arXiv:2602.15629v1 [math.AG] 17 Feb 2026

斯廷罗德运算与辛算术对偶

TONY FENG

摘要。本文是对我在2025年美国数学学会代数几何暑期研讨会上的演讲的进一步阐述。文章介绍了一个源自 Tate 在 1966年布尔巴基研讨班报告中的猜想，该猜想预言有限域上曲面的布劳尔群存在辛形式；随后还非正式地概述了 [Fen20a] 和 [CF25]中的证明。



图 1. 这张路线图（由 Nano Banana Pro 制作动画）描绘了通往定理 1.4.2 的漫长而曲折的旅程。

目录

1. 引言 2 2. 上同调与（Milne–）Artin–Tate 配对 5 3. 与斯廷罗德运算的联系 10 4. 链接形式的分析 13 5. 关于 $\ell \neq p$ 17 的 Tate 辛性猜想 6. 关于 $\ell = p$ 21 的 Tate 辛性猜想 参考文献 26

1. 引言

本文综述了 Tate 在 1966 年布尔巴基报告 [Tat95], 中提出的一个猜想。该猜想预测有限域上光滑射影曲面的布劳尔群存在辛形式。经过一段丰富多彩的历史，并有许多数学家参与其中，这个猜想终于在作者和 Shachar Carmeli 最近的研究成果 [Fen20a] 和 [CF25] 中得到了解决。

1.1. 算术对偶。 Grothendieck 奠定了层上同调的一般基础，并特别构造了*étale* 上同调 理论，为代数几何提供了一种上同调理论，类似于拓扑空间的奇异上同调。这使我们能够为概形指定上同调不变量，尤其是为交换环指定上同调不变量（通过其对应的仿射概形）。

令人惊奇的是，许多具有数论意义的环——例如整数$\mathbf{Z}$、有理数$\mathbf{Q}$、 p-进域$\mathbf{Q}_p$以及有限域$\mathbf{F}_p$——都呈现出令人联想到流形的上同调特征。尤其是，Tate 在 1962年国际数学家大会演讲中宣布的算术对偶 [Tat63], ，指的是这样一种现象：整体域和局部域的上同调群具有类似于庞加莱对偶的对偶理论。

Tate 是如何发现算术对偶的？他的灵感似乎来自 Cassels 的一个结果：Cassels 在数域上的椭圆曲线的*Tate–Shafarevich* 群 （的非整除商）上构造了一个辛配对。借助算术对偶，Tate 将 Cassels 的配对推广到了整体域上的主极化阿贝尔簇。他证明了他的配对总是斜对称的，并在 [Tat63, 定理 3.3] 中证明，在一个技术性假设下，该配对是辛的[1] （对椭圆曲线而言，该假设总是成立）。为纪念 Cassels 和 Tate，这个配对如今被称为*Cassels–Tate* 配对。

反过来，Cassels 似乎受到了 Selmer 发现的一种数字巧合的启发：椭圆曲线的 Tate–Shafarevich 群的大小似乎总是完全平方数 [Mil25, §3]。由于带有辛形式的有限阿贝尔群必定具有完全平方数大小，这种数字巧合或许可以用辛结构的存在来解释。

因此，辛结构与完全平方数之间的关系，一直是推动现代代数数论发展的历史动力之一。这篇综述探讨了这一系列思想中的一个奠基性问题，而事实证明，要解决它出乎意料地困难。

1.2. Tate 辛性猜想。 算术对偶被发现几年后，Tate 在 1966年 的布尔巴基研讨会报告中 [Tat95] 将 Birch–Swinnerton-Dyer 猜想推广到阿贝尔簇，并提出了它的几何类比；这一猜想如今称为*Artin– Tate* 猜想，针对的是有限域 p 上特征为 p 的光滑、真、几何连通曲面 X。此外，Tate 猜想，布劳尔群 Br(X) 上应存在类似的辛形式：$= \mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X;\mathbf{G}_m)$。这是一个扭阿贝尔群，猜想它是有限群，并且与 Tate–Shafarevich 群密切相关。

令 $\mathrm{Br}(X)_{\mathrm{nd}}$ 为 Br(X) 的非整除商，即除以可整除元素子群所得的商。Br(X) 的（猜想中的）有限性将意味着 Br(X) $=\mathrm{Br}(X)_{\mathrm{nd}}$。Artin–Tate 在 $\mathrm{Br}(X)_{\mathrm{nd}}[\ell^\infty]$上构造了一个非退化斜对称形式

[1]提醒读者，若配对 $\langle -,-\rangle$ 满足 $\langle u,v\rangle = -\langle v,u\rangle$ 对所有 u,v均成立，则称其为斜对称；若 $\langle u,u\rangle = 0$ 对所有 u.均成立，则称其为交替 。交替必然意味着斜对称，但若群含有非平凡的 2-扭元，反之则未必成立。最后，若一个配对既交替又非退化，则称其为辛 。

对任意 $\ell \neq p$，并在 [Tat95] 中猜想它还具有交替性。该形式在 [Fen20a] 中被命名为*Artin–Tate* 配对 。

对于 $\ell = p$，Tate 并未在 Br(X)$_{\mathrm{nd}}[p^\infty]$ 上定义配对，因为在撰写本文时[Tat95] ，他尚未找到一种合适的 p-进上同调理论，既能与 Br(X) 建立恰当的联系，又具备算术对偶理论。后来，Milne 通过他所谓的对数 *de Rham–Witt* 上同调提供了这一理论，这种上同调如今也以 p-进 *étale*-动机上同调和合成上同调这两个同义名称为人所知。仿照 Artin–Tate 的构造，Milne 在 [Mil75] 中构造了一个非退化斜对称配对，定义在 Br(X)$_{\mathrm{nd}}[p^\infty]$ 上，其中 $p \neq 2$。这一限制 $p \neq 2$ 源于当时针对 $p = 2$ 的 p-进上同调理论存在不足；后来，Milne 在 [Mil86] 中利用 Illusie 对 de Rham–Witt 复形的发展成果 [Ill79]，消除了这一限制。这最终使得在所有特征下，Br(X)$_{\mathrm{nd}}$ 上都能定义非退化斜对称形式，我们称之为米尔恩–阿廷–泰特配对。

我们将（米尔恩–）Artin–Tate 配对是辛的这一预测称为“Tate辛性猜想”。

猜想 1.2.1（Tate辛性猜想）。 米尔恩–阿廷–泰特配对是交错的。

在下一小节中，我们将讨论促使提出猜想 1.2.1 的若干更广泛背景。然而，作者本人认为，猜想 1.2.1 的主要意义在于，它延续了数论中由简单经验观察导向丰富数学结构的传统。Tate 发现算术对偶，用以解释为何 #X 应为完全平方数，便是这一传统的例证；本文的目的则是突出在证明猜想 1.2.1 的过程中发现的更多有趣结构。

1.3. **更广泛的背景**。 Tate辛性猜想源于对正特征下 Birch–Swinnerton-Dyer 猜想的更广泛研究，而这正是 Tate 的布尔巴基报告 [Tat95] 的主要主题。在这项工作中，Artin–Tate 针对光滑完备曲面 X 在有限域上的情形，提出了 BSD 猜想的几何类比，现称为 *Artin–Tate* 猜想。特别地，Artin–Tate 猜想预测，# Br(X) 是出现在 X 的 ζ 函数于其函数方程中心处首项之特殊值公式中的主要不变量。

Milne [Mil75, Mil86]以及 Kato–Trihan [KT03] 的研究表明，对于所有此类 X，Br(X) 有限等价于 Tate–Shafarevich 群有限，且所有函数域上的雅可比簇都满足 Birch–Swinnerton-Dyer 猜想。若 X 存在一个纤维化 $f\colon X \to C$ →曲线 C，则 X 的 Artin–Tate 猜想对应于 f的一般纤维的雅可比簇在 C的函数域 K 上的 BSD 猜想，我们将该雅可比簇记作 J。事实上，各自猜想中出现的所有对象都通过一套对应关系相互关联，如表1所示。

表1. BSD 猜想与 Artin–Tate 猜想之间的类比。

BSD 猜想	**Artin–Tate 猜想**
$L(J,\ s)$	$\zeta(X,\ s)$
$J(K)$	NS(X)
Ш(J)	Br(X)
Cassels–Tate 配对	Artin–Tate 配对

Tate 在 [Tat95] 中陈述猜想 1.2.1 的动机来自与 X(J) 的类比。在 [Tat95, 定理 5.1], 中, Tate 断言一般而言，X(J) 上的 Cassels–Tate 配对是交替的，却忽略了他在 [Tat63, 定理 3.3] 中证明这一交替性时所要求的技术假设。这导致了一场长期的误解，最终由 Poonen–Stoll [PS99], 的研究澄清：他们表明，若不满足这一假设，Cassels–Tate 配对可能不是交替的。

1.4. **历史**。 我们概述关于猜想 1.2.1 的一些先前结果。

回想一下，Br(X)$_{\mathrm{nd}}$ 是有限的，因此 Br(X)$_{\mathrm{nd}}$ 上的辛形式意味着 # Br(X)$_{\mathrm{nd}}$是完全平方数。Manin [Man67, Man86] 声称找到了 X，使得 # Br(X) $= 2$，这将否定猜想 1.2.1。然而，Urabe 后来发现 Manin 的计算有误，随后在 [Ura96] 中证明，若 p （基域的特征）为奇数，则 # Br(X)$_{\mathrm{nd}}$ 总是完全平方数。

对于所有 p，包括 $p = 2$，Liu–Lorenzini–Raynaud 在 [LLR05] 中证明，若 Br(X)有限，则其阶为完全平方数。有限性假设非常强：如上所述，它等价于函数域上雅可比簇的 BSD 猜想。（当 $p = 2$ 时，# Br(X)$_{\mathrm{nd}}$ 为完全平方数这一结论，直到作者与 Carmeli 合作的 [CF25] 成果问世后，才得到无条件证明。）Geisser [Gei20]指出 [LLR05], 中存在一个错误，该错误源于 Gordon [Gor79]的一个引理有误；这一问题随后在 [LLR18]中得到修正。

接下来，我们将从布劳尔群的大小转向（Milne–）Artin–Tate 配对的辛性。Zarhin 在 [Zar89] 中证明，在以下假设下，Br(X)$_{\mathrm{nd}}$ 上存在一个交替配对[2] ：

- $p \neq 2$, X 可提升到特征 0，且 X 的几何 Néron–Severi 群的 2-主部分为零。

最后，我们来到作者本人在这个故事中的篇章。作者的博士论文[Fen20a] 证明了在 $p \neq 2$ 时猜想 1.2.1 成立。

定理 1.4.1。 假设 $p \neq 2$。那么猜想 *1.2.1* 成立。

猜想 1.2.1 最困难的情形是 $p = 2$，因为该猜想本质上涉及系数特征为 $\ell = 2$时的上同调。当 $p = \ell$ 时，上同调理论会变得复杂得多，这一点已有充分记载；与此问题相关的具体技术难点将在 §6 中讨论。在 [CF25], 中，作者与 Shachar Carmeli 完成了这一最后的情形：

定理 1.4.2. 假设 $p = 2$。则猜想 *1.2.1* 成立。

注记 1.4.3 （高维推广）. 工作 [Fen20a] 与 [CF25] 对任意定义在$\mathbf{F}_p$上的光滑、真、几何连通的偶数维簇构造了（Milne–）Artin–Tate 配对的一种推广，并证明它是辛的。曲面的情形虽然由于与 BSD 猜想的联系而具有历史意义，但从这一观点来看并非特殊。不过，为简单起见，我们在本综述中集中讨论曲面的情形。

本文其余部分将概述证明定理 1.4.1 和定理 1.4.2 所用的思路。这里先简要提示一下。定理 1.4.1 的关键在于巧妙运用*étale Steenrod* 运算，它们是模 2 étale 上同调中微妙的对称性。对于 $p = 2$,

[2]严格地说，该结果针对的是在 [Zar89], 中独立发现的一个配对，它应当与 Artin–Tate 的配对相同，但 [Zar89]中并未将其与 Artin–Tate 配对进行比较。

在 $p=2$ 构造配对这件事上，历史上一直存在困难，甚至连构造本身都很棘手，原因是缺乏合适的上同调理论。如今，这种上同调理论已经建立，并有若干名称，其中之一是合成上同调，但其对称性尚未得到令人满意的理解。对于定理 1.4.2，我们首先需要建立一套合成上同调 *Steenrod* 运算理论，使其作用于合成上同调。我们依循 Lurie 关于“棱柱稳定同伦”的构想完成了这一工作。我们强调，所发展的合成上同调 Steenrod 运算理论适用于所有素数 p，尽管定理 1.4.2 的应用只需要考虑 $p=2$ 这一情形。

1.5. **致谢**。 感谢 Shachar Carmeli、Soren Galatius 和 Jacob Lurie 多年来在我们研究 [Fen20a]和 [CF25]的过程中给予的帮助。作者的研究得到美国国家科学基金会（资助项目 DMS-2302520 和 DMS-2441922）、西蒙斯基金会和阿尔弗雷德·P·斯隆基金会的支持。

2. Cohomology and the (Milne–)Artin–Tate pairing

2.1. **对照表**。 本文将灵活地穿梭于三种不同数学背景下的上同调理论之间，它们具有某些共同的形式性质：

- （“拓扑学”）拓扑空间的奇异上同调，
- （“ℓ-进”）域上簇的 ℓ-进 étale 上同调，其中 ℓ可逆。
- （“p-进”）$\mathbf{F}_p$ 上簇的合成上同调。

尽管这些上同调理论的定义和性质在不同情形下是以截然不同的方式建立的，但最终得到的形式体系却颇为统一。为凸显其中的相似之处，我们引入一种统一的（略非标准的）记号来表示不同情形下的上同调。

