ $v \otimes w - w \otimes v) \in$ (2) $\otimes$ (2)应用 Rep(α_3)-辫化，得到 $-e$，这证明了 $f \circ c_{(2)\otimes(2)} = -f$ 具有 $c_{A\otimes B}$: $A \otimes B \longrightarrow B \otimes A$ 辫化以及 f 同构 (2) $\otimes$ (2) $\longrightarrow$ (1)。这表明我们具有与超向量空间范畴相同的辫化。□

注 2.3. 由于半单化函子是辫张量函子，它保留涉及态射、辫化和张量积的交换图。因此，一个 $\mathbf{LieRep}(\alpha_3)$-代数映射为一个（运算子）李超代数，即满足李超代数所有线性公理、但不一定满足 L_1上的齐次雅可比恒等式的代数 $L_0 \oplus L_1$ 。

2.2. **半单化Frank代数**。 回想一下，Frank代数 $\mathcal{F}(n)$的底向量空间为

$$\mathcal{F}(n) = U \otimes \mathcal{O}_{(\mathrm{div})} \oplus (\mathfrak{sl}(U) \otimes \mathcal{O}) \oplus \mathrm{Id}_U \otimes W,$$

一个二维向量空间 U 以及如前所述引入的代数 $\mathcal{O}, W$ 。回想 U 配备了斜对称形式 λ，由此我们定义了 ϕ: $U \times U \longrightarrow \mathfrak{sl}(U)$。取 $u, v \in U$使得 $\lambda(u, v) = 1$。注意 $\phi(u, u)(v) = u$ ，且 $\phi(u, u)(u) = 0$。因此，我们可以将 $\phi(u, u)$视为元素

$$e = \phi(u, u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

在 $\mathfrak{sl}(U)$中，以 u, v作为 U的基。

我们考察代数 $\mathfrak{sl}(U)$在 $\mathcal{F}(n)$的第一个张量因子上的作用；由此得到一个分解

$$(2) \otimes \mathcal{O}_{(\mathrm{div})} \oplus (3) \otimes \mathcal{O} \oplus (1) \otimes W$$

用 (a) 表示标准的不可约 a 维 $\mathfrak{sl}_2(U)$-模。关于 $d =$ad $(e \otimes 1)$，利用引理 2.1 以及 $(\mathrm{ad}\ e)^3 = 0$ 作用于所涉及的 $\mathfrak{sl}_2$-模这一事实，我们得到一个$\mathbf{Rep}(\alpha_3)$-代数。由 $\mathfrak{sl}(U)$-分解，我们还原出

$$(2) \otimes \mathcal{O}_{(\mathrm{div})} \oplus (3) \otimes \mathcal{O} \oplus (1) \otimes W$$

作为$\mathbf{Rep}(\alpha_3)$ 中不可分解对象 (1),(2), 和 (3) 的分解。因此，应用半简化函子可得到一个（运算子）李超代数，其底层模为

$$A' = W \oplus \mathcal{O}_{(\mathrm{div})},$$

如第 2.1 小节所述。

命题 2.4. 相对于 d, $\mathcal{F}(n)$ 的半单化是接触超代数$K(1,1;n)$。

证明。 前面的讨论表明，半单化得到 $W(1;n)\oplus\mathcal{O}_{(\mathrm{div})}$，其乘积还有待确定。我们将证明该乘积与引理 1.2 中的乘积一致。

子空间 W 是一个子代数，因为半单化函子限制在由 (1) 生成的 $\mathbf{Rep}(\alpha_3)$ 子范畴上时，是到 $\mathbf{Vec}$ 的一个同构。任意元素 $o \in \mathcal{O}_{(\mathrm{div})}$ 对应于

$$\bar{o} : (2) \longrightarrow \mathcal{F}(n) : \alpha u + \beta v \mapsto (\alpha u + \beta v) \otimes o.$$

