arXiv:2602.15667v1 [math.CT] 17 Feb 2026

相对与松弛对合范畴

Tim L¨uders

摘要

本文引入相对对合（高阶）范畴的概念，并将其具体化为松弛对合（高阶）范畴的概念。我们研究这些对象的主要动机如下：任何刚性对称幺半范畴都具有对合结构，而任何闭对称幺半范畴都具有 lax volutive 结构。我们发展了相对对合范畴的一些基础理论，并给出松弛对合范畴的若干等价表述。随后，我们研究了一些有意义的例子，包括完备 bornological 向量空间范畴以及星环上的模。我们还将分别讨论希尔伯特空间之间的无界算子，以及 Morita 2-范畴；后者将在完全闭对称幺半2-范畴的背景下讨论。

目录

1 引言 **2**

2 预备知识 **4**

2.1 O(1)-对合范畴与 dagger 范畴.4 2.2 O(1)-对合 2-范畴与 dagger 范畴.5 2.3 O(1)-对合范畴与 dagger 范畴的 2-范畴.6

3 相对 $\mathrm{O}(1)$-对合范畴 7

3.1 相对 O(1)-volutive 范畴.7 3.2 弱 O(1)-对合范畴.9 3.3 弱 O(1)-对合结构是相对的.13

4 相对$\mathrm{SO}(2)$-volutive 2-范畴 17

4.1 2-范畴和 3-范畴中的伴随.18 4.2 SO(2)-对合 2-范畴.20 4.3 相对 SO(2)-volutive 2-范畴.26 4.4 松弛 SO(2)-对合 2-范畴.29

5 松弛厄米固定点 32

5.1 松弛 O(1) 对合情形.32 5.2 松弛 SO(2)-对合情形.34

6 闭 2-范畴 **35**

6.1 松弛 2-函子与 2-变换.35 6.2 1-闭 2-范畴.36 6.3 0-闭 2-范畴.38 6.4 全闭 2-范畴.39 6.5 闭性的局部视角.40 6.6 例：Morita 2-范畴.42 6.7 例：预函子.45

7 例与应用 **48**
7.1 bornological 向量空间.49 7.2 星环上的模.51 7.3 无界算子.52 7.4 Bornological 代数.59

参考文献 **60**

1 引言

对偶是构造新的（高阶）对合范畴和 dagger 范畴的有力工具。一个重要的猜想 [†24]（已对 $n \leq 2$ 得到证明）断言，任何具有所有对偶和伴随的对称幺半 n-范畴 $\mathcal{C}$ 都具有一个 O(n)-对合结构，它限制在极大子群胚$\mathcal{C}^{\times}$ 上时，恰好是配边假设所预言的典范 O(n) 作用。另一方面，许多实际中出现的对称幺半范畴只具有较弱的对偶概念，例如链复形范畴或 bornological 向量空间范畴。本文初步探讨了适用于这类较弱对偶的（高阶）对合结构推广。在一维情形下，我们证明以下结果，详见正文中的定理 3.2.11。

定理 1。 任何闭对称幺半范畴 $\mathcal{C}$ 都具有一个松弛的 $\mathrm{O}(1)$-对合结构。

下面总结若干良好的例子类别（不一定通过定理 1 构造）中的弱 O(1)-对合范畴。

例 1. 以下范畴均具有弱 O(1)-对合结构：

(i) 交换环上的（无界）链复形范畴，

(ii) 完备（凸）bornological 向量空间范畴，

(iii) 巴拿赫空间的全子范畴，

(iv) $*$-环上的模范畴（例如任意交换环），以及

(v) 任意笛卡尔闭范畴。

根据定义，O(1)-对合范畴是相对于范畴的(2,1)-范畴上的典范非平凡O(1)-作用的 O(1)-同伦不动点，该作用将每个范畴 $\mathcal{C}$ 映射为其对偶范畴$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$。由于弱 O(1)-对合范畴并非相对于上述作用的松 O(1)-同伦不动点，因此需要采用不同的方法来形式化这些结构。我们的第二个主要结果给出了弱 O(1)-对合范畴的若干等价刻画，详见正文中的定理 3.3.12。

定理2。 以下概念等价：

(i) 定义 *3.2.1* 意义下的弱 $\mathrm{O}(1)$-对合范畴，

(ii) 定义 *3.3.2* 意义下的可表对称配对，

(iii) 定义 *3.3.7* 意义下 Cat 中的 *volutive* 伴随，以及

(iv)（*2*-逆变）$\mathrm{O}(1)$-对合函子 $\mathrm{Adj} \to \mathrm{Cat}$。

定理2中的最后一种刻画是我们引入（高阶）相对对合范畴理论的主要动机，该理论推广了（高阶）松弛对合范畴。基于这样一个观察：Adj（游走伴随）和 Cat（范畴的2-范畴）都带有（2-反变）O(1)-对合结构，O(1)情形如下所示，详见正文中的定义3.1.1。

定义 1。 A 相对 O(1)-对合范畴 由一个2-反变 O(1)-对合 2-范畴$\mathcal{B}$ 和一个2-反变 O(1)-对合 函子 $F\colon \mathcal{B} \to$ Cat组成。

对于 $\mathcal{B} = \star$ 和 $\mathcal{B} = \mathsf{Adj}$，定义 1 分别退化为 O(1)-对合范畴和弱 O(1)-对合范畴的概念；读者不妨将终 2-范畴 $\star$ 视为等价于游走伴随等价，从而将弱 O(1)-对合范畴理解为可逆程度较低的 O(1)-对合范畴，这与我们给出的明确描述相一致。

作为高阶相对与松弛对合范畴的主要实例，我们引入相对与松弛 SO(2)-对合 2-范畴。在讨论中，我们特别着重阐述它们分别与相对及松弛 O(1)-对合情形的类比。一方面，我们将证明，任何带伴随的闭对称幺半 2-范畴都具有由 Serre 态射给出的松弛 SO(2)-对合结构。另一方面，我们将相对 SO(2)-对合 2-范畴定义为一个（2-反变）SO(2)-对合 3-函子 $\mathcal{B} \to 2\mathsf{Cat}^{\mathrm{adj}}$，这一概念分别推广了 $\mathcal{B} = \star$情形下的 SO(2)-对合 2-范畴，以及（对适当局部化后的） $\mathcal{B} =$AmbAdj$[1]$, 情形下的松弛 SO(2)-对合 2-范畴；其中 AmbAdj$[1]$ 指的是游走双向伴随的一种范畴化。因此，关于相对与松弛 O(1)-对合范畴的两个主要定理（即对偶性产生松弛对合结构，以及松弛对合结构是特殊的相对对合结构）在 SO(2) 情形下也有相应的类似结果。

作为弱 O(1)-对合范畴理论的一项应用，我们从下表的视角重新审视希尔伯特空间范畴上的 dagger 结构。该表列出了范畴的若干启发性例子，以及它们所支持的结构（本文将讨论这些结构）。

Dagger	O(1)-对合	弱 O(1)-对合	闭对称幺半
Hilb	$\mathsf{Ban}^{\mathrm{refl}}$	Ban	$_{c}\mathfrak{Born}$

从左至右，第二行分别指希尔伯特空间、（自反）巴拿赫空间和完备（凸）bornological 向量空间范畴（其态射均为有界线性映射）。

我们还将在全闭对称幺半 2-范畴的背景下讨论松弛 volutive 结构。具体而言，我们将证明，每个全闭对称幺半 2-范畴都具有一种弱 O(1)-对合结构；将其传递到相应的匕首 2-范畴后，可得到一个以弱 O(1)-对合范畴为富集范畴的范畴。这足以在局部传递到松弛厄米固定点与松弛等距的范畴。我们将以 Morita 2-范畴为例，详细说明这些构造。我们证明如下结果，参见正文中的定理 6.6.4 和推论 6.6.7。

定理3。 设 $\mathcal{C}$ 是一个具有（余）等化子的闭对称幺半范畴。那么，$\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ 是一个具有对象对偶的对称幺半 *1*-闭 *2*-范畴。

作为定理3的一个具体实例，完备（凸）bornological 代数构成了一个完全闭对称幺半2-范畴 Mor($_{c}\mathfrak{Born}$)。我们将在这一2-范畴的背景下讨论松弛厄米固定点，并将结果与冯·诺依曼代数以及厄米模/希尔伯特模等更为熟悉的结构进行比较。

¨**致谢**。我们感谢 Lukas M¨uller、Aleksandar Ivanov 和 Od¨ul Tetik 提供了许多有益的讨论。我们感谢德意志人民学习基金会提供的经费支持。

约定。在本文中，我们通常将双范畴称为 2-范畴，将伪函子称为 2-函子，等等；对 3-范畴也采用类似做法。每当我们称 2-范畴中的一个 1-态射为“可逆的”或“1-同构”时，均指其在传统意义上是一个等价。

给定可逆 1-态射之间的一个 2-态射 $f\colon X \to Y$，我们通常在记号上不区分 f 与其诱导的 2-态射 $Y^{-1} \to X^{-1}$。我们将具有所有对偶和伴随的（对称）幺半（高阶）范畴称为刚性的。

2 预备知识

本节回顾普通 dagger 范畴论中的一些重要内容；此处所呈现的结果对于专家而言基本上都是众所周知的，我们不声称对所涵盖的材料具有原创性。我们首先回顾 O(1)-对合范畴与 dagger 范畴，随后将该理论提升一次范畴化，建立相应的 O(1)-对合范畴与 dagger 范畴的 2-范畴，然后讨论它们之间的伴随。我们将强调，对 O(1)-对合范畴与 dagger 范畴进行一次范畴化所得到的理论，为我们提供了微观宇宙方法。

2.1 $\mathrm{O}(1)$-对合范畴与 dagger 范畴

本节回顾 O(1)-对合范畴与 dagger 范畴的概念。我们先从前者开始。

定义 2.1.1。设 $\mathcal{C}$ 为一个范畴。$\mathcal{C}$ 上的一个 O(1)-对合结构 由一个函子 $d\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 以及一个自然同构 $\eta\colon \mathrm{id} \to d^{\mathrm{op}} \circ d$ 组成，并满足对所有 $a \in \mathcal{C}$都有 $d(\eta_a) = \eta^{-1}_{d\,a\,()}$。带有 O(1)-对合结构的范畴称为 O(1)-对合范畴。

例 2.1.2. 范畴 $\mathrm{Ban}^{\mathrm{refl}}$ （由自反巴拿赫空间构成）具有一个 O(1)-对合结构。函子 d 将每个巴拿赫空间 V 映到其对偶空间 V'，而自然同构 η 在 V 处的分量是典范同构 $V \to V''$，它将 V 映入其二重对偶。

以下内容给出了 O(1)-对合范畴的一类典型例子；本文稍后将证明一个更一般的结果。

命题 2.1.3. 设 $\mathcal{C}$ 是一个具有对偶的对称幺半范畴。那么，$\mathcal{C}$ 具有一个 O(1)-对合结构。

注 2.1.4. O(1)-对合范畴等同于相对于 Cat（由范畴、函子和自然同构构成的 (2,1)-范畴）上的典范非平凡 O(1)-作用的 O(1)-同伦不动点。具体而言，这个 O(1)-作用由严格对合 2-函子给出，该函子将每个范畴 $\mathcal{C}$ 映到其对偶范畴 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$。

注 2.1.5. 任意群胚 $\mathcal{G}$ 都承认一种 O(1)-对合结构，其底层函子是态射的求逆。更一般地，任意带有 O(1)-作用的群胚，通过适当地组合 O(1)-作用与求逆，可以定义一个 O(1)-对合范畴。反过来，范畴 $\mathcal{C}$ 上的任意 O(1)-对合结构 (d, η) 都会在极大子群胚 $\mathcal{C}^{\times} \subseteq \mathcal{C}$上诱导一个 O(1)-作用。

定义 2.1.6. （相干）匕首范畴是一个 O(1)-对合范畴 $(\mathcal{C}, d, \eta)$，并附带一个全忠实子群胚 $\mathcal{C}_0 \hookrightarrow (\mathcal{C}^{\times})^{\mathrm{O}(1)}$，使得诱导函子 $\mathcal{C}_0 \hookrightarrow (\mathcal{C}^{\times})^{\mathrm{O}(1)} \to \mathcal{C}^{\times}$ 本质满。

变体 2.1.7. （经典）匕首范畴是一个范畴 $\mathcal{C}$，并附带一个函子 $d\colon C \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$，满足 $d^{\mathrm{op}} \circ d = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ 和 $d(a) = a$，对所有对象 $a \in \mathcal{C}$ 均成立。

例 2.1.8. 希尔伯特空间范畴 Hilb 具有由伴随算子构造给出的 dagger 结构。

注记 2.1.9. 相干匕首范畴与经典匕首范畴编码了本质上相同的信息，前者的主要优势在于它可以说能更干净地推广到高维。为看出前一断言，设 $(\mathcal{C}, d)$ 为一个经典伴随范畴。我们得到一个 O(1)-对合范畴 $(\mathcal{C}, d, \mathrm{id})$，并可选取全忠实子群胚 $(\mathcal{C}^{\times})^{\mathrm{O}(1)} \subseteq (\mathcal{C}^{\times})^{\mathrm{O}(1)}$，对此，诱导

相干匕首范畴定义中的函子是本质满的，因为任一对象 a 在$\mathcal{C}$ 中都容许相对于由d诱导的 O(1)-作用的 O(1)- 同伦不动点结构：即 $(a, \mathrm{id}_a) \in (\mathcal{C}^{\times})^{\mathrm{O}(1)}$。反之，设 $(\mathcal{C}, d, \eta, \mathcal{C}_0)$ 为一个相干匕首范畴。定义 $\tilde{}$ 一个范畴 C，其对象为 $\mathcal{C}_0$ 的对象，其态射 $(a, \theta_a) \to (b, \theta_b)$ 为 $\mathcal{C}$中的 $\tilde{}$态射 $a \to b$。范畴 C 于是带有一个 dagger 结构，它将 $\mathcal{C}$ 中的态射$\sim X\colon (a, \theta_a) \to (b, \theta_b)$ 送到由下式定义的态射 $(b, \theta_b) \to (a, \theta_a)$

$$b \xrightarrow{\theta_b} d(b) \xrightarrow{d(X)} d(a) \xrightarrow{\theta_a^{-1}} a. \tag{2.1}$$

第二个论断属于定义高阶匕首范畴这一持续推进的研究计划。在本文中，我们将根据具体问题，灵活选用相干匕首范畴和经典匕首范畴。

备注 2.1.10. 如$\mathcal{C}, d, \eta$这样的任意 O(1)-对合范畴，都会导出一个 dagger 范畴，详见[SS24]。我们将在备注 5.1.3 中介绍与这一构造密切相关的一个版本。

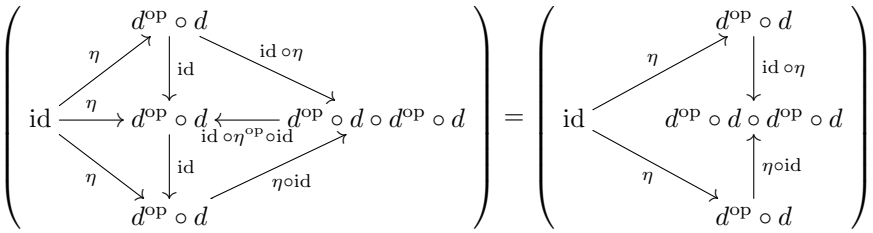
例 2.1.11. 将备注 2.1.10 应用于由自反巴拿赫空间构成的 O(1)-对合范畴 $\mathrm{Ban}^{\mathrm{refl}}$，可得到厄米巴拿赫空间的 dagger 范畴，其中希尔伯特空间的 dagger 范畴是一个全子范畴。

定义 2.1.12. 设 $(\mathcal{C}, d)$ 为一个（经典）dagger 范畴。若态射 $X\colon a \to b$ 属于 $\mathcal{C}$，且满足 $d(X) \circ X = \mathrm{id}_a$，则称其为等距态射；若满足 $d(X) = X^{-1}$，则称其为幺正。

2.2 $\mathrm{O}(1)$-对合 2-范畴与 dagger 范畴

本节将给出 O(1)-对合范畴和 dagger 范畴概念的具体一次范畴化版本。我们先讨论前者。

定义 2.2.1。 2-范畴 $\mathcal{B}$ 上的*2-*反变 O(1)-对合结构 由一个 2-函子$d\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}^2$ 对偶、一个可逆 2-变换 $\eta\colon \mathrm{id} \to d^2$ 对偶$\circ d$，以及一个可逆修正 $\tau\colon \mathrm{id}_{d^{\mathrm{op}}} \to (\mathrm{id}_{d^{\mathrm{op}}} \circ \eta^{2\,\mathrm{op}}) \bullet (\eta \circ \mathrm{id}_{d^{\mathrm{op}}})$ 组成，满足



(2.2)

其中，在左侧图表中，我们使用了修正 τ 及其 2-对偶；而在右侧图表中，我们只使用了交换律。带有 2-反变 O(1)-对合结构的 2-范畴称为*2-*反变 O(1)-对合 *2-*范畴。

我们的 primary 本文中一个 2-反变 O(1)-volutive 2-范畴的例子如下。

例 2.2.2. 由范畴、函子和自然变换构成的 2-范畴 (Cat,$(-)^{\mathrm{op}}$,id,id)，连同将每个范畴 $\mathcal{C}$ 映到其对偶范畴 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 的 2-函子，是一个 2-逆变 O(1)-反 involution 范畴。

注记 2.2.3。 例 2.2.2 中描述的 Cat 上的 2-反变 O(1)-对合结构，可以从全闭对称幺半 2-范畴 Prof 的角度加以解释，Cat 嵌入其中；我们将在第 6.7 节讨论这一点。

注记 2.2.4。 2-反变 O(1)-对合 2-范畴是 O(1) 作用下的 O(1)-同伦不动点，该作用由 3-函子 $(-)^{2\,\mathrm{op}}$ 给出，它将每个 2-范畴赋予其 2-对偶。虽然这解释了我们采用这一术语的原因，但它也提出了 O(1)-对合 2-范畴概念的两种变体：1-反变版本（基于 3-函子 $(-)^{1\,\mathrm{op}}$）和 (1,2)-反变版本（基于 3-函子 $(-)^{(1,2)\,\mathrm{op}}$）。具体而言，这些版本与定义 2.2.1 中所给出的数据本质上相同，只是相应地替换了变异性。1-反变版本已发表于 [CL25，定义 2.40]。

注 2.2.5. 2-反变 O(1)-对合 2-范畴的底层 (2,1)-范畴会继承一个 O(1)-作用，这与注 2.1.5 中讨论的一维情形类似。同样，(2,1)-范畴上的任意 O(1)-作用 $\mathcal{D}$ 都定义了一个 2-反变 O(1)-对合结构。

定义 2.2.6. 一个（相干）*2*-反变 O(1)-匕首 *2*-范畴 由一个 2-反变 O(1)-对合 2-范畴 $(\mathcal{C}, d, \eta, \tau)$ 以及一个全忠实子群胚 $\mathcal{C}_0 \hookrightarrow (\mathcal{C}^\times)^{\mathrm{O}(1)}$ 构成，使得诱导函子 $\mathcal{C}_0 \hookrightarrow (\mathcal{C}^\times)^{\mathrm{O}(1)} \to \mathcal{C}^\times$ 是本质满的。

定义 2.2.7. 一个（经典）*2*-反变 O(1)-匕首 *2*-范畴 由一个对象上恒等的 2-函子 $d\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}^{2\,\mathrm{op}}$ 和一个恒等 1-态射分量可逆 2-变换 $\eta\colon \mathrm{id} \to d^{2\,\mathrm{op}} \circ d$ 构成，满足 $\mathrm{id}_{d^{2\,\mathrm{op}}} = (\mathrm{id}_{d^{2\,\mathrm{op}}} \circ \eta^{2\,\mathrm{op}}) \bullet (\eta \circ \mathrm{id}_{d^{2\,\mathrm{op}}})$。

注 2.2.8. 与注 2.2.4 中的讨论类似，O(1)-dagger 2-范畴还有另外两种变异性。

注 2.2.9. 任意一个（经典的）2-反变 O(1)-dagger 2-范畴 $(\mathcal{C}, d, \eta)$ 都定义了一个 2-反变 O(1)-volutive 2-范畴 $(\mathcal{C}, d, \eta, \mathrm{id})$。

以下内容实质上是 [CL25,Section 2.3.3] 中讨论的 2-反变类比（依照注 2.2.4 的含义）。

构造 2.2.10. 设 $(\mathcal{B}, d, \eta, \tau)$ 是一个 2-反变 O(1)-对合 2-范畴。我们得到一个（经典的）2-反变 O(1)-dagger 2-范畴，其底层 2-范畴的对象与 $(\mathcal{B}^\times)^{\mathrm{O}(1)}$ 相同，其 1-态射和 2-态射与 $\mathcal{B}$ 相同。

注 2.2.11。 (经典) 2-反变 O(1)-伴随 2-范畴 $(\mathcal{C}, d, \eta)$ 的每个 Hom-范畴都带有 O(1)-对合结构。此外，复合函子相对于这些 O(1)-对合结构都是 O(1)-对合的。换言之，2-反变 O(1)-伴随 2-范畴可以自然地解释为一个以 O(1)-对合范畴为富化对象的范畴。

2.3 O(1)-对合范畴与 dagger 范畴的 2-范畴

本节简要回顾 O(1)-对合范畴与 dagger 范畴的 2-范畴，以及它们之间的伴随。

注 2.3.1。 将构造 2.2.10 应用于例 2.2.2 中描述的 2-反变 O(1)-对合 2-范畴 $(\mathrm{Cat}, (-)^{\mathrm{op}}, \mathrm{id}, \mathrm{id})$，可得到一个（经典）2-反变 O(1)-伴随 2-范畴，其对象为 O(1)-对合范畴，1-态射和 2-态射分别为函子和自然变换。

以下内容的显式证明见 [SS24，引理 3.9]。

引理 2.3.2. 设 $(\mathcal{C}, d, \eta)$ 和 $(\mathcal{C}', d', \eta')$ 为 O(1)-对合范畴。则，函子范畴 $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ 具有一个˜O(1)-对合结构 $(d, \tilde{\eta})$。

证明。 这可由注 2.3.1 和注 2.2.11 立即得出。 □

定义 2.3.3。 设 $(\mathcal{C},\ d,\ \eta)$ 和 $(\mathcal{C}',\ d',\ \tilde{\eta}'$ 1 2 1 10) 是 O( )- 对合范畴。将注 . . 应用于 O(1)- 对合范畴 (函子范畴 $(\mathcal{C},\ \mathcal{C}')\ d,\ \tilde{\eta})$，可得到一个匕首范畴，其对象称为 O(1)-对合函子，态射为自然变换。我们称这个匕首范畴中的等距为 O(1)-对合自然变换。

注 2.3.4. 这个关于 O(1)-对合函子和自然变换的定义，与例如 [SS24] 中给出的显式定义一致。

注 2.3.5. 设 $(\mathcal{C},d,\eta)$ 和 $(\mathcal{C}',d',\eta')$ 是 O(1)-对合范畴，并设 (F,α): $(\mathcal{C},d,\eta)\ \to(\mathcal{C}',d',\eta')$ 是一个 O(1)-对合函子。那么，(F,α) 诱导出一个函子 $F^{\mathrm{O}(1)}\colon(\mathcal{C}^{\times})^{\mathrm{O}(1)}\to(\mathcal{C}'^{\times})^{\mathrm{O}(1)}$。

定义 2.3.6. 设 $(\mathcal{C},d,\eta,\mathcal{C}_0)$ 和 $(\mathcal{C}',d',\eta',\mathcal{C}_0')$ 是（相干）dagger 范畴。dagger 函子 $(F,\alpha):(\mathcal{C},d,\eta)\ \to(\mathcal{C}',d',\eta')$ 是一个 O(1)-对合函子，且其诱导函子

$$F^{\mathrm{O}(1)}|_{\mathcal{C}_0}\colon\mathcal{C}_0\to(\mathcal{C}'^{\times})^{\mathrm{O}(1)} \tag{2.3}$$

经由 $\mathcal{C}_0'\subseteq(\mathcal{C}'^{\times})^{\mathrm{O}(1)}$ 分解。dagger 函子之间的 ***dagger*** 自然变换 是 O(1)-对合自然变换。

定义 2.3.7。 我们用 $\mathrm{Cat}^{\mathrm{O}(1)\text{-vol}}$ 表示由 O(1)-对合范畴、O(1)-volutive 函子和 O(1)-volutive 自然变换构成的 2-范畴。

定义 2.3.8。 我们用 $\mathrm{Cat}^{\dagger}$ 表示由（相干）dagger 范畴、dagger 函子以及它们之间的 dagger 自然变换构成的 2-范畴。

以下内容出自 [SS24，定理 4.9]。

命题 2.3.9。 备注 2.1.10 中的构造可扩展为函子 $S_{\mathrm{O}(1)}\colon\mathrm{Cat}^{\mathrm{O}(1)\text{-vol}}\to\mathrm{Cat}^{\dagger}$，它是遗忘函子 $\mathrm{Cat}^{\dagger}\to\mathrm{Cat}^{\mathrm{O}(1)\text{-vol}}$ 的右伴随。

3 相对$\mathrm{O}(1)$-对合范畴

本节我们引入相对 O(1)-volutive 范畴。在建立其部分一般理论之后，我们将给出这些新结构的若干好例子，并给出一个特殊情形——即弱 O(1)-对合范畴——的若干等价表述。

3.1 相对$\mathrm{O}(1)$-volutive 范畴

本节我们引入相对 O(1)-volutive 范畴的概念。回顾例2.2.2中描述的2-反变 O(1)-volutive 2-范畴(Cat,(–)^{op},id,id)。下文中，我们常常只写Cat $\equiv$ (Cat,(–)^{op},id,id)，而将2-反变 O(1)-对合结构留作隐含。

定义3.1.1。 一个相对 O(1)-*volutive* 范畴 由一个2-反变 O(1)-volutive 2-范畴 $\mathcal{B}$ 和一个2-反变 O(1)-volutive 函子 F: $\mathcal{B}\to$ Cat组成。

例 3.1.2。 这个典范的 相对 O(1)-volutive 范畴由恒等2-反变O(1)-volutive函子 id: Cat $\to$ Cat 组成。

例 3.1.3。 一个 O(1)-对合范畴 $(\mathcal{C},\ d,\ \eta)$ 等同于一个定义域为终 2-范畴 $\star$ 的相对 O(1)-volutive 范畴。

记 Grpd 为由群胚、函子和自然同构构成的 (2,1)-范畴。

例 3.1.4. 设 $\mathcal{B}$ 是一个 (2,1)-范畴，且 F: $\mathcal{B}\to$ Grpd 是一个函子。根据注 2.2.5， $\mathcal{B}$ 和 Grpd 带有典范的 2-逆变 O(1)-反 involution 范畴结构，据此 F 具有一个 2-逆变 O(1)-对合结构。回想一下，包含 Grpd $\to$ Cat 也具有一个 2-逆变 O(1)-对合结构，因此我们得到一个相对 O(1)-volutive 范畴 $\mathcal{B}\to$ Grpd $\to$Cat。

构造 3.1.5. 给定一个范畴 $\mathcal{C}$，我们可以构造一个 2-范畴 $\mathcal{C}[1]$，它有两个对象 0 和 1，且仅有一个非平凡的 Hom-范畴，即 $\mathrm{Hom}^{\mathcal{C}[1]}(0,1) := \mathcal{C}$。如果范畴 $\mathcal{C}$ 配备了一个 O(1)-对合结构 (d, η)，那么 2-范畴 $\mathcal{C}[1]$ 便具有一个 2-逆变 O(1)-对合结构：$\mathcal{C}^{\mathrm{op}} = {}_{\mathcal{C}[1]}\langle 0,1\rangle^{\mathrm{op}}{}_{2}$，$d[1]\colon \mathcal{C}[1] \to \mathcal{C}[1]^2$，$\eta[1] \to d^2 \circ d$，$\mathcal{C}[1}\langle 0,1\rangle = \mathcal{C} \to$-函子：$_{\mathrm{op}}$在对象上是恒等映射，在 Hom-范畴上则为 : Hom ( ) Hom ( )。变换 : id $_{\mathrm{op}}$具有恒等的 -态射分量，其 2-态射分量则是 η^{-1} 的分量。由于 η 的相干条件，2-修正可以取为平凡的。因此，$(\mathcal{C}[1], d[1], \eta[1], \mathrm{id})$ 定义了一个 2-逆变 O(1)-对合范畴。

注记 3.1.6. 术语 $\mathcal{C}[1]$ 的动机来自游走箭头的记号 $[1] := \{0 \to 1\}$。特别地，我们有 $\star[1] \cong [1]$，其中 $\star$ 表示仅含单个对象的终对象范畴。另一方面，我们注意到 $\emptyset[1] \cong \{0,1\}$ 是两个对象上的离散（2-）范畴，其中 $\emptyset$ 表示不含对象的始对象范畴。构造 3.1.5 为我们提供了一大类 2-反变 O(1)-对合 2-范畴的例子，据此我们可以考虑相对 O(1)-volutive 范畴。

为方便读者，我们在下文中详细写出相对 O(1)-volutive 范畴的部分数据。

注记 3.1.7. 设 $(\mathcal{B}, F)$ 为一个相对 O(1)-volutive 范畴。首先，函子 $F\colon \mathcal{B} \to \mathrm{Cat}$ 将每个对象 $a \in \mathcal{B}$ 对应到一个范畴 $\mathcal{C}_a$，将每个 1-态射 $X\colon a \to b$ 对应到一个函子 $F(X)\colon C_a \to C_b$，并将每个 2-态射 $f\colon X \to Y$ 对应到一个自然变换 $F(f)\colon F(X) \to F(Y)$。其次，2-反变 O(1)-对合结构的第一项数据是一个可逆 2-变换$\alpha\colon F^{2\,\mathrm{op}} \circ d \cong (-)^{1\,\mathrm{op}} \circ F$，其在 $a \in \mathcal{B}$ 处的 1-态射分量由范畴等价 $\alpha_a\colon C_{d(a)} \cong C_a^{\mathrm{op}}$ 给出。第三，2-反变 O(1)-对合结构的第二项数据是一个可嵌入如下图表的可逆修正

$$\begin{array}{ccc} ((-)^{1\,\mathrm{op}})^{2\,\mathrm{op}} \circ F^{2\,\mathrm{op}} \circ d & \xrightarrow{\mathrm{id}\circ\alpha} & ((-)^{1\,\mathrm{op}})^{2\,\mathrm{op}} \circ (-)^{1\,\mathrm{op}} \circ F \\ \downarrow{\scriptstyle (\alpha^{2\,\mathrm{op}})^{-1}\circ\mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} \\ F \circ d^{2\,\mathrm{op}} \circ d & \xrightarrow{\mathrm{id}\circ\eta^{-1}} & F \end{array} \tag{3.1}$$

其在 $a \in \mathcal{B}$ 处的分量由一个符合该图表的自然同构给出

$$\begin{array}{ccc} C_a & \xrightarrow{\alpha_a^{\mathrm{op}}} & C_{d(a)}^{\mathrm{op}} \\ & \searrow^{\mathrm{id}} & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{d(a)}} \\ & & C_{d^2(a)} \\ & & \downarrow{\scriptstyle F(\eta_a^{-1})} \\ & & C_a \end{array} \tag{3.2}$$