- (“ℓ-adic”) 若 X 是定义在 k 上的簇，且 $\ell \in k^\times$，则我们将 $\mathrm{H}^a(X;\mathbf{Z}/\ell^n(b)) := \mathrm{H}^a_{\mathrm{et}}(X;\mu_{\ell^n}^{\otimes b})$ 记为“ $\mu_{\ell^n}^{\otimes b}$ Tate 扭曲”作为 X 上的 étale 层时的 étale 上同调。我们记作

$$\mathrm{H}^a(X;\mathbf{Z}_\ell(b)) := \varprojlim_n \mathrm{H}^a_{\text{ét}}(X;\mathbf{Z}/\ell^n(b)).$$

- (“p-adic”) 若 X 是定义在 $\mathbf{Z}_p$ 上的概形，则我们将 $\mathrm{H}^a(X;\mathbf{Z}/p^n(b)) := \mathrm{H}^a_{\mathrm{syn}}(X;\mathbf{Z}/p^n(b))$ 记为 X 以合成复形 $\mathbf{Z}/p^n(b)$ 为系数的合成上同调。对于定义在 $\mathbf{F}_p$ 上的光滑概形，这一理论最初由 Milne [Mil75, Mil86] 以“对数 de Rham–Witt 上同调”之名构造，之后 Geisser–Levine [GL00]又将其重新解释为模 p 动机上同调。近期，Bhatt–Morrow–Scholze [BMS19]和 Bhatt–Lurie [BL22]的研究提出了一种更灵活的方法，适用于一般的$\mathbf{Z}_p$-概形；这种额外的灵活性在 [CF25]中发挥了关键作用。更详细的讨论和参考文献见 [CF25, §2] 。
- (“拓扑学”) 如果 X 是一个拓扑空间，那么我们记 $\mathrm{H}^a(X;\mathbf{Z}/\ell^n(b)) := \mathrm{H}^a(X;\mathbf{Z}/\ell^n)$。换言之，扭曲项“$(b)$”只是一个没有意义的记号工具。

注 2.1.1. 对这些不同上同调理论采用统一记号，掩盖了构造它们背后的困难。总的来说，本文所讨论结果的技术水平

- 在拓扑学领域属于经典范畴（例如，1970年以前已可获得），
- 在 ℓ-进上同调领域相当经典（例如，1990年以前已可获得，但可能有一个技术例外），
- 在 p-进上同调的研究中如今已十分现代（在 2024年之前尚无法实现）。

为了传达思想而不陷入技术细节，我们将借助这些情形之间的类比来阐释概念。例如，当我们认为某个类比恰当地反映了其核心思想时，可能会通过证明拓扑学中的类似命题，来“直观地论证”一个关于 ℓ-进 étale 上同调的陈述。反过来，我们也会类似地将 ℓ-进 étale 上同调作为合成上同调的示意性隐喻。

2.2. **庞加莱对偶。** 为了说明这套对应关系如何运作，我们详细阐述庞加莱对偶在不同情境中的含义。

2.2.1. 拓扑实现。 若 M 是一个维数为d的闭、定向连通流形，则庞加莱对偶给出一个同构

$$\int_M : \mathrm{H}^d(M; \mathbf{Z}/\ell^n) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}/\ell^n$$

以及一个完美配对

$$\mathrm{H}^i(M; \mathbf{Z}/\ell^n) \times \mathrm{H}^{d-i}(M; \mathbf{Z}/\ell^n) \to \mathrm{H}^d(M; \mathbf{Z}/\ell^n) \xrightarrow{\int_M} \mathbf{Z}/\ell^n.$$

2.2.2. 几何 ℓ-进上同调。 接下来，设 X 是域 k上的光滑射影连通簇，其中 k为可分闭域。令 ℓ 为素数，并假设 k 的特征不为 ℓ。那么庞加莱对偶给出一个同构

$$\int_X : \mathrm{H}^{2d}(X; \mathbf{Z}/\ell^n(d)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}/\ell^n \tag{2.2.1}$$

以及一个完美配对

$$\mathrm{H}^i(X; \mathbf{Z}/\ell^n(b)) \times \mathrm{H}^{2d-i}(X; \mathbf{Z}/\ell^n(d-b)) \to \mathrm{H}^{2d}(X; \mathbf{Z}/\ell^n(d)) \xrightarrow{\int_X} \mathbf{Z}/\ell^n.$$

应将其视为 §2.2.1 的类比。作为合理性检查，当 $k = \mathbf{C}$时，阿廷比较定理将 ℓ-进 étale 上同调 $\mathrm{H}^a(X;\mathbf{Z}/\ell^n(b))$ 与奇异上同调 $\mathrm{H}^a(X(\mathbf{C});\mathbf{Z}/\ell^n(b))$ 相对应，并且与这些形式的庞加莱对偶相容。维数相同，因为 $X(\mathbf{C})$ 作为实流形的维数为 $2d$ 。

2.2.3. 算术 ℓ-进上同调。本文实际上关注的是另一种情形：基域 k 是特征为 p 的有限域 $k = \mathbf{F}_q$ 。在这种情况下，庞加莱对偶的表现形式与 §2.2.2 中不同。

事实上，我们可以直接看出，即使是点 $\operatorname{Spec} \mathbf{F}_q$ 也有非平凡的上同调：由于 $\operatorname{Gal}(\mathbf{F}_q/\mathbf{F}_q) = \widehat{\mathbf{Z}}$，我们有

$$\mathrm{H}^1(\operatorname{Spec} \mathbf{F}_q; \mathbf{Z}/\ell) = \operatorname{Hom}_{\mathrm{cts}}(\widehat{\mathbf{Z}}, \mathbf{Z}/\ell) = \mathbf{Z}/\ell.$$

事实上，$\operatorname{Spec}\mathbf{F}_q$ 的同伦群和上同调群都类似于圆的相应群，这正是著名的“素数与纽结”类比的一部分 [Mor24]。事实证明，对于一般的 X，与 §2.2.2 中情形的所有行为差异，都源于基“点”的这种不同表现。

设 X 是特征为 p、维数为 d 的有限域 $\mathbf{F}_q$ 上的光滑射影几何连通簇。由此，庞加莱对偶给出一个同构

$$\int_X : \mathrm{H}^{2d+1}(X; \mathbf{Z}/\ell^n(d)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}/\ell^n \tag{2.2.2}$$

以及一个完美配对

$$\mathrm{H}^i(X; \mathbf{Z}/\ell^n(b)) \times \mathrm{H}^{2d+1-i}(X; \mathbf{Z}/\ell^n(d-b)) \to \mathrm{H}^{2d+1}(X; \mathbf{Z}/\ell^n(d)) \xrightarrow{\int_X} \mathbf{Z}/\ell^n.$$

式（2.2.2）中的“额外” $+1$ 维数源于这样一个事实：我们实际上考虑的是“绝对”上同调 $\mathrm{H}^a(X;\mathbf{Z}/\ell^n(b))$，而不是“几何”上同调 $\mathrm{H}^a(X_{\mathbf{F}_q};\mathbf{Z}/\ell^n(b))$。二者通过霍赫希尔德–塞尔谱序列相关联

$$\mathrm{H}^i(\operatorname{Spec}\mathbf{F}_q,\mathrm{H}^j(X_{\overline{k}}))\implies \mathrm{H}^{i+j}(X),$$

借助它，可以从几何版本推出庞加莱对偶的“绝对”版本。

2.3. **布劳尔群**。设 X 为特征 p的有限域$\mathbf{F}_q$ 上的光滑射影簇。 X 的布劳尔群为 $\mathrm{Br}(X):=\mathrm{H}^2_{\text{ét}}(X;\mathbf{G}_m)$。

对于阿贝尔群 G，我们用 G_{nd} 表示 G的极大不可整除商，即 G 对其最大可整除子群的商。

引理 2.3.1。设 ℓ 为任意素数（可能等于 p）。我们有一个同构

$$\mathrm{Br}(X)_{\mathrm{nd}}[\ell^\infty]\cong\mathrm{H}^2(X;\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(1))_{\mathrm{nd}}.$$

证明。这可由层的库默尔序列所诱导的上同调长正合列中的形式图追逐得出：见 [CF25，§14.1]。□

由短正合列

$$0\to\mathbf{Z}_\ell(d)\to\mathbf{Q}_\ell(d)\to\mathbf{Q}_\ell(1)/\mathbf{Z}_\ell(d)\to 0 \tag{2.3.1}$$

我们得到一个边界映射

$$\widetilde{\delta}\colon\mathrm{H}^2(X;\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d))\to\mathrm{H}^3(X;\mathbf{Z}_\ell(d)).$$

Le　　~引理 2.3.2. 设 ℓ 是任意素数（可能等于 p）。映射 δ 诱导出一个同构

$$\widetilde{\delta}\colon\mathrm{H}^2(X;\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d))_{\mathrm{nd}}\xrightarrow{\sim}\mathrm{H}^3(X;\mathbf{Z}_\ell(d))_{\mathrm{tors}}.$$

证明。 与 (2.3.1) 相关联的长正合列为

$$\begin{array}{ccccc}\cdots\longrightarrow\mathrm{H}^2(X;\ \mathbf{Q}_\ell(d))&\longrightarrow&\mathrm{H}^2(X;\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d))&&\\&\searrow^{\widetilde{\delta}}&&&\\\mathrm{H}^3(X;\mathbf{Z}_\ell(d))&\longrightarrow&\mathrm{H}^3(X;\ \mathbf{Q}_\ell(d))&\longrightarrow&\cdots\end{array}$$

由此可见，边界同态的像是 $\mathrm{H}^3(X;\mathbf{Z}_\ell(d))_{\mathrm{tors}}$，且~其核是可除的。因此，它可分解为一个同构 δ，如所述。□

2.4. **（米尔恩–）阿廷–泰特配对**。现在设 X 是一个维数为 $2d$ 、定义在特征为 p 的有限域 $\mathbf{F}_q$ 上的光滑、射影、几何连通簇。现在，对每个素数 ℓ（包括$\ell=p$），我们都可以定义 $\mathrm{H}^{2d}(X;\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d))_{\mathrm{nd}}$ 上的米尔恩–阿廷–泰特配对。尽管从历史上看，$\ell\neq p$ 和 $\ell=p$ 两种情形应当加以区分：前者源自 Artin–Tate 在 [Tat95] 中的工作，后者源自 Milne 在 [Mil75, Mil86], 中的工作，但本文后文中我们将一概称之为“米尔恩–阿廷–泰特配对”。

定义 2.4.1（米尔恩–阿廷–泰特配对）。 对于 $x,x'\in\mathrm{H}^{2d}(X;\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(d))_{\mathrm{nd}}$，注意到 $x\smile\widetilde{\delta}x'\in\mathrm{H}^{4d+1}(X;\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(2d))$. 我们定义

$$\langle x,x'\rangle_{\mathrm{MAT}}:=\int_X x\smile(\widetilde{\delta}x')\in\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell.$$

注 2.4.2（链接形式）。在拓扑情形中，这一定义广为人知，称为奇维流形的"链接形式"。对于偶维流形 M^{2d}，$\mathrm{H}_d(M^{2d};\mathbf{Z})_{\mathrm{free}}$上有一个广为人知的交形式。对于奇维流形 M^{2d+1}，不存在"中间"同调（上同调），取而代之的是 $\mathrm{H}_d(M^{2d+1};\mathbf{Z})_{\mathrm{tors}} \cong \mathrm{H}^{d+1}(M^{2d+1};\mathbf{Z})_{\mathrm{tors}}$上的链接形式。其几何描述如下。设 $u,v \in \mathrm{H}_d(M^{2d+1};\mathbf{Z})_{\mathrm{tors}}$。由于 v是挠元，存在整数 $n \geq 1$，使得 nv是某个（$d+1$）-循环 V的边界。将 V与代表 u的循环相交，得到一个整数 $u \cdot V \in \mathbf{Z}$。但要使其定义良好，还需做一些处理。首先，我们需要除以 n，以对该选择进行重新归一化，从而得到$\mathbf{Q}$中的一个元素。其次，V本身的选取只在相差循环的意义下定义良好，因此所得有理数只在相差一个整数的意义下定义良好。因此，链接形式最终取值于$\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$。

接下来，我们在群 $\mathrm{H}^{2d}(X;\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}(d))_{\mathrm{nd}}$ 上定义一个辅助配对，它将是一个有用的技术工具，用以触及米尔恩–阿廷–泰特配对。层的短正合列

$$0 \to \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}(d) \xrightarrow{\ell^n} \mathbf{Z}/\ell^{2n}\mathbf{Z}(d) \to \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}(d) \to 0$$

诱导*Bockstein* 运算

$$\beta\colon \mathrm{H}^i(X;\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}(d)) \to \mathrm{H}^{i+1}(X;\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}(d)). \tag{2.4.1}$$

定义 2.4.3. 我们定义配对

$$\langle -,-\rangle_n\colon \mathrm{H}^{2d}(X;\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}(d)) \times \mathrm{H}^{2d}(X;\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}(d)) \to \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}$$

by

$$\langle x,y\rangle_n := \int_X x \smile \beta y.$$

（注意，$\langle -,-\rangle_n$ 不必是非退化的。）

$\langle \cdot,\cdot\rangle_n$ 与 Artin–Tate 配对之间有何关系？与之相关联的长正合列

$$0 \to \mathbf{Z}_\ell(d) \to \mathbf{Z}_\ell(d) \to \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}(d) \to 0$$

给出一个满射

$$\mathrm{H}^{2d}(X;\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}(d)) \twoheadrightarrow \mathrm{H}^{2d+1}(X;\mathbf{Z}_\ell(d))[\ell^n]. \tag{2.4.2}$$

命题 2.4.4. 映射 (2.4.2) 交织了配对 $\langle \cdot,\cdot\rangle_n$ 和 $\langle -,-\rangle_{\mathrm{MAT}}$，即下图交换：

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{H}^{2d}(X;\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}(d)) & \times & \mathrm{H}^{2d}(X;\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}(d)) & \xrightarrow{\langle\cdot,\cdot\rangle_n} & \mathrm{H}^{4d+1}(X;\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}(2d)) \\
\downarrow & & \downarrow & & \sim\downarrow \\
\mathrm{H}^{2d+1}(X;\mathbf{Z}_\ell(d))[\ell^n] & \times & \mathrm{H}^{2d+1}(X;\mathbf{Z}_\ell(d))[\ell^n] & \xrightarrow[\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{MAT}}]{} & \mathrm{H}^{4d+1}(X;\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(2d))[\ell^n]
\end{array}$$