这表明 W 利用超代数中的 (div)-作用作用于 $\mathcal{O}_{(\mathrm{div})}$，因为对于 $x \in (2)$，有 $[w, \bar{o}(x)] = w(o)(x)$。最后，我们使用由映射 $(1) \oplus (3) \cong (2) \otimes (2)$ 与 $(1) \longrightarrow (2) \otimes (2) : \lambda \mapsto \lambda(u \otimes v - v \otimes u)$ 诱导的同构 $(2) \otimes (2) \longrightarrow (1)$。因此，对于 (2)-不可分解对象 $\bar{o}$ 和 $\bar{o'}$，我们得到[2]

$$[\bar{o}, \bar{o'}] = [u \otimes o, v \otimes o'] - [v \otimes o, u \otimes o'] = 2\lambda(u, v)oo'\partial = -oo'\partial. \qquad \square$$

3. On J-ternary algebras

Wolfgang Hein [Hei81] 将 J-三元代数定义为一个向量空间 X，并配备三线性映射 $(x, y, z) \mapsto xyz$，使得

(1) $xy(uvw) - uv(xyw) = (xyu)vw + u(yxv)w$,

(2) $xyz - zyx = zxy - xzy$

对所有 $x, y, z, u, v, w \in X$ 均成立。

对于这样的代数，我们可以定义

$$\langle x, y\rangle z = zyx - xyz.$$

通常， J 表示所有 $\langle x, y\rangle$（其中 $x, y \in X$）的张成空间。我们注意到，这是一个约当代数 [Hei81，定理 1.1]，其运算为

$$(a \bullet b)x = \frac{a(b(x)) + b(a(x))}{2}$$

对于 $a, b \in J$, $x \in X$。

例 3.1. 考虑配备三线性映射的 $\mathcal{O}$

$$(f, g, h) \mapsto L_{f,g}h = fg\partial h - hg\partial f.$$

这定义了一个 J-三元代数，正如下文将验证的那样。这个乘积与 Frank李代数密切相关；在验证 J-三元代数的第一条公理时，这一点会更加清楚。

引理 3.2. 空间 $\mathcal{O}$ 配备三线性映射 $(f, g, h) \mapsto L_{f,g}h = fg\partial h - hg\partial f$ 后构成一个 J-三元代数。

[2]严格来说，我们关心的是下文计算结果模 $(2) \otimes \mathcal{O}_{(\mathrm{div})} \oplus (3) \otimes \mathcal{O}$ 的结果。然而，由于计算结果属于 $W \otimes (1)$，也就是我们要投影到的空间，因此可以直接忽略这一点。

证明。 我们将使用第 1.3 小节中引入的 Frank 李代数上的乘积，并取第 2.2 小节中的 u, v，其中 $\lambda(u, v) = 1$。我们首先说明，某些三重交换子可以用 J-三元代数来理解；随后利用 Frank 李代数的结构证明 J-三元代数的第一条公理。因此，我们先在 Frank 李代数中计算

$$\begin{aligned}[[u \otimes f, v \otimes g], u \otimes h] &= [\phi(u, v) \otimes (f\partial g - g\partial f) + \mathrm{Id} \otimes fg\partial, u \otimes h] \\ &= -u \otimes h(f\partial g - g\partial f) + u \otimes (fg\partial \cdot_{(\mathrm{div})} h) \\ &= u \otimes (hg\partial f - hf\partial g) + u \otimes (fg\partial h + hf\partial g + hg\partial f) \\ &= u \otimes (gf\partial h - hg\partial f) = u \otimes L_{f,g}h.\end{aligned}$$

同理，可得

$$\begin{aligned}[[v \otimes f, u \otimes g], v \otimes h] &= [\phi(v, u) \otimes (f\partial g - g\partial f) - \mathrm{Id} \otimes fg\partial, v \otimes h] \\ &= v \otimes h(f\partial g - g\partial f) - v \otimes (fg\partial \cdot_{(\mathrm{div})} h) \\ &= -v \otimes (hg\partial f - hf\partial g) - v \otimes (fg\partial h + hf\partial g + hg\partial f) \\ &= -v \otimes (gf\partial h - hg\partial f) = -v \otimes L_{f,g}h.\end{aligned}$$