而该同构本身满足相干条件。

注 3.1.8. 我们可以将相对 O(1)-volutive 范畴视为切片 3-范畴 2 $\mathrm{Cat}^{\mathrm{O}(1)_2\text{-vol}/\mathrm{Cat}}$ 中的对象。这里的下标 2 指的是我们考虑 2-反变 O(1)-对合 2-范畴这一事实（下文将省略这一点）。接下来，我们希望更明确地描述 3-范畴 2 $\mathrm{Cat}^{\mathrm{O}(1)_2\text{-vol}/\mathrm{Cat}}$ 中的（高阶）态射。首先，相对 O(1)-对合范畴 $(\mathcal{B}, F)$ 和 $(\mathcal{B}', F')$ 之间的一个函子 由一个 O(1)-对合 2-函子 $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ 以及一个可逆 O(1)-对合 2-变换 $\alpha\colon F \to F' \circ G$ 构成。其次，相对 O(1)-对合函子 (G_1, α_1) 和 (G_2, α_2) 之间的一个变换 由一个 O(1)-对合 2-变换 $\beta\colon G_1 \to G_2$ 以及

一个可逆 O(1)-对合修正 ξ 构成，并满足与 α_1, α_2之间显然的相容条件。最后，相对 O(1)-对合变换 (β^a, ξ^a) 和 (β^b, ξ^b) 之间的一个修正 由一个 O(1)- 对合修正 ω: $\beta^a \to \beta^b$ 构成，并满足与 ξ^a, ξ^b 相容的条件。

注记 3.1.9。 如果我们希望考虑具有固定定义域 $\mathcal{B}$的相对 O(1)-volutive 范畴，也可以考虑 2-范畴 $\mathrm{Hom}_{2\,\mathrm{Cat}^{\mathrm{O}(1)_2\text{-vol}}}(\mathcal{B},\ \mathrm{Cat})$。

3.2 弱 $\mathrm{O}(1)$-对合范畴

本节将介绍弱 O(1)-对合范畴，并证明每个闭对称幺半范畴都具有弱 O(1)-对合结构。

定义 3.2.1。 范畴 $\mathcal{C}$ 上的一个弱 O(1)-对合结构 由一个函子 $d\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$和一个自然变换 $\eta\colon \mathrm{id} \to d^2$ 组成，并满足 $d(\eta_a) \circ \eta_{d(a)} = \mathrm{id}_{d(a)}$，对所有 $a \in \mathcal{C}$均成立。带有弱 O(1)-对合结构 $(d,\ \eta)$ 的范畴 $\mathcal{C}$称为弱 O(1)-对合范畴。

注记 3.2.2。 弱 O(1)-对合范畴此前已出现在厄米代数 K 理论文献中，其名称为带对偶的范畴，例如参见 [Sch10，定义 3.1]。然而，在接下来的讨论中采用这一术语会相当令人困惑。

注记 3.2.3。 弱 O(1)-对合范畴<strong style id='3'>并非相对于 O(1) 在 (2,1)-范畴 $\mathrm{Cat}^{(2,1)}$ 上的典范非平凡O(1)-作用的弱同伦不动点。后者就是 O(1)-对合范畴，因为自然变换 η 的可逆性会自动推出d的可逆性。

注记 3.2.4。 设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴，且 (d, η) 是 $\mathcal{C}$上的一个弱 O(1)-对合结构。设 k 是一个非负整数。我们得到一个新的弱 O(1)-对合结构，其函子为 $d_k := (d \circ d^{\mathrm{op}})^k \circ d$，其自然变换为

$$\overline{\eta}_k := \eta^{k+1}\colon \mathrm{id} \to (d \circ d^{\mathrm{op}})^{2k+2} \cong (d^{\mathrm{op}} \circ d)^k \circ d^{\mathrm{op}} \circ (d \circ d^{\mathrm{op}})^k \circ d = \overline{d}_k^{\mathrm{op}} \circ \overline{d}_k \tag{3.3}$$

由于 η 满足相干条件，因此该结构满足弱 O(1)-对合结构的相干条件。若假设 (d, η) 是一个 O(1)-对合结构，则 (d_k, η_k) 也是一个 O(1)-对合结构，且与 (d, η) 等价。

例 3.2.5。 令 Ban 表示由巴拿赫空间及连续/有界线性映射构成的范畴。我们在 Ban 上构造一个弱 O(1)-对合结构。首先，定义一个函子 $(-)^*\colon \mathrm{Ban} \to \mathrm{Ban}^{\mathrm{op}}$，将每个巴拿赫空间 V映射到其对偶 $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ban}}(V,\ \mathbb{C})$，并将每个连续线性映射 $f\colon V \to W$映射到其转置 $f^*\colon W^* \to V^*,\ \phi \mapsto \phi \circ f$。其次，定义一个自然变换 $\iota\colon \mathrm{id} \to (-)^{**}$，其在 $V \in \mathrm{Ban}$ 处的分量由连续线性映射 $\iota_V\colon V \to V^{**}$, $\iota_V(v)(\phi) = \phi(v)$ 给出。要证明 ι 确实是一个自然变换，只需注意到

$$((\iota_W \circ f)(v))(\phi) = \iota_W(f(v))(\phi) = \phi(f(w)) = f^*(\phi)(v) = ((f^{**} \circ \iota_V)(v))(\phi). \tag{3.4}$$

最后，我们验证 $\iota_V^* \circ \iota_{V^*} = \mathrm{id}_{V^*}$。事实上，我们有

$$((\iota_V^* \circ \iota_{V^*})(\phi))(v) = (\iota_V^*(\iota_{V^*}(\phi)))(v) = \iota_{V^*}(\phi)(\iota_V(v)) = \iota_V(v)(\phi) = \phi(v) \tag{3.5}$$

从而 $\iota_V^* \circ \iota_{V^*} = \mathrm{id}_{V^*}$ 成立。因此，Ban 支持弱 O(1)-对合结构。

例 3.2.6. 任何 O(1)-对合范畴都是松弛 O(1)-对合范畴。

反过来，我们有如下结论。

构造 3.2.7. 任意松弛 O(1)-对合范畴 $(\mathcal{C},\ d,\ \eta)$ 都会导出一个 O(1)-对合范畴 $\hat{}$，其描述如下：底层范畴是全子范畴 $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}$，其对象$a$ 是满足 $\eta\colon a \to d^2(a)$ 为同构的那些对象；而 O(1)-对合结构则由 $(d,\ \eta)$ 在 C 上的 $\hat{}$ 限制给出。

例 3.2.8. 例 2.1.2 中讨论的自反巴拿赫空间范畴，通过构造 3.2.7，继承了例 3.2.5 中讨论的松弛 O(1)-对合范畴 Ban 的 O(1)-对合结构。

定义 3.2.9。设 $\mathcal{C}$ 是一个幺半范畴。当且仅当对于每一对对象 $a, b \in \mathcal{C}$，都存在另一个对象 b^a 以及一个映射 $\mathsf{ev}_a^b\colon\ b^a \otimes a \to b$，满足以下泛性质时，我们称 $\mathcal{C}$ 为**右闭**：对于任意 $c \in \mathcal{C}$，诱导映射 $\psi\colon \hom_{\mathcal{C}}(c, b^a) \to \hom_{\mathcal{C}}(c \otimes a, b)$ 是关于 b 和 c 自然的双射。换言之，构造 $b \mapsto b^a$ 确定了函子 $c \mapsto c \otimes a$ 的一个右伴随，对每个 $a \in \mathcal{C}$ 都成立。
类似地，如果函子 $a \otimes (-)\colon\ \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 对每个 $a \in \mathcal{C}$ 都有一个右伴随，我们就称幺半范畴 $\mathcal{C}$ 为**左闭**。对于对称/辫状幺半范畴，右闭等价于左闭，因此在这种情况下，我们只称范畴为**闭**。

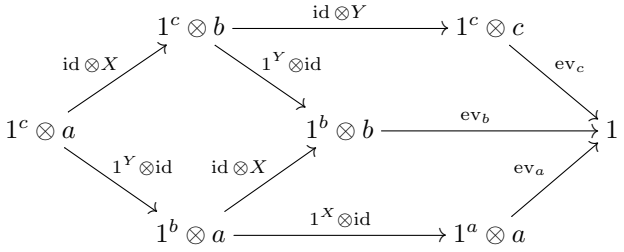
构造 3.2.10. 设 $\mathcal{C}$ 是定义 3.2.9 意义下的右闭幺半范畴。下文中，我们将用记号 $\mathsf{ev}_a := \mathsf{ev}_a^1$ 表示 $a \in \mathcal{C}$，并用 $\mathbf{1}$ 表示幺半单位。我们断言，构造 $a \mapsto 1^a$ 可扩展为函子 $1^{(-)}\colon\ \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$。事实上，对于态射 $X\colon\ a \to b$，令

$$1^X := \psi^{-1}\left(\ 1^b \otimes a \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes X} 1^b \otimes b \xrightarrow{\mathrm{ev}_b} 1\ \right) \in \hom_{\mathcal{C}}(1^b, 1^a) \tag{3.6}$$

并首先注意到 $1^{\mathrm{id}_a} = \psi^{-1}(\mathsf{ev}_a) = \mathsf{id}_{1^a}$。利用 ψ 的自然性，我们得到

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_a \circ (1^X \otimes \mathrm{id}_a) &= \psi(\mathrm{id}_{1^a}) \circ (1^X \otimes \mathrm{id}_a) \\ &= \psi(\mathrm{id}_{1^a} \circ 1^X) \\ &= \psi(1^X) \\ &= \psi\psi^{-1}(\mathrm{ev}_b \circ (\mathrm{id}_{1^b} \otimes X)) \\ &= \mathrm{ev}_b \circ (\mathrm{id}_{1^b} \otimes X), \end{aligned} \tag{3.7}$$

这表明图表可交换



(3.8)

对于 $X\colon\ a \to b$ 和 $Y\colon\ b \to c$，它们是 $\mathcal{C}$ 中的态射，因而满足函子性。
现在进一步假设 $\mathcal{C}$ 是一个（右）闭编织幺半范畴。对于每个 $a \in \mathcal{C}$，我们得到一个典范映射 $\eta_a\colon\ a \mapsto 1^{1^a}$，定义如下

$$\eta_a := \psi^{-1}\left(\ a \otimes 1^a \xrightarrow{\beta_{a,1^a}} 1^a \otimes a \xrightarrow{\mathrm{ev}_a} 1\ \right). \tag{3.9}$$

我们断言 $\eta\colon \mathrm{id} \to 1^{1^{(-)}}$ 是一个自然变换。事实上，我们有

$$\begin{aligned} 1^{1^X} \circ \eta_a &= \psi^{-1}(\mathrm{ev}_{1^a} \circ (\mathrm{id} \otimes 1^X)) \circ \eta_a \\ &= \psi^{-1}(\mathrm{ev}_{1^a} \circ (\mathrm{id} \otimes 1^X) \circ (\eta_a \otimes \mathrm{id})) \\ &= \psi^{-1}(\mathrm{ev}_{1^a} \circ (\eta_a \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes 1^X)) \\ &= \psi^{-1}(\mathrm{ev}_a \circ \beta \circ (\mathrm{id} \otimes 1^X)) \\ &= \psi^{-1}(\mathrm{ev}_a \circ (1^X \otimes \mathrm{id}) \circ \beta) \\ &= \psi^{-1}(\mathrm{ev}_a \circ (\mathrm{id} \otimes X) \circ \beta) \\ &= \psi^{-1}(\mathrm{ev}_a \circ \beta \circ (X \otimes \mathrm{id})) \\ &= \psi^{-1}(\mathrm{ev}_a \circ \beta) \circ X = \eta_b \circ X. \end{aligned} \tag{3.10}$$

现在进一步假设 $\mathcal{C}$ 是一个闭对称幺半范畴。我们声称，对每个 $a \in \mathcal{C}$，$1^{\eta_a} \circ \eta_{1^a} = \mathrm{id}_{1^a}$ 都成立。事实上，我们有

$$\begin{aligned} 1^{\eta_a} \circ \eta_{1^a} &= \psi^{-1}(\mathrm{ev}_{1^{1^a}} \circ (\mathrm{id} \otimes \eta_a)) \circ \eta_{1^a} \\ &= \psi^{-1}(\mathrm{ev}_{1^{1^a}} \circ (\mathrm{id} \otimes \eta_a) \circ (\eta_{1^a} \otimes \mathrm{id})) \\ &= \psi^{-1}(\mathrm{ev}_{1^{1^a}} \circ (\eta_{1^a} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \eta_a)) \\ &= \psi^{-1}(\mathrm{ev}_{1^a} \circ \beta \circ (\mathrm{id} \otimes \eta_a)) \\ &= \psi^{-1}(\mathrm{ev}_{1^a} \circ (\eta_a \otimes \mathrm{id}) \circ \beta) \\ &= \psi^{-1}(\mathrm{ev}_a \circ \beta \circ \beta) \\ &= \psi^{-1}(\mathrm{ev}_a) = \mathrm{id}_{1^a}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

因此，每个闭对称幺半范畴都存在一个函子范畴 $1^{(-)}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 以及一个自然变换 $\eta\colon \mathrm{id} \to 1^{1^{(-)}}$，使得对每个 $a \in \mathcal{C}$ 都满足 $1^{\eta_a} \circ \eta_{1^a} = \mathrm{id}_{1^a}$。

我们将所得结果记录如下。

定理 3.2.11. 根据定义 *3.2.1* 的含义，每个闭对称幺半范畴都具有一个弱 $\mathrm{O}(1)$-对合结构。

注记 3.2.12. 更一般地，闭对称幺半范畴上的任意对称幺半对合都会导出一个弱 O(1)-对合结构；定理 3.2.11 则是恒等对合这一特殊情形。

注记 3.2.13. 我们已在注记 3.2.3 中说明，弱 O(1)-对合范畴并非弱同伦不动点。相反，这一术语的动机来自如下观察：函子$1^{(-)}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}_{\otimes^{\mathrm{op}}}$是 oplax 幺半的。这里，$\otimes^{\mathrm{op}}$ 指的是对偶幺半结构，即 $a \otimes^{\mathrm{op}} b := b \otimes a$。为看出这一断言，我们为我们的函子构造 oplax[1] 幺半性数据，这相当于对每个 a, b 与 $1 \to 1^1$，在 $\mathcal{C}$ 中给出态射 $\phi_{a,b}\colon 1^a \otimes^{\mathrm{op}} 1^b \to 1^{a \otimes b}$。前者由如下态射的原像给出

$$1^a \otimes^{\mathrm{op}} 1^b \otimes (a \otimes b) = 1^b \otimes 1^a \otimes (a \otimes b) \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \mathrm{ev}_a \otimes \mathrm{id}} 1^b \otimes b \xrightarrow{\mathrm{ev}_b} 1 \tag{3.12}$$

在双射 $\hom_{\mathcal{C}}(1^a \otimes^{\mathrm{op}} 1^b, 1^{a \otimes b}) \cong \hom_{\mathcal{C}}((1^a \otimes^{\mathrm{op}} 1^b) \otimes (a \otimes b), 1)$ 之下，而后者作为原像 $\hom_{\mathcal{C}}(1, 1^1) \cong \hom_{\mathcal{C}}(1 \otimes 1, 1) \cong \hom_{\mathcal{C}}(1, 1)$ 给出。该数据的自然性由定义双射 $\hom_{\mathcal{C}}(c, b^a) \to \hom_{\mathcal{C}}(c \otimes a, b)$ 的自然性推出。

[1]虽然我们在此提供的数据类似于弱幺半性数据，但请记住，我们的函子的目标是 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$，因此这些数据的方向相反。

例 3.2.14. （完备）bornological 向量空间范畴是闭对称幺半范畴，因此具有弱 O(1)-对合结构。它包含巴拿赫空间的松弛 O(1)-对合范畴，且后者是其全子范畴。我们将在第 7.1 节进一步讨论此例。

例 3.2.15. 设 R 是一个 $*$-环。则右 R-模范畴 Mod_R 具有弱 O(1)-对合结构。我们将在第 7.2 节更详细地讨论此例。

例 3.2.16. 设 R 是一个交换环。则 R-模的无界链复形范畴 Ch(R)是一个闭对称幺半（模型）范畴，参见例如 [Hov99，命题 4.2.13], ，因而具有弱 O(1)-对合结构。更确切地说，Ch(R)上的幺半积由 $(X \otimes Y)_n = \bigoplus_n (X_k \otimes_R Y_{n-k})$给出，幺半单位 1 是 R，将其解释为集中在次数 0 的链复形，并且我们有一个链复形 Y^X，其分量为

$$(Y^X)_n \equiv \mathrm{Hom}(X,Y)_n = \Pi_k \hom_R(X_k, Y_{n+k}) = \hom_{\mathrm{Ch}(R)}(X, Y[n]) \tag{3.13}$$

以及分别由 X 和 Y诱导的微分。特别地，我们有

$$(1^X)_n \equiv \mathrm{Hom}(X,1)_n = \Pi_k \hom_R(X_k, 1_{n+k}) = \hom_R(X_n, R) \tag{3.14}$$

and

$$(1^{1^X})_n = \mathrm{Hom}(1^X, 1)_n = \hom_R((1^X)_n, R) = \hom_R(\hom_R(X_n, R), R) \tag{3.15}$$

带有一个链复形映射 $X \to (1^{1^X})$，其在次数 n 中由下式给出

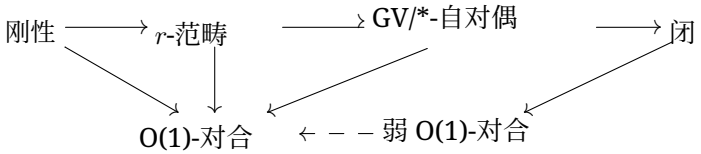
$$X_n \to \hom_R(\hom_R(X_n, R), R), a \mapsto \mathrm{Ev}_a \qquad \text{where} \qquad \mathrm{Ev}_a(f) = f(a) \tag{3.16}$$

省略相应的微分。特别地，在包含 R-模 $\to$ Ch(R) 下，该包含将每个 R-模 X 送到集中在零次、取值为 X 的链复形，这就重现了命题 7.2.11 的弱 O(1)-对合结构。此外，注意到 $(1^{1^X})_n = (1^{1^{X_n}})$，应用构造 3.2.7 可得 O(1)-对合范畴 $\frown$Ch(R) $\subseteq$ Ch(R)，它由逐次均为自反模的链复形构成。

注 3.2.17。 对于（对称）幺半范畴，存在介于刚性与闭性之间的对偶概念；接下来我们将回顾其中两种，并将其置于（弱）O(1)-对合的背景下。对称 *Grothendieck-Verdier*（*GV*）范畴 或对称 $*$-自对偶范畴 是一个闭对称幺半范畴 $\mathcal{C}$，并带有一个对偶化对象，也就是说，存在一个对象 $\mathfrak{d}$，使得对所有 $a \in \mathcal{C}$，典范态射 $a \to \mathfrak{d}^{\mathfrak{d}^a}$ 都是同构。将构造 3.2.10 中的幺半单位替换为对偶化对象 $\mathfrak{d}$ 后重复该构造，可在 $\mathcal{C}$ 上得到一个 O(1)-对合结构。
在对偶化对象 $\mathfrak{d} = 1_{\mathcal{C}}$ 是幺半单位的特殊情形下，$\mathcal{C}$ 称为 r-范畴。

注 3.2.18. 我们在下方的交换图中，对从具有某种对偶性的对称幺半范畴构造（宽松）O(1)-对合范畴的方法作非正式总结。

$$\begin{tikzcd}
\text{刚性} \arrow[r] \arrow[dr] & r\text{-范畴} \arrow[r] \arrow[d] & \text{GV/*-自对偶} \arrow[r] \arrow[dl] & \text{闭} \arrow[dl] \\
& \text{O(1)-对合} & \text{弱 O(1)-对合} \arrow[l, dashed] &
\end{tikzcd} \tag{3.17}$$



这里，实线箭头保持底层范畴不变，而虚线箭头通常会改变它们。

在本节的剩余部分，我们建立弱 O(1)-对合范畴的一些一般理论。

构造 3.2.19. 设 $(\mathcal{C},d,\eta)$ 与 $(\mathcal{C}',d',\eta')$ 为弱 O(1)-对合范畴。我们在函子范畴 $\mathcal{E}:=$ 函子范畴$(\mathcal{C},\mathcal{C}')$ 上构造一个弱˜O(1)-对合结构。首先，通过如下设定定义一个函子 $\tilde{d}\colon \mathcal{E}\to\mathcal{E}^{\mathrm{op}}$

$$\begin{cases}\tilde{d}(F)=(d')^{\mathrm{op}}\circ F^{\mathrm{op}}\circ d\\ \tilde{d}(\alpha\colon F\to G)=\mathrm{id}_{(d')^{\mathrm{op}}}\circ\alpha^{\mathrm{op}}\circ\mathrm{id}_d\colon \tilde{d}(G)\to\tilde{d}(F).\end{cases}\tag{3.18}$$

接下来，我们将自然变换 $\tilde{\eta}$ 在 $F\in\mathcal{E}$ 处的分量定义为

$$F\cong \mathrm{id}_{\mathcal{D}}\circ F\circ\mathrm{id}_{\mathcal{C}}\xrightarrow{\eta'\circ\mathrm{id}_F\circ\eta}(d'^{\mathrm{op}}\circ d')\circ F\circ(d^{\mathrm{op}}\circ d)=(\tilde{d}^{\mathrm{op}}\circ\tilde{d})(F)\tag{3.19}$$

˜可以验证，它满足相干条件，因此 $(d,\tilde{\eta})$ 在 $\mathcal{E}$ 上定义了一个弱 O(1)-对合结构。

构造 3.2.20。 设 $(\mathcal{C},d,\eta)$ 和 $(\mathcal{C}',d',\eta')$ 为弱 O(1)-对合范畴。考虑构造 3.2.19 中所述的弱˜O(1)-对合范畴 (Fun$(\mathcal{C},\mathcal{C}')$ $d,\tilde{\eta}$)。我们将 $(\mathcal{C},d,\eta)$ 与 $(\mathcal{C}',d',\eta')$ 之间的˜弱 O(1)-对合函子 范畴定义为 LaxHerm(Fun$(\mathcal{C},\mathcal{C}')$ $d,\tilde{\eta}$)，见定义 5.1.16。我们将此范畴的态射称为弱 O(1)-对合变换。

注记 3.2.21. 下面我们希望更明确地描述弱 O(1)-对合范畴的函子与变换。一个弱 O(1)-对合函子 $(\mathcal{C},d,\eta)\to(\mathcal{C}',d',\eta')$ 是一个对 (F,α)，由函子 $F\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}'$ 与自然变换 $\alpha\colon d'\circ F\to F\mathrm{op}\circ d$ 组成，并满足 $(\alpha^{\mathrm{op}}\circ\mathrm{id}_d)(\mathrm{id}_F\circ\eta)=(\mathrm{id}_{d^{\mathrm{op}}}\circ\alpha)(\eta'\circ\mathrm{id}_F)$。给定两个这样的松 O(1)-对合函子 (F_1,α_1) 与 (F_2,α_2)，一个松弛 O(1)-反演自然变换 $(F_1,\alpha_1)\to(F_2,\alpha_2)$ 是一个自然变换$\xi\colon F_1\to F_2$，满足 $(\xi^{\mathrm{op}}\circ\mathrm{id}_d)\alpha_2(\mathrm{id}_{d'}\xi)=\alpha_1$。

定义 3.2.22。 我们用 $\mathrm{Cat}^{\mathrm{lax\,O(1)\text{-}vol}}$ 表示由弱 O(1)-对合范畴、弱 O(1)-对合函子和松弛 O(1)-反演自然变换构成的 2-范畴。

定义 3.2.23。 设 $(\mathcal{C},d,\eta)$ 和 $(\mathcal{C}',d',\eta')$ 是弱 O(1)-对合范畴。它们的（笛卡尔）积 是弱 O(1)-对合范畴

$$(\mathcal{C},d,\eta)\times(\mathcal{C}',d',\eta'):=(\mathcal{C}\times\mathcal{C}',d\times d',\eta\times\eta').\tag{3.20}$$

笛卡尔积赋予 $\mathrm{Cat}^{\mathrm{lax\,O(1)\text{-}vol}}$ 一个对称幺半结构。

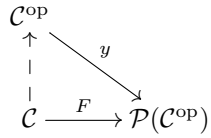
注 3.2.24。 设 $(\mathcal{C},d,\eta)$ 和 $(\mathcal{C}',d',\eta')$ 是弱 O(1)-对合范畴，并设 $(F,\alpha)\colon(\mathcal{C},d,\eta)\to(\mathcal{C}',d',\eta')$ 是一个弱 O(1)-对合函子。我们在构造 3.2.7 中描述了一种过程，它以一个弱 O(1)-对合范畴为输入，并生成一个 O(1)-对合范畴。该过程与弱 O(1)-对合函子不 相容，也就是说，(F,α) 不会下降为关联的 O(1)-对合范畴之间的（O(1)-对合）函子。如果 α 是自然同构，情况会更好；也就是说，(F,α) 实际上是弱 O(1)-对合范畴之间的一个 O(1)-对合函子。

3.3 弱$\mathrm{O}(1)$-对合结构是相对的

本节将介绍弱 O(1)-对合范畴这一概念的若干种等价表述；特别是，我们将证明，弱 O(1)-对合范畴是特殊的相对 O(1)-对合范畴。我们从一种基本上已在 [HLS16]中讨论过的观点出发。

注 3.3.1. 设 $F\colon \mathcal{C}\times\mathcal{C}\to$ 集合范畴是一个函子，我们也可以将其称为 $\mathcal{C}$上的配对。配对 F在通常的 Hom-张量伴随下诱导出一个函子 $F\colon \mathcal{C}\to$ 函子范畴$(\mathcal{C},$集合范畴$)$。等价地，这可以理解为一个函子 $F\colon \mathcal{C}\to\mathcal{P}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$，其值落在 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$上的预层范畴中。后者

具有 Yoneda嵌入 $y\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{P}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$，因此我们可以询问图表中是否存在一个提升



(3.21)

以及这一提升是否为范畴等价。

定义 3.3.2。 在注 3.3.1 的情形下，如果图表中存在一个提升，我们就称 F 是可表[2] 的。如果 F 是可表的，且该提升是范畴等价，我们就称其为完美的 或非退化的 。如果对于 Cat 上的对称编织， F 满足 $F \circ \beta_{\mathcal{C},\ \mathcal{C}} \cong F$，我们就称 F 是对称的 $F \circ \beta_{\mathcal{C}}$。

引理 3.3.3。 定义 3.2.1 意义下的弱 O(1)-对合范畴，与定义 3.3.2 意义下的可表对称函子范畴相同。

证明。 设 $(\mathcal{C}, d, \eta)$ 是一个弱 O(1)-对合范畴。我们如下定义一个函子 $\Phi_d\colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to$ 集合范畴：给定一个对象 $(a, b) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$，我们定义

$$\Phi_d(a, b) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(d(a), b), \tag{3.22}$$

并给定一个态射 $(X, Y)\colon (a, b) \to (a', b')$，我们定义

$$\Phi_d(X, Y)\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(d(a), b) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(d(a'), b'), (f\colon d(a) \to b) \mapsto Y \circ f \circ d(X), \tag{3.23}$$

显然这是函子性的。函子 $\Phi_d\colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to$ 集合范畴是对称的，因为我们有一个双射

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(d(a), b) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(a, d^{\mathrm{op}}(b)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(d(b), a) \tag{3.24}$$

它关于 $(a, b) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ 是自然的，其中我们已将 $\mathcal{C} \cong (\mathcal{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}$ 视为相同对象。换言之，我们有一个自然同构 $\Phi_d \circ \beta \cong \Phi_d$，其中 β 表示 Cat 上的对称编织。根据构造，函子 Φ_d 是可表的。

反过来，设 $F\colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to$ 集合范畴是一个对称且可表的函子。我们将按如下方式在 $\mathcal{C}$ 上构造一个弱 O(1)-对合结构：首先，由于 F 是可表的，我们有一个函子 $d\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$，使其嵌入方程 (3.21) 的交换图中。根据定义，这相当于函子之间的一个等价

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(d(-), -) \cong F(-, -)\colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathrm{Set} \tag{3.25}$$

因此，由于 F 的对称性，我们得到一个自然双射

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(d(a), b) \cong F(a, b) \cong F(b, a) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(d(b), a) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(a, d^{\mathrm{op}}(b)) \tag{3.26}$$

对任意 $a,\ b \in \mathcal{C}$。换言之， d^{op} 是 d 的右伴随。该伴随为我们提供了一个自然变换 $\mathrm{id} \to d^{\mathrm{op}} \circ d$。具体而言，函子 d 诱导出一个映射

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}(d(a), d(b)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a, d^2(b)) \tag{3.27}$$

对任意 $a \in \mathcal{C}^{\mathrm{op}},\ b \in \mathcal{C}$，其中第二步用到了伴随。根据 Yoneda引理，这断言存在映射 $\eta_b\colon b \to d^2(b)$，它们汇集成一个自然变换 $\mathrm{id} \to d^{\mathrm{op}} \circ d$。可以验证，$(d,\ \eta)$ 确定了 $\mathcal{C}$ 上的一个弱 O(1)-对合结构。 □

我们在引理 3.3.3 的证明中已经看到，对于一个松弛 O(1)-对合范畴 $(\mathcal{C},\ d,\ \eta)$， d^{op} 是 d的右伴随。以下两种观点都围绕这一观察展开。我们先回顾如下内容。

[2]该术语的由来见 [Lur17，定义 5.2.1。8]。

定义 3.3.4. 我们定义一个 2-范畴 Adj，它有两个对象 a 和 b，其 1-态射由 1-态射 $X\colon a \to b$ 和 $Y\colon b \to a$自由生成，其 2-态射由 2-态射 $f\colon \mathrm{id}_a \to Y \circ X$和 $g\colon X \circ Y \to \mathrm{id}_b$自由生成，并满足条件 $(g \circ \mathrm{id}_X) \bullet (\mathrm{id}_X \circ f) = \mathrm{id}_X$和 $(\mathrm{id}_Y \circ g) \bullet (f \circ \mathrm{id}_Y) = \mathrm{id}_Y$。我们称 2-范畴 Adj 为游走伴随。

注记 3.3.5。 2-范畴中的一个伴随等同于一个 2-函子 $\mathcal{B}\,\mathbf{Adj} \to \mathcal{B}$；从这个意义上说，Adj 对所有可能的伴随进行分类。

引理 3.3.6。 游走伴随 Adj 具有一个 2-反变 O(1)-对合结构。

证明。 该 2-反变 O(1)-对合结构由严格对合 2-函子 $F\colon \mathbf{Adj} \to \mathbf{Adj}^{2\,\mathrm{op}}$ 给出，该函子由以下赋值确定

$$\begin{aligned}
&F(a) = b\\
&F(b) = a\\
&(F(X)\colon F(a) \to F(b)) = Y\colon b \to a\\
&(F(Y)\colon F(b) \to F(a)) = X\colon a \to b\\
&(F(f)\colon F(YX) = F(Y) \circ F(X) \to F(\mathrm{id}_a)) = g\colon X \circ Y \to \mathrm{id}_b\\
&(F(g)\colon F(\mathrm{id}_b) \to F(XY) = F(X) \circ F(Y)) = f\colon \mathrm{id}_a \to Y \circ X.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

□

在陈述下一个比较结果之前，我们考虑如下内容。

定义 3.3.7。 设 $\mathcal{B}$ 是一个带有 2-反变 O(1)-对合结构 (d, η, τ) 的 2-范畴。设 (c, Z, h) 是一个三元组，其中 $c \in \mathcal{B}$ 是一个对象，$Z\colon c \to d(c)$ 是一个 1-态射，并且 $h\colon \mathrm{id}_c \to \eta_c^{-1} \circ d(Z) \circ Z$ 是一个 2-态射，对于该 2-态射，复合

$$\begin{aligned}
Z &\xrightarrow{\mathrm{id} \circ h} Z\eta_c^{-1}d(Z)Z \xrightarrow{\eta_Z \circ \mathrm{id}} \eta_{d(c)}^{-1}d^2(Z)d(Z)Z \xrightarrow{\tau_c \circ \mathrm{id}} d(\eta_c^{-1})d^2(Z)d(Z)Z\\
&\xrightarrow[\cong]{} d(\eta_c^{-1}d(Z)Z)Z \xrightarrow[d(h) \circ \mathrm{id}]{} Z
\end{aligned} \tag{3.29}$$