证明。这可由图追逐直接得出：参见 [Fen20a，命题 2.5]。 □

根据命题 2.4.4，要证明定理 1.4.2 和定理 1.4.1，只需证明 $\langle -,-\rangle_n$ 是交替的，这正是我们要做的。与 $\langle -,-\rangle_{\mathrm{MAT}}$相比，$\langle -,-\rangle_n$ 有什么优势？从理念上说，这似乎归结于这样一个事实：$\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}$具有环结构，而$\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell$ 则没有。环结构（部分地）赋予了 $\mathrm{H}^*(X;\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})$额外的结构，而这种结构将在我们的论证中发挥关键作用。为举例说明这一点，我们将展示如何利用它证明斜对称性。

命题 2.4.5。对于每个素数 ℓ和每个 $n \geq 1$，配对 $\langle -, - \rangle_n$ 是斜对称的。

证明。 该断言等价于

$$x \smile \beta y + y \smile \beta x = 0.$$

由于 β 是导子，我们有 $x \smile \beta y + y \smile \beta x = \beta(x \smile y)$。但是边界映射

$$\beta \colon \mathrm{H}^{4d}(X; \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}(2d)) \to \mathrm{H}^{4d+1}(X; \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}(2d))$$

消失，因为它的像是.....的核

$$[\ell^n] \colon \mathrm{H}^{4d+1}(X; \mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z}(2d)) \to \mathrm{H}^{4d+1}(X; \mathbf{Z}/\ell^{2n}\mathbf{Z}(2d))$$

根据庞加莱对偶，它与包含 $\ell^n\mathbf{Z}/\ell^{2n}\mathbf{Z} \hookrightarrow \mathbf{Z}/\ell^{2n}\mathbf{Z}$ 相对应。 □

推论 2.4.6. 米尔恩–阿廷–泰特配对是斜对称的。

2.5. **玩具例子：二次互反律**。到目前为止，讨论相当形式化（给定算术对偶）。尽管如此，它仍包含有趣的算术信息。作为一个简单示例，我们用算术对偶的语言重新表述二次互反律。

对于两个不相交的纽结 L， $K \subset S^3$，存在一个链接数 $\ell k(L, K) \in \mathbf{Z}$，用于衡量“ K 绕着 L缠绕的次数（按重数计）”。注意到 $\mathrm{H}_1(S^3 \setminus K; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$，便可用代数方法定义它。纽结 K在 $\mathrm{H}_1(S^3 \setminus L; \mathbf{Z})$ 中定义了一个类；在此对应下，它在$\mathbf{Z}$ 中的像就是链接数。

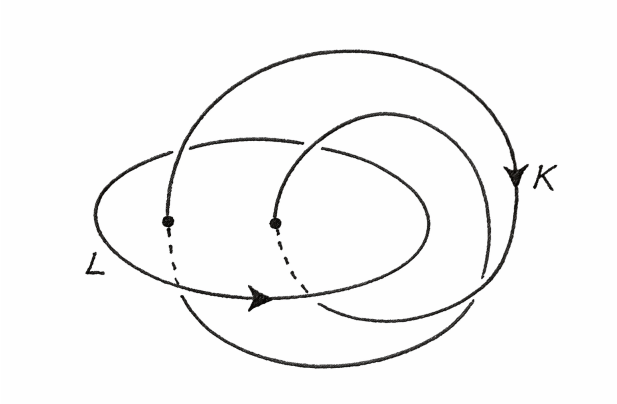


图 2. $\ell k(L, K) = 2$

素数也有类似于链接数的概念。为简单起见，我们只讨论奇素数的情形：若 p， q 是奇素数，则

$$\ell k(p, q) \pmod 2 = \begin{cases} 0 & (-1)^{\epsilon(p)}p \text{ is a square mod } q \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \in \mathbf{Z}/2, \tag{2.5.1}$$

其中，当 $p \equiv 1$ (模 4) 时， $\epsilon(p) = 0$ ；当 $p \equiv 3$ (模 4) 时， $\epsilon(p) = 1$ 。为了解这一计算为何类似于链接数，我们用代数语言重新表述链接数。计算可得 $\mathrm{H}_1(S^3 \setminus K; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$，这意味着存在唯一的 $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-覆盖空间 $T \to S^3 \setminus K$。于是， $\ell k(L, K) \equiv 0$ (模 2) 当且仅当 L 在 T中分裂。

类似地，存在唯一的 étale 双重覆盖 $\operatorname{Spec}\mathcal{O} \to \operatorname{Spec}\mathbf{Z}[1/p]$，满足$\mathcal{O} = \mathbf{Z}[1/p][\frac{1+\sqrt{(-1)^{\epsilon(p)}p}}{2}]$。于是~~（利用 q~~为奇数这一点），$\mathcal{O}$ 中的 q 分裂，当且仅当 $(-1)^{\epsilon(p)}p$ 已经是模 q 的完全平方数。这说明了为什么（ 2.5.1 ）类似于模 2 链接数。

现在，纽结的链接数具有对称性，这一点显而易见： $\ell k(L,\ K) = \ell k(K,\ L)$。证明提纲见 [Mil97，第 13] 题。更不那么直观的是，对于不同的奇素数 p 和 q，断言 $\ell k(p,\ q) = \ell k(q,\ p)$ 成立——这就是高斯证明的著名二次互反律！

这个例子表明，在我们的对应关系下，简单的拓扑对偶可以与深刻的算术对偶相呼应。需要说明的是，这并非二次互反律的证明；类域论已经融入 Tate 算术对偶定理之中。这个例子应被视为将算术对偶呈现为一种世界观，使二次互反律显得自然而然。

3. 与斯廷罗德运算的联系

这个故事最有趣的方面之一，是猜想 1.2.1 与 Steenrod 运算之间的联系。我们将尝试说明 Steenrod 运算如何融入这一叙述。

3.1. 什么是 Steenrod 运算? Steenrod 运算由 Norman Steenrod [Ste47] 在拓扑空间的奇异上同调背景下发现，因此我们将从这一背景开始讲述。

设 T是一个拓扑空间。那么 $\mathrm{H}^*(T;\mathbf{Z}/2)$ 是 $\mathbf{F}_2$, 上的交换环，因此具有 Frobenius 端同态 $x \mapsto x^2$。然而，事实证明，由于 $\mathrm{H}^*(T;\mathbf{Z}/2)$ 以一种特殊方式出现，它自动继承了作为斯廷罗德代数模的更丰富结构。具体而言，这相当于存在自然变换

$$\mathrm{Sq}^i \colon \mathrm{H}^*(T;\mathbf{Z}/2) \to \mathrm{H}^{*+i}(T;\mathbf{Z}/2),$$

这些变换被称为“斯廷罗德平方”或“斯廷罗德运算”，并满足某些关系。将 Sq^j 理解为 Frobenius 端同态的“导出”端同态可能会有所帮助，尽管我们要强调，这并非意在表达任何严格的技术含义。在 $\mathrm{H}^j(T;\mathbf{Z}/2)$ 上，运算 Sq^j 是 Frobenius（即平方）运算 $x \mapsto x^2$，而 Sq^i 对于$i > j$为零。因此，编号方式是，Sq^{j-1} 是第一个“导出”运算。下面我们按照 [MT68 第 2] 章的论述来解释它。

3.1.1. 第一个 *Steenrod* 运算。众所周知，上同调上的杯积是分次交换的。杯积由一个链级运算诱导，但该运算并不分次交换：在链级上，我们只有“在同伦意义下”的交换性。Steenrod 通过构造一个“杯一积”，系统地表达了这一点，见 [Ste47]

$$\begin{aligned}\mathrm{cup}_1 \colon C^r(T;\mathbf{Z}) \otimes C^s(T;\mathbf{Z}) &\to C^{r+s-1}(T;\mathbf{Z}) \\ u \otimes v &\mapsto u \smile_1 v\end{aligned}$$

使得对于所有 $u \otimes v \in C^r(T;\mathbf{Z}) \otimes C^s(T;\mathbf{Z})$，我们有

$$d(u \smile_1 v) = -du \smile_1 v + (-1)^{r+1} u \smile_1 dv + u \smile v - (-1)^{rs} v \smile u. \tag{3.1.1}$$

如果我们将 $u = v \in Z^r(T;\mathbf{Z})$视为上循环，那么该关系就特化为

$$d(u \smile_1 u) = u \smile u - (-1)^{r^2} u \smile u$$

这意味着 $u \smile_1 u$ 本身是一个取模 2 系数的上循环。映射 $u \mapsto u \smile_1 u$下降为运算

$$\mathrm{Sq}^{r-1} \colon \mathrm{H}^r(T; \mathbf{Z}/2) \to \mathrm{H}^{2r-1}(T; \mathbf{Z}/2).$$

3.1.2. 所有斯廷罗德运算。 更一般地，对于每个 $i = 1,2,\ldots$斯廷罗德定义了“杯-i积”

$$\begin{aligned} \mathrm{cup}_i \colon C^r(T; \mathbf{Z}) \otimes C^s(T; \mathbf{Z}) &\to C^{r+s-i}(T; \mathbf{Z}) \\ u \otimes v &\mapsto u \smile_i v \end{aligned}$$

使得对于所有 $u \otimes v \in C^r(T; \mathbf{Z}) \otimes C^s(T; \mathbf{Z})$，我们有

$$d(u \smile_i v) - (-1)^i \mathrm{cup}_i(d(u \otimes v)) = (-1)^{i-1} u \smile_{i-1} v - (-1)^{rs} v \smile_{i-1} u. \tag{3.1.2}$$

取 $u = v \in Z^r(T; \mathbf{Z})$，我们发现运算 $u \mapsto u \smile_i u$可下降为一个上同调运算

$$\mathrm{Sq}^{r-i} \colon \mathrm{H}^r(T; \mathbf{Z}/2) \to \mathrm{H}^{2r-i}(T; \mathbf{Z}/2).$$

注 3.1.1. $\mathrm{H}^*(T; \mathbf{Z}/2)$ 的 Frobenius 端同态可以理解为将乘法（先验上是一个二元函数）特化到对角线输入。类似地，斯廷罗德运算可以理解为将高阶杯$_i$积（先验上是二元函数）特化到对角线输入。这就是它们可以被视为 Frobenius 的“导出”端同态的含义。

3.1.3. 广义系数。 斯廷罗德平方用于分析 $\mathrm{Br}(X)[2]$ 上的（Milne–）Artin–Tate 配对。若要分析 $\mathrm{Br}(X)[2^n]$ 上的配对，则需要 [Fen20a, §3 中定义的“广义斯廷罗德平方”5] （专家们想必早已熟知，尽管我们未在文献中找到相关讨论），其形式为

$$\widetilde{\mathrm{Sq}}^i \colon \mathrm{H}^r(T; \mathbf{Z}/2^n) \to \mathrm{H}^{r+i}(T; \mathbf{Z}/2^n).$$

为简单起见，本文将略去这部分内容。

3.2. $\mathbb{E}_\infty$ **斯廷罗德运算**。 我们刚才讨论了斯廷罗德运算在其最初应用领域——代数拓扑——中的情形。上述讨论的性质已暗示，这种构造并非从根本上依赖于拓扑空间，而应当能在同伦代数中得到更一般的解释。事实确实如此，这很幸运，因为我们实际上需要在另一种情形中使用斯廷罗德运算：代数簇的上同调。

一般而言，任何位点上以交换环为系数的上链环都可以提升为一个“$\mathbb{E}_\infty$-代数”，从而赋予上同调环 Steenrod 运算 [May70]。特别地，这既适用于 [Fen20a], 中研究的 ℓ-进 étale 上同调，也适用于 [CF25]中研究的合成上同调。我们在 [CF25],中将这些运算称为“$\mathbb{E}_\infty$ 斯廷罗德运算”，以区别于另一类与 Voevodsky 的 动机 *Steenrod* 代数 相关的运算（我们尚未讨论后者）。 $\mathbb{E}_\infty$-运算正是[Fen20a], 中所使用的运算，不过在那里，采用一种利用 étale 同伦论的不同构造在技术上更为方便，因而可以直接从拓扑学引导出这些运算。

在 p-进设定中，为了处理这些扭曲，我们应当按以下方式组织系数，因为我们希望系数具有环结构。我们有映射

$$\mathbf{Z}/p(b) \otimes \mathbf{Z}/p(b') \to \mathbf{Z}/p(b + b')$$

它们共同在……上构成一个交换环结构

$$\bigoplus_{b\in\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/p(b).$$

这赋予

$$\bigoplus_{b\in\mathbf{Z}} \mathrm{H}^*(X;\mathbf{Z}/p(b))$$

以 $\mathbb{E}_\infty$ 斯廷罗德运算。对于 $p=2$，每个 Sq^i 都会使权重 b 加倍。在 ℓ-进设置中，追踪这一分级或许是最典范的做法，尽管可以通过典范同一将其作用平凡化 $\mathbf{Z}/2=\mathbf{Z}/2(1)=\mathbf{Z}/2(2)=\dots$。

3.3. **Bockstein 运算**。斯廷罗德运算与（Milne–）Artin–Tate 配对之间的联系源自以下关键公式。

定理 3.3.1。设 X 是以下对象之一：

- 一个维数为 $4d+1$的连通闭定向流形，或
- 一个维数为 $2d$ 、定义在有限域上的光滑、适当且几何连通的簇。

Then 对所有 $u\in \mathrm{H}^{2d}(X;\mathbf{Z}/2^n(d))$，我们有

$$u \smile \beta_n(u) = [2^{n-1}]\circ \mathrm{Sq}^{2d}(\overline{\beta_n(u)}) \tag{3.3.1}$$