因此，由 $[u \otimes f, v \otimes g]$ 可通过作用于 $u \otimes \mathcal{O}$恢复$L_{f,g}$，如前面的计算所示。因此，由

$$\begin{aligned}[[u \otimes x, v \otimes y], [u \otimes a, v \otimes b]] &= [[[u \otimes x, v \otimes y], u \otimes a], v \otimes b] - [u \otimes a, [[v \otimes y, u \otimes x], v \otimes b]] \\ &= [u \otimes L_{x,y}a, v \otimes b] + [u \otimes a, v \otimes L_{y,x}b],\end{aligned}$$

其中，第一步用到了雅可比恒等式和反交换性，下一步用到了前面的计算，由此可得

$$[L_{x,y}, L_{a,b}] = L_{(L_{x,y}a),b} + L_{a,(L_{y,x}b)}.$$

注意，这恰好是 J-三元代数的第一个条件。利用下式即可验证第二个条件:

$$L_{f,g}h - L_{h,g}f = 2(fg\partial h - hg\partial f)$$

而

$$L_{h,f}g - L_{f,h}g = fh\partial g - gf\partial h - fh\partial g + gh\partial f = 2(gf\partial h - gh\partial f),$$

使用 $-1 = 2$。 □

注记 3.3. 人们总是可以从一个 J-三元代数构造出一个李代数。一般构造可参见 [Hei81]。将此构造应用于例 3.1 中引入的 J-三元代数 $\mathcal{O}$，便得到一个 Frank代数；这一点可由上一引理所建立的交换子$[u \otimes f, v \otimes g]$ 与算子 $L_{f,g}$ 之间的联系看出。

将 [CE25] 或 [Sme26] 中发展的 operad李超代数构造应用于J-三元代数（即先构造李代数，然后将其视为关于一个特定导子的 $\mathbf{Rep}(\alpha_3)$-代数，再应用半单化函子），由命题 2.4 得到超代数 $K(1, 1; n)$。

引理 3.4. 对于例 *3.1* 中的 J 三元代数 $\mathcal{O}$，其伴随约当代数 J 与赋予普通若尔当积 $x \bullet y = \frac{xy+yx}{2}$ 的结合代数 $\mathcal{O}$ 同构。此外，该代数不是单的。

证明. 我们已经计算得出

$$\langle f, h\rangle g = g(f\partial h - h\partial f).$$

因此， J可与某些算子 $a \mapsto (f\partial h - h\partial f)a$在 $\mathcal{O}$上的张成空间等同。注意，这些算子是 $b = f\partial h - h\partial f$的（右或左）乘法算子 $R_b a = ab$。这表明，利用 $R_b \mapsto b$， J 可与约当代数 $\mathcal{O}$的一个子代数等同。为推出$J = \mathcal{O}$，首先回想 $W(1;\ n)$是单的，因此其导出代数与 $W(1;\ n)$相同。由

$$J\partial = \langle f\partial h - h\partial f : f, h \in \mathcal{O}\rangle\partial = \langle [f\partial, h\partial] : f, h \in \mathcal{O}\rangle = W(1, \underline{n})^{(1)} = W(1; \underline{n}) = \mathcal{O}\partial$$

我们得出 $J = \mathcal{O}$。

所有满足 $i > 0$ 的 $x^{(i)}$ 的张成空间构成 $\mathcal{O}$的一个理想，因此 $\mathcal{O}$ 不是单的。 □

引理 3.5. J-三元代数 $\mathcal{O}$ 是单的。

证明。 如果 I 是 J-三元代数的一个理想，那么空间 $I\partial \leq W$ 将是单代数 W的一个理想，因为

$$(L_{f,1}h)\,\partial = [f\partial, h\partial]$$

对所有 $h \in I$。因此， $\mathcal{O}$ 是一个单 J-三元代数。 □

注 3.6. [Hei81，定理 6.1] 指出，一个 J-三元代数 X 是单的，当且仅当伴随约当代数是单的，且 $\langle \cdot, \cdot\rangle$ 是非退化的。因此，引理 3.4 和 3.5 与 [Hei81，定理 6.1]相矛盾。事实上， $\mathcal{O}$ 是一个单 J-三元代数，但其伴随约当代数不是单的。