与 Z 上的恒等 2-态射以及该复合重合

$$\begin{aligned}
\eta_c^{-1}d(Z) &\xrightarrow{h \circ \mathrm{id}} \eta_c^{-1}d(Z)Z\eta_c^{-1}d(Z) \xrightarrow{\mathrm{id} \circ \eta_Z \circ \mathrm{id}} \eta_c^{-1}d(Z)\eta_{d(c)}^{-1}d^2(Z)d(Z)\\
&\xrightarrow[\mathrm{id} \circ \tau_c \circ \mathrm{id}]{} \eta_c^{-1}d(Z)d(\eta_c^{-1})d^2(Z)d(Z) \xrightarrow[\mathrm{id} \circ d(h)]{} \eta_c^{-1}d(Z)
\end{aligned} \tag{3.30}$$

与 $\eta_c^{-1}d(Z)$上的恒等 2-态射重合。
我们将三元组(c, Z, h)称为 $\mathcal{B} \equiv (\mathcal{B}, d, \eta, \tau)$中的一个*volutive* 伴随 。

注 3.3.8. 在定义 3.3.7的情形中，假设函子 d 是严格对合的，且η与 τ是平凡的。在此情形下，我们可以将一个volutive 伴随描述为三元组(c, Z, h)，其中 $c \in \mathcal{B}$是一个对象，$Z\colon c \to d(c)$是 $\mathcal{B}$中的一个1-态射，且 $h\colon \mathrm{id}_c \to d(Z) \circ Z$ 是 $\mathcal{B}$ 中的一个 2- 态射，满足 $(d(h) \circ \mathrm{id}) \bullet (\mathrm{id} \circ h) = \mathrm{id}_Z$ 以及 $(\mathrm{id} \circ d(h)) \bullet (h \circ \mathrm{id}) = \mathrm{id}_{d(Z)}$。注意，第一个等式已经蕴含第二个等式，这通过对2-反变函子 d的应用即可得到。我们预期，对于一般的2-反变O(1)-对合结构(d, η, τ)，同样的结论成立；然而，下文中我们并不需要这一事实。

引理 3.3.9。 弱 O(1)-对合范畴与 2-反变 O(1)-volutive 2-范畴 $(\mathbf{Cat}, (-)^{\mathrm{op}}, \mathrm{id}, \mathrm{id})$ 中的 volutive 伴随相同。

证明。 根据注 3.3.8 展开 2-反变 O(1)-volutive 2-范畴 (Cat，$(-)^{\mathrm{op}}$，id，id)，恰好得到与弱 O(1)-对合范畴相同的数据。 □

引理 3.3.10. 设 $(\mathcal{B}, d, \eta, \tau)$ 是一个 2-反变 O(1)-对合 2-范畴。那么，$(\mathcal{B}, d, \eta, \tau)$ 中的 volutive 伴随与 2-反变 O(1)-对合 2-函子 $\mathrm{Adj} \to \mathcal{B}$ 相同。

证明。设 (c, Z, h) 是 $(\mathcal{B}, d, \eta, \tau)$ 中的一个 volutive 伴随。我们通过如下定义函子 $G\colon \mathrm{Adj} \to \mathcal{B}$来定义$G(a) = c, G(b) = d(c)$ $G(X) = Z, G(Y) = \eta_c^{-1} \circ d(Z)$ $G(f) = h, G(g) = d(h)$ $\bullet(\tau_c \circ \mathrm{id})$ $\bullet(\eta_Z \circ \mathrm{id})$。我们需要验证佐罗变换成立。第一个佐罗变换由等式 (3.29) 保证，第二个佐罗变换由等式 (3.30) 保证。接下来，我们需要在 G 上构造一个 2-反变 O(1)-对合结构 (ω, Ξ)。我们定义一个可逆 2-变换 $\omega\colon G^{2\,\mathrm{op}} \circ F \to d \circ G$如下。它在 $a \in \mathrm{Adj}$ 处的 1-态射分量由 $GF(a) = G(b) = d(c) = d(G(a))$ 上的恒等 1-态射给出，而它在 $b \in \mathrm{Adj}$ 处的 1-态射分量由

$$GF(b) = G(a) = c \xrightarrow{\eta_c} d^2(c) = dG(b) \tag{3.31}$$

它在 X 处的 2-态射分量： $a \to b$ 在 Adj 中由填充该图表的恒等 2-态射给出

$$\begin{array}{ccccccc}
GF(a) & \xrightarrow{=} & G(b) & \xrightarrow{=} & d(c) & \xrightarrow{=} & dG(a) \\
{\scriptstyle GF(X)}\downarrow & & {\scriptstyle G(Y)}\downarrow & & {\scriptstyle \eta_c^{-1}\circ d(Z)}\downarrow & \searrow^{d(Z)} & \qquad\searrow^{dG(X)} \\
GF(b) & \xrightarrow[=]{} & G(a) & \xrightarrow[=]{} & c & \xrightarrow[\eta_c]{} & d^2(c) \xrightarrow[=]{} dG(b)
\end{array} \tag{3.32}$$

它在 Y 处的 2-态射分量： $b \to a$ 在 Adj 中由下式给出

$$\begin{array}{ccccccccc}
GF(b) & \xrightarrow{=} & G(a) & \xrightarrow{=} & c & \xrightarrow{\eta_c} & d^2(c) & \xrightarrow{=} & dG(b) \\
{\scriptstyle GF(Y)}\downarrow & & {\scriptstyle G(X)}\downarrow & & {\scriptstyle Z}\downarrow & \swarrow_{\eta_Z} & \downarrow{\scriptstyle d(\eta_c^{-1}\circ d(Z))} & & \downarrow{\scriptstyle dG(Y)} \\
GF(a) & \xrightarrow[=]{} & G(b) & \xrightarrow[=]{} & d(c) & \xrightarrow[=]{} & d(c) & \xrightarrow[=]{} & dG(a)
\end{array} \tag{3.33}$$

可以验证，这定义了一个可逆 2-变换。接下来，我们定义可逆修正Ξ ，使其嵌入该图表

$$\begin{array}{ccccc}
ddG & \xrightarrow{\mathrm{id}\circ\omega^{-1}} & dGF & \xrightarrow{\omega^{-1}\circ\mathrm{id}} & GFF \\
& {\scriptstyle \eta\circ\mathrm{id}}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & \\
& & G & &
\end{array} \tag{3.34}$$

它在 $a \in$ 处 Adj 中的 2-态射分量由 η_c^{-1} 上的恒等 2-态射给出。它在 $b \in$处 Adj 中的 2-态射分量由填充下图给出

$$\begin{array}{ccccc}
ddG(b) & \xrightarrow{d(\omega_b^{-1})} & dGF(b) & \xrightarrow{\omega^{-1}_{F(b)}} & GFF(b) \\
\downarrow{=} & \swarrow_{\mathrm{id}} & \downarrow{=} & \swarrow_{\mathrm{id}} & \downarrow{=} \\
d^3(c) & \xrightarrow[d(\eta_c^{-1})]{} & d(c) & \xrightarrow{=} & d(c) \\
& {\scriptstyle \eta^{-1}_{d(c)}}\searrow & \Downarrow{\scriptstyle \tau_c^{-1}} & \swarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & \\
& & G(b) = d(c) & &
\end{array} \tag{3.35}$$

可以验证，三元组 (G, ω, Ξ) 定义了一个 2-反变 O(1)-volutive 函子

$$(G, \omega, \Xi)\colon (\mathrm{Adj}, F) \to (\mathcal{B}, d, \eta, \tau). \tag{3.36}$$

反之，设 (G,ω,Ξ): Adj $\to \mathcal{B}$ 为一个 2-反变 O(1)-volutive 函子。我们定义一个 volutive 伴随，其对象为 $c := G(a)$，其 1-态射 Z: $c \to d(c)$ 由复合给出

$$Z := \left(c = G(a) \xrightarrow{G(X)} G(b) = GF(a) \xrightarrow{\omega_a} dG(a) = d(c) \right), \tag{3.37}$$

其 2-态射 h: $\mathrm{id}_c \to \eta_c^{-1} \circ d(Z) \circ Z$ 由以下复合给出

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_c = \mathrm{id}_{G(a)} = G(\mathrm{id}_a) &\xrightarrow{G(f)} G(YX) = G(Y) \circ G(X) \xrightarrow{=} G(F(X)) \circ G(X) \\ &\xrightarrow[\omega_X \circ \mathrm{id}]{} \omega_b^{-1} dG(X) \omega_a \omega_a^{-1} Z \xrightarrow[=]{} \omega_b^{-1} dG(X) Z \\ &\xrightarrow[=]{} \omega_b^{-1} d(\omega_a^{-1} \omega_a G(X)) Z \xrightarrow[=]{} \omega_b^{-1} d(\omega_a^{-1}) d(\omega_a G(X)) Z \\ &\xrightarrow[=]{} \omega_b^{-1} d(\omega_a^{-1}) d(Z) Z \xrightarrow[\Xi_c \circ \mathrm{id}]{} \eta_c d(Z) Z \end{aligned} \tag{3.38}$$

容易验证，三元组 $(c,\ Z,\ h)$ 定义了一个 volutive 伴随。 □

推论 3.3.11. 弱 O(1)-对合范畴与 2-逆变 O(1)-对合 2-函子 Adj $\to$Cat 相同。

证明。 结合引理 3.3.10 和引理 3.3.9 即可。 □

综上，我们证明了以下结论。

定理 3.3.12. 以下四种概念等价：

(i) 定义 *3.2.1* 意义下的宽松 $\mathrm{O}(1)$-对合范畴，*(ii)* 定义 *3.3.2* 意义下的可表对称函子，*(iii)* 定义 *3.3.7* 意义下 Cat 中的 *volutive* 伴随，及 *(iv)* 2-反变 $\mathrm{O}(1)$-*volutive* 函子 $\mathrm{Adj} \to \mathrm{Cat}$。

我们将以下结果中的定义留给读者补全，该结果给出了 O(1)-对合范畴的若干等价表述。

推论 3.3.13. 以下四种概念等价：

(i) 定义 2.1.1 意义下的 O(1)-对合范畴，(ii) 定义 3.3.2 意义下的非退化对称函子，(iii) Cat 中的 volutive 伴随等价，(iv) 2-反变 O(1)-volutive 函子 AdjEqv $\to$Cat。

4 相对$\mathrm{SO}(2)$-对合 2-范畴

本节将介绍相对 SO(2)-对合 2-范畴和松弛 SO(2)-对合 2-范畴。我们首先回顾 3-范畴中 1-态射和 2-态射的伴随理论，特别指出带伴随的 2-范畴的 3-范畴具有 2-伴随。接着，我们定义 SO(2)-对合 2-范畴，并考察刚性对称幺半 2-范畴这一特殊情形，其中 SO(2)-对合结构由 Serre 同构给出。最后，我们引入松弛和相对 SO(2)-对合 2-范畴，并证明后一个概念推广了前一个概念。

4.1 2-范畴和 3-范畴中的伴随

定义 4.1.1。若对每个 1-态射 X，都存在另一个 1-态射 X^R，以及满足佐罗／蛇形／三角恒等式的 2-态射 $\mathrm{coev}_X\colon \mathrm{id} \to X^R \circ X$ 和 $\mathrm{ev}_X\colon X \circ X^R \to \mathrm{id}$，则称一个 2-范畴具有**右伴随**。左伴随的定义类似。若一个 2-范畴对所有 1-态射都具有（全部）右伴随和左伴随，则称它具有（全部）伴随。

引理 4.1.2。设 $\mathcal{B}$ 是一个具有右伴随的 2-范畴。赋值 $a \mapsto a, X \mapsto X^R$ 可扩展为一个 2-函子 $(-)^R\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}^{(1,2)\,\mathrm{op}}$。

证明。我们在 2-态射层面上定义函子 $(-)^R$，将 $f\colon X \to Y$ 映射为

$$Y^R \xrightarrow{\mathrm{coev}_X \circ \mathrm{id}} X^R \circ X \circ Y^R \xrightarrow{\mathrm{id} \circ f \circ \mathrm{id}} X^R \circ Y \circ Y^R \xrightarrow{\mathrm{id} \circ \mathrm{ev}_Y} X^R. \tag{4.1}$$

容易验证，这定义了一个 2-函子。 □

引理 4.1.3。设 $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ 是具有右伴随的 2-范畴，并设 $F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ 是一个函子。那么，存在一个可逆 2-变换

$$\xi_F\colon (-)^R_{\mathcal{B}'} \circ F \to F^{(1,2)\,\mathrm{op}} \circ (-)^R_{\mathcal{B}}. \tag{4.2}$$

再设 $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ 是另一个函子，并设 $\alpha\colon F \to G$ 是一个 2-变换。那么，存在一个修正 ξ_α，使其符合图表

$$\begin{array}{ccc} (-)^R_{\mathcal{B}'} \circ F & \xrightarrow{\xi_F} & F^{(1,2)\,\mathrm{op}} \circ (-)^R_{\mathcal{B}} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id} \circ \alpha} & \overset{\xi_\alpha}{\swarrow} & \uparrow{\scriptstyle \alpha^{(1,2)\,\mathrm{op}} \circ \mathrm{id}} \\ (-)^R_{\mathcal{B}'} \circ G & \xrightarrow[\xi_G]{} & G^{(1,2)\,\mathrm{op}} \circ (-)^R_{\mathcal{B}}. \end{array} \tag{4.3}$$

这些 2-修　　正 ξ_α 此外相对于复合与单位是自然且相容的。

证明。首先，我们构造 2-变换 ξ_F。回顾 $(-)^R$ 是对象上的恒等，我们可以将 ξ_F 的 1-态射分量取为恒等。ξ_F 在 $X\colon\ a \to b$ 处的 2-态射分量是（唯一的）同构 $F(X^R) \to F(X)^R$，它表达了 $F(X^R)$ 是 $F(X)$ 的右伴随这一事实，以及伴随的唯一性。更精确地说，这些 2-态射

$$\begin{aligned} F(X) \circ F(X^R) \xrightarrow{\cong} F(X \circ X^R) \xrightarrow{F(\mathrm{ev}_X)} F(\mathrm{id}) \cong \mathrm{id} \\ \mathrm{id} \cong F(\mathrm{id}) \xrightarrow{F(\mathrm{coev}_X)} F(X^R \circ X) \xrightarrow{\cong} F(X^R) \circ F(X) \end{aligned} \tag{4.4}$$

表明 $F(X^R)$ 是 $F(X)$ 的右伴随，从而我们有一个 2-同构

$$(\xi_F)_X : F(X^R) \xrightarrow{\mathrm{id} \circ \mathrm{coev}_{F(X)}} F(X)^R \circ F(X) \circ F(X^R) \xrightarrow{\mathrm{id} \circ F(\mathrm{ev}_X)} F(X)^R; \tag{4.5}$$

可以验证这定义了一个可逆 2-变换 ξ_F。接下来，我们构造修正ξ_α。它在 $c \in \mathcal{B}$ 处的 2-态射分量由下式给出

$$(\xi_\alpha)_c := \mathrm{ev}_{\alpha_c}\colon \alpha_c \circ \alpha_c^R \to \mathrm{id}; \tag{4.6}$$

可以验证这定义了一个修正，并且这些修正在 α 中相对于复合与单位是自然且相容的。

□

引理 4.1.4. 设 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{B}'$ 是带伴随的 2-范畴。那么函子范畴$(\mathcal{B},\ \mathcal{B}')$具有伴随。

证明. 设 $\alpha\colon F \to G$ 是一个 2-变换。我们考虑右伴随的情形。可以定义一个 2-变换 $\alpha^R\colon G \to F$，其 1-态射分量为 $(\alpha^R)_a = \alpha_a^R\colon G(a) \to F(a)$，2-态射分量为 $(\alpha^R)_X := \alpha^R_{X^L}\colon F(X) \circ \alpha_a^R \to \alpha_b^R \circ G(X)$。伴随数据 ev_α，coev_α 按分量给出，分别为 $(\mathrm{ev}_\alpha)_a := \mathrm{ev}_{\alpha_a}\colon \alpha_a \circ \alpha_a^R \to \mathrm{id}$ 和 $(\mathrm{coev}_\alpha)_a := \mathrm{coev}_{\alpha_a}\colon \mathrm{id} \to \alpha_a^R \circ \alpha_a$。左伴随/所有伴随的情形完全类似。 □

定义 4.1.5. 设 $\mathcal{D}$ 为一个 3-范畴。若 $\mathcal{D}$ 中的 2-态射 $f\colon X \to Y$ 作为 2-范畴 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y)$ 中的 1-态射具有右/左伴随，则称它具有右/左伴随。若每个 2-态射都具有左/右/（两者）伴随，则称 $\mathcal{D}$对 2-态射具有左/右/（全部）伴随。若其同伦 2-范畴 $\mathrm{h}_2\mathcal{D}$ 具有左/右/（全部）伴随，则称 $\mathcal{D}$ 对 1-态射具有左/右/（全部）伴随。若 $\mathcal{D}$ 对 1-态射和 2-态射都具有左伴随和右伴随，则称它具有（全部）伴随。

定义 4.1.6. 我们用 $2\mathrm{Cat}^{\mathrm{adj}}$ 表示由具有（全部）伴随的 2-范畴、2-函子、2-变换和修正构成的 3-范畴。

推论 4.1.7。 3-范畴 $2\mathrm{Cat}^{\mathrm{adj}}$ 具有 2-态射的伴随。特别地，我们有 3-函子

$$(-)^{1\,\mathrm{op}}\colon 2\mathrm{Cat}^{\mathrm{adj}} \to (2\mathrm{Cat}^{\mathrm{adj}})^{2\,\mathrm{op}}, (-)^{2\,\mathrm{op}}\colon 2\mathrm{Cat}^{\mathrm{adj}} \to (2\mathrm{Cat}^{\mathrm{adj}})^{3\,\mathrm{op}} \tag{4.7}$$

以及 3-函子

$$(-)^L, (-)^R\colon 2\mathrm{Cat}^{\mathrm{adj}} \to (2\mathrm{Cat}^{\mathrm{adj}})^{(2,3)\,\mathrm{op}}. \tag{4.8}$$

注 4.1.8。我们希望理解函子 $(-)^R$、$(-)^L$ 和 $(-)^1\mathrm{op}$、$(-)^{2\,\mathrm{op}}$ 之间的相互作用。我们断言 $(-)^{1\,\mathrm{op}} \circ (-)^R \cong (-)^L \circ (-)^1\mathrm{op}$。函子 $(-)^1\mathrm{op} \circ (-)^R$ 特别地将每个带伴随的 2-范畴 $\mathcal{B}$ 赋给其 1-反范 $\mathcal{B}^{1\,\mathrm{op}}$，将每个 2-函子 $F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ 赋给其 1-反范$F\mathrm{op}\colon \mathcal{B}^1\mathrm{op} \to (\mathcal{B}')^1\mathrm{op}$，并将每个 2-变换 $\alpha\colon F \to G$ 赋给 $(\alpha^R)^1\mathrm{op}\colon F^1\mathrm{op} \to (\mathcal{G}')^1\mathrm{op}$。$(\alpha^R)^{1\,\mathrm{op}}$ 在 $a \in \mathcal{B}^1\mathrm{op}$ 处的 1-态射分量由 $\alpha_a^R\colon F(a) \to G(a)$ 给出，它属于 $(\mathcal{B}')^1\mathrm{op}$；也就是说，$\alpha_a^R\colon G(a) \to F(a)$ 属于 $\mathcal{B}'$。我们断言 $(\alpha^R)^{1\,\mathrm{op}}$ 是 2-态射 $\alpha^{1\,\mathrm{op}}$ 的左伴随。事实上，伴随数据由以下内容给出

$$\begin{aligned} (\alpha^R)^{1\,\mathrm{op}} \circ \alpha^{1\,\mathrm{op}} &\xrightarrow{\cong} (\alpha \circ \alpha^R)^{1\,\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathrm{ev}_\alpha^{1\,\mathrm{op}}} \mathrm{id}^{1\,\mathrm{op}} \cong \mathrm{id} \\ \mathrm{id} \cong \mathrm{id}^{1\,\mathrm{op}} &\xrightarrow{\mathrm{coev}_\alpha^{1\,\mathrm{op}}} (\alpha^R \circ \alpha)^{1\,\mathrm{op}} \xrightarrow{\cong} \alpha^{1\,\mathrm{op}} \circ (\alpha^R)^{1\,\mathrm{op}} \end{aligned} \tag{4.9}$$

因此，我们得到一个可逆 3-变换

$$(-)^{1\,\mathrm{op}} \circ (-)^R \cong (-)^L \circ (-)^{1\,\mathrm{op}}. \tag{4.10}$$

我们还注意到，我们有可逆 3-变换

$$(-)^{2\,\mathrm{op}} \circ (-)^R \cong (-)^R \circ (-)^{2\,\mathrm{op}}, \qquad (-)^{2\,\mathrm{op}} \circ (-)^L \cong (-)^L \circ (-)^{2\,\mathrm{op}}, \tag{4.11}$$

通过类似的论证，同时跟踪逆变性。

引理 4.1.9。 存在一个可逆 3-变换

$$S\colon \mathrm{id}_{2\mathrm{Cat}^{\mathrm{adj}}} \to (-)^{RR}. \tag{4.12}$$

证明。 我们构造 3-变换 $S\colon \mathrm{id}_{2\mathrm{Cat}^{\mathrm{adj}}} \to (-)^{RR}$。注意到两个函子在对象层面上都是恒等的，因此对于带伴随的 2-范畴 $\mathcal{B}$，可以将 S 的 1-态射分量定义为双右伴随函子 $S_{\mathcal{B}} := (-)^{RR}_{\mathcal{B}}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}$。又由于两个函子在 1-态射层面上都是恒等的，因此对于 2-函子 $F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$，可以将 S 的 2-态射分量定义为如下 2-变换：

$$(-)^{RR}_{\mathcal{B}'} \circ F \xrightarrow{\mathrm{id} \circ \xi_F} ((-)^R_{\mathcal{B}'})^{(1,2)\,\mathrm{op}} \circ F^{(1,2)\,\mathrm{op}} \circ (-)^R_{\mathcal{B}} \xrightarrow{(\xi_F^{-1})^{(1,2)\,\mathrm{op}} \circ \mathrm{id}} F \circ (-)^{RR}_{\mathcal{B}} \tag{4.13}$$

其中 ξ_F 是引理 4.1.3 中描述的 2-变换。接下来，我们要描述 S 在 2-变换 $\alpha\colon F \to G$ 处的 3-态射分量。首先注意到，在下图中的两个方框内，都存在不可逆的修饰：

$$\begin{array}{ccccc} (-)^{RR}_{\mathcal{B}'} \circ F & \xrightarrow{\mathrm{id}\circ\xi_F} & ((-)^{R}_{\mathcal{B}'})^{(1,2)\,\mathrm{op}} \circ F^{(1,2)\,\mathrm{op}} \circ (-)^{R}_{\mathcal{B}} & \xrightarrow{(\xi_F^{-1})^{(1,2)\,\mathrm{op}}\circ\mathrm{id}} & F \circ (-)^{RR}_{\mathcal{B}} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\circ\alpha} & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{id}\circ\alpha^{(1,2)\,\mathrm{op}}\circ\mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^{RR}\circ\mathrm{id}} \\ (-)^{RR}_{\mathcal{B}'} \circ G & \xrightarrow{\mathrm{id}\circ\xi_G} & ((-)^{R}_{\mathcal{B}'})^{(1,2)\,\mathrm{op}} \circ G^{(1,2)\,\mathrm{op}} \circ (-)^{R}_{\mathcal{B}} & \xrightarrow{(\xi_G^{-1})^{(1,2)\,\mathrm{op}}\circ\mathrm{id}} & G \circ (-)^{RR}_{\mathcal{B}}. \end{array} \tag{4.14}$$

此处，左侧方块由引理 4.1.3 中所述的修正 ξ_α 填充；右侧方块则可由修正填充

$$(\xi^{L}_{\alpha^R})^{\mathrm{op}}\colon (\alpha^{RR}\circ\mathrm{id}) \bullet ((\xi_F^{-1})^{(1,2)\,\mathrm{op}}\circ\mathrm{id}) \bullet (\mathrm{id}\circ\alpha^{(1,2)\,\mathrm{op}}) \Rightarrow ((\xi_G^{-1})^{(1,2)\,\mathrm{op}}\circ\mathrm{id}). \tag{4.15}$$

然而，我们不能立即将这些修正粘贴在一起，因为它们以及 α 通常都不可逆。我们可以采用的技巧是，改为使用图表中的可逆 2-修正

$$\begin{array}{ccccc} (-)^{RR}_{\mathcal{B}'} \circ F & \xrightarrow{\mathrm{id}\circ\xi_F} & ((-)^{R}_{\mathcal{B}'})^{(1,2)\,\mathrm{op}} \circ F^{(1,2)\,\mathrm{op}} \circ (-)^{R}_{\mathcal{B}} & \xrightarrow{(\xi_F^{-1})^{(1,2)\,\mathrm{op}}\circ\mathrm{id}} & F \circ (-)^{RR}_{\mathcal{B}} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\circ\alpha} & \overset{\cong}{\swarrow} & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\circ(\alpha^R)^{(1,2)\,\mathrm{op}}\circ\mathrm{id}} & \overset{\cong}{\swarrow} & \downarrow{\scriptstyle \alpha^{RR}\circ\mathrm{id}} \\ (-)^{RR}_{\mathcal{B}'} \circ G & \xrightarrow[\mathrm{id}\circ\xi_G]{} & ((-)^{R}_{\mathcal{B}'})^{(1,2)\,\mathrm{op}} \circ G^{(1,2)\,\mathrm{op}} \circ (-)^{R}_{\mathcal{B}} & \xrightarrow[(\xi_G^{-1})^{(1,2)\,\mathrm{op}}\circ\mathrm{id}]{} & G \circ (-)^{RR}_{\mathcal{B}}. \end{array} \tag{4.16}$$

其粘贴结果为 3-态射分量 S_α。不难验证，这定义了一个可逆 3-变换，因为每个分量显然都是可逆的。□

推论 4.1.10. 我们得到一个可逆 3-变换

$$S\colon \mathrm{id}_{2\mathrm{Cat}^{\mathrm{adj}}_{(3,1)}} \to \mathrm{id}_{2\mathrm{Cat}^{\mathrm{adj}}_{(3,1)}} \tag{4.17}$$

它定义在 $2\mathrm{Cat}^{\mathrm{adj}}$ 的底层 (3,1)-范畴上。

4.2 $\mathrm{SO}(2)$-对合 2-范畴

我们先一般性地讨论 SO(2) 在 3-范畴上的作用。

注 4.2.1. 首先，回顾 SO(2) 的低维同伦群，

$$\pi_0(\mathrm{SO}(2)) = \star, \pi_1(\mathrm{SO}(2)) = \mathbb{Z}, \pi_2(\mathrm{SO}(2)) = \pi_3(\mathrm{SO}(2)) = \ldots = \star. \tag{4.18}$$

特别地，在 3-范畴 $\mathcal{D}$ 上给出一个 SO(2)-作用，

$$\mathrm{B}\Pi_3(\mathrm{SO}(2)) \to 3\mathrm{Cat},\ \star \mapsto \mathcal{D}. \tag{4.19}$$

等价于指定一个 4-函子，也可以将其理解为一个辫状幺半 2-函子

$$\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathrm{id}_{\mathcal{D}}) \tag{4.20}$$

其中，$\mathrm{Aut}(\mathrm{id}_{\mathcal{D}})$ 表示 $\mathcal{D}$ 上恒等 3-函子的自等价所构成的辫编织幺半 2-范畴。

为方便读者，下面我们将详细说明辫状幺半 2-函子的概念。

注记 4.2.2. 设 $\mathcal{B},\mathcal{C}$ 为辫状幺半 2-范畴。下面我们希望详细列出辫状幺半 2-函子 $F\colon \mathcal{B}\to\mathcal{C}$ 的数据，并省略最高层次上的相容条件。首先，有一个 2-函子 $F\colon \mathcal{B}\to\mathcal{C}$。其次，在 F 上有一个幺半结构，这包括以下数据：(i) 对任意两个对象 $a,b\in\mathcal{B}$ 1，有 -同构 $\varphi_{a,b}\colon F(a)\otimes F(b)\to F(a\otimes b)$，以及一个 1-同构 $\epsilon\colon 1_{\mathcal{C}}\to F(1_{\mathcal{B}})$；(ii) 对任意两个 1-态射 $X\colon a\to a'$ 和 $Y\colon b\to b'$，有 2-同构$\varphi_{X,Y}$，它们构成如下图表

$$\begin{array}{ccc} F(a)\otimes F(b) & \xrightarrow{\varphi_{a,b}} & F(a\otimes b) \\ {\scriptstyle F(X)\otimes F(Y)}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle \varphi_{X,Y}} & \downarrow{\scriptstyle F(X\otimes Y)} \\ F(a')\otimes F(b') & \xrightarrow[\varphi_{a',b'}]{} & F(a'\otimes b') \end{array} \tag{4.21}$$

(iii) 对每组三个对象 $a,b,c\in\mathcal{B}$，有一个 2-同构 $\phi_{a,b,c}$，使其嵌入图表中

$$\begin{array}{ccc} (F(a)\otimes F(b))\otimes F(c) & \longrightarrow & F(a)\otimes(F(b)\otimes F(c)) \\ {\scriptstyle \varphi_{a,b}\otimes\mathrm{id}}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle \phi_{a,b,c}} & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes\varphi_{b,c}} \\ F(a\otimes b)\otimes F(c) & & F(a)\otimes F(b\otimes c) \\ {\scriptstyle \varphi_{a\otimes b,c}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{a,b\otimes c}} \\ F((a\otimes b)\otimes c) & \longrightarrow & F(a\otimes(b\otimes c)) \end{array} \tag{4.22}$$

(iv) 对每个对象 $a\in\mathcal{B}$，有 2-同构 ξ_a,ζ_a，使其嵌入图表中

$$\begin{array}{ccc} 1_{\mathcal{C}}\otimes F(a) & \xrightarrow{\epsilon\otimes\mathrm{id}} & F(1_{\mathcal{B}})\otimes F(a) \\ \downarrow & \swarrow{\scriptstyle \xi_a} & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{1_{\mathcal{B}},a}} \\ F(a) & \longleftarrow & F(1_{\mathcal{B}}\otimes a) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F(a)\otimes 1_{\mathcal{C}} & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\epsilon} & F(a)\otimes F(1_{\mathcal{B}}) \\ \downarrow & \swarrow{\scriptstyle \zeta_a} & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{a,1_{\mathcal{B}}}} \\ F(a) & \longleftarrow & F(a\otimes 1_{\mathcal{B}}) \end{array} \tag{4.23}$$

其中，在 (iii) 和 (iv) 中，我们省略了结合子和单位子的符号。2-同构 $\varphi_{X,Y},\phi_{a,b,c},\xi_a,\zeta_a$ 还需满足其他相容条件，此处不再详述。

第三，我们在 F 上有一个辫状结构，这相当于以下数据：对于任意两个对象 $a,b\in\mathcal{B}$，有 2-同构 $\mu_{a,b}$，使其嵌入图表中

$$\begin{array}{ccc} F(a)\otimes F(b) & \xrightarrow{\beta^{\mathcal{C}}_{F(a),F(b)}} & F(b)\otimes F(a) \\ {\scriptstyle \varphi_{a,b}}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle \mu_{a,b}} & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{b,a}} \\ F(a\otimes b) & \xrightarrow[F(\beta^{\mathcal{B}}_{a,b})]{} & F(b\otimes a) \end{array} \tag{4.24}$$