其中：

- β_n: $\mathrm{H}^{2d}(X;\ \mathbf{Z}/2^n(d)) \to \mathrm{H}^{2d+1}(X;\ \mathbf{Z}/2^n(d))$ 是 ***(2.4.1)*** 中的 ***Bockstein*** 同态，
- $\overline{\beta_n(u)}$ 表示将 $\beta_n(u)$ 模2约简。
- $[2^{n-1}]$: $\mathrm{H}^{4d+1}(X;\ \mathbf{Z}/2(2d)) \to \mathrm{H}^{4d+1}(X;\ \mathbf{Z}/2^n(2d))$ 是由系数映射$\mathbf{Z}/2(2d) \to \mathbf{Z}/2^n(2d)$诱导的上同调映射，该系数映射由乘以$2^{n-1}$给出。

我们提醒读者，恒等式（3.3.1）在非常一般的情形下都有意义，例如不要求 X 是光滑的、真的，甚至不要求其维数为 $2d$；但若无任何假设，该恒等式并不成立。一般而言，真正成立的是：定理 3.3.1左右两边之差自然地表现为某个谱序列中的某个元素的微分，这个谱序列就是***Bockstein*** 谱序列，它“从模 2 上同调收敛到整数上同调”。随后，通过计算证明该微分因其他原因而消失，从而证明定理；在本例中，这最终源于我们借助庞加莱对偶得到的关于整数上同调的信息。

证明提示。我们将针对一个特殊情形证明 (3.3.1)：假设 $n=1$，并且只考虑拓扑情形。为强调这一点，我们记作 $T:=X$。这个情形足以体现核心代数，尤其能阐明斯廷罗德运算的引入，同时避开虽非平凡、但与此无关的技术问题。

在此情形下，证明的结构如下。我们将构造一列定义在 $\mathrm{H}^*(T;\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ 上的上同调运算 β_1，β_2，使得 β_2 定义在 β_1 的核上，并取值于 β_1 的余核。运算 $\beta_1=\beta$ 是 (2.4.1) 中的 Bockstein 运算。其具体构造如下：

(1) 将 $x\in \mathrm{H}^*(T;\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ 提升为整数上链 $\widetilde{x}\in C^*(T;\mathbf{Z})$。(2) 由于 x 来自模 2 上循环，因此对某个上循环 $\widetilde{y}\in Z^*(T;\mathbf{Z})$，有 $d\widetilde{x}=2\widetilde{y}$。(3) 输出 $\beta(x)=y$，即 $\widetilde{y}$（模 2）的上同调类。

接下来，我们定义作用于 β 的核上的“次级”运算 β_2。若 $\beta(x) = 0$，这意味着可以按上述步骤选择提升，使得 $d\widetilde{x} = 4\widetilde{y}'$ 实际上能被 4 整除。于是，将 $\beta_2(x)$ 定义为 $\widetilde{y}'$（模 2）的上同调类。追踪其中涉及的选择后可知，β_2 在相差 β_1 的像的意义下是良定义的。

考虑如定理 3.3.1 中那样将 β_1 和 β_2 应用于 $x = u^2$。那么显然，

$$\beta(x) = 2u \smile \beta(u) = 0 \in \mathrm{H}^{4d+1}(T; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}(2d)).$$

为了找到合适的 $\widetilde{y}'$，我们需要找到 u^2 的一个整数上链提升，使其上余边界能被 4 整除。我们先任取一个提升 $\widetilde{u} \in C^{2d}(T; \mathbf{Z})$，然后将其平方。由于 $\widetilde{u}$ 是模 2 上循环，因此可知，对于某个 $\widetilde{v} \in C^{2d+1}(T; \mathbf{Z})$，有 $d\widetilde{u} = 2\widetilde{v}$，其模 2 上同调类为 $\beta(u)$。然后利用 (3.1.1) 可得

$$\begin{aligned} d(\widetilde{u}^2) &= 2\widetilde{v} \smile \widetilde{u} + 2\widetilde{u} \smile \widetilde{v} \\ &= 2(2\widetilde{v} \smile \widetilde{u} + [\widetilde{u}, \widetilde{v}]) \\ &= 4\widetilde{v} \smile \widetilde{u} + 2(d\mathrm{cup}_1(\widetilde{v} \otimes \widetilde{u}) + \mathrm{cup}_1 d(\widetilde{v} \otimes \widetilde{u})) \\ &= 4\widetilde{u} \smile \widetilde{v} + d2\mathrm{cup}_1(\widetilde{v} \otimes \widetilde{u}) + 4\mathrm{cup}_1(\widetilde{v} \otimes \widetilde{v}). \end{aligned}$$

将其重新排列，可得

$$d(\widetilde{u}^2 - 2\mathrm{cup}_1(\widetilde{u} \otimes \widetilde{v})) = 4(\widetilde{u} \smile \widetilde{v} + \mathrm{cup}_1(\widetilde{v} \otimes \widetilde{v})),$$

这样我们便成功构造出一个提升 $\widetilde{x} := \widetilde{u}^2 - 2\mathrm{cup}_1(\widetilde{u} \otimes \widetilde{v})$，其上余边界为 4 倍的 $\widetilde{y}' = \widetilde{u} \smile \widetilde{v} + \mathrm{cup}_1(\widetilde{v} \otimes \widetilde{v})$。根据定义，$\widetilde{y}'$ 的模 2 约化的上同调类为 $u \smile \beta(u) + \mathrm{Sq}^{2d}(\beta(u))$。

注意到，$\widetilde{u} \smile \widetilde{v}$ 和 $\widetilde{y}'$ 显然代表 $\mathrm{H}^{4d+1}(T; \mathbf{Z})$ 中的挠类。由于根据庞加莱对偶，该群无挠，β_1 和 β_2 在 $\mathrm{H}^{4d+1}(T; \mathbf{Z}/2)$ 中的像必定都为零。这表明，所需的 $u \smile \beta(u) + \mathrm{Sq}^{2d}(\beta(u)) = 0 \in \mathrm{H}^{4d+1}(T; \mathbf{Z}/2)$。

□

3.4. **文章其余部分概述**。回顾注 2.4.2，链接形式是米尔恩–阿廷–泰特配对的拓扑类比。定理 1.4.1 和定理 1.4.2 的证明可以按照其对具体情境的依赖程度，分为若干层次（见图 3）。

其中一些初始层次具有足够的普适性，同样适用于链接形式，并可用于给出链接形式为交替形式的充要判据。事实上，定理 3.3.1 中与斯廷罗德运算的联系便属于这一类。

在本文余下部分，我们将按从最一般到最具体的顺序介绍这些层次。在 §4 中，我们运用适用于所有三种情形（“拓扑学”、“ℓ-adic”和“p-adic”）的思想，研究链接形式的辛性。随后在 §5 中，我们概述证明定理 1.4.1 所涉及的思想，这些思想专用于代数几何的（“ℓ-adic”和“p-adic”）情形。最后，在 §6 中，我们概述证明定理 1.4.2 所涉及的思想，而这些思想还专用于 p-adic情形。

4. 链接形式的分析

维数为 $2d$ 的簇上的米尔恩–阿廷–泰特配对的拓扑类比，是维数为 $4d+1$ 的可定向、闭、连通流形 M 上的链接形式（注 2.4.2）。何时这个链接形式是交替的，可以看作是猜想 1.2.1 的一个玩具式隐喻，我们将在本节研究这个问题。

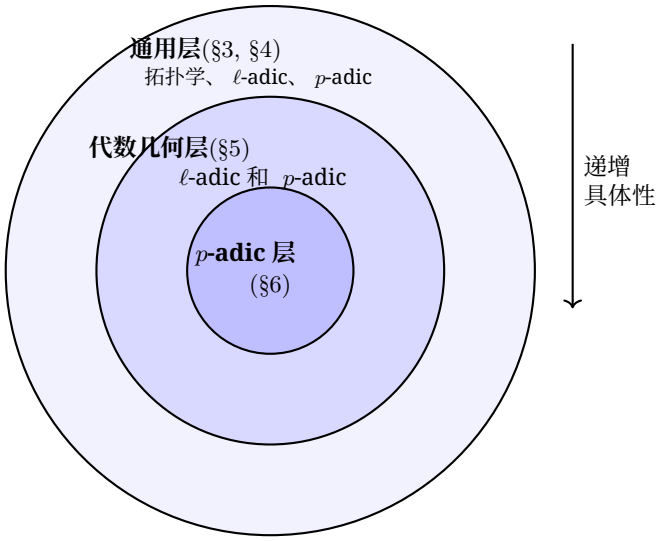


图 3. 本文其余各节的组织结构。

4.1. **交替性判据**。受定理 3.3.1 的启发，我们希望能够计算诸如以下的斯廷罗德运算

$$\mathrm{Sq}^{2d}\colon \mathrm{H}^{2d+1}(M;\mathbf{Z}/2(d)) \to \mathrm{H}^{4d+1}(M;\mathbf{Z}/2(2d)).$$

一个观察是，根据庞加莱对偶，这个映射必由唯一的类 $v_{2d} \in \mathrm{H}^{2d}(M;\mathbf{Z}/2(d))$ 表示，其含义是

$$\mathrm{Sq}^{2d}(x) = v_{2d} \smile x \text{ for all } x \in \mathrm{H}^{2d+1}(M;\mathbf{Z}/2(d)).$$

于是，我们可以用这个类 v_{2d} 给出链接形式为交替形式的充要判据。

定理 4.1.1 ([Fen20a, 定理 7。4])。 设 M 是一个维数为 $4d+1$ 的可定向、闭、连通流形。那么，$\mathrm{H}^{2d+1}(M;\mathbf{Z})_{\mathrm{tors}}$ 上的链接形式是交替形式，当且仅当 v_{2d} 可以提升到 $\mathrm{H}^{2d}(M;\mathbf{Z})$，也就是说，当且仅当 $\widetilde{\beta}(v_{2d}) = 0$，其中 $\widetilde{\beta}$ 是该短正合列的边界映射

$$0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \to 0.$$

证明概要。令

$$\mathrm{H}^{2d+1}(M;\mathbf{Z})_{\mathrm{tors}} = \bigoplus_{\ell} \mathrm{H}^{2d+1}(M;\mathbf{Z})[\ell^\infty],$$

只需考察 $\ell = 2$，因为我们已在命题 2.4.5 中证明该形式是斜对称的。为简便起见，我们只证明配对在 $\mathrm{H}^{2d+1}(M;\mathbf{Z})[2]$ 上为交替，当且仅当 v_{2d} 可提升至 $\mathrm{H}^{2d}(M;\mathbf{Z}/4(d))$。这一论证包含一般情形的所有关键特征，但一般情形需要用到 §3.1.3 中的“广义 Steenrod 运算”以及定理 3.3.1 的全部威力，而我们此前只证明了 $n = 1$ 情形。

根据命题 2.4.4，这等价于证明配对 $\langle -,-\rangle_1$ 在 $\mathrm{H}^{2d}(M;\mathbf{Z}/2(d))$ 上是交替的，当且仅当 v_{2d} 提升到 $\mathrm{H}^{2d}(M;\mathbf{Z}/4(d))$。利用定理 3.3.1，我们有，对于

所有 $u \in \mathrm{H}^{2d}(M; \mathbf{Z}/2(d))$,

$$u \smile \beta(u) = \mathrm{Sq}^{2d}(\beta(u)).$$

我们想确定对于所有 $u \in \mathrm{H}^{2d}(M; \mathbf{Z}/2(d))$，何时该式为零。根据 v_{2d} 的定义，我们有 $\mathrm{Sq}^{2d}(\beta(u)) = v_{2d} \smile \beta(u)$。因此，这等价于确定对于所有$u$，何时 $0 = v_{2d} \smile \beta(u)$。由于 β 是导子，我们可以改写为

$$v_{2d} \smile \beta(u) = \beta(v_{2d} \smile u) - \beta(v_{2d}) \smile u.$$

如命题 2.4.5 的证明中所述， β 在 $\mathrm{H}^{4d}(M; \mathbf{Z}/2(2d))$ 上为零，因此 $\beta(v_{2d} \smile u) = 0$。于是问题变为：何时 $\beta(v_{2d}) = 0$。根据长正合列，这正是将 v_{2d} 提升到 $\mathrm{H}^{2d}(M; \mathbf{Z}/4(d))$ 的障碍，正如所期望的那样。□

例 4.1.2。 定理 4.1.1 的假设并非总是成立。例如，“吴流形”SU(3)/SO(3) 是 $d = 1$ 的反例。

就其本身而言，若没有办法检验 v_{2d}上的条件，或至少将 v_{2d} 与其他更为熟悉的特征类联系起来，定理 4.1.1本身未必那么有用。这正是我们接下来要探讨的方向。

4.2. 与 Wall 定理的联系。 对于单连通、闭、光滑五维流形这一特殊情形（它们在上同调上类似于有限域上的曲面），Wall [Wal62] 已经确定了链接形式交替的判别准则。为表述该准则，我们定义映射

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_2(M; \mathbf{Z})_{\mathrm{tors}} &\to \mathbf{Z}/2 \\ x &\mapsto w_2(x) \end{aligned}$$

作为复合

$$\mathrm{H}_2(M; \mathbf{Z})_{\mathrm{tors}} \cong \mathrm{H}^3(M; \mathbf{Z})_{\mathrm{tors}} \xrightarrow{\smile w_2} \mathrm{H}^5(M; \mathbf{Z}/2) \cong \mathbf{Z}/2$$

其中 $w_2 = w_2(TM) \in \mathrm{H}^2(M; \mathbf{Z}/2)$是 M的切丛的第二斯蒂费尔-惠特尼类。在 [Wal62的命题 1与 2], 中，Wall证明了如下结果。

定理 4.2.1 (Wall)**.** 设 M 为一个单连通的闭光滑五维流形。则 M上的链接形式为交替的，当且仅当 $w_2(x) = 0$ 对所有 $x \in \mathrm{H}_2(M; \mathbf{Z})_{\mathrm{tors}}$成立。

Wall 的证明专门针对 5维流形，并且用到了 M 的光滑结构（事实上， w_2 是根据这一光滑结构定义的）。事实证明，对于可定向光滑流形，尤其是单连通光滑流形，定理 4.1.1 中的“吴类” v_2 与 w_2 一致。这是一个更一般命题的特例，该命题称为“吴公式”，我们将在下文 §4.3 中简要讨论。暂且假设该公式成立，我们将由定理 4.1.1 推出 Wall 定理。