注意到，约当代数 $\mathcal{O}$ 在 [BK66，第 1 章，段落8]的意义下是退化的。只要伴随约当代数 J 是非退化的， [Hei81，定理 6.1] 的证明中（错误的部分）便可加以恢复，从而证明该约当代数必定是单的。在该证明中，Hein 错误地声称：通过援引第 4 节， $\langle \cdot, \cdot\rangle$ 的非退化性蕴含约当代数 J 的非退化性。在该节中， $\langle \cdot, \cdot\rangle$ 的非退化性被用来建立 J-三元代数 X 的非退化性与 J 的非退化性之间的等价；若伴随李代数的 Killing 型是非退化的，则也可证明 X 是非退化的。这两项事实都不能保证 J 是非退化的。

鉴于许多单李代数都具有非退化的 Killing 型， J-三元代数 $\mathcal{O}(1;n)$ 很可能构成特征不等于 2 的域上唯一一类退化单 J-三元代数。

References

[BK66] Hel Braun 和 Max Koecher。 *Jordan-Algebren* 128 *Die Grundlehren der mathematis-*，卷 Band of。 *chen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete* 施普林格出版社，柏林—纽约，1966 年。[BL14] Wei Bai 和 Wende Liu。Cartan 型模分次李超代数的超导子。 *Represent. Theory* 17 1 69 86, 2014 *Algebr.*，( )：–。[CE25]

Isabel Cunha 和 Alberto Elduque。J-三元代数、结构代数与李超代数，2025 年。[DGES24] Alberto Daza-Garc´ıa、Alberto Elduque 和 Umut Sayin。通过张量范畴，从八元数到复合超代数。 *Rev. Mat. Iberoam.*，40(1)：129–152，2024 年。[EEK 25] Alberto Elduque、Pavel Etingof 和 Arun Kannan。通过张量范畴，在特征 5 下从阿尔伯特代数到 Kac 的十维约当超代数。 *J. Algebra*，666：387–414，2025 年。[Fra73] Marguerite Frank。一个特征三的新单李代数。 *Proc. Amer. Math. Soc.* 38 43 46, ,：–。[Hei81] 1973 Wolfgang Hein。关于次数为 > 2 的约化 J-三元代数的结构。 *Mathematische Zeitschrift*，176 4 521( )：–539，1981 年。

[Kan24] Arun Kannan。通过张量范畴，在特征 3 和 5 下构造具有整数嘉当矩阵的例外单李超代数的新方法。 *Transform. Groups*, 29(3)：1065–1103，2024 年。[LZ05] Wende Liu 和 Yongzheng Zhang。有限维 Cartan 型模李超代数的外导子代数。 *Comm. Algebra*, 33(7)：2131–2146，2005 年。[Ost20] Victor Ostrik。关于正特征下的对称融合范畴。 *Selecta Math. (N.S.)*, 26(3)：第 36 号论文，19，2020 年。[Skr92] Serge Skryabin。特征 3 下单李代数的新系列。 *Mat. Sb.*，183(8)：3–22，1992 年。[Sme26] Michiel Smet。特征 3 下 J-三元代数的李 *Communications in Algebra* 0 0 1 17, 2026 代数半单化。，():–。[Str04] Helmut Strade。 *Simple Lie algebras over fields of positive characteristic. I*，第 38 *De Gruyter* 卷。Walter de *Expositions in Mathematics* 2004 Gruyter & Co.，柏林，。结构理论。