它们还需满足其他相容条件，这里我们同样不再详述。

注记 4.2.3. 设 $\mathcal{C}$ 为一个 3-范畴。下面，我们希望较为详细地描述 2-范畴 $\mathrm{Aut}(\mathrm{id}_{\mathcal{C}})$ 上的带状单 monoidal 结构。根据定义，$\mathrm{Aut}(\mathrm{id}_{\mathcal{C}})$ 的对象是可逆 3-变换 $\alpha\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}}\to\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$；1-态射是 3-修正，2-态射是它们之间的扰动。幺半结构可描述如下：给定两个可逆 3-变换 $\alpha,\gamma\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}}\to\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$，我们可以考虑它们的复合 $\alpha\bullet\gamma$，相对于该复合，恒等 3-变换 $\mathrm{id}_{\mathrm{id}_{\mathcal{C}}}$ 充当幺半单位。辫状结构给出如下。我们需要提供一个 3-修改

$$\beta_{\alpha,\gamma}\colon \alpha\bullet\gamma\to\gamma\bullet\alpha; \tag{4.25}$$

首先，给定一个对象 $a \in \mathcal{C}$，我们需要提供 2-态射分量

$$(\beta_{\alpha,\gamma})_a \colon \alpha_a \circ \gamma_a = (\alpha \bullet \gamma)_a \to (\gamma \bullet \alpha)_a = \gamma_a \circ \alpha_a. \tag{4.26}$$

回忆一下，α 是一个可逆 3-变换；特别地，它带有可逆的 1-态射分量 $\alpha_a \colon a \to a$ 以及 2-态射分量 $\alpha_X \colon X \circ \alpha_a \to \alpha_b \circ X$，其中 $X \colon a \to b$ 是 $\mathcal{C}$中的一个 1-态射。特别地，我们可以选取

$$(\beta_{\alpha,\gamma})_a := \alpha_{\gamma_a}^{-1} \colon \alpha_a \circ \gamma_a \to \gamma_a \circ \alpha_a. \tag{4.27}$$

其次，给定 $\mathcal{C}$中的一个 1-态射 $X \colon a \to b$，我们需要给出 3-态射分量 $(\beta_{\alpha,\ \gamma})_X$。为此，我们回忆一下，$\alpha$ 还带有一个位于 $f \colon X \to Y$ 处的可逆 3-态射分量，其形式为

$$\begin{array}{ccc} X \circ \alpha_a & \xrightarrow{\alpha_X} & \alpha_b \circ X \\ {\scriptstyle f\circ \mathrm{id}}\downarrow & \swarrow\!\!\swarrow_{\alpha_f} & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\circ f} \\ Y \circ \alpha_a & \xrightarrow[\alpha_Y]{} & \alpha_b \circ Y. \end{array} \tag{4.28}$$

并且对每一对可复合的1-态射 $X \colon a \to b,\ Z \colon b \to C$，都有一个可逆 3-态射 $\alpha_{X,\ Z}$，使其符合图表

$$\begin{array}{ccc} Z \circ (X \circ \alpha_a) & \xrightarrow{\mathrm{id}\circ\alpha_X} & Z \circ \alpha_b \circ X \\ \downarrow & \swarrow\!\!\swarrow_{\alpha_{X,Z}} & \downarrow{\scriptstyle \alpha_Z\circ\mathrm{id}} \\ (Z \circ X) \circ \alpha_a & \xrightarrow{\alpha_{Z\circ X}} & \alpha_c \circ Z \circ X \end{array} \tag{4.29}$$

特别地，我们有可逆 3-态射填充图表

$$\begin{array}{ccccc} X \circ \alpha_a \circ \gamma_a & \xrightarrow{\alpha_X\circ\mathrm{id}} & \alpha_b \circ X \circ \gamma_a & \xrightarrow{\mathrm{id}\circ\gamma_X} & \alpha_b \circ \gamma_b \circ X \\ {\scriptstyle \mathrm{id}\circ\alpha_{\gamma_a}^{-1}}\downarrow & \nearrow_{\alpha_{X\circ\gamma_a}} & & \nearrow_{\alpha_{\gamma_b\circ X}} & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{\gamma_b}^{-1}\circ\mathrm{id}} \\ X \circ \gamma_a \circ \alpha_a & \xrightarrow[\gamma_X\circ\mathrm{id}]{} & \gamma_b \circ X \circ \alpha_a & \xrightarrow[\mathrm{id}\circ\alpha_X]{} & \gamma_b \circ \alpha_b \circ X \end{array} \tag{4.30}$$

其中，左侧和右侧的三角形由公式（4.29）中的 3-同构填充，中间的方形由公式（4.28）中的 3-同构填充；更具体地，从左到右依次为 $\alpha_{\gamma_a,\ X}$，α_{γ_X}，以及 $\alpha_X^{-1}{}_{,\ \gamma_b\circ}$。至此，我们已描述了 3-变换 $\beta_{\alpha,\ \gamma}$: $\alpha\bullet\gamma \to \gamma\bullet\alpha$的数据（省略各种相干条件）。

在确立了辫状幺半 2-函子的数据，以及某个 3-范畴 $\mathcal{C}$ 上 $\mathrm{Aut}(\mathrm{id}_{\mathcal{C}})$ 的带状单 monoidal 结构之后，我们现在转而关注一个特定的 SO(2)-作用。

构造 4.2.4. 接下来，我们希望在 (3,1)-范畴 $2\mathrm{Cat}^{\mathrm{adj}}{}_{(3,1)}$ 上构造一个 SO(2)-作用。根据注记 4.2.1 中的讨论，我们需要给出一个辫状幺半 2-函子

$$\rho \colon \mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathrm{id}_{2\mathrm{Cat}^{\mathrm{adj}}_{(3,1)}}). \tag{4.31}$$

我们首先定义底层的 2-函子。只需描述该 2-函子下 $1 \in \mathbb{Z}$ 的像 S，因为幺半性将要求我们把 $k \mapsto S^k$ 映出去。因此，我们需要指定一个 3-变换

$$S \colon \mathrm{id}_{2\mathrm{Cat}^{\mathrm{adj}}_{(3,1)}} \to \mathrm{id}_{2\mathrm{Cat}^{\mathrm{adj}}_{(3,1)}}. \tag{4.32}$$

我们选择推论 4.1.10 中描述的 3-变换，为方便读者，下面重述其分量。首先，它在 $\mathcal{B} \in 2\mathrm{Cat}^{\mathrm{adj}}{}_{(3,1)}$ 处的 1-态射分量由

$$S_{\mathcal{B}} := (-)_{\mathcal{B}}^{RR} \colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}, \tag{4.33}$$

给出： $\mathcal{B}$ 上的双右伴随函子（其逆由 $\mathcal{B}$ 上的双左伴随函子给出）。其次，它在 $F\colon \mathcal{B}\to\mathcal{B}'$ i n2Cat$^{\mathrm{adj}}{}_{(3,1)}$ 处的2-态射分量由典范的2-变换给出

$$S_F\colon F\circ S_{\mathcal{B}} = F\circ(-)^{RR}_{\mathcal{B}} \xrightarrow{\cong} (-)^{RR}_{\mathcal{B}'}\circ F = S_{\mathcal{B}'}\circ F \tag{4.34}$$

表达任意 2-函子与（双重）右伴随函子之间的相容性。第三，其在 $\alpha\colon F\to G$ in 2Cat$^{\mathrm{adj}}{}_{(3,\ 1)}$ 处的 3-态射分量由典范修正 S_α 给出，它适配于图表

$$\begin{array}{ccc} F\circ(-)^{RR}_{\mathcal{B}} & \xrightarrow{\cong} & (-)^{RR}_{\mathcal{B}'}\circ F \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha\circ\mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\circ\alpha} \\ G\circ(-)^{RR}_{\mathcal{B}} & \xrightarrow{\cong} & (-)^{RR}_{\mathcal{B}'}\circ G \end{array} \tag{4.35}$$

利用（可逆）2-变换自动以恰好这种意义与（双重）伴随相容这一事实。可以验证，这定义了一个 3-变换 $S\colon \mathrm{id}_{2\mathrm{Cat}^{\mathrm{adj}}{}_{(3,\ 1)}}\to \mathrm{id}_{2\mathrm{Cat}^{\mathrm{adj}}{}_{(3,\ 1)}}$，从而得到一个 2-函子 $\rho\colon \mathbb{Z}\to \mathrm{Aut}(\mathrm{id}_{2\mathrm{Cat}^{\mathrm{adj}}{}_{(3,\ 1)}})$。 ρ 上的幺半结构数据基本上可以取为平凡的，因为我们定义 $\rho(k) := S^k$；例如， $\rho(n)\circ\rho(m) = S^n\circ S^m\cong S^{n+m} = \rho(n+m)$基本上是平凡的。另一方面，辫状结构并非平凡。利用六边形公理，并注意到 $\mathbb{Z}$ 上的辫状结构基本上是平凡的，只需考虑编织的分量 $\beta_{-1,\ 1}$。更准确地说，根据方程 (4.24)，我们需要给出一个扰动，使复合得到的 3-修改平凡化

$$q(S) := \mathrm{id}\xrightarrow{\cong} S^{-1}\circ S \xrightarrow{\beta_{S^{-1},S}} S\circ S^{-1}\xrightarrow{\cong}\mathrm{id}\,. \tag{4.36}$$

我们按如下方式构造可逆扰动 $\sigma\colon\ q(S)\to\mathrm{id}$。首先，回顾一下， $q(S)$ 在对象 $\mathcal{B}\in 2\mathrm{Cat}^{\mathrm{adj}}{}_{(3,1)}$ 处的 2- 态射分量由以下复合给出

$$\mathrm{id}_B\xrightarrow{\cong}(-)^{LL}_{\mathcal{B}}\circ(-)^{RR}_{\mathcal{B}}\longrightarrow(-)^{RR}_{\mathcal{B}}\circ(-)^{LL}_{\mathcal{B}}\xrightarrow{\cong}\mathrm{id} \tag{4.37}$$

其中，中间的箭头由一个 2-变换给出，它表达了双左伴随函子与（双重）右伴随函子之间的相容性。随后，可逆扰动 σ 的 3-态射分量由表达这些伴随关系的 Zorro 3-同构构造而成。特别地，我们注意到，复合

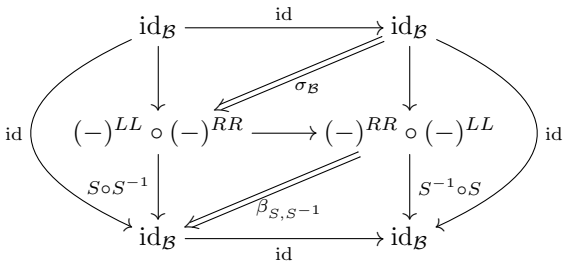
$$X\xrightarrow{\cong}(X^L)^R\xrightarrow{\cong}(X^R)^L\xrightarrow{\cong}X, \tag{4.38}$$

其组成部分是表达伴随的唯一性的各种 2-同构，与 X 上的恒等 2-态射同构。对这一观察稍加推广（涉及各种双重伴随），便可构造出 σ 的分量。总之，我们得到一个可逆扰动 $\sigma\colon\ q(S)\to\mathrm{id}$。辫状结构的高阶凝聚随后由各种伴随关系所编码的凝聚推出。

定义 4.2.5。 SO(2)-*volutive 2*-范畴 2Cat$^{\mathrm{SO}(2)\text{-vol}}{}_{(3,1)}$ 是相对于 SO(2)-作用 ρ （该作用作用于 2Cat$^{\mathrm{adj}}{}_{(3,1)}$ ，并在构造 4.2.4 中构造）的同伦不动点的 (3,1)-范畴。

注记 4.2.6. 我们希望详细说明一个 SO(2)-对合 2-范畴的数据。SO(2)-对合 2-范畴是一个带有伴随的 2-范畴 $\mathcal{B}$，以及一个可逆 2- 变换 $S\colon\ \mathrm{id}\to(-)^{RR}$

使得复合修正



(4.39)

是 $\mathrm{id}_{\mathrm{id}_{\mathcal{B}}}$ 上的恒等映射；此处，上方的方形由构造 4.2.4 中描述的修正 $\sigma_{\mathcal{B}}$ 填充，下方的方形由表达编织 β 在 $\mathrm{Aut}^{\mathrm{id}}{}_{2\mathrm{Cat}^{\mathrm{adj}}{}_{(3,1)}}$ 上自然性的修正填充，而左侧和右侧的图表则由表达可逆性/伴随数据自然性的修正填充。

我们还希望描述 SO(2)-对合 2-范畴之间的函子。设 $(\mathcal{B},S)$ 和 $(\mathcal{B}',S')$ 为 SO(2)-对合 2-范畴。SO(2)-对合 2-范畴之间的函子是一个 2-函子 $F\colon \mathcal{B}\to\mathcal{B}'$，连同一个可逆修正

$$\eta\colon \left(\begin{array}{ccc} & \overset{\mathrm{id}_{\mathcal{B}}}{\curvearrowright} & \\ B & \overset{(-)^{RR}}{\longrightarrow} & B \\ {\scriptstyle F}\downarrow & \overset{\cong}{\swarrow} & \downarrow{\scriptstyle F} \\ B' & \underset{(-)^{RR}}{\longrightarrow} & B' \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc} B & \overset{\mathrm{id}_{\mathcal{B}}}{\longrightarrow} & B \\ {\scriptstyle F}\downarrow & \overset{\cong}{\swarrow} & \downarrow{\scriptstyle F} \\ B' & \underset{\mathrm{id}_{\mathcal{B}'}}{\longrightarrow} & B' \\ & \underset{(-)^{RR}}{\curvearrowright} & \end{array}\right) \tag{4.40}$$

其中，左侧图表中的方形由表达 2-函子 F 与（双重）伴随相容性的 2-变换填充；关于 3-范畴 $2\mathrm{Cat}^{\mathrm{SO}(2)\text{-vol}}{}_{(3,1)}$ 中的高阶态射，参见 [CL25] 。

注记 4.2.7. CL25 第 2 节讨论了 SO(2)-对合 2-范畴的 3-范畴，[但其中仅暗示了方程 (4.39) 中提出的条件，并未明确说明。2] 我们强调，其中的 SO(2)-对合结构概念并不完备，遗漏了这一重要条件。

注记 4.2.8. 方程 (4.39) 中的条件断言，S的扭曲量子维数是平凡的。之所以采用这一术语，是因为 2-范畴 $\mathcal{B}$ 上的 SO(2)-作用等价于一个可逆 2-变换 $P\colon \mathrm{id}_{\mathcal{B}}\to\mathrm{id}_{\mathcal{B}}$，其量子维数 $q(P)$是平凡的。量子维数 $q(P)$应理解为范畴 $\mathrm{Aut}_{\mathrm{id}_{\mathcal{B}}}$ 中的量子维数，该范畴的带状单 monoidal 结构见注记 4.2.3。具体而言，对于任意对象 $P\in\mathrm{Aut}_{\mathrm{id}_{\mathcal{B}}}$，其量子维数是如下复合

$$\mathrm{id}\xrightarrow{\cong}P^{-1}\circ P\xrightarrow{\beta_{P^{-1},P}}P\circ P^{-1}\xrightarrow{\cong}\mathrm{id} \tag{4.41}$$

其中 β 是 $\mathrm{Aut}_{\mathrm{id}_{\mathcal{B}}}$ 中的编织。在图示演算的记法中，量子维数也称为八字图。

注 4.2.9. 设 $(\mathcal{B},S)$ 是一个 SO(2)-对合 2-范畴。那么，极大子群胚 $\mathcal{B}^{\times}\subseteq\mathcal{B}$继承了一个 SO(2)-作用。反过来，任何带有 SO(2)-作用的 2-群胚都定义了一个 SO(2)-对合 2-范畴。

在本节余下部分，我们将专注于证明以下结果。

命题 4.2.10。 每个刚性对称幺半 2-范畴都存在一个 SO(2)-对合结构。

引理 4.2.11. 设 $\mathcal{B}$ 是一个刚性对称幺半 2-范畴。那么，存在可逆 2-变换

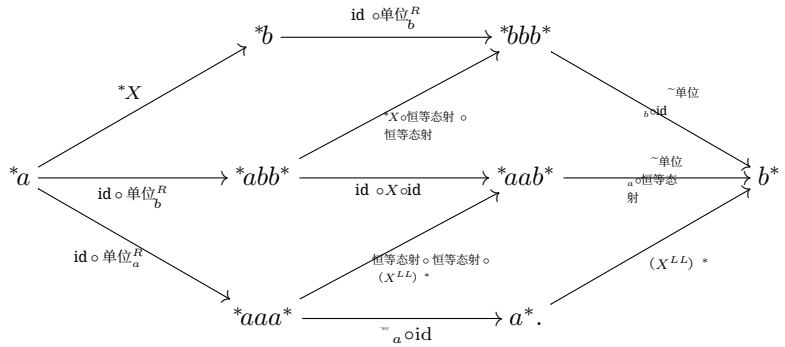
$$\mathcal{P}\colon \mathrm{id} \to (-)^{**} \qquad \text{and} \qquad \mathcal{Q}\colon (-)^{**} \to (-)^{LL}. \tag{4.42}$$

其中，$(-)^*$ 表示由对偶数据（针对对象）诱导的函子，而 $(-)^L$ 表示由左伴随数据（针对 1-态射）诱导的函子。

证明. 2-变换 $\mathcal{P}$ 的构造与 1-范畴情形类似，是由对称编织构造的。为了构造可逆 2-变换 $\mathcal{Q}$，我们将在稍微一般的情形下进行。设 $\mathcal{C}$ 是一个具有对偶和伴随的幺半 2-范畴。我们将构造一个可逆 2-变换 $\mathcal{Q}'\colon {}^*(-) \to (-)^* \circ (-)^{RR}$，它导出一个 2- 变换 ${}^{**}(-) \to (-)^{RR}$，在 $\mathcal{C} = \mathcal{B}$ 的情形下，通过将两边取逆可得 $\mathcal{Q}$ 。现在我们来构造 $\mathcal{Q}'$。它在对象 $a \in \mathcal{C}$ 处的 1-态射分量为

$$Q'_a\colon {}^*a \xrightarrow{\mathrm{id} \circ \mathrm{ev}_a^R} {}^*a \circ a \circ a^* \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{ev}}_a \circ \mathrm{id}} a^* \tag{4.43}$$

其在 1-态射 X 处的 2-态射分量 Q'_X 为： $a \to b$ 在 $\mathcal{C}$ 中由图表中的胞腔粘贴而成



(4.44)

这里，左上方和右下方的方块根据交换律可交换。右上方的图表由对偶结构的自然性数据填充，即 2-同构

$$\widetilde{\Omega}_X\colon \widetilde{\mathrm{ev}}_b \bullet ({}^*X \circ \mathrm{id}) \cong \widetilde{\mathrm{ev}}_a \circ (\mathrm{id} \circ X), \tag{4.45}$$

左下方的图表由这个 2-同构补全

$$\Omega^R_{X^L}\colon (X \circ \mathrm{id}) \bullet \mathrm{ev}_b^R \cong (\mathrm{id} \circ (X^{LL})^*) \bullet \mathrm{ev}_a^R\,. \tag{4.46}$$

这里我们用到了对偶与伴随函子之间的相互作用。容易验证，这定义了一个可逆 2-变换。

□

推论 4.2.12. 设 $\mathcal{B}$ 是一个刚性对称幺半 2-范畴。那么，存在一个可逆 2-变换

$$\mathcal{S} := \left(\mathrm{id} \xrightarrow{\mathcal{P}^{-1}} {}^{**}(-) \xrightarrow{\mathcal{Q}^{-1}} (-)^{RR} \right) \tag{4.47}$$

它称为 *Serre* 同构。其在 $a \in \mathcal{B}$ 处的 1-态射分量为

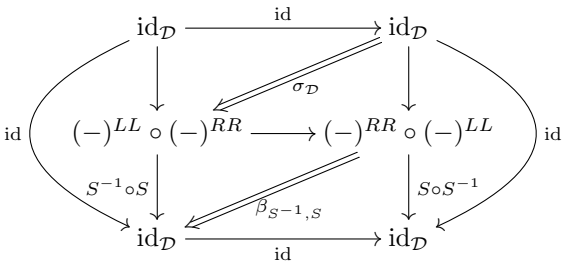
$$S_a\colon (\mathrm{id} \otimes \mathrm{ev}_a) \circ (\beta_{a,a} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{ev}_a^R)\colon a \longrightarrow a. \tag{4.48}$$

命题 *4.2.10* 的证明。 设 $\mathcal{B}$ 是一个刚性对称幺半 2-范畴，也就是说， $\mathcal{B}$ 具有所有对偶和伴随。我们已经在推论 4.2.12 中构造了一个可逆 2-变换 $\mathcal{S}\colon \mathrm{id}_{\mathcal{B}} \to (-)^{RR}$ ，即 Serre 同构。接下来只需证明 Serre 同构的扭曲量子维数是平凡的，也就是说，我们需要验证方程 (4.39) 中的图表是平凡的。根据推论 4.2.12，这是一项繁琐但直接的计算。

□

4.3 相对$\mathrm{SO}(2)$-对合 2-范畴

定义 4.3.1。 一个*2*-反变 SO(2)-对合 *3*-范畴 由一个具有 2-态射伴随的 3-范畴 $\mathcal{D}$、一个可逆 3-变换 $S\colon \mathrm{id}_{\mathcal{D}} \to (-)^{RR}$，以及一个将该 3- 修改平凡化的可逆扰动 σ 构成

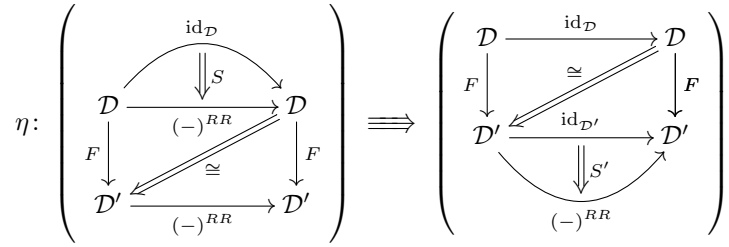


(4.49)

注 4.3.2. 设 $(\mathcal{D}, S, \sigma)$ 是一个 2-反变 SO(2)-对合 3-范畴。那么，偶对 (S, σ) 在底层 (3,1)-范畴 $\mathcal{D}_{(3,1)} \subseteq \mathcal{D}$ 上诱导一个 SO(2)-作用。反过来，任意 (3,1)-范畴上的 SO(2)-作用都定义了一个 2-反变 SO(2)-对合 3-范畴。

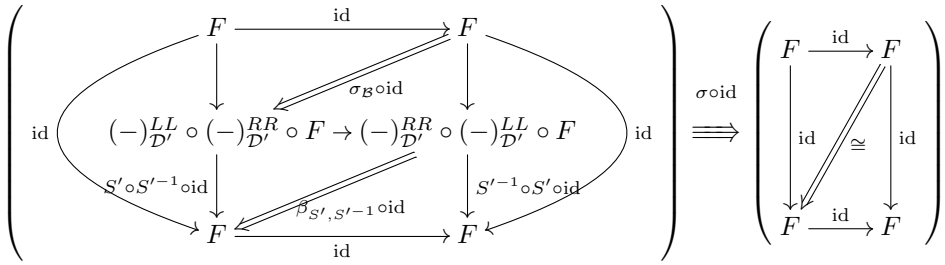
例 4.3.3. 3-范畴 $2\mathrm{Cat}^{\mathrm{adj}}$ 带有一种 2-反变 SO(2)-对合结构，它约化为构造 4.2.4 中描述的 $2\mathrm{Cat}^{\mathrm{adj}}_{(3,1)}$ 上的 SO(2)-作用。这基本上可由我们对该作用的显式描述以及引理 4.1.9 得出。

定义 4.3.4. 2-反变 SO(2)-对合 3-范畴之间的一个函子 由一个 3-函子$F\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ 以及一个可逆修正构成



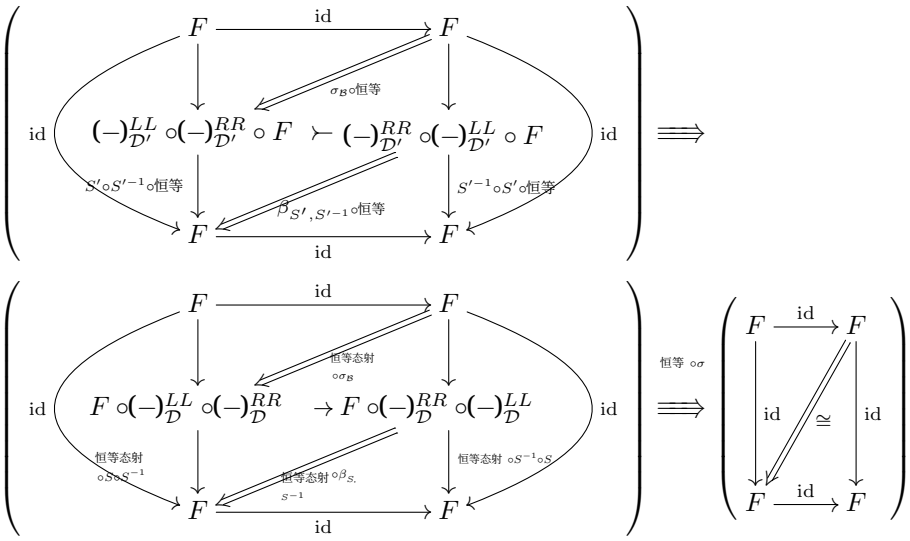
(4.50)

满足与 σ, σ' 的相容条件，即要求两个扰动



(4.51)

and



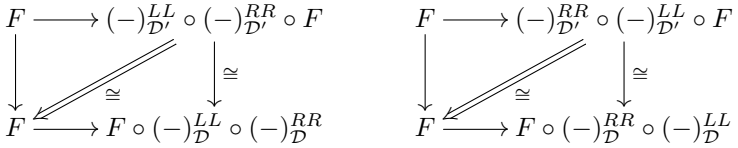
(4.52)

相等；我们将在备注 4.3.5 中更详细地说明此处出现的未标记扰动。

备注 4.3.5. 下面，我们将更明确地描述方程（4.52）中的未标记扰动。为描述该扰动，我们首先需要说明垂直 3-变换及相应的 3-修正。唯一非平凡的垂直 3-变换是以下（可逆）3-变换

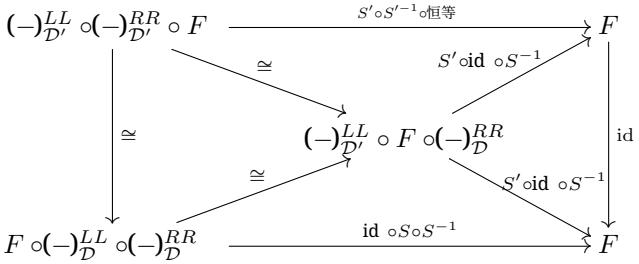
$$\begin{aligned}(-)^{LL}_{\mathcal{D}'}\circ(-)^{RR}_{\mathcal{D}'}\circ F &\to F\circ(-)^{LL}_{\mathcal{D}}\circ(-)^{RR}_{\mathcal{D}}\\ (-)^{RR}_{\mathcal{D}'}\circ(-)^{LL}_{\mathcal{D}'}\circ F &\to F\circ(-)^{RR}_{\mathcal{D}}\circ(-)^{LL}_{\mathcal{D}}\end{aligned} \tag{4.53}$$

表达 3-函子 F 与伴随之间的相容性。接下来，我们需要说明确保所有水平和垂直 3-变换彼此相容的 3- 修正。总共有五个这样的非平凡（可逆） 3- 修正，下面将逐一描述。首先，有两个可逆的 3- 修正



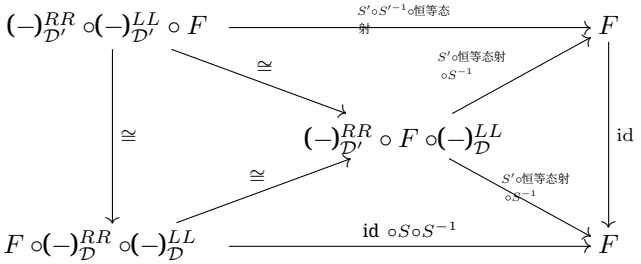
(4.54)

分别记录了这样一个事实：表达任意 3-函子与伴随相容的数据，也与伴随数据本身相容。其次，我们将图表中的 3-修正粘贴在一起，得到两个可逆的 3-修正



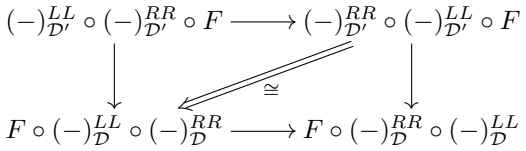
(4.55)

and



(4.56)

这些图表又分别由记录交换律的 3-修正（对应右侧三角形）、由 η 及其逆构成的项（对应上、下三角形），以及为迭代伴随和一个 3-函子构造相容性数据的 3-修正（对应左侧三角形）填充。最后，图表中还有一个（可逆的）3-修正



(4.57)

它记录了迭代伴随的相容性数据与任意 3-函子之间的自然性。讨论完五个非平凡的 3-修正后，我们现在可以讨论四个独立的扰动（上、下、左、右）；将它们粘贴起来，便得到我们要描述的方程（4.52）中的未标记扰动。左扰动和右扰动表达了如下自然性：对于伴随数据（这里对应于 $(-)^{RR}$ 和 $(-)^{LL}$），其相对于 3-变换（这里由 S 和 S' 构造）的自然性数据，关于 3-修正（这里由 η 构造）的自然性。上扰动是通过展开伴随数据与其自身相容性的不同层次构造的。下扰动表达了对称编织 β 关于 3- 修正（这里由 η 构造）的自然性。它们共同构成方程（ 4.52 ）中的未标记扰动。

注记 4.3。 **6.** 2-反变 SO(2)-对合 3-范畴之间还可以考虑更弱的函子概念，
可能，例如。其中 η 不要求可逆。

定义 4.3.7。 一个相对 SO(2)-对合 *2*-范畴 由一个 2-反变 SO(2)-对合 3-范畴 $\mathcal{D}$ 以及一个 2-反变 SO(2)-对合 3-范畴到 Cat 的函子 $\mathcal{D} \to 2\mathsf{Cat}^{\mathrm{adj}}$组成。

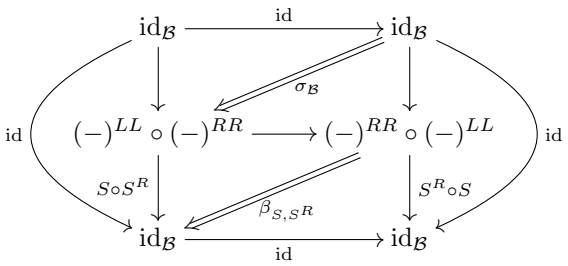
记号 4.3.8。 有时我们将相对 SO(2)-对合 2-范畴 $\mathcal{D} \to 2\mathsf{Cat}^{\mathrm{adj}}$ 称为在 $\mathcal{D}$之上的相对 SO(2)-对合 2-范畴。这一术语的动机与通常一样，来自直化—反直化。

例 4.3.9. SO(2)-对合 2-范畴等同于 2-反变 SO(2)-对合 3-范畴 $\star \to 2\mathsf{Cat}^{\mathrm{adj}}$ 之间的一个函子。

注记 4.3.10。 令 $U\colon 2\mathsf{Cat}^{\mathrm{adj}} \to 2\mathsf{Cat}$ 为从带伴随的 2-范畴的 3-范畴到 2-范畴的 3-范畴的遗忘函子。该函子有一个右伴随 U^R，它将一个 2-范畴 $\mathcal{B}$ 映射为如下子 2-范畴：具有相同的对象、同时拥有左伴随和右伴随的那些 1-态射，以及它们之间的所有 2-态射。我们尚不知 U 是否也有左伴随。