证明。 只需证明，对于所有 $x \in$， $\mathrm{H}^3(M; \mathbf{Z})[2^\infty] \cong \mathrm{H}_2(M; \mathbf{Z})$，当且仅当 w_2 可提升至 $\mathrm{H}^2(M; \mathbf{Z})$。若 $\mathrm{H}^3(M; \mathbf{Z})$ 被 2^n 消去，则存在某个 $u \in \mathrm{H}^2(M; \mathbf{Z}/2^n)$，使得 $x = \beta_n(u)$，其中 β_n 是层的短正合列的 Bockstein 连接映射

$$0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{2^n} \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/2^n \to 0.$$

根据命题 2.4.5 证明中的同样论证，我们有

$$\beta_n(u) \smile w_2 = \beta_n(u \smile w_2) + u \smile \beta_n(w_2) = u \smile \beta_n(w_2). \tag{4.2.1}$$

因此，若 $\beta_n(w_2)$ 消失，则 (4.2.1) 显然为零。反过来，由于 $\mathrm{H}^2(M; \mathbf{Z}/2^n)$ 与 $\mathrm{H}^3(M; \mathbf{Z}/2^n)$ 之间的配对是完美的，若对所有 u 而言 (4.2.1) 都为零，则 $\beta_n(w_2) = 0$。若

对所有 n 而言它都消失，那么 w_2 在由短正合列 $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/2$ 导出的 Bockstein同态映射到 $\mathrm{H}^3(M; \mathbf{Z})$ 时也消失，因此可提升到 $\mathrm{H}^2(M; \mathbf{Z})$。□

4.3. 吴公式。 我们可以推广定理 4.1.1 中 v_{2d} 的构造。设 M 是维数为 d的闭连通拓扑流形。由庞加莱对偶，该运算

$$\mathrm{Sq}^i \colon \mathrm{H}^{d-i}(M; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \to \mathrm{H}^d(M; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$$

必定由与一个（唯一的类） $v_i \in \mathrm{H}^i(M; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$作杯积给出。吴 [吴50] 证明了 v_i的如下描述。

定理 4.3.1（吴公式）。 设 M 是闭光滑流形。记

$$\mathrm{Sq} := \mathrm{Sq}^0 + \mathrm{Sq}^1 + \mathrm{Sq}^2 + \dots$$
$$v := v_0 + v_1 + v_2 + \dots$$
$$w := w_0 + w_1 + w_2 + \dots$$

其中 w_i是 TM的斯蒂费尔-惠特尼类。于是我们有$\mathrm{Sq}(v) = w$。

例4.3.2。 我们可以将定理 4.3.1 展开为

$$(1 + \mathrm{Sq}^1 + \mathrm{Sq}^2 + \dots)(1 + v_1 + v_2 + \dots) = 1 + w_1 + w_2 + \dots$$

然后按两边的上同调次数匹配各项，从而求出 v_i 和 $w_{\le i}$。例如，利用 Sq^i 在 $\mathrm{H}^{<i}$上为零这一事实，我们得到 $v_1 = w_1$和 $v_2 + \mathrm{Sq}^1(v_1) = w_2$。由于 Sq^i 在 H^i上与平方映射一致，这可简化为 $v_2 = w_2 + w_1^2$。若 M可定向，则 $w_1 = 0$，于是得到 $v_2 = w_2$，如 §4.2 所述。

注 4.3.3。 设 M是一个维数为 5 的闭、可定向、连通光滑流形。结合定理 4.1.1 与例 4.3.2 可知， M上的链接形式是交替形式，当且仅当 w_2可提升至 $\mathrm{H}^2(M; \mathbf{Z})$。这一条件称为 M是“自旋^c”。

为证明定理 4.3.1，我们需要回顾 Thom 在 [Tho52] 中引入的关于 Stiefel–Whitney 类的一种观点。设 M 为一个拓扑流形， E为其上的一个秩为 r的向量丛。设 $i \colon M \hookrightarrow E$表示将 M作为 E的零截面嵌入的包含映射，并设 $\pi \colon E \to M$为投影。令 $E_0 = E - i(M)$。根据 Thom同构， π^*使 $\mathrm{H}^{i+r}(E, E_0; \mathbf{Z}/2)$ 成为自由的 $\mathrm{H}^*(M; \mathbf{Z}/2)$-模，其秩为 1，生成元为零截面的循环类，记作 $[M] \in \mathrm{H}^r(E, E_0; \mathbf{Z}/2)$。那么 $w_i \in \mathrm{H}^i(M; \mathbf{Z}/2)$ 是满足下列条件的唯一类

$$\mathrm{Sq}^i([M]) = \pi^*(w_i) \smile [M] \in \mathrm{H}^{i+r}(E, E_0; \mathbf{Z}/2).$$

这种对 w_i 的刻画可以作为定义；关于以这种方式发展起来的理论，参见 [MS74，第 §8] 节。

从这种关于斯蒂费尔–惠特尼类的观点来看，吴公式的证明本质上纯粹是线性代数。

定理 4.3.1 的证明。 在此证明中，所有上同调均取$\mathbf{Z}/2$系数，我们省略记号中的系数。对于闭子空间 $A \hookrightarrow X$，我们将相对上同调 $\mathrm{H}^*_A(X; -)$ 简写为 $\mathrm{H}^*(X, X \setminus A; -)$。

注意到，对角嵌入 $M \hookrightarrow M \times M$ 的法丛与 M的切丛同构。因此，根据切除原理，我们有

$$\mathrm{H}^*_M(M \times M) \cong \mathrm{H}^*_M(TM), \tag{4.3.1}$$

两边均由循环类 $[M]$ 自由生成。该循环类与 M的同调基本类庞加莱对偶；后者分别作为对角线嵌入 $M \times M$，以及作为零截面嵌入 TM。由此得到一个交换图，

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{H}^*_M(TM) & \xrightarrow[(4.3.1)]{\sim} & \mathrm{H}^*_M(M\times M) & \longrightarrow & \mathrm{H}^*(M\times M) \\ {\scriptstyle \pi_*}\big\downarrow\big\uparrow{\scriptstyle \pi^*} & & {\scriptstyle \mathrm{pr}_{1*}}\big\downarrow\big\uparrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_1^*} & & {\scriptstyle \mathrm{pr}_{1*}}\big\downarrow\big\uparrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_1^*} \\ \mathrm{H}^*(M) & = & \mathrm{H}^*(M) & = & \mathrm{H}^*(M) \end{array}$$

同构 (4.3.1) 对斯廷罗德运算是等变的。由于按定义 $\mathrm{Sq}^i([M]) = \pi^*(w_i) \smile [M] \in \mathrm{H}^*_M(TM)$，我们亦有 $\mathrm{Sq}^i([M]) = \mathrm{pr}_1^*(w_i) \smile [M] \in \mathrm{H}^*_M(M\times M)$。令 $\mathrm{pr}_{1*}\colon \mathrm{H}^*(M\times M) \to \mathrm{H}^*(M)$ 为在庞加莱对偶下与 pr_1^* 伴随的推前映射，由此可得

$$w = \mathrm{pr}_{1*}(\mathrm{Sq}([M])). \tag{4.3.2}$$

我们将以另一种方式计算右端。

Künneth 公式给出等同

$$\mathrm{H}^*(M\times M) \cong \mathrm{H}^*(M)\otimes \mathrm{H}^*(M). \tag{4.3.3}$$

具体而言，若取 $\{e_i\}$ 为 $\mathrm{H}^*(M)$ 的一个基，并令 $\{f_i\}$ 为庞加莱对偶下的对偶基，则等同 (4.3.3) 将上同调类 $[\Delta] \in \mathrm{H}^*(M\times M)$ 映到$\sum_i e_i \otimes f_i$。（回想我们使用的是 $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ 系数；若使用整数系数，则此处须注意某些符号。）

Cartan 公式告诉我们如何计算杯积的 Sq，并指出

$$\mathrm{Sq}(\mathrm{pr}_1^*(e) \smile \mathrm{pr}_2^*(f)) = \mathrm{pr}_1^*\,\mathrm{Sq}(e) \smile \mathrm{pr}_2^*\,\mathrm{Sq}(f).$$

我们利用这一点来计算 $\mathrm{pr}_{1*}(\mathrm{Sq}([\Delta]))$：

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_{1*}(\mathrm{Sq}([\Delta])) &= \mathrm{pr}_{1*}\left(\sum_i \mathrm{pr}_1^*(\mathrm{Sq}(e_i)) \smile \mathrm{pr}_2^*(\mathrm{Sq}(f_i))\right) \\ &= \sum_i \mathrm{Sq}(e_i)\int_M \mathrm{Sq}(f_i) \\ &= \sum_i \mathrm{Sq}(e_i)\int_M (vf_i). \end{aligned}$$

由于 $\{e_i\}$ 是 $\mathrm{H}^*(M)$ 的 $\mathbf{Z}/2$-基，我们可以为唯一的 $\epsilon_i \in \mathbf{Z}/2$ 写出 $v = \sum_i \epsilon_i e_i$。由于 $\{f_i\}$ 是 $\{e_i\}$ 的对偶基，我们有 $\int_M (vf_i) = \epsilon_i$，从而得到

$$\mathrm{pr}_{1*}(\mathrm{Sq}([\Delta])) = \sum_i \mathrm{Sq}(e_i)\otimes \int_M (vf_i) = \sum_i \epsilon_i\,\mathrm{Sq}(e_i) = \mathrm{Sq}(v).$$

将其与 (4.3.2) 相等即可完成证明。 □

5. Tate's Symplecticity Conjecture for $\ell \neq p$

在前几节讨论的基础上，我们将概述定理 1.4.1 的证明。此时，与前几节相比，所涵盖内容与篇幅的比例将大幅增加，因此我们的讨论会突然变得更不拘形式、更概略。本文所依据的演讲中用了一个比喻：如果前几节的分辨率相当于徒步游览，那么本节的分辨率就相当于从火车车窗眺望沿途景色。

5.1. **快速转向新特性**。我们将快速略过定理 1.4.1 证明中与拓扑情形共有的部分；这些内容已在 §4 中讨论过。

设 X 是一个维数为 $2d$、定义在特征为 p的有限域 k 上的光滑、适当且几何连通的簇，并假设 $p \neq 2$。那么，对于 $\mathrm{H}^*(X)$，我们有 §2.2.3 中所述的 $4d+1$ 维庞加莱对偶。与 §4.1 中一样， $\mathbb{E}_\infty$ Steenrod 运算

$$\mathrm{Sq}^{2d} \colon \mathrm{H}^{2d+1}(X; \mathbf{Z}/2(d)) \to \mathrm{H}^{4d+1}(X; \mathbf{Z}/2(2d))$$

由唯一的类 $v_{2d} \in \mathrm{H}^{2d}(X;\mathbf{Z}/2(d))$ 表示。通过与定理 4.1.1 的证明形式上类似的论证，可以证明（参见 [Fen20a, §7]）：

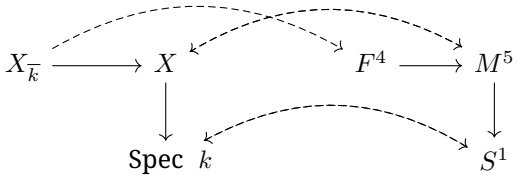
定理 5.1.1。 设 X 是一个维数为$2d$ 、定义在特征为 p的有限域 k 上的光滑、适当且几何连通的簇。那么，$\mathrm{H}^{2d+1}(X;\mathbf{Z}_2(d))_{\mathrm{tors}}$上的 ***Artin–Tate*** 配对是交替的，当且仅当 v_{2d} 能够提升到$\mathrm{H}^{2d}(X;\mathbf{Z}_2(d))$。

回忆例 4.1.2：对于拓扑 5-流形（对应于 $d = 1$）， v_{2d} 不一定能提升到 $\mathrm{H}^2(X;\mathbf{Z}_2(1))$。此外，尽管长期以来人们普遍持相反看法，Poonen–Stoll [PS99] 证明了雅可比簇的 Cassels–Tate 配对不一定是交替的。因此，Artin–Tate 配对总是交替这一事实，反映了这一情形的某种特殊性，而在其他与之密切类似的数学背景中并没有这种性质。

定理 5.1.2。 在定理 *5.1.1* 的情形下， v_{2d} 总能提升到 $\mathrm{H}^{2d}(X;\mathbf{Z}_2(d))$。

定理 5.1.2 隐含于 [Fen20a, §7]。我们将在本节余下部分阐释证明的思路。首先，我们给出一个启发式解释；这并非证明，而是通过隐喻来构建一种关于拓扑学的世界观，这与 §2.5 的思路一致。我们聚焦于曲面 X/k ($d = 1$) 的情形。虽然二次互反律的拓扑类比——即链接数的对称性——在几何上显而易见，但在这种情形下，辛性的拓扑类比并不明显。注 4.3.3 给出了这一类比：一个 5维流形具有辛链接型，当且仅当它是自旋的^c。用这些术语来说，我们可以认为定理 1.4.1 断言，曲面 X/k 类似于所有 5维流形中的一个特殊类别：它看起来是自旋的^c。这可能是为什么呢?