4.4 松弛 $\mathrm{SO}(2)$-对合 2-范畴

定义 4.4.1。 一个松 SO(2)-幺旋 *2*-范畴 是一个带伴随的 2-范畴 $\mathcal{B}$，连同一个 2-变换 $S\colon \mathrm{id} \to (-)^{RR}$，使得复合的 2-修正



(4.58)

是 $\mathrm{id}_{\mathrm{id}_{\mathcal{B}}}$ 上的恒等态射；此处，上方的方块由构造 4.2.4 中描述的修正 $\sigma_{\mathcal{B}}$ 填充，下方的方块由表达 $\mathrm{Aut}^{\mathrm{id}_{2\mathrm{Cat}^{\mathrm{adj}}}}$ 上编织 β 自然性的修正填充，而左右两侧的图表则由表达伴随数据自然性的修正填充。

例 4.4.2. 任何 SO(2)-对合 2-范畴都是一个松弛 SO(2)-对合 2-范畴。反过来，任何松弛 SO(2)-对合 2-范畴 $(\mathcal{B}, S)$ 都可通过取由满足 S_a 是一个 1-同构的那些对象 a 构成的全子 2-范畴，得到一个 SO(2)-对合 2-范畴。

例 4.4.3. 任何带伴随的 0-闭对称幺半 2-范畴都具有松弛 SO(2)-对合结构。该构造与刚性对称幺半 2-范畴情形中的构造基本相同，唯一的区别是 Serre 态射的 1-态射分量，也就是

$$S_a\colon (\mathrm{id} \otimes \mathrm{ev}_a) \circ (\beta_{a,a} \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \mathrm{ev}_a^R)\colon a \longrightarrow a, \tag{4.59}$$

一般而言，它不再是 1-同构。换句话说，我们确实得到的是松弛SO(2)-volutive结构，而不是通常的 SO(2)-对合结构。

定义 4.4.4。 考虑由两个对象 a 和 b、两个 1-态射 $f\colon a \to b$ 和 $g\colon b \to a$、四个 2-态射 $\mathrm{ev}\colon f \circ g \to \mathrm{id}$，$\mathrm{coev}\colon \mathrm{id} \to g \circ f$，$\widetilde{\mathrm{ev}}\colon g \circ f \to \mathrm{id}$，以及$\widetilde{\mathrm{coev}}\colon \mathrm{id} \to f \circ g$自由生成的 2-范畴，并要求 ev，coev 和 $\widetilde{\mathrm{ev}}$ $\widetilde{\mathrm{coev}}$ 分别满足佐罗变换。我们将这个 2-范畴记作 AmbAdj，即游走双向伴随。

注 4.4.5。 存在两个 2-函子 $\mathrm{Adj} \to \mathrm{AmbAdj}$，分别记录两个伴随 $f \dashv g$ 和 $g \dashv f$。特别地，AmbAdj 中所有态射都有伴随，因为 g 既是 f 的左伴随，也是其右伴随，反之亦然。双重伴随函子 $(-)^{RR}\colon \mathrm{AmbAdj} \to \mathrm{AmbAdj}$ 按构造在对象和 1-态射上都是恒等的。我们希望了解 $(-)^{RR}$ 是否真的等价（甚至相等）于 AmbAdj 上的恒等函子。为了解决这个问题，我们需要简短地岔开讨论。

首先，我们注意到以下事实：存在 2-态射 $\mathrm{ev}^R\colon \mathrm{id} \cong \mathrm{id}^R \to (f \circ g)^R \cong g^R \circ f^R \cong f \circ g$和 $\mathrm{coev}^R\colon g \circ f \cong f^R \circ g^R \cong (g \circ f)^R \to \mathrm{id}^R \cong \mathrm{id}$，它们根据 ev、coev 的佐罗变换满足佐罗变换。特别地，coev^R、ev^R 表明 g 是 f的左伴随，其方式与$\widetilde{\mathrm{ev}}$ $\widetilde{\mathrm{coev}}$、coev 相同。

然而，伴随数据在以下意义上本质上是唯一的：设 $X\colon c \to d$ 是任意具有伴随的 2-范畴 $\mathcal{B}$ 中的一个 1-态射，且 $(Y,\ \mathrm{ev},\ \mathrm{coev})$ 和 $(Y',\ \mathrm{ev}',\ \mathrm{coev}')$ 是 $X \dashv (-)$ 的右伴随数据。那么，存在唯一的 2-同构 $\Omega\colon Y \to Y'$，满足 $\mathrm{ev} = \mathrm{ev}' \bullet (\mathrm{id} \circ \Omega)$ 以及 $(\Omega \circ \mathrm{id}) \bullet \mathrm{coev} = \mathrm{coev}'$。具体而言，$\Omega$ 由以下复合给出

$$Y \xrightarrow{\mathrm{coev}' \circ \mathrm{id}} Y' \circ X \circ Y \xrightarrow{\mathrm{id} \circ \mathrm{ev}} Y'. \tag{4.60}$$

接下来，我们回顾一个显然的事实： X 是 X^R 的左伴随，其伴随数据为 ev_X，coev_X。特别地，我们有 2-同构 $\Psi_X\colon X \cong (X^R)^L$。事实上，对于 $Z\colon M \to N$ 的任意 2-态射，我们有一个交换图表

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Psi_M} & (M^R)^L \\ \downarrow{\scriptstyle Z} & & \downarrow{\scriptstyle (Z^R)^L} \\ N & \xrightarrow{\Psi_N} & (N^R)^L \end{array} \tag{4.61}$$

使得 $(Z^R)^L = \Psi_N \bullet Z \bullet \Psi_M^{-1}$。结合这些简单的观察，我们得到

$$\begin{aligned} Z^{RR} \cong (Z^R)^R &= [(\mathrm{id} \circ \mathrm{ev}_N) \bullet (\mathrm{id} \circ Z \circ \mathrm{id}) \bullet (\mathrm{coev}_M \circ \mathrm{id})]^R \\ &= (\mathrm{id} \circ \mathrm{coev}_M^R) \bullet (\mathrm{id} \circ Z^R \circ \mathrm{id}) \bullet (\mathrm{ev}_N^R \circ \mathrm{id}) \\ &= (\mathrm{id} \circ [\widetilde{\mathrm{ev}}_M \bullet (\Omega_M \circ \mathrm{id})]) \bullet (\mathrm{id} \circ Z^R \circ \mathrm{id}) \bullet ([(\mathrm{id} \circ \Omega_N^{-1}) \bullet \widetilde{\mathrm{coev}}_N] \circ \mathrm{id}) \\ &= (\mathrm{id} \circ \widetilde{\mathrm{ev}}_M) \bullet (\mathrm{id} \circ (\Omega_M \bullet Z^R \bullet \Omega_N^{-1}) \circ \mathrm{id}) \bullet (\widetilde{\mathrm{coev}}_N \circ \mathrm{id}) \\ &= (\Omega_M \bullet Z^R \bullet \Omega_N^{-1})^L \\ &= \Omega_N \bullet (Z^R)^L \bullet \Omega_M^{-1} \\ &= \Omega_N \bullet \Psi_N \bullet Z \bullet \Psi_M^{-1} \bullet \Omega_M^{-1} \cong (\Omega_N \bullet \Psi_N) \bullet Z \bullet (\Omega_M \bullet \Psi_M)^{-1}. \end{aligned}$$

因此，我们得到一个可逆 2-变换 $S\colon \mathrm{id} \cong (-)^{RR}$，其 1-态射分量均为恒等态射，而在 1-态射 M 处的 2-态射分量由 $\Omega_M \bullet \Psi_M$ 给出。此外， S 的扭曲量子维数（见方程 (4.39)）是平凡的。

我们将所得结果记录如下。

引理 4.4.6. AmbAdj 具有 SO(2)-对合结构。

构造 4.4.7. 给定任意一个 2-范畴 $\mathcal{B}$，我们可以构造一个 3-范畴 $\mathcal{B}[1]$，它有两个对象，记为 0 和 1，并且只有一个非平凡的 Hom 2-范畴，即 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}[1]}(0,\ 1) := \mathcal{B}$。如果 2-范畴 $\mathcal{B}$ 带有 SO(2)-对合结构，那么 3-范畴 $\mathcal{B}[1]$ 便具有 2-反变 SO(2)-对合结构。特别地，如果 $\mathcal{B}$ 有伴随，那么 $\mathcal{B}[1]$ 对 2-态射也有伴随。该记号的灵感来自游走箭头的记号 $[1] := \{0 \to 1\}$；令 $\mathcal{B} = \star$为终 2-范畴时，我们便可得到游走箭头。

注 4.4.8. 构造 4.4.7 为我们提供了一大类 2-反变 SO(2)-对合 3-范畴的例子。事实上，任何 SO(2)-对合 2- 范畴（例如任何刚性对称幺半 2- 范畴）都会给出这样一个例子。

推论 4.4.9. AmbAdj$[1]$是一个 2-反变 SO(2)-对合 3-范畴。

证明. 结合引理 4.4.6 与构造 4.4.7。 □

注 4.4.10. 设 $(\mathcal{B}, S)$ 为一个 SO(2)-对合 2-范畴。则我们在该图表中有一个可逆的 2-修正

$$\begin{array}{ccc} (-)^{RR} \circ (-)^{RR} & \xrightarrow{\cong} & (-)^{RR} \circ (-)^{RR} \\ \downarrow{\scriptstyle S^{-1} \circ \mathrm{id}} & \overset{\cong}{\swarrow} & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id} \circ S^{-1}} \\ \mathrm{id} \circ (-)^{RR} & \xrightarrow[\cong]{} & (-)^{RR} \circ \mathrm{id} \end{array} \tag{4.62}$$

这表达了任意函子与（双重）伴随函子的相容性数据是自然的这一事实。特别地，该修正的分量为任意对象 $a \in \mathcal{B}$ 提供了 2-同构 $S_a \cong S_a^{RR}$，使得 $S \cong S^{RR}$ 在 $2\mathrm{Cat}^{\mathrm{adj}}$ 中成立。下文将默认使用这一识别（或其等价形式，$S^R \cong S^L$）。

命题 4.4.11。 任意松弛 SO(2)-对合 2-范畴都定义了一个以 AmbAdj$[1]$ 为底的相对 SO(2)-对合 2-范畴。

证明。 设 $(\mathcal{B}, S)$ 是一个松弛 SO(2)-对合 2-范畴。我们定义一个 2-反变 SO(2)-对合 3-函子 F: AmbAdj $[1] \to 2\mathrm{Cat}^{\mathrm{adj}}$ 如下。我们令

$$\begin{aligned} &F(0) = \mathcal{B}, F(1) = \mathcal{B}^{(1,2)\,\mathrm{op}} \\ &F(a) = (-)^R, F(b) = (-)^L \\ &F(f) = S, F(g) = S^R \cong S^L \\ &F(\mathrm{ev}) = \mathrm{ev}_S, F(\mathrm{coev}) = \mathrm{coev}_S, \\ &F(\widetilde{\mathrm{ev}}) = \widetilde{\mathrm{ev}}_S, F(\widetilde{\mathrm{coev}}) = \widetilde{\mathrm{coev}}_S \end{aligned} \tag{4.63}$$

其中在最后一行中，我们默认为 S^R 和 S^L 已被识别。首先，这是一个 3-函子，因为 S^R 是 $2\mathrm{Cat}^{\mathrm{adj}}$ 中 S 的右（ 2- ）伴随，因此满足佐罗变换。该 3- 函子上的 SO(2)- 对合结构，即可逆修正 η ，由 S 给出；相干条件成立，因为 S 的扭曲量子维数是平凡的。

□

注释 4.4.12。 由命题 4.4.11 得到的 2-反变 SO(2)-对合 3-函子 F: AmbAdj$[1] \to 2\mathrm{Cat}^{\mathrm{adj}}$ 非常特殊。例如，我们注意到，在 1-态射层面上，函子 F 将 AmbAdj$[1]$ 中的 a 和 b 都映到 $2\mathrm{Cat}^{\mathrm{adj}}$ 中的可逆 1-态射。换言之，函子 F: AmbAdj$[1] \to 2\mathrm{Cat}^{\mathrm{adj}}$ 允许一个扩张

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{AmbAdj}[1])[a^{-1}, b^{-1}] & & \\ \uparrow & \searrow & \\ \mathrm{AmbAdj}[1] & \longrightarrow & 2\mathrm{Cat}^{\mathrm{adj}} \end{array} \tag{4.64}$$

其中 (AmbAdj$[1]$)$[a^{-1}, b^{-1}]$ 是由 AmbAdj$[1]$ 通过对a 和 b 自由添加逆元而得到的 3-范畴，竖直箭头为包含/局部化。

类似地，回想任意 SO(2)-对合 2-范畴特别地也是一个松弛 SO(2)-对合 2-范畴，因而同样纳入这一框架。它们更为特殊，因为相应的函子F: AmbAdj$[1] \to 2\mathrm{Cat}^{\mathrm{adj}}$ 容许一个扩张

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{AmbAdj}[1])[a^{-1}, b^{-1}, \mathrm{ev}^{-1}, \mathrm{coev}^{-1}, \widetilde{\mathrm{ev}}^{-1}, \widetilde{\mathrm{coev}}^{-1}] & & \\ \uparrow & \searrow & \\ (\mathrm{AmbAdj}[1])[a^{-1}, b^{-1}] & \searrow & \\ \uparrow & & \\ \mathrm{AmbAdj}[1] & \longrightarrow & 2\mathrm{Cat}^{\mathrm{adj}} \end{array} \tag{4.65}$$

其中 (AmbAdj$[1]$)$[a^{-1}, b^{-1}$,单位$^{-1}$,余单位$^{-1}$, ˜单位$^{-1}$, ⁀余单位$^{-1}$] 是由 (AmbAdj$[1]$)$[a^{-1}, b^{-1}$]再对单位,余单位 ˜单位和 ⁀余单位自由添加逆元而得到的 3-范畴。注意，这意味着 $S \dashv S^R$ 是一个伴随等价（特别地，S 可逆，且带有 $S^{-1} \cong S^R \cong S^L$）。特别地，我们有 (AmbAdj$[1]$)$[a^{-1}, b^{-1}$,单位$^{-1}$,余单位$^{-1}$, ˜单位$^{-1}$, ⁀余单位$^{-1}$] $\cong \star$，即最终的 3-范畴。换言之，我们通过为 $\star$提供一个更为精细（但等价）的模型，重新表述了如下事实：一个 SO(2)-对合 3-范畴是一个 2-反变 SO(2)-对合 3-范畴$\star \to 2\mathrm{Cat}^{\mathrm{adj}}$。

注记 4.4.13。 目前我们尚不清楚，是否存在一种松弛 SO(2)-对合 2-范畴的变体，能与 2 2 3 F $[1] \to$ -反变 SO( )-对合 -函子 : 2 ^{adj} AmbAdj Cat 精确对应，而非仅对应于那些下降到定义域局部化的函子。

5 松弛厄米固定点

本节讨论（松弛）厄米不动点。我们先讨论弱 O(1)-对合情形，然后转向松弛 SO(2)-对合情形。在介绍一些一般理论之后，我们将说明，弱 O(1)-对合范畴和松弛 SO(2)-对合 2-范畴分别应理解为 Cat 和 $2\mathrm{Cat}^{\mathrm{adj}}$ 中的松弛厄米不动点。

5.1 弱 $\mathrm{O}(1)$-对合情形

本节讨论松弛 O(1)-对合范畴中松弛厄米固定点的概念。

定义 5.1.1. 设 $(\mathcal{C}, d, \eta)$ 是一个松弛 O(1)-对合范畴。$\mathcal{C}$ 中的一个松弛厄米固定点 是由对象 $a \in \mathcal{C}$ 和态射 $\theta_a\colon a \to d(a)$ 组成的一对 (a, θ_a)，满足 $\theta_a = d(\theta_a) \circ \eta_a$。

备注 5.1.2. 厄米代数 K 理论文献中早已出现松弛厄米固定点，名称为对称形式，例如参见 [Sch10，第 3] 节。

备注 5.1.3. 设 $(\mathcal{C}, d, \eta)$ 是一个松弛 O(1)-对合范畴。考虑范畴 $\hat{}\mathcal{C}$，其对象为松弛厄米固定点，态射为 $\mathcal{C}$ 中的态射。由那些满足 θ_a 为同构的有序对 (a, θ_a) 构成的全子范畴，就是备注 2.1.10 中的匕首范畴；这里，dagger 结构将态射 $\dagger(X)\colon (b, \theta_b) \to (a, \theta_a)$ 对应到态射 $X\colon (a, \theta_a) \to (b, \theta_b)$，后者由以下复合给出

$$b \xrightarrow{\theta_b} d(b) \xrightarrow{d(X)} d(a) \xrightarrow{\theta_a^{-1}} a. \tag{5.1}$$

我们将满足 θ_a 为同构的偶对称作（严格）厄米不动点。请注意，在取厄米不动点的全子范畴时，考虑 $\mathcal{C}$ 还是其在构造 3.2.7 中描述的关联 O(1)-对合范畴并无区别：根据相干条件，θ_a 的可逆性会迫使 η_a 也可逆。

定义 5.1.4. 设 $(\mathcal{B}, d, \eta, \tau)$ 是一个 1-反变 O(1)-对合 2-范畴。$\mathcal{B}$ 中的一个松弛厄米固定点 是由一个对象 $a \in \mathcal{C}$、一个态射 $\theta_a\colon a \to d(a)$ 和一个 2-态射 $\omega_a\colon \theta_a \to d(\theta_a) \circ \eta_a$ 构成的三元组，并满足

$$\left(\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\eta_a} & d^2(a) \\ & {\scriptstyle\theta_a}\searrow & \swarrow{\scriptstyle d(\theta_a)} \\ & d(a) & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccccc} a & & \xrightarrow{\eta_a} & & d^2(a) \\ & & & {\scriptstyle d^2(\theta_a)}\searrow & \\ {\scriptstyle\theta_a}\downarrow & & & & d^3(a) \\ & {\scriptstyle\eta_{d(a)}}\nearrow & & \swarrow{\scriptstyle d(\eta_a)} & \\ d(a) & & & & \end{array}\right) \tag{5.2}$$

左侧图表由 ω_a 补全，右侧图表由 η_{θ_a}、τ_a 和 $d(\omega_a)$ 补全。

变体 5.1.5. 设 $(\mathcal{B},\ d,\ \eta,\ \tau)$ 是一个 2-反变 O(1)-volutive 2-范畴。$\mathcal{B}$ 中的一个松弛厄米固定点 是由一个对象 $a \in \mathcal{C}$、一个态射 $\theta_a\colon a \to d(a)$ 和一个 2-态射 $\omega_a\colon \eta_a \to d(\theta_a) \circ \theta_a$ 组成的三元组，它满足一个涉及 $d^3(a)$、类似于公式 (5.2) 的相干条件。

注 5.1.6. 变体 5.1.5 意义下的松弛厄米固定点，本质上与定义 3.3.7 意义下的 volutive 伴随相同。

例 5.1.7. 考虑 2-反变 O(1)-对合 2-范畴 $(\mathrm{Cat},\ (-)^{\mathrm{op}},\ \mathrm{id},\ \mathrm{id})$。在 $(\mathrm{Cat},\ (-)^{\mathrm{op}},\ \mathrm{id},\ \mathrm{id})$ 中，一个松弛厄米固定点就是一个松弛 O(1)-对合范畴。

备注 5.1.8. 设 $(\mathcal{B},\ d,\ \eta,\ \tau)$ 是一个 2-反变 O(1)-对合 2-范畴。考虑 2-范畴 $\hat{}\mathcal{B}$，其对象为松弛厄米固定点，其 1-态射和 2-态射为 $\mathcal{B}$ 中的态射。由那些使 θ_a 和 ω_a 为同构的对 $(a,\ \theta_a,\ \omega_a)$ 构成的全子 2-范畴，就是构造 2.2.10 中的 2-反变 O(1)-伴随 2-范畴。我们将满足 θ_a 和 ω_a 可逆的三元组 $(a,\ \theta_a,\ \omega_a)$ 称为（真正的）厄米不动点。

注记 5.1.9. 定义 5.1.4 和变体 5.1.5 中提出的松弛厄米不动点概念，更一般地适用于松弛 1-、2-或 (1,2)-反变 O(1)-对合 2-范畴。

引理 5.1.10. 考虑引理 3.3.6 中描述的 2-反变 O(1)-对合 2-范畴 Adj。我们断言，$a \in \mathrm{Adj}$ 具有松弛厄米不动点结构，而没有任何对象具有（严格的）厄米不动点结构。

证明。我们将为 $a \in \mathrm{Adj}$ 构造一个松弛厄米不动点结构。首先，有 1-态射 $\theta_a := X\colon a \to F(a) = b$。其次，有 2-态射 $\Pi_a := f\colon \mathrm{id}_a \to F(X) \circ X = Y \circ X$。佐罗变换保证这定义了一个松弛厄米不动点。要证明没有对象具有（严格的）厄米不动点结构，只需注意到 a 和 b 不同构。 □

注记 5.1.11。 $a \in \mathrm{Adj}$ 上的松弛厄米不动点结构并不唯一：另一个结构由 1-态射 $\theta'_a := X \circ Y \circ X\colon a \to F(a) = b$ 以及 2-态射 $\Pi'_a := f \circ f\colon \mathrm{id}_a \to F(X \circ Y \circ X) \circ X = Y \circ X \circ Y \circ X$ 给出。事实上，这类松弛厄米不动点结构有无穷多个，证明引理 5.1.10 中给出的那个是其中的“最小”结构。这一事实实质上蕴含了注记 3.2.4。
据我们所知，对象 $b \in \mathrm{Adj}$ 不存在松弛厄米不动点结构。通过转向游走双向伴随，可以弥补这一表面上的缺陷；在其中，Y 不仅是 X 的右伴随，也是左伴随。后一个伴随的余单位恰好提供了 $b \in \mathrm{Adj}$ 上松弛厄米不动点结构所缺少的 2-态射，其 1-态射为 $\theta_b := Y\colon b \to F(b) = a$。

构造 5.1.12. 设 $(\mathcal{B}, d, \eta, \tau)$ 和 $(\mathcal{B}', d', \eta', \tau')$ 是 2-反变 O(1)-对合 2-范畴。根据备注 5.1.8，我们可以构造 2-范畴 $\hat{}\mathcal{B}$ 和 $\hat{}\mathcal{B}'$，其对象是 lax 厄米固定点，而其 1-态射和 2-态射分别是 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{B}'$ 中的态射。此外，设 $(F, \alpha, \Xi)\colon (\mathcal{B}, d, \eta, \tau) \to (\mathcal{B}', d', \eta', \tau')$ 是一个 2-反变 O(1)-volutive 函子。我们希望构造一个 2-函子 $\mathcal{B} \to \mathcal{B}'$。对于对象 $(a, \theta_a, \omega_a) \in \mathcal{B}$，我们赋予由以下三元组组成的对象：(i) 对象 $F(a) \in \mathcal{B}'$；(ii) 1-态射 $\theta_{F(a)} := \alpha_a \circ F(\theta_a)\colon F(a) \to d'F(a)$；(iii) 2-态射 $\omega_{F(a)}$，它由 α_{θ_a}、Ξ_a 和 ω_a 通过适当补全图表构造而成

$$\begin{array}{ccccc}
F(a) & \xrightarrow{F(\theta_a)} & Fd(a) & \xrightarrow{\alpha_a} & d'F(a) \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_{F(a)}} & & \downarrow{\scriptstyle Fd(\theta_a)} & & \downarrow{\scriptstyle d'F(\theta_a)} \\
F(a) & \xrightarrow{F(\eta_a)} & Fd^2(a) & \xrightarrow{\alpha_{d(a)}} & d'Fd(a) \\
& {\scriptstyle \eta'_{F(a)}}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle d'(\alpha_a)} & \\
& & d'^2F(a) & &
\end{array} \tag{5.3}$$

容易验证，$(F(a)\ \theta_{F(a)}, \omega_{F(a)})$ 定义了一个松弛厄米固定点。在 1-态射和 2-态射层面，我们的赋值简单地由 F 给出。总之，2-反变 O(1)-volutive 函子下降到松弛厄米固定点的 2-范畴。

注记 5.1.13. 由构造 5.1.12 显然可见，我们也可以转而考虑弱 2-反变 O(1)-对合 2-范畴与弱 2-反变 O(1)-对合 2-函子；我们在任何地方都不需要所涉及的任何映射的可逆性。就本文的目的而言，所给出的构造已经足够。

定义 5.1.14. 设 $(\mathcal{C}, d, \eta)$ 为一个松弛 O(1)-对合范畴，并设 (a, θ_a) 与 (b, θ_b) 为 $(\mathcal{C}, d, \eta)$ 中的松弛厄米固定点。一个松弛等距 $(a, \theta_a) \to (b, \theta_b)$ 是一个态射 $X\colon a \to b$ 满足$d(X) \circ \theta_b \circ X = \theta_a$。

注 5.1.15. 设 $(\mathcal{C}, d, \eta)$ 是一个松弛 O(1)-对合范畴，(a, θ_a)、(b, θ_b) 和 (c, θ_c) 是 $(\mathcal{C}, d, \eta)$ 中的松弛厄米固定点，并设 $X\colon (a, \theta_a) \to (b, \theta_b)$ 和 $Y\colon (b, \theta_b) \to (c, \theta_c)$ 是松弛等距。那么，$Y \circ X\colon (a, \theta_a) \to (c, \theta_c)$ 也是一个松弛等距；事实上，我们有

$$d(Y \circ X) \circ \theta_c \circ (Y \circ X) = d(X) \circ d(Y) \circ \theta_c \circ Y \circ X = d(X) \circ \theta_b \circ X = \theta_a. \tag{5.4}$$

我们还注意到，$\mathrm{id}_a\colon (a, \theta_a) \to (a, \theta_a)$ 是一个松弛等距。

我们将所得结果记录如下。

定义 5.1.16. 设 $(\mathcal{C}, d, \eta)$ 是一个松弛 O(1)-对合范畴。我们用 $\mathrm{LaxHerm}(\mathcal{C}, d, \eta)$ 表示 $(\mathcal{C}, d, \eta)$ 中松弛厄米固定点与松弛等距所构成的范畴。

注 5.1.17. 设 $(\mathcal{C}, d, \eta)$ 是一个松弛 O(1)-对合范畴。其关联的匕首范畴中的松弛等距与普通等距相同。事实上，回忆一下，dagger 结构将每个态射 $X\colon (a, \theta_a) \to (b, \theta_b)$ 赋予 $\dagger(X) = \theta_a^{-1} \circ d(X) \circ \theta_b$，因此松弛等距恰好满足

$\dagger(X) \circ X = \mathrm{id}_a$。

注 5.　　1.18. 类似地，将松弛酉态射定义为同时可逆的松弛等距　　.

引理 5.1.19. 设 $(F, \alpha)\colon (\mathcal{C}, d, \eta) \to (\mathcal{C}', d', \eta')$ 是一个弱 O(1)-对合函子。则 (F, α) 诱导出一个函子 $\mathrm{LaxHerm}(\mathcal{C}, d, \eta) \to \mathrm{LaxHerm}(\mathcal{C}', d', \eta')$。

5.2 松弛$\mathrm{SO}(2)$-对合情形

本节中，　　我们讨论松弛 SO(2)-对合 2-范畴中的松弛厄米固定点这一概念　　.

定义 5.2.1. 设 $(\mathcal{B}, S)$ 是一个松弛 SO(2)-对合 2-范畴。$\mathcal{B}$ 中的一个松弛厄米固定点是一个有序对 (a, λ_a)，由一个对象 $a \in \mathcal{B}$ 和一个 2-态射 $\lambda_a\colon \mathrm{id}_a \to S_a$ 构成。

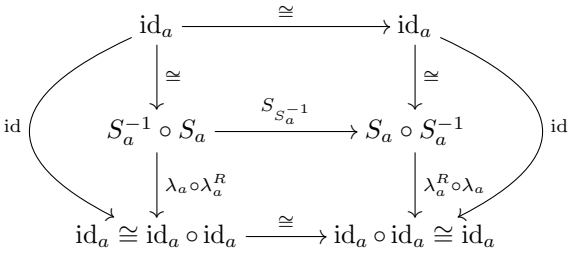
注 5.2.2. 设 $(\mathcal{B}, S)$ 是一个松弛 SO(2)-对合 2-范畴。考虑 2-范畴 $\hat{\mathcal{B}}$，其对象为松弛厄米固定点，其 1-态射和 2-态射取自 $\mathcal{B}$。其中满足 λ_a 是一个 2-同构的对象所构成的全子 2-范畴是一个 SO(2)-dagger 2-范畴，见 [CL25, 第 2.2 节。3]；这里，SO(2)-dagger 结构在 X 处的分量为：在 B 中的 2-同构 $(a, \lambda_a) \to (b, \lambda_b)$

$$X^{RR} \cong X^{RR} \circ \mathrm{id}_a \xrightarrow{\mathrm{id} \circ \lambda_a} X^{RR} \circ S_a \xrightarrow{S_X} S_b \circ X \xrightarrow{\lambda_b^{-1} \circ \mathrm{id}} \mathrm{id}_b \circ X \cong X. \tag{5.5}$$

我们将满足 λ_a 是 2-同构的配对 (a, λ_a) 称为（真正的）厄米不动点。

例 5.2.3。回顾引理 4.4.6 中描述的 SO(2)-对合 2-范畴 AmbAdj。我们已经看到，AmbAdj 上的 SO(2)-对合结构具有恒等 1-态射分量。特别地，AmbAdj 中的每个对象都具有 lax 和真正的厄米不动点结构。

定义 5.2.4。设 $(\mathcal{D}, S, \sigma)$ 是一个 2-反变 SO(2)-对合 3-范畴。$\mathcal{D}$ 中的一个松弛厄米固定点是由一个对象 $a \in \mathcal{B}$ 和一个 2- 态射 $\lambda_a\colon \mathrm{id}_a \to S_a$ 组成的二元组 (a, λ_a)，满足与 σ 的相容条件，即 3- 态射的图表



(5.6)

等于 $\mathrm{id}_{\mathrm{id}_a}$ 上的恒等 3-态射，其中左图表和右图表由伴随/求逆数据的自然性数据填充，上方图表由 3-态射分量 σ_a 填充，下方图表由 S 关于 λ_a 的自然性数据填充。

注 5.2.5. 与 2-范畴的情形一样，如果 λ_a 是一个 2-同构，我们就称松弛厄米固定点为（严格的）厄米不动点。

例 5.2.6. 回顾例 4.3.3 中的 2-反变 SO(2)-对合 3-范畴 $2\mathrm{Cat}^{\mathrm{adj}}$。（松弛）厄米不动点恰好是 $2\mathrm{Cat}^{\mathrm{adj}}$ 中的（松弛）SO(2)-对合 2-范畴。事实上，对象 $a \in 2\mathrm{Cat}^{\mathrm{adj}}$ 恰好对应于一个带伴随的 2-范畴 $\mathcal{B}$，2-态射 $\lambda_a\colon \mathrm{id}_a \to S_a$恰好对应于一个 2-变换 $\mathrm{id}_{\mathcal{B}} \to (-)^{RR}_{\mathcal{B}}$，而方程 (5.6) 的相干条件恰好对应于方程 (4.58)。

例 5.2.7. 回顾推论 4.4.9 中的 2-反变 SO(2)-对合 3-范畴 AmbAdj[1]。AmbAdj[1]中的每个对象都具有（严格的）厄米不动点结构，因此也具有松弛厄米固定点结构。

6 闭 2-范畴

本节讨论（完全）闭对称幺半 2-范畴和松弛 volutive 结构。我们重点指出它们与刚性对称幺半 2-范畴理论之间的关键区别，例如，1-闭性只会导出一个 oplax 2-函子，而拥有所有伴随则会导出一个严格的 2-函子（且该函子还是可逆的）。我们此前已经见过这一现象的一个例子：闭对称幺半范畴的典范松弛 O(1)-对合结构所对应的函子只是 oplax 幺半的。我们将通过足够良好的闭对称幺半范畴的 Morita 2-范畴，以及预函子 2-范畴来说明我们的理论。

6.1 松弛 2-函子和 2-变换

本节回顾松弛 2-函子和 2-变换的概念，以方便读者阅读，并确立相关约定。

定义 6.1.1. 设 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{B}'$ 为 2-范畴。弱 2-函子 $F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ 将每个对象$a \in \mathcal{B}$映为对象 $F(a) \in \mathcal{B}'$，将 $\mathcal{B}$中的每个 1-态射 $X\colon a \to b$映为 $\mathcal{B}'$中的 1-态射 $F(X)\colon F(a) \to F(b)$，将 $\mathcal{B}$中的每个 2-态射 $f\colon X \to Y$映为 $\mathcal{B}'$中的 2-态射 $F(f)\colon F(X) \to F(Y)$，将 $\mathcal{B}$中的每对 1-态射 $X\colon a \to b$和 $Y\colon b \to c$映为 2-态射 $F_{Y,X}\colon F(Y) \circ F(X) \to F(Y \circ X)$，并将每个对象 $a \in \mathcal{B}$映为 2-态射 $F_a\colon \mathrm{id}_{F(a)} \to F(\mathrm{id}_a) \in \mathcal{B}'$，且满足弱结合性和弱（左、右）单位元的相干条件，具体见 [JY20, 定义 4.1.2]。

定义 6.1.2. 若一个弱 2-函子的每个 2-态射 $F_a\colon \mathrm{id}_{F(a)} \to F(\mathrm{id}_a)$ 都是 2-同构，则称其为正规（或幺正）。此外，若每个 $F_{Y,X}$ 都是 2-同构，则称 F 为伪函子，或简称为*2*-函子。

定义 6.1.3. 设 $F, G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ 为弱 2-函子。一个弱 *2*-变换 $\alpha\colon F \Rightarrow G$ 由以下部分组成：对于每个 $c \in \mathcal{C}$，有 1-态射分量 $\alpha_c\colon F(c) \to G(c)$；对于 $X\colon c \to d$（$\mathcal{C}$ 中的一个 1-态射），有 2-态射分量 $\alpha_X\colon G(X) \circ \alpha_c \Rightarrow \alpha_d \circ F(X)$。这些分量满足与单位和 1-态射复合的相容性，以及关于 2-态射的自然性；具体表述见 [JY20，定义 4.2.1]。

定义 6.1.4。 如果每个 α_X 都是 2-同构，则称弱 2-变换为伪自然变换，或简称*2*-变换。

变体 6.1.5。 松弛 2-函子和松弛 2-变换都允许有余弱版本，其中结构 2-态射 F_a、$F_{Y,X}$ 以及 2-态射 α_X 分别取反向关系。我们强调，可以考虑松弛 2-函子之间的余弱 2-变换，详见 [JY20，第 4 节3]（其中 oplax 被称为 colax）。

注 6.1.6。设 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{B}'$ 为 2-范畴。则存在一个 2-范畴 Fun($\mathcal{B}$、$\mathcal{B}'$)，其对象为松弛 2-函子，1-态射为松弛 2-变换，2-态射为修正，见 [JY20，定义 4.4.10 及定理 4.4.11]。

注 6.1.7。设 $\mathcal{B}$、$\mathcal{B}'$和$\mathcal{B}''$为 2-范畴，且 $F\colon \mathcal{B}\to B'$ 和 $G\colon \mathcal{B}'\to\mathcal{B}'$ 为松弛 2-函子。那么，我们可以复合 G 和 F，得到一个松弛 2-函子 $G\circ F\colon \mathcal{B}\to\mathcal{B}'$，参见 [JY20，定义 4.1.26 和引理 4.1.29]。此外，还存在一个范畴，其对象为 2-范畴，态射为松弛 2-函子，参见 [JY20，定理 4.1.30]。

注 6.1.8。对于每个松弛 2-函子 $F\colon \mathcal{B}\to\mathcal{B}'$，都有一个在 [JY20，例 4.1.10] 中定义的 *1-*反范 松弛 2-函子 $F^{1\,\mathrm{op}}\colon \mathcal{B}^{1\,\mathrm{op}}\to\mathcal{B}^{1\,\mathrm{op}}$。另一方面，还有一个 *2-* 对偶 oplax 2- 函子 $F^{2\,\mathrm{op}}\colon \mathcal{B}^{2\,\mathrm{op}}\to\mathcal{B}^{2\,\mathrm{op}}$，以及一个 *(1,2)-* 反向 oplax 2-函子 $F_{(1,\,2)\,\mathrm{op}}\colon \mathcal{B}^{(1,2)\,\mathrm{op}}\to\mathcal{B}^{(1,2)\,\mathrm{op}}$。

注记 6.1.9. 2-范畴与弱（分别为 oplax）2-函子构成的 1-范畴，通过 2-反向构造彼此等价。

注记 6.1.10. 注意，根据定义，（反）弱 2-函子 $\mathcal{B}\to\mathcal{B}'$ 在 Hom-范畴层级上诱导出严格函子。（反）弱性仅体现在这些诱导函子与单位及复合的相容性上。

类似地，弱 2-函子之间的（反）松弛自然变换，在 Hom-范畴层级上诱导出诱导函子之间的自然变换；（反）弱性同样体现在与单位及复合的相容性上。

给定一个松弛/oplax 2-函子 $F\colon \mathcal{B}\to\mathcal{B}'$，它诱导出函子 $F_{a,\,b}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(a,\,b)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}'}(F(a)\,F(b))$；其 2-对偶 oplax/松弛 2-函子 $F\colon \mathcal{B}^{2\,\mathrm{op}}\to(\mathcal{B}')^{2\,\mathrm{op}}$ 在相应的 Hom-范畴上诱导出函子 $F_{\mathrm{op}\,a,\,b}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(a,\,b)^{\mathrm{op}}\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}'}(F(a)\,F(b))^{\mathrm{op}}$。

6.2 1-闭 2-范畴

本节讨论 1-闭 2-范畴的基本理论。

定义 6.2.1. 设 $\mathcal{B}$ 为一个 2-范畴。若对于每个对象 $c\in\mathcal{C}$ 和每个 1-态射 $X\colon a\to b$（其中 $a\to b$ 属于 $\mathcal{B}$），函子 $(-)\circ X\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(b,\,c)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(a,\,c)$ 都有右伴随，则称 $\mathcal{B}$ 为*右 1-*闭。类似地，若对于每个对象 $c\in\mathcal{C}$ 和每个 1-态射$X\colon a\to b$（其中 $a\to b$ 属于 $\mathcal{B}$），函子 $X\circ(-)\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(c,\,a)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(c,\,b)$ 都有右伴随，则称 $\mathcal{B}$ 为*左 1-*闭。若 $\mathcal{B}$ 同时是左 1-闭和右 1-闭的，则称其为*1-*闭。

例 6.2.2. 任何具有左/右伴随的 2-范畴 $\mathcal{B}$ 都是左/右 1-闭的。

变体 6.2.3. 若定义 6.2.1 中的复合函子容许左伴随而非右伴随，则称 $\mathcal{B}$ *右/左 1-*余闭合。

引理 6.2.4. 1-闭 2-范畴的 1-反范仍是 1-闭的。1-闭 2-范畴的 2-对偶是 1-余闭合的。

注记 6.2.5. 引理 6.2.4 表明，取 2-对偶并非 1-闭 2-范畴的（高阶）范畴上的一种（经典）$\mathbb{Z}_2$-对称。这与 2-范畴（带伴随）的情形有实质性不同。特别地，尽管带伴随的 2-范畴比普通2-范畴具有更多对称性，1-闭 2-范畴却相反，具有更少的对称性。

注 6.2.6。我们希望详细说明右 1-闭 2-范畴的一些数据。设 $\mathcal{B}$ 是一个右 1-闭 2-范畴，且 $X\colon a\to b$ 是一个 1-态射。那么，$(-)\circ X\colon \mathrm{Hom}(b,c)\to\mathrm{Hom}(a,c)$ 有一个右伴随，我们将其记为 $(-)^X\colon \mathrm{Hom}(a,c)\to\mathrm{Hom}(b,c)$。根据定义，对于任意 1- 态射 $Z\colon a\to c$，存在一个 2- 态射 $\mathrm{ev}_X^Z\colon Z^X\circ X\to Z$，使得对每个 $Y\colon b\to c$，我们都有一个自然双射 $\hom_{\mathcal{B}}(Y,Z^X)\cong\hom_{\mathcal{B}}(Y\circ X,Z)$。现在假设 $\mathcal{B}$ 是一个左 1-闭 2-范畴，且 $X\colon a\to b$ 是一个 1-态射。那么，

$X\circ(-)\colon \mathrm{Hom}(c,a)\to\mathrm{Hom}(c,b)$ 有一个右伴随，记作 ${}^{X}(-)\colon \mathrm{Hom}(c,b)\to\mathrm{Hom}(c,a)$。根据定义，对于任意 1-态射 $Z\colon c\to b$，存在一个 2-态射 $\tilde{}\mathrm{ev}_X^Z\colon X\circ {}^{X}(Z)\to Z$，使得对每个$Y\colon c\to a$，都有一个自然双射 $\hom_{\mathcal{B}}(Y,{}^{X}Z)\cong\hom_{\mathcal{C}}(X\circ Y,Z)$。

构造 6.2.7. 设 $\mathcal{B}$ 是一个右 1-闭 2-范畴，且 a、b、$c\in\mathcal{B}$ 是对象。首先注意，赋值 $\mathrm{Hom}(a,b)^{\mathrm{op}}\times\mathrm{Hom}(a,c)\to\mathrm{Hom}(b,c)$（将 (X,Y) 赋为 $\mapsto Y^X$）具有函子性。我们通过规定 $\mathcal{J}(a)=a$、$\mathcal{J}(X)=\mathrm{id}_a^X$，以及对于对象 $a\in\mathcal{B}$、1-态射 $X,Y\colon a\to b$ 和 2-态射 $f\colon X\to Y$（其中 $X\to Y$ 属于 $\mathcal{B}$），令 $\mathcal{J}(f):=\mathrm{id}_a^f$，从而定义一个 oplax 2-函子 $\mathcal{J}\colon\mathcal{B}\to\mathcal{B}^{(1,2)}\,\mathrm{op}$。

为求完备起见，我们也描述 oplax[3] 2-函子 $\mathcal{J}$ 在 $\mathcal{B}$ 中的相干 2-态射 $\mathrm{id}^X\circ\mathrm{id}^Y\to\mathrm{id}^{Y\circ X}$ 和 $\mathrm{id}_a\to\mathrm{id}_a^{\mathrm{id}_a}$。前者构造为以下 2-态射的原像：

$$\mathrm{id}^X\circ\mathrm{id}^Y\circ Y\circ X\xrightarrow{\mathrm{id}\circ\mathrm{ev}_Y\circ\mathrm{id}}\mathrm{id}^X\circ X\xrightarrow{\mathrm{ev}_X}\mathrm{id}\tag{6.1}$$

在双射 $\hom(\mathrm{id}^X\circ\mathrm{id}^Y,\ \mathrm{id}^{Y\circ X})\cong\hom(\mathrm{id}^X\circ\mathrm{id}^Y\circ Y\circ X,\ \mathrm{id})$ 下，而后者是通过双射 $\hom(\mathrm{id}_a,\ \mathrm{id}_a^{\mathrm{id}_a})\cong\hom(\mathrm{id}_a\circ\mathrm{id}_a,\ \mathrm{id}_a)\cong\hom(\mathrm{id}_a,\ \mathrm{id}_a)$ 下 2-态射 $\mathrm{id}_{\mathrm{id}_a}$ 的原像构造得到的；在这两种情况下，我们都用到了 $\mathcal{B}$ 的右闭性。

例 6.2.8。设 $\mathcal{C}$ 是一个闭幺半范畴，我们可以将其解释为只有一个对象的 1-闭 2-范畴。那么，对偶函子 $d\colon\mathcal{C}\to\mathcal{C}^{\mathrm{op}}_{\otimes^{\mathrm{op}}}$ 是 oplax 幺半的，因此经环路化后会诱导出一个 oplax 2-函子。

注 6.2.9。对于具有右伴随的 2-范畴，构造 6.2.7 化简为伴随 2-函子 $(-)^R\colon\mathcal{B}\to\mathcal{B}^{(1,2)\,\mathrm{op}}$。

记号 6.2.10. 构造 6.2.7 经显然的修改后，也适用于左 1-闭 2-范畴。若考虑一个同时是左右 1-闭的 2-范畴，我们将使用记号$\mathcal{J}_L$ 和 $\mathcal{J}_R$ 来区分相应的两个 oplax 2-函子。

注记 6.2.11. 设 $\mathcal{B}$ 是一个 1-闭 2-范畴。对于 $\mathcal{B}$中的任意两个 1-态射 $Y\colon a\to b$ 和 $X\colon b\to c$，我们有 2-态射

$$\mathrm{id}^{\mathrm{id}^X}\circ\mathrm{id}^{\mathrm{id}^Y}\longrightarrow\mathrm{id}^{\mathrm{id}^Y\circ\mathrm{id}^X}\longleftarrow\mathrm{id}^{\mathrm{id}^{X\circ Y}}\tag{6.2}$$

它们构成如下 2-态射交换图

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{id}^{\mathrm{id}^X}\circ\mathrm{id}^{\mathrm{id}^Y}\circ(\mathrm{id}^Y\circ\mathrm{id}^X) & \xrightarrow{\mathrm{id}\circ\mathrm{ev}_{\mathrm{id}^Y}\circ\mathrm{id}} & \mathrm{id}^{\mathrm{id}^X}\circ\mathrm{id}^X\\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}_{\mathrm{id}^X}}\\
\mathrm{id}^{\mathrm{id}^Y\circ\mathrm{id}^X}\circ(\mathrm{id}^Y\circ\mathrm{id}^X) & \xrightarrow{\mathrm{ev}_{\mathrm{id}^Y\circ\mathrm{id}^X}} & \mathrm{id}\\
\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{ev}_{\mathrm{id}^{X\circ Y}}}\\
\mathrm{id}^{\mathrm{id}^{X\circ Y}}\circ(\mathrm{id}^Y\circ\mathrm{id}^X) & \longrightarrow & \mathrm{id}^{\mathrm{id}^{X\circ Y}}\circ(\mathrm{id}^{X\circ Y})
\end{array}\tag{6.3}$$

其中，对于下方的水平箭头，我们使用了 $\mathcal{J}$的 oplax 函子性数据。一般而言，上述 2-态射的方向表明，赋值 $X\mapsto\mathrm{id}^{\mathrm{id}^X}$ 不能组装成一个（反）弱 2-函子 $\mathcal{B}\to\mathcal{B}$。

注记 6.2.12. 在带伴随的 2-范畴的情形下，我们确实有一个 2-函子 $(-)^{RR}\colon\mathcal{B}\to\mathcal{B}$。

变体 6.2.13. 设 $\mathcal{B}$ 为一个 1-闭 2-范畴。我们有 2-态射

$$\mathrm{id}^{X\,\mathrm{id}}\circ\mathrm{id}^{Y\,\mathrm{id}}\longrightarrow\mathrm{id}^{Y\,\mathrm{id}\circ X\,\mathrm{id}}\longleftarrow\mathrm{id}^{X\circ Y\,\mathrm{id}}\tag{6.4}$$

对于 $\mathcal{J}_L$ 与 $\mathcal{J}_R$的其他可能组合，情况类似。

[3]注意，$\mathcal{B}^{(1,2)\,\mathrm{op}}$ 中的 oplax 函子性数据类似于 $\mathcal{B}$中的松函子性数据。

注记 6.2.14。 </style}设 $\mathcal{B}$ 为一个 1-闭 2-范畴。设 $X\colon a \to b$ 为 $\mathcal{B}$中的一个 1-态射。我们有一个典范 2-态射

$$X \to \mathrm{id}^{{}^{X}\mathrm{id}} \tag{6.5}$$

由 2-态射 $\tilde{}\mathsf{ev}_X\colon X \circ^X \mathsf{id} \to \mathsf{id}$ 诱导。由于赋值 $X \mapsto \mathsf{id}^{X_{\mathrm{id}}}$ 不一定定义一个（反）弱 2-函子，因此询问我们在此描述的 2-态射是否构成一个（反）弱 2-变换是不合理的。完全类似地，存在一个 2-态射 $X \to^{\mathrm{id}^X} \mathsf{id}$。令 $f\colon X \to Y$为一个 2-态射。我们断言，以下 2-态射图表

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathrm{id}^{{}^{X}\mathrm{id}} \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}^{f}{}^{\mathrm{id}}} \\ Y & \longrightarrow & \mathrm{id}^{{}^{Y}\mathrm{id}} \end{array} \tag{6.6}$$

是交换的。事实上，这两个 2-态射 $X \to \mathsf{id}^{Y_{\mathrm{id}}}$ 诱导出两个 2-态射 $X \to^Y \mathsf{id}$，它们由图表的交换性而重合

$$\begin{array}{ccc} X \circ^Y \mathrm{id} & \xrightarrow{\mathrm{id} \circ^f \mathrm{id}} & X \circ^X \mathrm{id} \\ \downarrow{\scriptstyle f\circ\mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}_X} \\ Y \circ^Y \mathrm{id} & \xrightarrow{\mathrm{ev}_Y} & \mathrm{id}\,. \end{array} \tag{6.7}$$

换句话说，2-态射 $X \to \mathsf{id}^{X_{\mathrm{id}}}$ 关于 X是自然的。

注记 6.2.15。 设 $\mathcal{B}$ 是一个右 1-闭 2-范畴，并配有一个 2-范畴等价$d\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}^{2\,\mathrm{op}}$。那么， $\mathcal{B}$是左 1-闭的，且

$${}^{X}\mathrm{id} = d^{-1}(\mathrm{id}^{d(X)}) \tag{6.8}$$

对任意 1-态射 $X\colon a \to b$ 属于 $\mathcal{B}$。

6.3 0-闭 2-范畴

本节我们讨论 0-闭幺半范畴的基本理论。

定义 6.3.1. 设 $\mathcal{B}$ 为一个幺半 2-范畴。若对每个 $a \in \mathcal{B}$，2-函子 $(\text{–}) \otimes a\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ 都具有右伴随，则称 $\mathcal{B}$ 为*右 0-闭* 。类似地，若对每个 $a \in \mathcal{B}$，2-函子 $a \otimes (\text{–})\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ 都具有右伴随，则称 $\mathcal{B}$ 为*左 0-闭* 。若 $\mathcal{B}$ 既是左 0-闭又是右 0-闭，则称其为*0-闭* 。

若对称幺半 2-范畴 $\mathcal{B}$ 的底层幺半 2-范畴是右（等价地：左）0-闭，则称其为*0-闭* 。

备注 6.3.2. 单体 2-范畴也存在较弱版本的 0-闭性，正如 2-函子之间的伴随也存在较弱版本。以下不讨论这些内容。

定义 6.3.3. 设 $\mathcal{B}$ 为一个 2-范畴。 $\mathcal{B}$ 上的松弛 *1*-反变 O(1)-对合结构 由一个 2-函子 $d\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}^{1\,\mathrm{op}}$、一个 2-变换 $\eta\colon \mathrm{id} \to d^{1\,\mathrm{op}} \circ d$ 以及一个可逆修正 $\tau\colon (\mathrm{id} \circ \eta^{1\,\mathrm{op}}) \bullet (\eta \circ \mathrm{id}) \to \mathrm{id}$ 组成，并满足关于 d 的四重积的显然相干条件。

注 6.3.4。 尽管术语有所选择，弱 1-反变 O(1)-对合结构完全由伪函子、变换等构成。如同在 1-范畴情形中一样，这一术语旨在将其与严格的 O(1)-对合结构区分开来，并强调底层函子的（余）弱幺半结构。

以下断言的证明类似于其 1-范畴类比和刚性 2-范畴对应物；我们将从简处理。

命题 6.3.5. 设 $\mathcal{B}$ 是一个 0-闭对称幺半 2-范畴。那么， $\mathcal{B}$ 具有一个弱 1-反变 O(1)-对合结构。

证明. 首先注意到，我们有一个 2-函子 $\mathcal{B}^{1\,\mathrm{op}} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}, (a,b) \mapsto b^a$。对于一个 1-态射 $(X,Y)\colon (a,b) \to (\hat{a},\hat{b})$，它将其映为 1-态射 $Y^X\colon b^a \to \hat{b}^{\hat{a}}$；该态射对应于范畴等价 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(b^a, \hat{b}^{\hat{a}}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(b^a \otimes \hat{a}, \hat{b})$ 下的 1-态射

$$b^a \otimes \hat{a} \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes X} b^a \otimes a \xrightarrow{\mathrm{ev}_a^b} b \xrightarrow{Y} \hat{b}. \tag{6.9}$$

对于一个 2-态射 $(f,g)\colon (X,Y) \to (\overline{X},\overline{Y})$，它将其映为 2-态射 $g^f\colon Y^X \to \overline{Y}^{\overline{X}}$，该态射对应于 2-态射

$$\begin{array}{ccccccc}
b^a \otimes \hat{a} & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes X} & b^a \otimes a & \xrightarrow{\mathrm{ev}_a^b} & b & \xrightarrow{Y} & \hat{b} \\
\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & \swarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes f} & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & \swarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & \swarrow{\scriptstyle g} & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\
b^a \otimes \hat{a} & \xrightarrow[\mathrm{id}\otimes \overline{X}]{} & b^a \otimes a & \xrightarrow[\mathrm{ev}_a^b]{} & b & \xrightarrow[\overline{Y}]{} & \hat{b}.
\end{array} \tag{6.10}$$

容易验证这定义了一个 2-函子。现在，我们通过赋予$a \mapsto 1^a$， $X \mapsto 1^X$， $f \mapsto 1^f$来定义一个 2-函子 $d\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}^{1\,\text{对偶范畴}}$，也就是说，我们考虑复合 $\mathcal{B} \cong \mathcal{B} \times \{\star\} \to \mathcal{B} \times \mathcal{B}^{1\,\text{对偶范畴}} \to \mathcal{B}^{1\,\text{对偶范畴}}$，其中最后一个 2-函子是上述构造的 2-函子的 1-反范，而 2-函子 $\{\star\} \to \mathcal{B}^{1\,\mathrm{op}}$由其像 1 决定。

接下来，我们希望描述一个 2-变换 $\eta\colon \mathrm{id} \to d^{1\,\mathrm{op}} \circ d$。它在 $a \in \mathcal{B}$处的 1-态射分量由 1-态射 $\eta_a\colon a \to 1^{1^a}$ 给出，该态射对应于 1-态射 $a \otimes 1^a \cong 1^a \otimes a \to 1$，其中使用了 $\mathcal{B}$的编织。

接下来，我们希望描述一个修正 $\tau\colon (\mathrm{id} \circ \eta^{1\,\mathrm{op}}) \bullet (\eta \circ \mathrm{id}) \to \mathrm{id}$。它在 $a \in \mathcal{B}$ 处的 2-态射分量是一个 2-同构 $1_a^\eta \circ \eta_{1^a} \to \mathrm{id}_{1^a}$，其构造方式与 1-范畴情形完全类似（在该情形中这是一个相干条件）。可以验证它满足所需的相干条件。 □

6.4 全闭2-范畴

本节我们研究（全）闭幺半 2-范畴的基本理论。

定义 6.4.1. 设 $\mathcal{B}$ 为一个（对称的）幺半 2-范畴。我们称 $\mathcal{B}$ 是（全）闭的，如果 $\mathcal{B}$ 既是 0-闭的也是 1-闭的。

接下来，我们希望理解全闭幺半2-范畴上的 0-闭性与 1-闭性（反松）2-函子 d 和 $\mathcal{J}$ 之间的相互作用。我们先从稍更一般的情形入手。

构造 6.4.2. 设 $\mathcal{B}$， $\mathcal{B}'$ 为右1-闭2-范畴，并设 $F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ 为一个 2-函子。则我们得到一个 oplax 2-变换 $\xi^F\colon \mathcal{J}_R \circ F \to F_{(1,\,2)\mathrm{op}} \circ \mathcal{J}_R$如下：1-态射分量是平凡的，而在 $X\colon a \to b$ 处的 2-态射分量由 2-态射单位$_X\colon \mathrm{id}^X \circ X \to \mathrm{id}$ 在该映射下的像给出

$$\hom(\mathrm{id}^X \circ X, \mathrm{id}) \xrightarrow{F} \hom(F(\mathrm{id}^X) \circ F(X), \mathrm{id}) \xrightarrow{\psi^{-1}} \hom(F(\mathrm{id}^X), \mathrm{id}^{F(X)}) \tag{6.11}$$

由 F以及定义右 1-闭结构的伴随所诱导。换言之，其分量由 $\xi^F_X := \psi^{-1}(F(\text{单位}_X))\colon F(\mathrm{id}^X) \to \mathrm{id}^{F(X)}$ 给出（此处省略了

2-函子 F 的隐含结构 2-态射）。由于此 2-变换的 1-态射分量都是平凡的，因此也可以将其理解为一个弱 2-变换 $F_{(1,\ 2)^{\mathrm{op}}} \circ \mathcal{J}_R \to \mathcal{J}_R \circ F$，我们仍用同一符号表示它。

注记6.4.3。 构造 6.4.2 中 2-态射的构造，在较弱的假设 F是一个弱 2-函子时完全类似。然而在此情形下， $F_{(1,\ 2)^{\mathrm{op}}}$是一个 oplax 2-函子，因此 F 与 $\mathcal{J}_R$ 的复合并非（全局地）良定义。这与第6.2节中观察到的现象类似。

推论6.4.4。 设 $\mathcal{B}$ 为一个（完全）闭幺半 2-范畴。我们有一个 oplax 2-变换 $(\mathcal{J}_R)^{1^{\mathrm{op}}} \circ d \to d^{(1,2)^{\mathrm{op}}} \circ \mathcal{J}_R$。

6.5 闭性的局部视角

本节将从局部视角讨论闭性。我们先给出动机。

注记6.5.1。 设 $\mathcal{B}$ 为一个1-闭对称幺半2-范畴。我们此前已经观察到，oplax 2-函子 $\mathcal{J}$: $\mathcal{B} \to \mathcal{B}^{(1,2)^{\mathrm{op}}}$对每一对对象 $a,\ b \in \mathcal{B}$诱导出一个函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(a,\ b) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(b,\ a)^{\mathrm{op}}$。虽然2-对偶 $\mathcal{J}_{(1,\ 2)^{\mathrm{op}}}$: $\mathcal{B}^{(1,2)^{\mathrm{op}}} \to \mathcal{B}$是一个弱 2-函子，因而不能立即与 $\mathcal{J}$复合，但它诱导出一个函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(b,\ a)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(a,\ b)$，所以我们至少可以在局部将这两个（反）弱 2-函子复合起来。本节各项构造背后的主要直觉是，这种局部视角对于某些目的而言已经足够。

构造 6.5.2. 设 $(\mathcal{B}, d, \eta, \tau)$ 是一个松弛1-反变O(1)-对合2-范畴。那么，由满足 η_a 是一个 1-同构的对象 $a \in \mathcal{B}$ 构成的全子 2-范畴继承了一个 1-反变 O(1)-对合结构。接着，我们可以通过应用 CL25 第 2.3 节中的构造 [，将这个 1-反变 O(1)-对合 2-范畴转化为一个 1-ˆ 反变 O(1)-dagger 2-范畴 B 。更明确地说，2-范畴 B 的对象是由三元组 (a, θ_a, ω_a) 构成的，其中包括一个对象 $a \in B$、一个 1-同构 θ_a: $a \to d(a)$，以及一个 2-同构 ω_a: $d(\theta_a) \circ \eta_a \to \theta_a$ ，它们满足关于 $d^3(a)$ 的相干条件；详情参见 CL25 第 2.3 节3]。ˆB 的 1-态射和 2-态射与 $\mathcal{B}$ 中的相同。其 O(1)-dagger 结构所对应的函子将一个 1-态射X: $(a, \theta_a, \omega_a) \to (b, \theta_b, \omega_b)$ 映为如下给出的 1-态射

$$b \xrightarrow{\theta_b} d(b) \xrightarrow{d(X)} d(a) \xrightarrow{\theta_a^{-1}} a. \tag{6.12}$$

引理 6.5.3. 设 $\mathcal{B}$ 为一个全闭对称幺半 2-范畴。由命题 6.3.5 与构造 6.5.2 结合所构造的 1-反变 O(1)-dagger 2-范畴是 1-闭的。

ˆ证明. 这由如下观察得出：构造 6.5.2 中所描述的 B 的 Hom-范畴与复合，与 $\mathcal{B}$的相同。

□

构造 6.5.4. 设 $\mathcal{B}$ 为一个 1-闭 1-反变 O(1)-dagger 2-范畴。下文中我们将大量使用注记 6.1.10。通过复合，我们得到一个 oplax 2-函子 $d \circ \mathcal{J}_R$: $\mathcal{B} \to \mathcal{B}^{2^{\mathrm{op}}}$，它诱导出一个函子$d_{a,b}$: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(a, b) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(a, b)^{\mathrm{op}}$，对每一对对象 $a, b \in \mathcal{B}$。另一方面，2-对偶$(d \circ \mathcal{J}_R)^{2^{\mathrm{op}}}$: $\mathcal{B}^{2^{\mathrm{op}}} \to \mathcal{B}$（它是一个弱 2-函子）诱导出一个函子$d_a^{\mathrm{op}}{}_{,b}$: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(a, b)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(a, b)$，从而我们可以考虑该复合

$$\overline{d}_{a,b}^{\mathrm{op}} \circ \overline{d}_{a,b} \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(a, b) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(a, b). \tag{6.13}$$

现在，根据注记 6.2.15，我们计算

$$(\overline{d}_{a,b}^{\mathrm{op}} \circ \overline{d}_{a,b})(X) =^{\mathrm{id}^X} \mathrm{id} \tag{6.14}$$

2-态射也类似。特别地，我们有一个自然变换 $\eta_{a,b}$: $\mathrm{id} \to d_a^{\mathrm{op}}{}_{,b} \circ d_{a,b}$，其在 $X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(a, b)$处的分量由注记 6.2.14 中描述的典范态射 $X \to^{\mathrm{id}^X} \mathrm{id}$ 给出。

引理 6.5.5。在构造 6.5.4 的情形下，自然变换 $\eta_{a,b}\colon \mathrm{id} \to d_a^{\mathrm{op}},_b \circ d_{a,b}$ 满足 $d_{a,b}((\eta_{a,b})_X) \circ (\eta_{a,b})_{d_{a,b}(X)} = \mathrm{id}_{d_{a,b}(X)}$，对所有 $X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(a,b)$ 均成立。特别地，$(d_{a,b}, \eta_{a,b})$ 在 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(a,b)$ 上定义了一个弱 O(1)-对合结构。

证明。 本质上与非弱情形相同。 □

构造 6.5.6。在引理 6.5.5 的情形中，设 a、b、c 为 $\mathcal{B}$ 中的对象，并考虑 $\mathcal{B}$ 中的复合函子 $\mathrm{Hom}(b,c) \times \mathrm{Hom}(a,b) \to \mathrm{Hom}(a,c)$。两侧均带有弱 O(1)-对合结构，其中前者由 $\mathrm{Hom}(a,b)$ 与 $\mathrm{Hom}(b,c)$ 上的结构之积给出（参见定义 3.2.23）。我们希望在该复合函子上构造一个弱 O(1)-对合结构。首先回顾，这些弱 O(1)-对合结构所基于的函子分别将 $(Y,X) \in \mathrm{Hom}(b,c) \times \mathrm{Hom}(a,b)$ 映到 $(d(\mathrm{id}^Y)\ d(\mathrm{id}^X))$，并将 $Y \circ X \in \mathrm{Hom}(a,c)$ 映到 $d(\mathrm{id}^{Y\circ X})$。根据定义，我们需要构造一个可嵌入该图表的自然变换