回顾 §2.2.3 中的讨论，我们可以看到，经过仔细核算，得到以下更精确的类比。直观地说，我们可以认为 $X \to$Spec k 类似于拓扑纤维化 $M \to S^1$，其中纤维 $X_{\overline{k}}$ 的表现类似于 4维流形 F^4。



(5.1.1)

这一视角清楚地表明， X 应当如同一个纤维化在 S^1 上的 5维流形。此外，根据这样一个原则：可分闭域上的 d 维簇，其表现如同一个 d 维复簇（至少在考察对于 $\ell \neq p$ 而言为 ℓ-进的代数变体时），这些纤维应被视为类似于复曲面。由于 S^1 的切丛是平凡的，这表明 TM 的特征类应当如同复流形的特征类。特别是，由于复流形具有由第一陈类 c_1 给出的典范自旋^c 结构，这表明这样的 M 也应当是自旋^{c}的。

5.2. **关于 $p \neq 2$ 的算术吴公式。** 要证实刚才解释的启发式论证，从而证明定理 5.1.1，第一步是用斯蒂费尔–惠特尼类来计算 v_{2d}。在 §4 中，我们借助“吴公式”进行了这一计算。更一般地，对于任意光滑、真、几何连通的 X，我们都可以定义 v_i，将 Steenrod 运算 $\mathrm{Sq}^i\colon \mathrm{H}^{4d+1-i}(X;\mathbf{Z}/2) \to \mathrm{H}^{4d+1}(X;\mathbf{Z}/2)$ 表示为一个上同调类；庞加莱对偶保证了该类的存在性和唯一性。

我们还需要在代数情形下定义斯蒂费尔–惠特尼类。为此，我们将 §4.3 中阐述的 Thom 对斯蒂费尔–惠特尼类的刻画作为定义。设 $\pi\colon E \to X$ 是秩为 r 的向量丛。根据纯性，相对上同调 $\mathrm{H}^*_X(E;\mathbf{Z}/2)$ 在 $\mathrm{H}^*(X;\mathbf{Z}/2)$ 上是秩为 1 的自由模，其生成元是零截面的循环类 $[X] \in \mathrm{H}^{2r}_X(E;\mathbf{Z}/2)$。我们也可以定义 $w_i(E) \in \mathrm{H}^i(X;\mathbf{Z}/2)$ 为满足 $\mathrm{Sq}^i([X]) = \pi^*(w_i) \smile [X]$ 的唯一类。

定理 5.2.1 (算术吴公式，[Fen20a，定理 6。5])。设 X 是 k 上一个光滑、适当且几何连通的簇。则有 $\mathrm{Sq}(v) = w$。

定理 5.2.1 看起来像是定理 4.3.1 的翻译，但这掩盖了其证明中的困难；它并非对定理 4.3.1 证明的简单翻译。这是因为算术上同调在某些重要方面的表现与奇异上同调不同。类似的结论对于几何上同调，可以通过逐行翻译拓扑论证来证明。事实上，这种类似的“几何吴公式”的各种推广已由 [Ura96], [SS24], 和 [Ben25]证明。下面我们来解释算术情形中的关键难点。

我们试着沿用定理 4.3.1 中拓扑 Wu 公式的证明。取所有上同调的系数为$\mathbf{Z}/2$，并在记号中省略系数。调用 Künneth 公式这一步就已经出现了问题：不存在 Künneth 公式将 $\mathrm{H}^*(X \times_k X)$ 与 $\mathrm{H}^*(X) \otimes_{\mathbf{F}_2} \mathrm{H}^*(X)$ 等同起来。（如果 k 是可分闭的，就会有 Künneth 公式。）实际上，如果 X 的维数为 $2d$，那么 $X \times_k X$ 的维数为 $4d$，因此 $\mathrm{H}^*(X \times_k X)$ 具有维数为 $8d+1$的庞加莱对偶结构，而 $\mathrm{H}^*(X) \otimes_{\mathbf{F}_2} \mathrm{H}^*(X)$ 具有维数为 $8d+2$的庞加莱对偶结构。后一个对象并不像任何 k上的自然簇的上同调；它只是一个可以形式化写出的代数对象。

还有一个映射 $\varphi_*\colon \mathrm{H}^*(X \times_k X) \to \mathrm{H}^*(X) \otimes_{\mathbf{F}_2} \mathrm{H}^*(X)$，可以如下描述。将杯积取对偶

$$\mathrm{H}^*(X) \otimes_{\mathbf{F}_2} \mathrm{H}^*(X) \to \mathrm{H}^*(X \times_k X)$$

然后应用庞加莱对偶，我们得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^*(X)^\vee \otimes_{\mathbf{F}_2} \mathrm{H}^*(X)^\vee & \longleftarrow & \mathrm{H}^*(X \times_k X)^\vee \\ \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\ \mathrm{H}^*(X) \otimes_{\mathbf{F}_2} \mathrm{H}^*(X) & \xleftarrow[\varphi_*]{} & \mathrm{H}^*(X \times_k X) \end{array} \tag{5.2.1}$$

这里，$(-)^\vee$ 表示关于 $\mathbf{F}_2$ 的线性对偶。

对 φ_* 的另一种解释如下。存在一个映射 $\mathrm{H}^*(X \times_k X) \to \mathrm{End}(\mathrm{H}^*(X))$，它将一个上同调类 $\kappa \in \mathrm{H}^*(X \times_k X)$ 映射到“核”端同态

$$u \mapsto \mathrm{pr}_{2*}(\mathrm{pr}_1^*(u) \smile \kappa).$$

根据定义显然，该映射仍将 X 的对角副本的循环类 $[\Delta] \in \mathrm{H}^*(X \times_k X)$映射到恒等自同态。利用庞加莱对偶来识别

$\mathrm{End}(\mathrm{H}^*(X)) \cong \mathrm{H}^*(X) \otimes \mathrm{H}^*(X)$，我们重新得到如上定义的 φ_*。特别地，显然 $\varphi_*([\Delta]) = \sum_i e_i \otimes f_i$。然而，为了完成证明的其余部分，我们还需要

$$\varphi_*(\mathrm{Sq}([\Delta])) = \sum_i \mathrm{Sq}(e_i) \otimes \mathrm{Sq}(f_i) = \mathrm{Sq}(\varphi_*([\Delta])).$$

事实证明这相当困难，因此我们将其表述为一个独立的结果。

命题 5.2.2 ([Fen20a, 命题 6.14])。 映射 φ_* 关于 *Steenrod* 运算是等变的。

我们将用一个简单的比喻来说明命题 5.2.2。直观地说， φ_* 的行为类似于上同调上的推前映射[3] ，因此采用了这种记号（尽管并不存在实际的映射 φ 来诱导它）。如上所述，$\mathrm{Spec}\ k$ 在拓扑上类似于 S^1，因此X 在拓扑上类似于一个纤维化在 S^1 上的流形 M。于是， $X \times_k X$ 类似于 $M \times_{S^1} M$，而 $\mathrm{H}^*(X) \otimes_{\mathbf{F}_2} \mathrm{H}^*(X)$ 类似于 $M \times M$ 的上同调。用这些术语来说， φ_* 类似于与$M \times_{S^1} M \to M \times M$相关的上同调推前映射。通常，推前映射对于 Steenrod 运算 并不等变；等变性的失效应由相对法丛的 Stiefel–Whitney 类来度量。但在这个特定情形中，由于 S^1 的切丛是平凡的，因此可以预期它是等变的。

当然，这一讨论完全是启发式的：在我们的实际情形中，甚至不存在一个几何对象，其上同调实现$\mathrm{H}^*(X) \otimes_{\mathbf{F}_2} \mathrm{H}^*(X)$。这暴露了 k 上的簇与在 S^1上纤维化的拓扑空间之间的类比的一个缺陷：在后一情形中，人们可以忘掉纤维化而考虑裸的拓扑空间，而对于 k上的簇却没有相应的做法。因此，在 k 上的簇范畴中施行的任何运算实际上都是一种“相对”运算：k 上簇的积对应于 S^1上流形的纤维 积，$\mathbf{F}_q$ 上簇的切丛对应于 S^1上的相对 切丛，等等。正因为如此，吴氏定理证明中的某些步骤在 k上的簇范畴中没有类比物。

在 [Fen20a], 中，解决办法是使用étale 同伦论，以上述隐喻中所讨论的拓扑情形来适当地逼近该情形。过渡到étale 同伦型使人能够将一个簇与这一纤维化分离开来，从而获得拓扑空间所享有的若干额外灵活性。这一技巧在 [CF25], 所研究的 p-进情形中并不可用，因此那里发展出一种新的、更为稳健的观点，它也应适用于 ℓ-进设定，尽管这一点尚未被写下来。

5.3. **与陈类的关系**。 假设我们承认算术吴公式，即定理 5.2.1。由此我们可以用斯蒂费尔–惠特尼类 $w_{\leq i}(TX)$ 来求解 $v_i(X)$。于是，为了证明定理 5.1.2，只需将斯蒂费尔–惠特尼类提升到整数系数。

定理 5.3.1。 *在定理 5.1.2 的情形下，每个* $w_{2i}(TX) \in \mathrm{H}^{2i}(X; \mathbf{Z}/2)$ *提升到*$\mathrm{H}^{2i}(X; \mathbf{Z}_2(i))$。

注记 5.3.2。 这一提升的灵感来自如下拓扑学比喻：对于复流形 M，斯蒂费尔-惠特尼类是陈类的模 2 约化，因而特别地容许整数提升。然而请注意，我们的 X 的正确拓扑类比是一个维数为 $4d+1$ 的流形，它显然不能容许复结构，因此这一原则乍看之下似乎并不适用。

这个分解是更精细的类比（5.1.1）；我们指出， X 更具体地说，类似于一个以 S^1为底、纤维为 M 的复流形纤维化。由于 TS^1 是

[3]有时也称为“Umkehr映射”或“反向映射”。

平凡的， TM 的特征类“来自”复纤维，因此其行为类似于复流形的特征类。

撇开启发式的想法，定理 5.3.1 的证明实际上包含哪些内容？基本难点在于，我们对斯蒂费尔–惠特尼类的定义难以显式计算，因为它是用斯廷罗德运算表述的，而斯廷罗德运算通常也难以显式计算。我们的目标是将斯蒂费尔–惠特尼类与陈类的约化联系起来，后者相对具体。因此，我们实际上要做的是计算斯廷罗德运算。

特征类的形式体系使这一点成为可能，因为它允许我们将这类恒等式归约到线丛这一基本情形（这是“分裂原理”的一种体现）。由于线丛的秩为一，零截面的上同调类（记作 $[X]$）的上同调次数为 2。由于其上同调次数较低，我们能够显式计算作用于 $[X]$ 上的斯廷罗德运算。出于次数方面的原因，只要 $i > 2$ ，我们就必然有 $\mathrm{Sq}^i([X]) = 0$、$\mathrm{Sq}^0([X]) = [X]$，以及 $\mathrm{Sq}^2([X]) = [X] \smile [X]$。我们还对 Sq^1, 有一个具体描述，不过这里略微有些微妙，因为这取决于采用斯廷罗德运算的 $\mathbb{E}_\infty$ 版本还是“动机”版本。论文 [Fen20a] 采用了 $\mathbb{E}_\infty$ 运算；在这种版本中，Sq^1 是短正合列的 Bockstein 同态

$$0 \to \mathbf{Z}/2 \to \mathbf{Z}/4 \to \mathbf{Z}/2 \to 0.$$

另一方面，Sq^1 的动机实现取决于权重，在 $\mathrm{H}^a(X;\mathbf{Z}/2(b))$ 上，它将是

$$0 \to \mathbf{Z}/2(b) \to \mathbf{Z}/4(b) \to \mathbf{Z}/2(b) \to 0.$$

无论哪种情况，利用 $[X]$ 可提升到 $\mathrm{H}^2(X;\mathbf{Z}_2(1))$ 这一事实，都可以轻松计算 $\mathrm{Sq}^1([X])$。

特别地，可以写出 $w_{2d}(TX)$ 到 $\mathrm{H}^{2d}(X;\mathbf{Z}_2(d))$ 的一个典范提升，而它取决于上文讨论的 Sq^1 的规范化。在动机规范化下，可以证明，对于任意向量丛 $w_{2i+1}(E)$，对所有 $i \geq 0$ 都有 $= 0$ ，且 $w_{2i}(E) = c_i(E)$ （模 2 ）。在 [Fen20a], 中采用的 $\mathbb{E}_\infty$ 规范化下，公式则更为复杂[Fen20a，定理 5.10] ；其中还涉及 -1 在 $\mathrm{H}^1(\mathrm{Spec}\ \mathbf{F}_q;\mathbf{Z}/2(1))$ 中的库默尔类，该类也可视为 $-1 \in \mathrm{H}^0(\mathrm{Spec}\ \mathbf{F}_q;\mu_2)$ 的 Bockstein同态。

6. 针对 $\ell = p$ 的 Tate辛性猜想

最后，我们终于谈到 [CF25], 的主题。该工作证明了定理 1.4.2，并在最困难的情形下确立了猜想 1.2.1，其中 $p = 2$。这一困难源于 $\ell = p$ 情形下上同调所面临的一般性难题。尽管从上一节开始，讨论就已变得纯粹印象式，但本节的印象式程度还会进一步加深。本文所依据的演讲中使用了一个比喻：如果说上一节的分辨率相当于从火车车窗望出去所见的景象，那么本节的分辨率就相当于从飞机车窗望出去所见的景象。

6.1. 新障碍概述。粗略地说， [CF25] 的目标是在 $\ell = p\ (= 2)$ 情形下实施 [Fen20a] 的策略。下面总结尝试这样做时出现的新问题。

第一个问题与 Steenrod 运算本身有关。虽然在 $\mathrm{H}^*(X;\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}(*))$ 上仍有 $\mathbb{E}_\infty$ Steenrod 运算，它们通过定理 3.3.1 与米尔恩–阿廷–泰特配对相关联，但这些已不再是计算特征类时适用的“正确”运算。考察权重便可立即看出这一点。当$p \neq 2$时，我们可以将 $\mathbf{Z}/2 = \mathbf{Z}/2(1) = \mathbf{Z}/2(2) = \ldots$，因此上同调的权重

在模 2 的情况下实际上可以忽略不计。合成上同调则不再如此，因此我们必须仔细追踪权重。为了强调这一点，我们将 $\mathbb{E}_\infty$Steenrod 运算记作 $\mathrm{Sq}^i_{\mathbb{E}}$；于是，每个 $\mathrm{Sq}^{2i}_{\mathbb{E}}$ 都会使权重加倍（§3.2）。例如，这意味着 $\mathrm{Sq}^0_{\mathbb{E}}$ 不可能是恒等映射，因为恒等映射会保持权重不变。