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(b,c) \times \mathrm{Hom}(a,b) & \xrightarrow{\circ} & \mathrm{Hom}(a,c) \\ \downarrow & \overset{\alpha}{\swarrow} & \downarrow \\ \mathrm{Hom}(b,c)^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Hom}(a,b)^{\mathrm{op}} & \xrightarrow{\circ} & \mathrm{Hom}(a,c)^{\mathrm{op}}. \end{array} \tag{6.15}$$

我们将 α 在 $(Y,X) \in \mathrm{Hom}(b,c) \times \mathrm{Hom}(a,b)$ 处的分量定义为典范 2-态射

$$d(\mathrm{id}^Y) \circ d(\mathrm{id}^X) \xrightarrow{\cong} d(\mathrm{id}^X \circ \mathrm{id}^Y) \longrightarrow d(\mathrm{id}^{Y\circ X}). \tag{6.16}$$

表达 d 和 $\mathcal{J}$ 的（oplax）函子性。容易验证，这为复合函子定义了一个弱 O(1)-对合结构。

我们还为每个对象 $a \in \mathcal{B}$ 构造一个弱 O(1)-对合函子 $\star \to \mathrm{Hom}(a,a)$。底层函子可以取为以 $\mathrm{id}_a \in \mathrm{Hom}(a,a)$ 为值的常值函子。弱 O(1)-对合结构由适合下图的自然变换给出

$$\begin{array}{ccc} \star & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(a,a) \\ \downarrow & \overset{\lambda}{\swarrow} & \downarrow{\scriptstyle \overline{d}_{a,a}} \\ \star^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(a,a)^{\mathrm{op}} \end{array} \tag{6.17}$$

将 $\star$ 的唯一对象对应到典范 2-态射

$$\mathrm{id}_a \to d(\mathrm{id}^{\mathrm{id}_a}) \tag{6.18}$$

表达 d 和 $\mathcal{J}$ 的（oplax）函子性。

我们由此得到以下结果。

命题 6.5.7. 设 $\mathcal{B}$ 是一个 1-闭 1-反变 O(1)-dagger 2-范畴。那么， $\mathcal{B}$ 是由弱 O(1)-对合范畴富集的。

注 6.5.8. 尽管由 O(1)-对合范畴富集的范畴与 2-反变 O(1)-伴随 2-范畴相同（见注 2.2.11），但据我们所知，目前还没有类似的结果能将由弱 O(1)-对合范畴富集的范畴与某种“经典”的 dagger 结构对应起来。我们再次强调，在定义 2-反变 O(1)-对合/dagger 结构时，仅要求各项成分都是弱的，会立刻导致问题，因为 2-对偶会改变变差性。

作为命题 6.5.7 的推论，我们可以进行如下构造。

构造 6.5.9. 设 $\mathcal{B}$ 是一个 1-闭 1-反变 O(1)-dagger 2-范畴。由于 $\mathcal{B}$ 取值于弱 O(1)-对合范畴，我们可以在局部转到松弛厄米固定点与松弛等距所构成的范畴。根据转到 LaxHerm 的函子性以及命题 6.5.7，这一过程与复合及单位相容。具体而言，我们可以将弱 O(1)-对合范畴 $(\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(a,b)\, d_{a,b}, \eta_{a,b})$ 关联到其松弛厄米固定点范畴 $\mathrm{LaxHerm}((\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(a,b)\, d_{a,b}, \eta_{a,b}))$。在此范畴中，一个对象由一个 1-态射 $X\colon a \to b$ 以及一个满足 $d_{a,b}(\theta_X) \circ (\eta_{a,b})_X = \theta_X$ 的 2-态射 $\theta_X : X \to d_{a,b}(X)$ 构成，而态射是松弛等距。为了明确说明与复合及单位的相容性，设 (X, θ_X) 是 $(\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(a,b)\, d_{a,b}, \eta_{a,b})$ 中的一个松弛厄米固定点，并设 (Y, θ_Y) 是 $(\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(b,c)\, d_{b,c}, \eta_{b,c})$ 中的一个松弛厄米固定点。我们断言，$Y \circ X$ 可赋予 $(\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(a,c)\, d_{a,c}, \eta_{a,c})$ 中松弛厄米固定点的结构。事实上，我们有一个 2-态射

$$Y \circ X \xrightarrow{\theta_Y \circ \theta_X} d(\mathrm{id}^Y) \circ d(\mathrm{id}^X) \xrightarrow{\cong} d(\mathrm{id}^X \circ \mathrm{id}^Y) \longrightarrow d(\mathrm{id}^{Y \circ X}). \tag{6.19}$$

类似地，对于任意对象 a，恒等 1-态射 id_a 都具有松弛厄米固定点的结构，该结构由典范 2-态射 $\mathrm{id}_a \to d(\mathrm{id}^{\mathrm{id}_a})$给出。

注 6.5.10. 从构造中显然可见，两个（严格的）厄米不动点的复合不一定仍是（严格的）厄米不动点，因为构造中的最后一个态射通常不可逆（它是 $\mathcal{J}$ 的 oplax 函子性数据的一部分）。第 7.4 节将对此作进一步说明。从结构层面看，这反映了这样一个事实：弱 O(1)-对合范畴之间的弱 O(1)-对合函子，并不会在相应的 O(1)-对合/dagger 范畴之间诱导出（O(1)-对合/dagger）函子。

注 6.5.11. 总结本节的结果：从每个全闭对称幺半 2-范畴中，我们都可以提取出一个以弱 O(1)-对合范畴为富集的 1-反变 O(1)-dagger 2-范畴，并可在局部研究其中的松弛厄米固定点。

6.6 示例：Morita 2-范畴

本节讨论 Morita 2-范畴中的对偶／闭性。我们首先建立一些记号，大致遵循 [DLRS25]。设 $\mathcal{C}$ 为幺半范畴。设 A，B，C 为 $\mathcal{C}$ 中的幺半群，并设 M 为一个 A-B-双模，N 为一个 B-C-双模。M 与 N 在 B 上的平衡张量积 是余等化子（若其存在）

$$M \otimes_B N := \mathrm{coeq}\,(M \otimes B \otimes N \rightrightarrows M \otimes N) \tag{6.20}$$

其中两个映射分别由 M 和 N 上的左、右 B-作用诱导，省略结合子。若所有平衡张量积都存在，且相应的余等化子由幺半结构保持，我们就称幺半范畴 $\mathcal{C}$ 具有（平衡张量积的）演算；参见 [DLRS25，定义 2.7]。由此得到一个 2-范畴[4] $\mathrm{Alg}(\mathcal{C})$，其对象为幺半群，1-态射为双模，2-态射为交织子，而 1-态射的复合由平衡张量积给出（并带有诱导的双模作用）。

现在进一步假设 $\mathcal{C}$ 是一个对称幺半范畴，则 2-范畴 $\mathrm{Alg}(\mathcal{C})$ 继承了一个对称幺半结构；在此结构下，每个对象 A 都有一个对偶，即反代数 A^{op}，其乘法由 A 的乘法与对称编织复合而得。

构造 6.6.1。设 $\mathcal{C}$ 是一个右闭幺半范畴。设 A 和 B 是 $\mathcal{C}$ 中的幺半群，设 M 是一个左 A-模，且设 N 是 $\mathcal{C}$ 中的左 B-模。下文将滥用记号，用同一符号表示 $\mathcal{C}$ 中 M 和 N 的底层对象。根据右闭性的假设，存在 $\mathcal{C}$ 中的对象 M^N，以及一个态射 $\mathrm{ev}_N^M\colon M^N \otimes N \to M$，使得对任意

[4]请记住，我们将“2-范畴”用作“双范畴”的同义词。在 [DLRS25] 中，构造了一个由 2-complicial 集建模的幺半群的（∞，2）-范畴。

其他对象 $P \in \mathcal{C}$，诱导映射 $\psi\colon \hom_{\mathcal{C}}(P,\ M^N) \to \hom_{\mathcal{C}}(P \otimes N,\ M)$ 是一个自然双射。特别地，我们有

$$\begin{aligned}\hom_{\mathcal{C}}(A \otimes M^N, M^N) &\cong \hom_{\mathcal{C}}(A \otimes M^N \otimes N, M)\\ \hom_{\mathcal{C}}(M^N \otimes B, M^N) &\cong \hom_{\mathcal{C}}(M^N \otimes B \otimes N, M)\end{aligned}$$

因此，这些态射

$$\begin{aligned}A \otimes M^N \otimes N &\xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \mathrm{ev}_N^M} A \otimes M \xrightarrow{\lambda_M} M\\ M^N \otimes B \otimes N &\xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \lambda_N} M^N \otimes N \xrightarrow{\mathrm{ev}_N^M} N\end{aligned} \tag{6.21}$$

分别诱导态射 $\lambda_{M^N}\colon\ A \otimes M^N \to M^N$与 $\rho_{M^N}\colon\ M^N \otimes B \to M^N$。我们断言，这些态射使 M^N 具有 A-B-双模结构。我们首先注意到这些图表的交换性

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A \otimes M^N \otimes N & \xrightarrow{\mu_A \otimes \mathrm{id}} & A \otimes M^N \otimes N \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id} \otimes \mathrm{ev}_N^M} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id} \otimes \mathrm{ev}_N^M} \\ A \otimes A \otimes M & \xrightarrow{\mu_A \otimes \mathrm{id}} & A \otimes M \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id} \otimes \lambda_M} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_M} \\ A \otimes M & \xrightarrow{\lambda_M} & M \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} M^N \otimes B \otimes B \otimes N & \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \mu_B \otimes \mathrm{id}} & M^N \otimes B \otimes N \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id} \otimes \lambda_N} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id} \otimes \lambda_N} \\ M^N \otimes B \otimes N & \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \lambda_N} & M^N \otimes N \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id} \otimes \lambda_N} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}_N^M} \\ M^N \otimes N & \xrightarrow{\mathrm{ev}_N^M} & M^N \end{array} \tag{6.22}$$

其中，左图的上方方块依交换律而交换，左图的下方方块依 λ_M 的作用性质而交换，右图的下方方块显然交换，而右图的上方方块依 λ_N 的作用性质而交换。上文所述双射 ψ 的自然性使我们能够从方程 (6.22) 中的交换图推出 λ_{M^N} 与ρ_{M^N} 的作用性质。接下来，我们断言左作用与右作用λ_{M^N} 和 ρ_{M^N} 是相容的。为看出这一点，我们注意到该图表的交换性

$$\begin{array}{ccc} A \otimes M^N \otimes B \otimes N & \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \lambda_N} & A \otimes M^N \otimes N \\ \downarrow{\scriptstyle \lambda_{M^N} \otimes \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_{M^N} \otimes \mathrm{id}} \\ M^N \otimes B \otimes N & \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \lambda_N} & M^N \otimes N \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id} \otimes \lambda_N} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}_N^M} \\ M^N \otimes N & \xrightarrow{\mathrm{ev}_N^M} & N \end{array} \tag{6.23}$$

其中下方方块显然交换，而上方方块依双射 ψ 的自然性而交换。综上所述，对于一个左 A-模 $(M,\ \lambda_M)$ 和一个左 B-模 (N, λ_N)，我们得到一个A-B-双模 $(M^N, \lambda_{M^N}, \rho_{M^N})$。

构造 6.6.2. 在构造 6.6.1 的情形中，进一步假设我们给定了 $\mathcal{C}$ 中的一个幺半群 C，并且 M 和 N 都带有右 C- 作用，使得 M 是一个 A-C- 双模，而 N 是一个 B-C- 双模。我们希望构造两个形如以下形式的态射

$$M^N \rightrightarrows M^{N \otimes C} \tag{6.24}$$

利用右闭性，我们可以使用双射 $\hom_{\mathcal{C}}(M^N,\ M^{N\otimes C}) \cong \hom_{\mathcal{C}}(M^N \otimes N \otimes C,\ M)$，因此只需在后一个集合中构造两个元素。我们选择的两个映射是

$$\begin{aligned}M^N \otimes N \otimes C &\xrightarrow{\mathrm{ev}_N^M \otimes \mathrm{id}} M \otimes C \xrightarrow{\rho_M} M\\ M^N \otimes N \otimes C &\xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \rho_N} M^N \otimes N \xrightarrow{\mathrm{ev}_N^M} M\end{aligned} \tag{6.25}$$

给定这两个映射，我们可以问相应的等化子是否

$$M_C^N := \mathrm{eq}(M^N \rightrightarrows M^{N\otimes C}) \tag{6.26}$$

存在于 $\mathcal{C}$ 中的 A-B-双模范畴。

构造 6.6.3. 设 $\mathcal{C}$ 是一个右闭幺半范畴， A, B 和 C 是 $\mathcal{C}$ 中的幺半群， M 是一个 A-C-双模， N 是一个 B-C-双模。假设平衡张量积 $M^N \otimes_B N$ 和对象 M_C^N 存在。对于每个 A-B-双模 P，我们希望构造一个（自然）双射

$$\hom_{A,B}(P, M_C^N) \longrightarrow \hom_{A,C}(P \otimes_B N, M), \tag{6.27}$$

回忆由 $\mathcal{C}$ 的闭性假设得出的（自然）双射 $\mathsf{hom}_{\mathcal{C}}(P, M^N) \cong \mathsf{hom}_{\mathcal{C}}(P \otimes N, M)$。首先注意，我们有一个由等化子映射诱导的映射 $\mathsf{hom}_{A,B}(P, M_C^N) \to \mathsf{hom}_{A,B}(P, M^N)$。其次，我们有一个映射

$$\hom_{A,B}(P, M^N) \longrightarrow \hom_{\mathcal{C}}(P, M^N) \xrightarrow{\cong} \hom_{\mathcal{C}}(P \otimes N, M) \tag{6.28}$$

我们希望理解其像。首先，显然像中的每个元素都是左 A-模的交织子。其次，对于每个左 B-模的交织子 $f\colon P \to M^N$，我们注意到有一个交换图

$$\begin{array}{ccccc}
 & & P\otimes B\otimes N & \xrightarrow{\rho_P\otimes \mathrm{id}} & P\otimes N \\
 & \swarrow^{\mathrm{id}\otimes\lambda_N} & \downarrow{\scriptstyle f\otimes\mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle f\otimes\mathrm{id}} \\
P\otimes N & & M^N\otimes B\otimes N & \xrightarrow{\rho_{M^N}\otimes\mathrm{id}} & M^N\otimes N \\
 & \searrow_{f\otimes\mathrm{id}} & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes\lambda_N} & \swarrow_{\mathrm{id}} & \\
 & & M^N\otimes N & &
\end{array} \tag{6.29}$$

其中左图表因交换律而交换，右上正方形因假设 f 是左 B-模的交织子而交换，下三角形因 M^N 上右 B-作用的定义而交换。特别地，图表中的两个外层复合映射

$$P \otimes B \otimes N \rightrightarrows M \tag{6.30}$$

相等。由平衡张量积的泛性质， f 因而诱导出一个映射 $P \otimes_B N \to M$。因此，我们得到一个双射

$$\hom_{A,B}(P, M^N) \cong \hom_A(P \otimes_B N, M). \tag{6.31}$$

最后，我们希望理解该复合的像

$$\hom_{A,B}(P, M_C^N) \longrightarrow \hom_{A,B}(P, M^N) \xrightarrow{\cong} \hom_A(P \otimes_B N, M) \tag{6.32}$$

由 M_C^N 的泛性质，第一个映射的像恰好由那些使得与两个映射 $M^N \rightrightarrows M^{N\otimes C}$ 的后复合相一致的交织子 $P \to N^M$ 组成。由这些映射的构造，我们可以将复合映射 $\mathsf{hom}_{A,B}(P, M_C^N) \to \mathsf{hom}_A(P \otimes_B N, M)$ 的像刻画为右 C-模的交织子。总而言之，我们构造了一个双射

$$\hom_{A,B}(P, M_C^N) \longrightarrow \hom_{A,C}(P \otimes_B N, M), \tag{6.33}$$

根据 $\mathcal{C}$ 的闭性（蕴含 $\mathsf{hom}_{\mathcal{C}}(P, M^N) \cong \mathsf{hom}_{\mathcal{C}}(P \otimes N, M)$ 的自然性）、平衡张量积的泛性质以及构造 6.6.2 的泛性质，这一映射是自然的。

由目前为止的讨论，我们推出以下结果。

定理 6.6.4. 设 $\mathcal{C}$ 是一个右闭幺半范畴，且其中存在等化子和（某种演算的）平衡张量积。则 *2*-范畴 $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ 是右 *1*-闭的。此外，若 $\mathcal{C}$ 是闭对称幺半范畴，则 $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ 是 *1*-闭的，并且具有对象对偶。

注记 6.6.5. 定理 6.6.4 对（余）极限存在性的假设可以稍微弱一些：只需 $\mathcal{C}$ 具有（某种演算的）平衡张量积，以及构造 6.6.2 意义下的交织映射对象。

引理 6.6.6. 设 $\mathcal{C}$ 是一个左右闭幺半范畴，且其中存在余等化子。则 $\mathcal{C}$ 具有（某种演算的）平衡张量积。

证明. 根据假设，$\mathcal{C}$ 中存在余等化子，因此特别存在平衡张量积。只需证明，对于任意 $a \in \mathcal{C}$，函子 $a \otimes (-), (-) \otimes a \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 保持平衡张量积。根据假设，$\mathcal{C}$ 是左右闭的，因此这两个函子都有右伴随，进而保持（小）余极限，特别是余等化子。证毕。 □

推论 6.6.7. 设 $\mathcal{C}$ 是一个具有（余）等化子的闭对称幺半范畴。那么，$\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ 是一个具有对偶的对称幺半 1-闭 2-范畴。

证明。 结合定理 6.6.4 和引理 6.6.6。 □

例 6.6.8. 完备 Bornological 代数的 2-范畴 $\mathrm{Mor}(c\mathfrak{Born})$ 是一个具有对偶的对称幺半 1-闭 2-范畴。

例 6.6.9. 环 R 上微分分次代数的 2-范畴 $\mathrm{Mor}(\mathrm{Ch}(R))$ 是一个具有对偶的非对称幺半 1-闭 2-范畴。

引理 6.6.10. 设 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 是具有（余）等化子的闭对称幺半范畴，并设 $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个保（余）等化子的对称幺半函子。那么，F 诱导出一个对称幺半 2-函子 $\mathrm{Mor}(F) \colon \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathcal{D})$。

推论 6.6.11。 设 $\mathcal{C}$ 是一个具有（余）等化子的闭对称幺半范畴，且 $K \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 是一个对称幺半对合。那么，K 诱导出一个对称幺半对合 $\mathrm{Mor}(K) \colon \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$。

证明。 根据假设，K 有逆，因此同时有左伴随和右伴随，进而保持小极限和余极限。结论由引理 6.6.10 得出。 □

例 6.6.12。 余完备闭对称幺半范畴 $c\mathfrak{Born}$ 具有一个对称幺半对合 $(-) \colon c\mathfrak{Born} \to c\mathfrak{Born}$，它将每个完备 bornological 向量空间 V 赋予其复共轭 $\overline{V}$。它诱导出一个对称幺半对合 $\mathrm{Mor}((-)) \colon \mathrm{Mor}(c\mathfrak{Born}) \to \mathrm{Mor}(c\mathfrak{Born})$，它将每个完备 bornological 代数 A 赋予其复共轭 $\overline{A}$。 —

6.7 例：预函子

本节将从完全闭对称幺半2-范畴的角度研究预函子理论。

定义 6.7.1。 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 为范畴。预函子 $\mathcal{C} \nrightarrow \mathcal{D}$ 是一个函子 $F \colon \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to$ 集合范畴。

注 6.7.2。 预函子也称为分配子 或对应。

注 6.7.3。 预函子 $F\colon\ \mathcal{C} \nrightarrow \mathcal{C}'$ 和 $G\colon\ \mathcal{C}' \nrightarrow \mathcal{C}''$ 可以通过（余）端进行复合，即我们将复合 $G \circ F\colon \mathcal{C} \nrightarrow \mathcal{C}''$ 定义为

$$(G \circ F)(c'', c) := \int^{c' \in \mathcal{C}'} G(c'', c') \times F(c', c) \tag{6.34}$$

关于预函子的更多细节与背景，我们参阅 [Lor21第 5]节。范畴、预函子与自然变换构成一个双范畴，其水平 2-范畴记为Prof。对象 $\mathcal{C}$ 的恒等 1-态射是由函子 $\mathcal{C}(-,-)\colon\ \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathrm{Set}$给出的预函子$\mathrm{id}_{\mathcal{C}}\colon\ \mathcal{C} \nrightarrow \mathcal{C}$。每个函子 $F\colon\ \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 诱导两个预函子，即$\mathcal{D}(1, F)\colon\ \mathcal{C} \nrightarrow \mathcal{D},\ \mathcal{D}(1, F)(d, c) = \mathcal{D}(d, F(c))$与 $\mathcal{D}(F, 1)\colon\ \mathcal{D} \nrightarrow \mathcal{C},\ \mathcal{D}(F, 1)(c, d) = \mathcal{D}(F(c)\ d)$；此外， $\mathcal{D}(F, 1) \dashv \mathcal{D}(1, F)$。换言之，可表预函子的这两种构造是该双范畴中的伴随与共伴随。上文讨论的Cat到Prof的两种嵌入称为协变与逆变嵌入。

注记 6.7.4. 笛卡尔积（连同显然的编织）赋予 Prof 以非对称幺半 2-范畴的结构。

引理 6.7.5. Prof 中的每个对象 $\mathcal{C}$ 都是可对偶化的，其（左）对偶由对偶范畴 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 给出。特别地，Prof 具有 1-逆变 O(1)-对合结构。

证明. 我们构造求值预函子和余求值预函子，以证明对偶范畴 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个对偶。考虑预函子 $\widetilde{\mathrm{ev}}\colon\ \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \nrightarrow 1$，它由以下函子给出

$$1^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \cong \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}(-,-)} \mathrm{Set} \tag{6.35}$$

也就是说，这是经过适当重新诠释的恒等预函子。同样，我们考虑预函子 $\widetilde{\mathrm{coev}}\colon\ 1 \nrightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$，它由以下函子给出

$$(\mathcal{C} \times \mathcal{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} \times 1 \cong \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}(-,-)} \mathrm{Set} \tag{6.36}$$

它同样是经过适当重新诠释的恒等预函子。要验证佐罗变换成立，只需注意到

$$\int^{c' \in \mathcal{C}} \mathcal{C}(c'', c') \times \mathcal{C}(c', c) \cong \mathcal{C}(c'', c) \tag{6.37}$$

根据忍者 Yoneda 引理，参见 [Lor21, 命题 2.2.1]。由此完成证明 . □

注 6.7.6。 我们希望详细说明对偶化 2-函子 $(-)^{\mathrm{op}}\colon \mathrm{Prof} \to \mathrm{Prof}^{1\,\mathrm{op}}$对 1-态射和 2-态射的作用。设 $F\colon\ \mathcal{C} \nrightarrow \mathcal{D}$是一个预函子。那么， $F^{\mathrm{op}}\colon\ \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \nrightarrow \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$由函子给出

$$F^{\mathrm{op}}\colon \mathcal{C} \times \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\cong} \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathrm{Set} \tag{6.38}$$

其中，第一步用到了 Prof 上的对称编织。具体而言， $F^{\mathrm{op}}(c,\ d) = F(d,\ c)$。对偶化函子对 2-态射的作用，则是将自然变换$\alpha\colon\ F \to G$映射为自然变换 $\alpha^{\mathrm{op}}\colon\ F_{\mathrm{op}} \to G^{\mathrm{op}}$，其定义为

$$\mathcal{C} \times \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\cong} \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \overset{F}{\underset{G}{\Downarrow \alpha}} \mathrm{Set}\ ; \tag{6.39}$$

具体而言，其在 $(c, d) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ 处的分量由 $\alpha^{\mathrm{op}}{}_{(c,d)}\colon\ = \alpha_{(d,c)}$ 给出。我们注意到，由于 $(-)^{\mathrm{op}}$ 严格地平方为恒等映射，因此我们的 O(1)-对合结构的高阶相容性数据是平凡的。

注 6.7.7. 在此注中，我们希望比较对偶化 2-函子 $(-)^{\mathrm{op}}\colon \mathbf{Prof} \to \mathbf{Prof}^{1\,\mathrm{op}}$ 与 2-函子 $(-)^{\mathrm{op}}\colon \mathbf{Cat} \to \mathbf{Cat}^{2\,\mathrm{op}}$。存在一个由 2-函子构成的交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Cat} & \longrightarrow & \mathrm{Prof} \\ {\scriptstyle (-)^{\mathrm{op}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (-)^{\mathrm{op}}} \\ \mathrm{Cat}^{2\,\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathrm{Prof}^{1\,\mathrm{op}} \end{array} \tag{6.40}$$

其中，水平箭头是 Cat 到 Prof 的协变与逆变嵌入。这可由我们的显式描述立即得出。

以下给出柯西/幂等完备化的一种有用刻画，例如见[BD86]。

引理 6.7.8. 设 $\mathcal{C}$ 是一个（小）范畴。那么，以下条件等价：

(i) $\mathcal{C}$ 是柯西完备的；并且

(ii) 对任意（小）范畴 $\mathcal{D}$，预函子 $\mathcal{D} \nrightarrow \mathcal{C}$ 有左伴随，当且仅当它是可表的（也就是说，通过备注 6.7.3 中的函子 $F\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 导出）。

备注 6.7.9. 由范畴、预函子和自然变换构成的 2-范畴 Prof 是右 1-闭的，参见 [B´en73，命题 4.3]。给定 Prof 中的 1-态射 $X\colon \mathcal{C} \nrightarrow \mathcal{D}$ 和 $Y\colon \mathcal{C} \nrightarrow \mathcal{E}$，即函子 $X\colon \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ 和 $Y\colon \mathcal{E}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$，预函子 $Y^X\colon \mathcal{E}^{\mathrm{op}} \times D \to \mathbf{Set}$ 在对象上的定义为以下图表的等化子

$$\Pi_{c\in\mathcal{C}} \hom(X(d,c), Y(e,c)) \rightrightarrows \Pi_{c,c'\in\mathcal{C}} \hom(X(d,c) \times \hom_{\mathcal{C}}(c,c'), Y(e,c')) \tag{6.41}$$

其中，第一个映射将对象 $\Pi_{c\in\mathcal{C}} f_c \in \Pi_{c\in\mathcal{C}} \mathbf{hom}(X(d,c)\ Y(e,c))$映射为这样一个对象：它在有序对 $c,c' \in \mathcal{C}$ 上的定义为

$$X(d,c) \times \hom(c,c') \xrightarrow{f_c\times \mathrm{id}} Y(e,c) \times \hom(c,c') \xrightarrow{\mathrm{ev}_c^Y} Y(e,c') \tag{6.42}$$

其中，在最后一步中，我们使用了映射 $\mathbf{ev}_c^Y$；它在集合范畴 Set 中对应于标准的 Hom-张量伴随下的映射 $\mathbf{hom}_{\mathcal{C}}(c,c') \to \mathbf{hom}(Y(e,c) \to Y(e,c'))\ f \mapsto Y(\mathrm{id}_e, f)$。类似地，第二个映射定义为以下复合

$$X(d,c) \times \hom(c,c') \xrightarrow{\mathrm{ev}_c^X} X(d,c') \xrightarrow{f_{c'}} Y(e,c'). \tag{6.43}$$

我们不详述这一构造，转而参考 [B´en73] 。

注记 6.7.10。 我们有闭幺半范畴的等价

$$(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Prof}}(\star,\star), \circ) \cong (\mathbf{Set}, \times) \tag{6.44}$$

其中，Set 是配备了笛卡尔积的集合范畴。事实上，根据定义，预函子$\star \to \star$ 是一个函子 $\star^{\mathrm{op}} \times \star \cong \star \to \mathbf{Set}$，因此可以视为一个特定的集合；类似地，这些预函子之间的自然变换相当于集合之间的映射。显然，Prof 中水平复合的定义也归结为集合的笛卡尔积。

注记 6.7.11. 由于 Prof 是对称幺半、右 1-闭，并且具有对偶，因此它也是左闭的。设 $X\colon \mathcal{D} \nrightarrow \mathcal{C}$ 与 $Y\colon \mathcal{E} \nrightarrow \mathcal{C}$ 为 Prof 中的 1-态射。我们希望在下文中计算 1-态射$^X Y := d^{-1}(d(Y)^{d(X)})$，其中 $d = (-)^{\mathrm{op}}$ 表示 Prof 上的对偶化函子。根据

定义，$d(X)\colon \mathcal{C}^{1\text{反}} \nrightarrow \mathcal{D}^{1\text{反}}$ 由 $d(X)(d,\ c) = X(c,\ d)$ 给出，对 $d(Y)$ 亦然。接下来，我们在对象上将 $d(Y)^{d(X)}\colon \mathcal{D}^{1\,\mathrm{op}} \nrightarrow \mathcal{E}^{1\,\mathrm{op}}$ 计算为下列对象的等化子

$$\Pi_{c\in\mathcal{C}} \hom(X(c,d), Y(c,e)) \rightrightarrows \Pi_{c,c'\in\mathcal{C}} \hom(X(c,d)\times \hom_{\mathcal{C}}(c,c'), Y(c',e)). \tag{6.45}$$

最后，$d^{-1}(d(Y)^{d(X)})\colon\ \mathcal{E} \nrightarrow \mathcal{D}$ 仍由 $(d,\ e) \in \mathcal{D}^{1\,\mathrm{op}}\times \mathcal{E}$ 上的这个等化子给出。在这种一般性下，我们在这里所能说的就只有这些。

现在我们考虑一种更特殊的情形，在这种情形中，我们希望更明确地比较左闭赋值和右闭赋值：给定 Prof 中的一个 1-态射 $Z\colon\ \mathcal{C} \nrightarrow \mathcal{D}$，我们可以考虑 1-态射 $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}^{Z}\colon\ \mathcal{D} \nrightarrow \mathcal{C}$，它在对象 $(\hat{c},\ d) \in \mathcal{C}^{1\,\mathrm{op}} \times \mathcal{D}$ 上定义为以下对象的等化子

$$\Pi_{c\in\mathcal{C}} \hom(Z(d,c), \hom_{\mathcal{C}}(\hat{c},c)) \rightrightarrows \Pi_{c,c'\in\mathcal{C}} \hom(Z(d,c)\times \hom_{\mathcal{C}}(c,c'), \hom_{\mathcal{C}}(\hat{c},c')). \tag{6.46}$$

另一方面，我们将 ${}^{Z}\mathrm{id}_{\mathcal{D}}\colon\ \mathcal{D} \nrightarrow \mathcal{C}$ 在对象 $(c,\ \hat{}d) \in \mathcal{C}^{1\,\mathrm{op}} \times \mathcal{D}$ 上取为以下对象的等化子

$$\Pi_{d\in\mathcal{D}} \hom(Z(d,c), \hom_{\mathcal{D}}(d,\hat{d})) \rightrightarrows \Pi_{d,d'\in\mathcal{D}} \hom(Z(d,c)\times \hom_{\mathcal{D}}(d,d'), \hom_{\mathcal{D}}(d',\hat{d})). \tag{6.47}$$

注意，由于幺半范畴 Set 的闭性，我们有

$$\begin{aligned}&\hom(Z(d,c)\times \hom_{\mathcal{C}}(c,c'), \hom_{\mathcal{C}}(\hat{c},c')) \cong\\ &\hom(Z(d,c), \hom_{\mathrm{Set}}(\hom_{\mathcal{C}}(c,c'), \hom_{\mathcal{C}}(\hat{c},c'))).\end{aligned}$$

左侧版本也类似。

注释 6.7.12。 在这条注释中，我们希望研究全闭对称幺半 2-范畴 Prof 中的（松）厄米不动点。首先，由于 Prof 是带对偶的对称幺半范畴，它具有一个 O(1)-对合结构，因此我们可以直接考虑相应的 O(1)-dagger 2-范畴 $\mathcal{B} :\!= S_{\mathrm{O}(1)}\mathrm{Prof}$，而无需中间步骤。这个 O(1)-dagger 2-范畴的对象是三元组 $(\mathcal{C},\ \theta_{\mathcal{C}},\ \omega_{\mathcal{C}})$，由一个范畴 $\mathcal{C}$、一个可逆预函子 $\theta_{\mathcal{C}}\colon\ \mathcal{C}\to\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$，以及一个满足相干条件的可逆变换 $\omega_{\mathcal{C}}\colon\ \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to \theta_{\mathcal{C}}^{\mathrm{op}}\circ\theta_{\mathcal{C}}$ 组成。注意，O(1)-对合范畴是 $\mathcal{B}$ 中的特殊对象：它们恰好是 $\theta_{\mathcal{C}}$ 为真正函子[5] 的那些对象。

根据我们的通用理论，$\mathcal{B}$ 富含于弱 O(1)-对合范畴中，因此我们可以局部地考察松弛厄米固定点和等距范畴，即考察 $\mathrm{LaxHerm}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(a,\ b))$。这个范畴的对象是松弛 O(1)-对合预函子，态射则是它们之间的松弛 O(1)-对合变换。

注释 6.7.13。 借助嵌入 $\mathrm{Cat} \to \mathrm{Prof}$ 及其与取对偶范畴操作的相容性（见注释 6.7.7），我们可以完全从全闭对称幺半 2-范畴 Prof 的视角，发展弱 O(1)-对合范畴及其（高阶）态射的理论。从这种基于对偶的观点来看，Prof 因而优于 Cat；后者既非 1-闭，也不具有对象对偶。

7 示例与应用

在本附录中，我们希望更详细地介绍一些值得关注的具体例子，例如（完备）bornological 向量空间以及 $*$-环上的模。我们将回顾一些一般理论，并讨论它们各自的（宽松）O(1)-对合结构。我们还将考察希尔伯特空间、关系与包含所构成的 2-范畴，讨论无界算子如何被纳入这一理论，以及该范畴是否具有 dagger 结构。最后，我们将在完备 bornological 代数的背景下，展示一些关于全闭对称幺半 2-范畴的已发展理论。

[5] 在某些额外假设下，可逆预函子与可逆函子相同，例如当 $\mathcal{C}$ 柯西完备时。

7.1 bornological 向量空间

本节旨在更详细地介绍（完备）bornological 向量空间，我们将在第 7.4 节再次讨论它们。本节所涵盖的大部分内容都是众所周知的，我们不声称具有原创性，参见例如 [Mey07]。

定义 7.1.1。集合 X 上的一个*bornology* 是子集 X 的一个集合 $\mathfrak{B} \subset \mathcal{P}(X)$，满足：(i)$\bigcup_{B\in\mathfrak{B}} B = X$ (ii) 如果 $B \in \mathfrak{B}$ 且 $A \subseteq B$，那么 $A \in \mathfrak{B}$ (iii) 如果 B_1，.....，$B_n \in \mathfrak{B}$，那么 $\bigcup_{1\le i\le n} B_i \in \mathfrak{B}$。***bornological*** 空间 是一个集合 X 及其上的 bornology $\mathfrak{B}$组成的结构。如果 $(X,\ \mathfrak{B}_X)$、$(Y,\ \mathfrak{B}_Y)$ 是 bornological 集合，则映射 $f\colon X \to Y$ 称为有界，如果对于所有 $B \in \mathfrak{B}_X$都有 $f(B) \in \mathfrak{B}_Y$。

例 7.1.2。设 X 是一个半范数空间。于是，我们通过规定集合 $B \subseteq X$ 有界（若 $\sup_{b\in B} \|b\| < \infty$），在 X 上定义一个 bornology。我们称这种 bornology 为 X上的*von Neumann bornology* 。特别地，我们可以将任意赋范空间或巴拿赫空间视为 bornological 空间。

定义 7.1.3。A（复）***bornological*** 向量空间 是 bornological 空间范畴中的一个（复）向量空间。

注 7.1.4。明确地说，bornological 向量空间由一个向量空间及其上的 bornology 组成，使得加法和数乘都是有界的，其中底域（此处为 $\mathbb{C}$）赋予标准 bornology。我们也可以将 $\mathbb{R}$ 作为底域。

定义 7.1.5。bornological 向量空间称为

(i) 凸 的，如果每个有界集都包含于某个有界圆盘中；

(ii) 分离 的，如果每个有界集都包含于某个有界赋范圆盘中；

(iii) 完备 的，如果每个有界集都包含于某个有界完备圆盘中。

由此我们推得 [AB25，定义 2.1 中的上述定义，12] 以及同上文献中的前述内容 .