如果我们像之前一样尝试使用 $\mathrm{Sq}^i_{\mathbb{E}}$ 来定义合成上调 Stiefel–Whitney 类理论，那么会发现所得的 $w_i^{\mathbb{E}}(E) \in \mathrm{H}^i(X;\mathbf{Z}/2(\text{秩 } E))$ 落在一个扭曲参数取决于秩(E)而非 i 的上同调群中。这与我们对特征类理论的预期不符，并且在技术上也与（例如）陈类及相关的“动机”构造不相容。

此外，任何形式为 $w^{\mathbb{E}} = \mathrm{Sq}_{\mathbb{E}}(v)$ 的相应“算术吴公式”都无法反解出 v（用 $w^{\mathbb{E}}$ 表示），因为 $\mathrm{Sq}_{\mathbb{E}}$ 运算在任何有限型X上都是幂零的，这是由于它会使权重加倍。

事实证明，在合成上同调中，Steen- rod 运算有两种不同的 体现形式。一种体现形式来自 $\mathbb{E}_\infty$-结构；在本节中，我们将这类运算记为 $\mathrm{Sq}^i_{\mathbb{E}}$。另一种体现形式称为“合成上同调 Steenrod 运算”$\mathrm{Sq}^i_{\mathrm{syn}}$。这些运算具有更强的动机性质，且由 Voevodsky 预见；我们在 [CF25]中构造了它们。我们强调，尽管定理 1.4.2 只需要 $p = 2$ 的情形，我们仍针对所有素数 p 发展了合成上同调 Steenrod 代数理论。我们将在下文 §6.2 中进一步讨论合成上同调 Steenrod 代数。

在构造合成上同调 Steenrod 代数之后，下一个主要难关是证明算术吴公式。与 $\ell \neq p$ 情形一样，技术上的关键在于证明按类似方式定义的

$$\varphi_* \colon \mathrm{H}^*(X \times_k X) \to \mathrm{H}^*(X) \otimes_{\mathbf{F}_p} \mathrm{H}^*(X)$$

对合成上同调 Steenrod 运算是等变的。证明这一点需要我们发展“谱棱柱 F-gauge”理论，以契合 Lurie 关于“棱柱稳定同伦论”的构想。为完成这项工作，我们得到了 Lurie 的关键指导。

6.2. **合成上同调 Steenrod 代数**。Geisser–Levine [GL00] 证明，对于有限域上的光滑簇，合成上同调与 p-adic étale-motivic 上同调一致。这使得构造合成上同调 Steenrod 运算的问题，可以放在 Voevodsky 在其关于“动机同伦论中的公开问题”的手稿 [Voe02] 中提出的一个经典问题的背景下理解：发展定义特征下的动机 *Steenrod* 运算理论。

我们回顾这一问题的一些历史背景。在定义特征之外，Voevodsky [Voe03、Voe10], 研究了特征 0 的簇上的模 p 动机 Steenrod 代数，而 Hoyois–Kelly–Ostvaer [HKOsr17] 则研究了正特征簇上的这一代数 $\ell \neq p$。多亏了他们的工作，模 p 动机 Steenrod 代数在特征 p之外如今已得到充分理解，但在特征 p 中仍然十分神秘。Voevodsky 在 [Voe02], 中猜想了它的一种描述，这意味着它应当具有一个以基域的动机上同调为系数的幂运算 Milnor 基。这个猜想至今仍悬而未决，但 Frankland–Spitzweck [FS18]提供了部分证据：他们证明，Voevodsky 对偶 动机 Steenrod 代数的“预期答案”，至少是实际答案的一个（模论意义上的）直和项。由此可以在动机上同调上定义幂运算，这一想法早在 [FS18] 中就已提出，随后由 Primozic 在 [Pri20], 中付诸实践；但从这个定义出发，似乎难以控制这些运算的关键技术性质，例如 Cartan 公式。

在 [CF25], 中，作者与 Shachar Carmeli 采用了 Lurie 提出的截然不同的途径来构造合成上同调 Steenrod 运算。与此同时，Annala–Elmanto [AE25] 运用类似的思路，在定义特征下构造了新的动机 Steenrod 运算。我们预计，对它们的运算进行 étale 层化后，就会得到我们的运算。然而，除了采用我们在 [CF25],中的方法之外，我们不知道如何证明算术吴公式，因此采用这种方法至关重要。

6.3. 完美体邻近循环。 在 [Voe03 中，Voe10] Voevodsky 定义并研究了特征零域上簇的模 p 动机上同调上的动机 Steenrod 代数。构造合成上同调 Steenrod 代数的思路，是通过一个“完美体邻近循环”函子 [CF25, §4]，将 Voevodsky 的结果传递到特征 p；这一思路由 Jacob Lurie 提供给我们（Lurie 将其归功于 Akhil Mathew，而 Akhil Mathew 又将灵感归功于 Niziol）。

我们先介绍一些语言，以便描述这个“完美体邻近循环”函子。设 S 是一个概形，令 SH_S 表示 Morel–Voevodsky 的、关于 S 上 p-完备的动机稳定同伦范畴，其中的上同调理论具有$\mathbf{A}^1$-不变性。因此，SH_S 包含一个表示模 p动机上同调的对象 $\mathbb{F}_p^{\mathrm{mot}}$。Annala–Hoyois–Iwasa [AHI25] 构造了p-完备动机谱 MS_S 所成的范畴；这是 SH_S 的扩张，其中包含非$\mathbf{A}^1$-不变的上同调理论。特别地，模 p 合成上同调（它不具有$\mathbf{A}^1$-不变性）提升为 MS_S 中的一个对象 $\mathbb{F}_p^{\mathrm{syn}} \in$ 。MS_S 的对象会导出 S 上光滑概形的 Nisnevich 层，其值为 (p- 完备的) 谱 。如果 $S = \mathrm{Spec}\ R$，我们也将 $\mathrm{MS}_R := \mathrm{MS}_S$ 和 $\mathrm{SH}_R := \mathrm{SH}_S$ 记作如此。

我们首先考虑整完美体环 $\mathscr{O} = \mathbf{Z}_p[\mu_{p^\infty}]_p^\wedge$，它是通过向 $\mathbf{Z}_p$ 添加所有 p次单位根，然后进行 p进完备化得到的。接着，与之相关的

$$j\colon \mathrm{Spec}\ \mathbf{Q}_p^{\mathrm{cyc}} \hookrightarrow \mathrm{Spec}\ \mathbf{Z}_p^{\mathrm{cyc}} \hookleftarrow \mathrm{Spec}\ \mathbf{F}_p\colon i$$

我们得到函子

$$\mathrm{MS}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{cyc}}} \xrightarrow{j_*} \mathrm{MS}_{\mathbf{Z}_p^{\mathrm{cyc}}} \xrightarrow{i^*} \mathrm{MS}_{\mathbf{F}_p}$$

“完美体邻近循环”函子 $\psi\colon \mathrm{SH}^{\mathrm{cyc}}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathrm{MS}_{\mathbf{F}_p}$ 定义为 $i^* L_{\text{ét}} j_*$，其中$L_{\text{ét}}$ 是 étale 层化函子。其关键计算在思想上源自 [AMM22]和 [Niz98], ，即 ψ 将动机上同调谱 $\mathbb{F}_p^{\mathrm{mot}} \in \mathrm{SH}^{\mathrm{cyc}}_{\mathbf{Q}_p}$送到合成上同调谱 $\mathbb{F}_p^{\mathrm{syn}} \in \mathrm{MS}_{\mathbf{F}_p}$。这一事实最终使我们能够将有关特征 0 下动机 Steenrod 代数的信息——Voevodsky 在 [Voe03、Voe10], 中对此作了阐述——转化为有关特征 p下合成上同调 Steenrod 代数的信息。事实上， K 上的动机 Steenrod 代数可定义为

$$\mathcal{A}^{*,*}_{\mathrm{mot}} := \mathrm{Ext}^{*,*}_{\mathbb{S}^{\mathrm{mot}}}(\mathbb{F}_p^{\mathrm{mot}}, \mathbb{F}_p^{\mathrm{mot}})$$

其中 $\mathbb{S}^{\mathrm{mot}} \in \mathrm{SH}_K$ 是对称幺半单位，亦即 p-完备动机球谱。受上文所述关键计算的启发，我们可以把$\psi(\mathbb{S}^{\mathrm{mot}})$视为 k上的“合成上同调球谱”，然后尝试将合成上同调 Steenrod 代数定义为

$$\mathrm{Ext}^{*,*}_{\psi(\mathbb{S}^{\mathrm{mot}})}(\psi(\mathbb{F}_p^{\mathrm{mot}}), \psi(\mathbb{F}_p^{\mathrm{mot}})).$$

这是对合成上同调 Steenrod 代数 $\mathcal{A}^{*,*}_{\mathrm{syn}}$ 的实际定义在技术上过度简化、但在精神上忠实的近似。

6.4. **谱棱柱化**。 假设合成上同调 Steenrod 运算已得到令人满意的构造。下一步是参照 §4.3 的范式定义合成上同调 Stiefel–Whitney 类。然后需要证明一个算术吴公式，其形式表面上与定理 5.1.2 相同。我们再次强调，难点来自“算术方向”；对于几何 Wu 公式，可参见 [AE25, §4.4]。

对于算术吴公式，关键的技术困难在于证明映射 φ_* 与合成上同调斯廷罗德运算的相容性，该映射的定义方式类似于 (5.2.1)。为此，我们无法仿效 [Fen20a]，中的技巧，后者利用 étale 同伦论将问题归结为拓扑情形。

相反， [CF25] 针对这一问题发展了一种新方法，其中需要建立一套其重要性很可能超出该应用本身的工具：在 Drinfeld 与 Bhatt–Lurie 的意义下，针对合成上同调球谱对 棱镜化 所作的推广，以及随之而来的“谱 Serre 对偶”。特别地，我们构造了 Lurie 所猜想的、定义在 k 上的 棱柱稳定同伦范畴 的一个逼近，它是 k 上棱柱 F-规范范畴在稳定同伦论精神下的扩张。需要说明的是，如何实现这一点的想法是由 Lurie 向我们解释的。我们强调，我们是针对一般的 p 来发展这一理论的，尽管定理 1.4.2 的证明只需要 $p = 2$ 这一情形。

下面说明这一机制如何参与其中。考察命题 5.2.2 的表述可见，它从根本上涉及两种现象之间的相容性：庞加莱对偶与 Steenrod 运算。至少从历史上看，这两种现象的起源截然不同。Milne 对庞加莱对偶的证明，利用了其以微分形式描述对数 de Rham–Witt 上同调群的相对具体方式。另一方面，合成上同调 Steenrod 运算则是通过完美体邻近循环，以非常间接的方式产生的。甚至在底层上同调理论之间的比较——Milne 的对数 de Rham–Witt 上同调理论与 Bhatt–Morrow–Scholze 的合成上同调理论——也相当复杂。因此，为了分析这种相容性，自然需要从新的视角审视庞加莱对偶；这一视角应当源自我们在 [BL22] 中用于构造合成上同调 Steenrod 代数的合成上同调形式体系。

幸运的是，在 [Bha22], 中可以找到这样的视角：它将合成上同调的庞加莱对偶重新诠释为某个叠 k（$\mathrm{Spec}^{\mathrm{Syn}}{}_{\mathbf{F}_p}$）上拟凝聚层的 Serre 对偶。该叠由 Drinfeld [Dri24] 和 Bhatt–Lurie [Bha22]引入。这一表述将问题转化为考察（Spec $k_{\mathbf{F}_p}$）上的 Serre 对偶与合成上同调 Steenrod 运算的相容性。

模 p 棱柱 F-规范在 k 上的范畴是

$$\mathrm{FGauge}_{\mathbb{\Delta}}(k)_{\mathbb{F}_p} := \mathrm{QCoh}((\mathrm{Spec}\ k)^{\mathrm{Syn}}_{\mathbf{F}_p}).$$

合成上同调 Steenrod 代数可以解释为结构层 $\mathcal{O}_{(\mathrm{Spec}\ k)^{\mathrm{Syn}}{}_{\mathbf{F}_p}}$ 在一个“加厚”的谱棱柱 F- 标架 $\mathrm{FGauge}_{\mathbb{\Delta}}(k)^{\mathrm{pre}}_{\mathbb{S}}$ 范畴中的导出自同态环；这类似于拓扑学中的经典 Steenrod 代数可以解释为谱范畴中$\mathbf{F}_p$ 的自同态环。（这里的记号$\mathbb{S}$ 与动机球谱有关。）我们遵循 Lurie 的指引构造了范畴 $\mathrm{FGauge}_{\mathbb{\Delta}}(k)^{\mathrm{pre}}_{\mathbb{S}}$ ；它与 Lurie 猜想中的“棱柱稳定同伦范畴”（在 k上）密切相关。[4]

[4]上标“pre”表示它只是后者的一个近似；不过，对于本文所考虑的所有对象，它都是一个等价（精确定义见 [CF25, 注 9.2.4]）

这使我们能够将合成上同调 Steenrod 提升为 $\mathrm{QCoh}((\mathrm{Spec}\ k)^{\mathrm{Syn}}_{\mathbf{F}_p})$ 中的拟凝聚代数层，我们称之为“棱柱化合成上同调 Steenrod 代数”。接着，我们可以将等变性问题“局部化”到 $(\mathrm{Spec}\ k)^{\mathrm{Syn}}_{\mathbf{F}_p}$ 上。解释如下：存在一个伴随

$$\iota^*\colon \mathrm{FGauge}^{\mathrm{pre}}_{\mathbb{S}}(k)_{\mathbb{A}} \leftrightarrows \mathrm{FGauge}^{\mathrm{pre}}_{\mathbb{S}}(k)_{\mathbb{F}_p}\colon \iota_*$$

从本质上说，这应被视为源自将 ι $(\mathrm{Spec}\ k)^{\mathrm{Syn}}_{\mathbf{F}_p}$ 嵌入“谱棱柱化栈”$(\mathrm{Spec}\ k)^{\mathrm{Syn}}_{\mathbf{S}}$。接着，我们在 $\mathrm{FGauge}^{\mathrm{pre}}_{\mathbb{S}}(k)_{\mathbb{A}}$ 中定义内部 Hom 代数，

$$\mathscr{A}_{\mathrm{syn}} := \mathcal{H}om_{\mathrm{FGauge}^{\mathrm{pre}}_{\mathbb{S}}(k)_{\mathbb{A}}}\big(\iota_*\mathcal{O}_{(\mathrm{Spec}\ k)^{\mathrm{Syn}}_{\mathbf{F}_p}}, \iota_*\mathcal{O}_{(\mathrm{Spec}\ k)^{\mathrm{Syn}}_{\mathbf{F}_p}}\big),$$

将其称为“合成上同调 Steenrod 代数的棱镜化”；取整体截面后，它便还原为合成上同调 Steenrod 代数 $\mathcal{A}^{*,\ *}_{\mathrm{syn}}$。按照构造，$\mathrm{FGauge}^{\mathrm{pre}}_{\mathbb{S}}(k)_{\mathbb{F}_p}$ 中所有通过 ι^* 从 $(\mathrm{Spec}\ k)^{\mathrm{Syn}}_{\mathbf{S}}$ 得到的对象，都带有 $\mathscr{A}_{\mathrm{syn}}$ 的典范作用。

这种情形在形式上类似于一个 G-扭子 $\pi\colon P \to S$。由于 G 是 S 上 P 的自同态群，S 上的对象拉回后便成为 P 上的 G- 等变对象。类似地，$(\mathrm{Spec}\ k)^{\mathrm{Syn}}_{\mathbf{S}}$ 上的对象拉回后便成为 $\mathrm{FGauge}^{\mathrm{pre}}_{\mathbb{S}}(k)_{\mathbb{F}_p}$ 上的 $\mathscr{A}_{\mathrm{syn}}$-等变对象。反过来，在 $\pi\colon P \to S$ 的情形中，要证明 P 上的结构是 G-等变的，就相当于将其下降到 S。类似地，要证明合成上同调 Steenrod 作用与 $(\mathrm{Spec}\ k)^{\mathrm{Syn}}_{\mathbf{F}_p}$ 上的 Serre 对偶相容，关键在于将 Serre 对偶恰当地扩展为 $\mathrm{FGauge}^{\mathrm{pre}}_{\mathbb{S}}(k)_{\mathbb{A}}$ 上的“谱 Serre 对偶”。（参见 [Fen20b]，其中以更抽象的方式讨论了这一问题，并在形式上将这两种情形纳入统一框架。）

谱 Serre 对偶的关键在于为 $\mathrm{FGauge}^{\mathrm{pre}}_{\mathbb{S}}(k)_{\mathbb{A}}$ 找到合适的对偶化层定义。为此，我们再次受到 Lurie 的建议启发，借鉴布朗–科梅内茨对偶 [BC76]，它将 Pontrjagin 对偶推广到了谱。具体而言，令 Sp 表示 p-完备谱的范畴，并令 $\mathbf{I} \in \mathrm{Sp}$ 表示布朗–科梅内茨谱的p-完备化。我们将$\mathbf{I}$ 以一种合适的方式从 Sp“拉回”，从而在 $\mathrm{FGauge}^{\mathrm{pre}}_{\mathbb{S}}(k)_{\mathbb{A}}$ 中定义一个对偶化层；我们证明，它构成了 $\mathrm{FGauge}^{\mathrm{pre}}_{\mathbb{S}}(k)_{\mathbb{A}}$ 上的一种良好的“谱 Serre 对偶”理论，并且与 $\mathrm{FGauge}^{\mathrm{pre}}_{\mathbb{S}}(k)_{\mathbb{F}_p}$中经典的相干对偶理论相容。正如 [CF25, §11]中所解释的，这种相互作用可用于证明棱柱化斯廷罗德代数作用与 Serre 对偶具有所需的相容性。

6.5. 比较定理。 定理 3.3.1 将米尔恩–阿廷–泰特配对与 $\mathbb{E}_\infty$ 斯廷罗德运算联系起来。不过，我们能够有效计算的是合成上同调 斯廷罗德运算，方法是利用算术吴公式，以及与§5.3中类似的方法所确立的斯蒂费尔–惠特尼类和陈类之间的联系。现在，这两种论述之间存在脱节；要弥合这一差距，我们需要关联这两类斯廷罗德运算。一般而言，它们显然不同，因为它们对权重的作用不同，例如，

$$\mathrm{Sq}^{2i}_{\mathbb{E}}\colon \mathrm{H}^a(-;\mathbf{Z}/2(b)) \to \mathrm{H}^{a+2i}(-;\mathbf{Z}/2(2b)) \tag{6.5.1}$$

$$\mathrm{Sq}^{2i}_{\mathrm{syn}}\colon \mathrm{H}^a(-;\mathbf{Z}/2(b)) \to \mathrm{H}^{a+2i}(-;\mathbf{Z}/2(b+i)). \tag{6.5.2}$$

不过请注意，值域有时 会相同。例如，定理 1.4.2 的关键情形是 $p = 2$、$a = 3$ 和 $b = 1$，此时 $\mathrm{Sq}^2_{\mathbb{E}}$ 和 $\mathrm{Sq}^2_{\mathrm{syn}}$ “恰好”都具有 $\mathrm{H}^3(-;\mathbf{Z}/2(1)) \to \mathrm{H}^5(-;\mathbf{Z}/2(2))$ 的形式。我们证明下面的“比较定理”，断言只要这两类运算具有相同的定义域和陪域，它们就相等。

对这一陈述的解释。

定理6.5.1 ([CF25，定理 8.1。1])**.** 若 $b = i$，使得$(6.5.1)$ 中的两个映射具有相同的源和目标，则它们相等。

事实上， [CF25，定理 8.1.1] 在所有情况下都确定了 $\mathrm{Sq}^i_{\mathbb{E}}$ 与 $\mathrm{Sq}^i_{\mathrm{syn}}$ 之间的关系。定理 6.5.1的主要内容是 Bachmann–Hopkins[BH25] 关于特征 0 下动机上同调的一个类似结果，我们再利用完美体邻近循环函子将其推广到特征 p。

至此，我们对定理 1.4.2 证明的粗略印象式概览也就结束了。图 1 展示了整个故事的全貌。

参考文献

[AE25] Toni Annala和Elden Elmanto，《通过无限分歧研究特征处的动机幂运算》，2025年。[AHI25] Toni Annala、Marc Hoyois和Ryomei Iwasa，《代数配边与代数K理论的Conner-Floyd同构》，《美国数学会杂志》38（2025年），第1期，243–289页。[AMM22] Benjamin Antieau、Akhil Mathew和Matthew Morrow，《完美胚环的K理论》，《数学文献》27（2022年），1923–1952页。[BC76] Edgar H. Brown, Jr.和Michael Comenetz，《广义同调与上同调理论的Pontrjagin对偶》，《美国数学杂志》98（1976年），第1期，1–27页。[Ben25] Olivier Benoist，《Steenrod运算与代数类》，《突尼斯数学杂志》7（2025年），第1期，53–89页。[BH25] Tom Bachmann和Michael Hopkins，《动机同伦论中的稳定运算》，2025年，见 https://tom-bachmann.com/ops.pdf。[Bha22] Bhargav Bhatt，《棱镜 F-gauge》，2022年，课程讲义，见 https://www.math.ias.edu/~bhatt/teaching/mat549f22/lectures.pdf。[BL22] Bhargav Bhatt和Jacob Lurie，《绝对棱镜上同调》，2022年。[BMS19] Bhargav Bhatt、Matthew Morrow和Peter Scholze，《拓扑Hochschild同调与整 p-进Hodge理论》，《高等科学研究所数学出版物》129（2019年），199–310页。[CF25] Shachar Carmeli和Tony Feng，《棱镜Steenrod运算与Brauer群上的算术对偶》，2025年。[Dri24] Vladimir Drinfeld，《棱镜化》，2024年。[Fen20a] Tony Feng，《平展Steenrod运算与Artin-Tate配对》，《组合数学》156（2020年），第7期，1476–1515页。[Fen20b] Tony Feng，《谱Hecke代数》，2020年。[FS18] Martin Frankland和Markus Spitzweck，《迈向正特征下的对偶动机 Steenrod 代数》，2018年。[Gei20] Thomas H. Geisser，《比较Brauer群与Tate-Shafarevich群》，《朱西厄数学研究所杂志》19（2020年），第3期，965–970页。[GL00] Thomas Geisser和Marc Levine，《特征 p域的 K理论》，《数学发明》139（2000年），第3期，459–493页。[Gor79] W. J. Gordon，《联系Artin-Tate猜想与Birch-Swinnerton-Dyer猜想》，《组合数学》38（1979年），第2期，163–199页。[HKOsr17] Marc Hoyois、Shane Kelly和Paul Arne Østvær，《正特征下的动机 Steenrod 代数》，《欧洲数学会杂志》（JEMS）19（2017年），第12期，3813–3849页。[Ill79] Luc Illusie，《德拉姆-维特复形与晶体上同调》，《高等师范学校科学年刊》（第4辑）12（1979年），第4期，501–661页。[KT03] Kazuya Kato和Fabien Trihan，《关于特征 $p > 0$下的Birch和Swinnerton-Dyer猜想》，《数学发明》153（2003年），第3期，537–592页。[LLR05] Qing Liu、Dino Lorenzini和Michel Raynaud，《关于曲面的Brauer群》，《数学发明》159（2005年），第3期，673–676页。[LLR18] ,《Néron模型、李代数与亏格一曲线的约化》及《曲面的Brauer群》的勘误 *[2092767 2125738]*, **214** 2018 1, MR; MR 593 604 《数学发明》（），第–期。[Man67] Ju. I. Manin，《完全域上的有理曲面。II》，《数学文集》（新辑）72（114）（1967年），161–192页。[Man86] Yu. I. Manin，《三次型》，第2版，《北荷兰数学图书馆》第4卷，北荷兰出版公司，阿姆斯特丹，1986年，代数、几何、算术，由M. Hazewinkel从俄文译出。

[May70] J. Peter May, 《Steenrod运算的一般代数方法》, 《Steenrod代数及其应用》（为庆祝N. E. Steenrod六十寿辰而举行的会议论文集, Battelle纪念研究所, 俄亥俄州哥伦布, 1970年）, 数学讲义第168卷, 施普林格, 柏林, 1970年, 第153–231页。[Mil75] J. S. Milne, 《关于Artin和Tate的一个猜想》, 《数学年刊》（第2辑）102（1975年）, 第3期, 517–533页。[Mil86] , 《有限域上的簇的ζ函数值》, 《美国数学杂志》108（1986年）, 第2期, 297–360页。[Mil97] John W. Milnor, 《从可微观点看拓扑学》, 普林斯顿数学地标丛书, 普林斯顿大学出版社, 新泽西州普林斯顿, 1997年, 根据David W. Weaver的讲义编写; 重印修订版, 原版出版于1965年。[Mil25] James S. Milne, 《算术对偶》, 2025年。[Mor24] Masanori Morishita, 《纽结与素数——算术拓扑导论》, Universitext丛书, 施普林格, 新加坡, [2024]©2024年, 第二版 [版 2905431]。[MS74] John W. Milnor和James D. Stasheff, 《特征类》, 普林斯顿大学出版社, 新泽西州普林斯顿; 东京大学出版社, 东京, 1974年, 《数学年刊研究》丛书第76号。[MT68] Robert E. Mosher和Martin C. Tangora, 《上同调运算及其在同伦论中的应用》, Harper & Row出版公司, 纽约-伦敦, 1968年。[Niz98] Wiesł awa Nizioł, 《通过 K-理论研究晶体猜想》, 《高等师范学校科学年刊》（第4辑）31（1998年）, 第5期, 659–681页。[Pri20] Eric Primozic, 《特征 p下的动机 Steenrod 运算》, 《Forum Mathematicum Sigma》8（2020年）, 论文编号e52, 25页。[PS99] Bjorn Poonen和Michael Stoll, 《极化阿贝尔簇上的Cassels-Tate配对》, 《数学年刊》（第2辑）150（1999年）, 第3期, 1109–1149页。[SS24] Federico Scavia和Fumiaki Suzuki, 《有限域上的两种余维滤过与代数等价》, 2024年。[Ste47] N. E. Steenrod, 《上循环的乘积与映射的延拓》, 《数学年刊》（第2辑）48（1947年）, 290–320页。[Tat63] John Tate, 《数域上的伽罗瓦上同调对偶定理》, 《国际数学家大会论文集》（斯德哥尔摩, 1962年）, Mittag-Leffler研究所, 尤尔斯霍尔姆, 1963年, 第288–295页。[Tat95] , 《关于Birch和Swinnerton-Dyer猜想及其几何类比》, 《布尔巴基研讨班》第9卷, 法国数学会, 巴黎, 1995年, 第306号报告, 415–440页。[Tho52] René Thom, 《球面纤维丛与Steenrod平方》, 《高等师范学校科学年刊》（第3辑）69（1952年）, 109–182页。[Ura96] Tohsuke Urabe, 《曲面Brauer群的双线性形式》, 《数学发明》125（1996年）, 第3期, 557–585页。[Voe02] Vladimir Voevodsky, 《动机稳定同伦论中的公开问题 I》, 《动机、多对数与Hodge理论》, 第一部分（加利福尼亚州尔湾, 1998年）, 国际出版社讲座丛书第3卷, 国际出版社, 马萨诸塞州萨默维尔, 2002年, 第3–34页。[Voe03] , 《动机上同调中的约化幂运算》, 《高等科学研究所数学出版物》（2003年）, 第98期, 1–57页。[Voe10] , 《动机埃伦伯格–麦克莱恩空间》, 《高等科学研究所数学出版物》（2010年）, 第112期, 1–99页。[Wal62] C. T. C. Wall, 《消去奇数维流形的中间同伦群》, 《美国数学会汇刊》103（1962年）, 421–433页。[Wu50] Wen-tsün Wu, 《流形的特征类与 i-平方》, 《巴黎科学院报告》230（1950年）, 508–511页。[Zar89] Yu. G Zarhin, 《有限域上曲面的Brauer群》（俄文）, 《簇的算术与几何》（1989年）, 57–67页。