注 7.1.6. 半范数空间上的 von Neumann bornology 是凸的。半范数空间上的 von Neumann bornology 是分离的，当且仅当该空间是赋范空间。赋范空间上的 von Neumann bornology 是完备的，当且仅当该空间是巴拿赫空间。

定义 7.1.7. 我们用 $\mathfrak{Born}$ 表示凸 bornological 向量空间及有界线性映射所成的范畴，用 $s\mathfrak{Born}$ 表示分离凸有界向量空间的全子范畴，并用$c\mathfrak{Born}$ 表示完备凸 bornological 向量空间的全子范畴。

注 7.1.8. 本文中的 bornological 向量空间都将是凸的，因此全文可省略这一形容词。

注 7.1.9. 完备（凸）bornological 向量空间范畴与巴拿赫空间及有界线性映射范畴的归纳完备化密切相关：它是 Ban 中单射/单态归纳对象所成的范畴。关于这一陈述的精确说明和证明，参见 [PS00，命题 5。15]

我们回顾 [AB25第2节。3] 以及 [Mey07]中的下列结果。

引理7.1.10 **.** 包含函子 $I\colon s\mathfrak{Born} \to \mathfrak{Born}$ 和 $J\colon c\mathfrak{Born} \to s\mathfrak{Born}$ 存在左伴随 s

$$c\mathfrak{Born} \underset{\text{Comp}}{\overset{J}{\leftrightarrows}} s\mathfrak{Born} \underset{\text{Sep}}{\overset{I}{\leftrightarrows}} \mathfrak{Born} \tag{7.1}$$

此外， $\mathfrak{Born}$ $s\mathfrak{Born}$ 和 $c\mathfrak{Born}$ 都具有所有（小）极限和余极限，参见 [Mey07，命题 1.126]。我们通过指出全忠实函子的图表来总结注 7.1.6，参见 [Mey07，第 1.1 节5]，

$$\begin{array}{ccccc} c\mathfrak{Born} & \xrightarrow{\subset} & s\mathfrak{Born} & \xrightarrow{\subset} & \mathfrak{Born} \\ {\scriptstyle \mathrm{vN}}\uparrow & & {\scriptstyle \mathrm{vN}}\uparrow & & {\scriptstyle \mathrm{vN}}\uparrow \\ \mathrm{Ban} & \xrightarrow{\subset} & \mathrm{Nor} & \xrightarrow{\subset} & \mathrm{sNor} \end{array} \tag{7.2}$$

其中 Ban、Nor 和 sNor 分别表示巴拿赫空间、赋范空间和半赋范空间范畴，且所有态射都是有界线性映射。

我们还可以从 [Mey07 命题 1.111] 或 [AB25 第 2.4-2.6] 节推得以下结果。

引理 7.1.11。 $c\mathfrak{Bor}$ 是一个闭对称幺半范畴，其幺半结构由完备凸 bornological 向量空间的完备张量积给出。

注记 7.1.12。 凸 bornological 向量空间的张量积由以下泛性质定义。设 V 和 W 是凸 bornological 向量空间。如果它们的张量积存在，那么它是一个凸 bornological 向量空间 $V \otimes^b W$，并配有一个有界双线性映射 $\tau\colon V \times W \to V \otimes^b W$，使得对于所有 $U \in \mathfrak{Bor}$ 以及所有有界双线性映射 $\varphi\colon V \times W \to U$，都存在唯一的线性映射 $f\colon V \otimes^b W \to U$，使得图表

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\tau} & V \otimes^b W \\ {\scriptstyle \varphi}\downarrow & \swarrow_{\exists! f} & \\ U & & \end{array} \tag{7.3}$$

是交换的。此外，bornological 空间的张量积存在；它由底层向量空间的代数张量积及 [AB25, 命题 2.42] 中描述的 bornology 给出。

完备 bornological 向量空间的张量积由凸 bornological 向量空间张量积的完备化给出， $V \hat{\otimes} W := \mathrm{Comp}(V \otimes^b W)$。

注记 7.1.13. 完备凸 bornological 向量空间的张量积给出了巴拿赫空间的射影张量积（更一般地，也给出了弗雷歇空间的射影张量积，见 [Mey07, 定义 1.15 和定理 1.87]），其意义是对所有巴拿赫空间 V 和 W，都有 $\mathrm{vN}(V \otimes_\pi W) \cong \mathrm{vN}(V) \hat{\otimes} \mathrm{vN}(W)$。

推论 7.1.14. 完备凸 bornological 向量空间及有界线性映射构成的范畴 $c\mathfrak{Born}$ 具有弱 O(1)-对合结构。

证明。 结合引理 7.1.11 和定理 3.2.11。 □

注记 7.1.15。 我们希望明确描述推论 7.1.14 中构造的弱 O(1)-对合结构。首先，设 V 和 W 为完备凸 bornological 向量空间。那么，指数对象 W^V 是向量空间 $\mathfrak{Born}(V, W)$，并带有 AB25 第 2.6 节和命题 2.5.1] 中所述的完备凸 bornology。特别地，我们的弱 O(1)-对合结构的函子将每个完备凸 bornological 向量空间 V 映为其对偶空间 $V' := \mathfrak{Born}(V, \mathbb{C})$。我们的弱 O(1)-对合结构的自然变换在 V 处的分量为典范映射 $\iota_V\colon V \to \mathfrak{Born}(\mathfrak{Born}(V, \mathbb{C}), \mathbb{C})$。

定义 7.1.16。 完备凸 bornological 向量空间 V 称为**自反**，如果 ι_V 是同构。

推论 7.1.17. 自反完备凸 bornological 向量空间范畴 $c\mathfrak{Born}^{\mathrm{refl}}$ 具有 O(1)-对合结构。

证明。 结合推论 7.1.14 和构造 3.2.7。 □

引理 7.1.18. 函子 vN: Ban $\to c\mathfrak{Born}$ 是弱 O(1)-对合的。此外，它下降为 O(1)-对合函子 vN: Ban$^{\mathrm{refl}} \to c\mathfrak{Born}^{\mathrm{refl}}$。

证明。 设 V 是一个巴拿赫空间。我们断言，vN(V^*) $\cong \mathfrak{Born}$(vN(V) $\mathbb{C}$) 作为 bornological 向量空间是相同的。根据定义，两边具有相同的底层向量空间，因此只需证明它们的有界集相同。首先，回忆一下， V^* 是一个赋予算子范数的巴拿赫空间。特别地，集合 $A \subset V^*$ 有界，当且仅当 $\sup_{f\in A}\|f\| = \sup^{f\in A}\sup_{\|x\|\leq 1}|f(x)| < \infty$。换言之， A 有界，当且仅当单位球 $A(B_V)$ 在 $\mathbb{C}$ 中的像是有界的。特别地， $\mathfrak{Born}(V,\mathbb{C})$ 中的任意有界集在 V^* 中都是有界的。反之， V^* 中的任意有界集 A 在 $\mathfrak{Born}(V,\mathbb{C})$ 中是有界的，因为对于所有 $f \in A, x \in V$，都有 $|f(x)| \leq \|f\|\cdot\|x\| \leq (\sup_{g\in A}\|g\|)\cdot\|x\| < \infty$。这证明了我们的断言。同样，相应的双对偶空间相同，并且到双对偶空间中的典范态射也相同。注意到 vN 上的弱 O(1)-对合结构已经是一个自然同构，第二个断言立即得出。 □

7.2 星环上的模

本节将更详细地讨论 $*$-环上的模。我们先讨论普通（非交换）环上模的对偶性。

构造 7.2.1。 设 R 是一个（可能非交换的）环，且 M 和 N 是右 R-模。那么，交织子集合范畴 $\hom_R(M,\ N)$ 通常不会继承右 R- 模结构。现在进一步假设 S 是另一个（可能非交换的）环，且 N 是一个 S-R-双模。那么，$\hom_R(M,\ N)$ 带有左 S-模结构：我们取逐点加法以及 S-作用

$$(s \triangleright \phi)(m) = s\phi(m). \tag{7.4}$$

特别地，由于每个环 R 都典范地是其自身上的 R-R-双模，$\hom_R(M,\ R)$ 带有左 R-模结构。我们将 $M^{\vee_r} := \hom_R(M,\ R)$ 称为 M 的 对偶 左 R-模。

变体 7.2.2. 类似地，我们也可以从左 R-模 M 出发，此时其对偶 $M^{\vee_\ell}$ 将是右 R-模。

构造 7.2.3. 设 R 和 S 是（可能非交换的）环， M_1, M_2 是右 R-模， N_1, N_2 是 S-R-双模。此外，设 $f\colon M_1 \to M_2$ 是右R-模之间的交织子，且 $g\colon N_2 \to N_1$ 是 S-R-双模之间的交织子。于是，我们得到左 S-模之间的交织子 $\hom_R(M_2,N_2) \to \hom_R(M_1,N_1)$ $\phi \mapsto g\circ\phi\circ f$。显然，这一构造与交织子的复合 f, f' 和 g, g'相容。

特别地，对于任意右 R-模之间的交织子 $f\colon M_1 \to M_2$，我们得到左R-模之间的交织子 $M_2^{\vee_r} \to M_1^{\vee_r}$。因此，赋值 $M \mapsto M_r^\vee$定义了一个函子 $(-)^{\vee_r}\colon \mathrm{Mod}_R \to {}_R\mathrm{Mod}^{\mathrm{op}}$。

变体 7.2.4. 类似地，我们得到一个函子 $(-)^{\vee_\ell}\colon {}_R\text{模} \to \text{模}_R^{\mathrm{op}}$。

构造 7.2.5. 设 R 为一个（可能非交换的）环。对于每个右 R-模 M，我们得到一个右 R-模的交织子 $\iota_M\colon M \to M^{\vee_r\vee_\ell}$， $m \mapsto \text{单位}_m$ 其中 $\mathrm{ev}_m(\phi) = \phi(m)$ 是在 m处的求值。赋值 $M \mapsto \iota_M$ 定义了一个自然变换 $\iota^r\colon \mathrm{id}_{\mathrm{Mod}_R} \to (-)^{\vee_r\vee_\ell}$。自然变换 ι^r 满足关于三重对偶的相干条件，即 $\iota_M^\vee \circ \iota_{M^\vee} = \mathrm{id}_{M^\vee}$。证明 ι^r 定义了一个自然变换，并且按照前一句所述是相干的，其方法与例 3.2.5 中给出的证明完全类似。

变体 7.2.6. 类似地，我们得到一个自然变换 $\iota^\ell\colon \mathrm{id}_{R\text{模}} \to (-)^{\vee_\ell\vee_r}$，它满足显然的相干条件。

引理 7.2.7. 赋值 $a \mapsto \mathrm{Mod}_R, b \mapsto {}_R\mathrm{Mod}^{\mathrm{op}}, X \mapsto (-)^{\vee_r}, Y \mapsto ((-)^{\vee_\ell})^{\mathrm{op}}, f \mapsto \iota^r, g \mapsto (\iota^\ell)^{\mathrm{op}}$ 定义了一个 2-函子 $\mathrm{Adj} \to \mathrm{Cat}$。

在没有进一步假设的情况下，引理 7.2.7 是我们能够给出的最强结论。现在我们来考虑更有利的条件，先从一个观察/定义开始。

注 7.2.8. 环范畴 Ring 带有一个 O(1)-作用，将每个环 R 映到其对偶范畴 R^{op}。$\star$-环范畴恰好是相对于这一作用的 O(1)-同伦不动点范畴。具体而言，环上的 $\star$-结构是一个同构 $\star\colon R \to R^{\mathrm{op}}$，满足 $\star^2 = \mathrm{id}_R$。

Exa例 7.2.9. 任意交换环 R 相对于恒等映射 $\mathrm{id}\colon R \to R$都是一个 $*$-环。 .

例 7.2.10. 四元数 $\mathbb{H}$ 与四元数共轭一起构成一个 $\star$-环。

命题 7.2.11. 设 R 是一个（可能非交换的） $*$-环。那么，Mod_R 带有一个弱 O(1)-对合结构。

证明. 我们已在引理 7.2.7 中构造了一个 2-函子 Adj $\to$ Cat，其在 $a \in$Adj 处的值为 Mod_R。接下来需要描述此函子上的一个 2-反变 O(1)-对合结构。从 $*$-结构构造出这样的结构是直接的。 □

推论 7.2.12. 设 R 是一个（可能非交换的） $*$-环。那么，自反右 R-模的范畴 $\mathrm{Mod}_R^{\mathrm{refl}}$具有一个 O(1)-对合结构。

证明. 结合命题 7.2.11 和构造 3.2.7。 □

注 7.2.13. 这里讨论的一个更精细版本（涉及巴拿赫空间 $*$-模）使我们能够从 $*$-环 $\mathbb{H}$上的巴拿赫模范畴的弱 O(1)-对合结构，重构四元数厄米（/希尔伯特）空间范畴上的 dagger 结构。这里的讨论仅适用于有限维情形。

7.3 无界算子

本节讨论无界算子及其高阶范畴。我们将首先回顾无界算子理论中的一些标准内容，例如可参见 [Sch12]。

定义 7.3.1. 设 B 和 B' 是巴拿赫空间。无界算子 $B \to B'$ 是一个线性映射$f\colon D(f) \to B'$，其中 $D(f)$是 B的一个线性子空间，称为 f的定义域。

例 7.3.2. 设 B 和 B' 是巴拿赫空间。任意有界算子 $f\colon B \to B'$ 都是一个定义域为 $D(f) = B$的无界算子。

微分算子是无界算子的一类典型例子。下面就是这样一个例子。

例 7.3.3. 考虑平方可积函数的希尔伯特空间 $L^2(\mathbb{R})$，以及微分算子 d/dx，其定义域为施瓦茨函数的（稠密）子空间 $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq L^2(\mathbb{R})$。

备注 7.3.4. 无界算子可以（含幺且结合地）相加和复合；对于 $f, g\colon B \to B'$和 $D(f \circ g) := \{x \in D(g) | g(x) \in D(f)\}$，其定义域分别为 $D(f+g) := D(f) \cap D(g)$ 和 $g\colon B \to B'$ 以及 $f\colon B' \to B''$。然而，一般而言我们有

$$f(g+h) \neq fg + fh \tag{7.5}$$

对于 $g,\ h\colon B \to B'$以及 $f\colon B' \to B'$。一个反例[6]由巴拿赫空间 $C^0([0,1])$ 上的无界算子 $f = d/dx$, $g = d/dx,\ h = -d/dx$ 给出；事实上，我们有 $D(f(g+h)) = C^1([0,1])$，而 $D(fg+fh) = C^2([0,1])$。

[6]可在讲义 [Rem21] 中找到。

定义 7.3.5。 设 $f\colon B \to B'$ 是一个无界算子。

- f的图 是线性子空间 $\Gamma(f) := \{(x,\ f(x)) | x \in \mathcal{D}(f)\} \subseteq B \oplus B'$. ˆ ˆ

  • 无界算子 $f\colon B \to B'$ 称为 f的扩张，如果 $\Gamma(f) \subseteq \Gamma(f)$；等价地，ˆ ˆ$D(f) \subseteq D(f)$，且对所有 $x \in D(f)$都有 $fx = fx$。

- f 如果 $\Gamma(f) \subseteq B \oplus B'$ 是闭子集，则称其为闭 。
- f 如果它存在一个闭扩张，则称其为可闭 。
- f 如果 $D(f)$在 $\mathcal{B}$中稠密，则称其为稠密定义 。

注 7.3.6。 </style}任意有界稠密定义算子 $f\colon D(f) \subseteq B \to B'$ 都可通过连续性扩张到整个 B。

注记 7.3.7. 根据闭图定理，如果无界算子 $f\colon B \to B'$ 是闭的，且具有 $D(f) = B$，那么 f 是有界的。

记号 7.3.8. 我们用 T 表示可闭无界算子 T 的（唯一）闭包，也就是 T 的最小闭扩张。

现在我们转而关注希尔伯特空间，遵循 [Sch12，第 1.2] 节。

构造 7.3.9. 设 H 和 H' 为希尔伯特空间。设 $T\colon H \to H'$ 是一个无界算子。我们定义

$$D(T^\dagger) := \{y \in H' \mid \exists z \in H : \langle Tx, y\rangle = \langle x, z\rangle \forall x \in D(T)\} \tag{7.6}$$

这显然是 H' 的一个线性子空间。为了使元素 z 唯一，我们还假设 T 是稠密定义的；在这种情况下，对于稠密子集 H 中的所有 $x \in D(T)$，都有 $\langle x,\ z - z'\rangle = 0$，这意味着 $z = z'$。于是我们可以定义 $T^\dagger y = z$，得到一个无界算子 $T^\dagger\colon H' \to H$。

记号 7.3.10. 设 $T\colon H \to H'$ 是一个稠密定义的无界算子。构造 7.3.9 中描述的无界算子$T^\dagger\colon H' \to H$称为 T的伴随 。根据构造，我们有

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^\dagger y\rangle \ \forall x \in D(T),\ y \in D(T^\dagger). \tag{7.7}$$

警告 7.3.11. 有界算子的伴随所满足的许多性质，并不能推广到这个更一般的情形。下面我们将在一些有利的附加假设下汇总所需的结果。

命题 7.3.12 ([Sch12，命题 1.6 和 1.7 及定理 1.8])。 设 $T\colon H \to H'$ 是一个稠密定义的无界算子。则:

(i) $T^\dagger\colon H' \to H$是一个闭无界算子，

(ii) T 可闭，当且仅当 $D(T^\dagger)$ 在 H' 中稠密，

(iii) 若 T可闭，则 $T^\dagger = T^\dagger$且有 $T = (T^\dagger)^\dagger =: T^{\dagger\dagger}$，并且

(iv) T 是闭的，当且仅当 $T = T^{\dagger\dagger}$。

此外，设 $S\colon H' \to H''$ 是另一个稠密定义的无界算子，且 ST 是稠密定义的。那么

(v) $\Gamma(T^\dagger S^\dagger) \subset \Gamma((ST)^\dagger)$，并且

(vi) 若 S有界（因而可延拓为定义在整个 H'上的有界算子ˆS），则 $T^\dagger \hat{}_{S^\dagger} = (\hat{}ST)^\dagger$。

注记 7.3.13. 命题 7.3.12 表明，普通 dagger 范畴理论与无界算子理论之间的差异过大，不容忽视。若试图在前者的框架中形式化后者，首先必须考虑闭且稠定的算子。然而，闭且稠定算子的复合未必仍是闭且稠定的，因此不清楚应考虑哪个范畴；其次，尽管所设想的 dagger 结构在对象上为恒等且严格对合，但若无进一步假设，它未必是函子。不过，我们确实注意到存在希尔伯特空间与无界算子范畴。

下面，我们采用关系方法来组织无界算子及其伴随，部分遵循讲义 [Rem21]（其中讨论了单个希尔伯特空间上的无界算子的情形）。这一理论源于以下观察。

注 7.3.14. 设 $T\colon H \to H'$ 是一个无界算子。那么， T 及其定义域都可以从它的图 $\Gamma(T)$ 中得到。事实上，定义域为

$$D(T) := \{x \in H \mid (x, y) \in \Gamma(T) \text{ for some } y \in H'\} \tag{7.8}$$

通过对唯一满足 $(x, y) \in \Gamma(T)$ 的 $y \in H'$，令 $Tx = y$，即可得到算子 T。

定义 7.3.15. 设 H 和 H' 是希尔伯特空间。从 H 到 H' 的一个**关系** 是$H \oplus H'$的一个线性子空间。如果 $H' = H$，我们称从 H 到 H' 的关系为 H上的**关系** 。

例 7.3.16. 设 $T\colon H \to H'$ 是一个无界算子。那么 $\Gamma(T)$ 是从 H 到 H'的一个关系。

定义 7.3.17。 设 V是从 H 到 H' 的一个关系， W 是从 H' 到 H''的一个关系。我们定义以下概念:

- H 上的对角线 关系是线性子空间 $\Delta_H := \{(x, x) \mid x \in H\}$,
- V 的反向关系[7] 是从 H' 到 H 的关系，定义如下:

$$V^{\mathrm{rev}} := \{(y, x) \in H' \oplus H \mid (x, y) \in V \subseteq H \oplus H'\}, \tag{7.9}$$

- $\underline{V}$的闭包 $\overline{V}$是线性子空间 $V \subseteq H \oplus H'$的闭包。如果$V = V$，则称关系闭 ,
- V 的伴随 是从 H' 到 H 的关系，定义如下:

$$V^\dagger := \{(u, v) \in H' \oplus H \mid \langle v, x\rangle_H = \langle u, y\rangle_{H'} \text{ for all } (x, y) \in V\}, \tag{7.10}$$

  为证明这是一个线性子空间，设 (u, v),$(s, t) \in V^\dagger$。那么 $\langle v + t, x\rangle_H = \langle v, x\rangle_H + \langle t, x\rangle_H = \langle u, y\rangle_{H'} + \langle s, y\rangle_{H'} = \langle u + s, y\rangle$ 对所有 $(x, y) \in V$均成立，因此 $(u + s, v + t) \in V^\dagger$，并且
- V 与 W 的复合是从 H 到 H'' 的关系，由下式给出

$$W \circ V := \{(x, z) \in H \oplus H'' \mid \exists y \in H' : (x, y) \in V \wedge (y, z) \in W\}, \tag{7.11}$$

  为了看出这是一个线性子空间，设 (x, z)、$(x', z') \in W \circ V$。则存在 y、 y'，使得 (x, y)、$(x', y') \in V$，且 (y, z)、$(y', z') \in W$，从而 $(x + x', y + y') \in V$，且 $(y + y', z + z') \in W$，从而 $(x + x', z + z') \in W \circ V$，并且对任意复数标量 λ，类似地 $(\lambda x, \lambda z) \in W \circ V$。

引理 7.3.18. 设 $T\colon H \to H'$ 与 $S\colon H' \to H''$ 为无界算子。则 $\Gamma(ST) = \Gamma(S) \circ \Gamma(T)$。

[7]在文献中，反向关系也称为 *inverse*。我们不使用这一术语，因为它不应被理解为我们所描述的关系的复合意义下的逆，其中单位由对角关系给出。

证明。我们有

$$\begin{aligned}\Gamma(ST) &= \{(x, STx) \mid x \in D(ST)\} \\ &= \{(x, STx) \mid x \in D(T) \wedge T(x) \in D(S)\} \\ &= \{(x, STx) \mid (x, Tx) \in \Gamma(T) \wedge (Tx, STx) \in \Gamma(S)\} \\ &= \Gamma(S) \circ \Gamma(T)\end{aligned}$$

在最后一个等式中，我们使用了显然的包含，以及通过两次应用以下观察得到的反向包含：若对于固定的 x，有 $(x, y) \in \Gamma(T)$，则 y 是唯一的。 □

记号 7.3.19. 我们用 $\mathbf{Hilb}^{\mathrm{unb}}$ 表示希尔伯特空间与无界算子范畴，其复合见备注 7.3.4。我们用 HilbRel 表示希尔伯特空间与关系范畴，其复合见定义 7.3.17。

命题 7.3.20. 赋值 $T \mapsto \Gamma(T)$ 可扩展为一个对象上恒等的函子 $\mathbf{Hilb}^{\mathrm{unb}} \to$HilbRel。

证明. 与复合的相容性见引理 7.3.18。 H 上的恒等态射被映为 H 上的对角关系，而这正是 HilbRel 中的恒等态射。 □

引理 7.3.21. 设 $T\colon H \to H'$ 是一个稠密定义的无界算子。则 $\Gamma(T^\dagger) = \Gamma(T)^\dagger$。

证明。我们有

$$\begin{aligned}\Gamma(T^\dagger) &= \{(z, T^\dagger(z)) | z \in \mathcal{D}(T^\dagger)\} \\ &= \{(u, v) \in D(T^\dagger) \oplus H \mid \langle v, x\rangle_H = \langle T^\dagger u, x\rangle_H \text{ for all } x \in D(T)\} \\ &= \{(u, v) \in D(T^\dagger) \oplus H \mid \langle v, x\rangle_H = \langle u, Tx\rangle_{H'} \text{ for all } x \in D(T)\} \\ &= \{(u, v) \in H' \oplus H \mid \langle v, x\rangle_H = \langle u, Tx\rangle_{H'} \text{ for all } x \in D(T)\} \\ &= \{(u, v) \in H' \oplus H \mid \langle v, x\rangle_H = \langle u, y\rangle_{H'} \text{ for all } (x, y) \in \Gamma(T)\} \\ &= \Gamma(T)^\dagger\end{aligned}$$

其中，在第二个等式中我们使用了 T 是稠密定义的，在第三个等式中我们使用了等式 (7.7)，在第四个等式中我们使用了显然的包含以及由 $D(T^\dagger)$ 的定义所保证的反向包含，而在其余等式中我们仅使用了定义。 □

总之，我们可以定义任意关系的伴随，它恢复了无界稠密定义算子的伴随。接下来我们研究伴随关系运算的函子性质。

引理 7.3.22. 设 V 是从 H 到 H' 的关系， W 是从 H' 到 H'' 的关系。则$V^\dagger \circ W^\dagger \subseteq (W \circ V)^\dagger$。

证明。 我们声称以下等式和包含关系成立。

$$\begin{aligned}V^\dagger \circ W^\dagger &= \{(u, v) \in H'' \oplus H \mid \exists y \in H' : (u, y) \in W^\dagger \wedge (y, v) \in V^\dagger\} \\ &= \{(u, v) \in H'' \oplus H \mid \exists y \in H' : \langle y, x\rangle_{H'} = \langle u, z\rangle_{H''} \text{ for all } (x, z) \in W \\ &\qquad \wedge \langle v, a\rangle_H = \langle y, b\rangle_{H'} \text{ for all } (a, b) \in V\} \\ &\subseteq \{(u, v) \in H'' \oplus H \mid \langle v, s\rangle_H = \langle u, t\rangle_{H''} \text{ for all } (s, t) \in H \oplus H'' \\ &\qquad \text{such that } \exists o \in H' : (s, o) \in V \wedge (o, t) \in W\} \\ &= \{(u, v) \in H'' \oplus H \mid \langle v, s\rangle_H = \langle u, t\rangle_{H''} \text{ for all } (s, t) \in W \circ V\} \\ &= (W \circ V)^\dagger\end{aligned}$$

这里唯一非平凡的陈述是这个包含关系，我们将在下文证明。设 $(s,t) \in H \oplus H''$，使得存在一个 $o \in H'$，满足 $(s,o) \in V$ 且 $(o,t) \in W$。根据假设，存在一个 $y \in H'$，使得

$$\langle v, s\rangle_H = \langle y, o\rangle_{H'} = \langle u, t\rangle_{H''}, \tag{7.12}$$

从而证明了该结论。 □

推论 7.3.23。设 $T\colon H \to H'$ 和 $S\colon H' \to H''$ 是稠密定义的无界算子，且$S \circ T\colon H \to H''$ 是稠密定义的。那么

$$\Gamma(T^\dagger S^\dagger) \subseteq \Gamma((ST)^\dagger) \tag{7.13}$$

证明。我们有

$$\begin{aligned}
\Gamma(T^\dagger S^\dagger) &= \Gamma(T^\dagger) \circ \Gamma(S^\dagger) && \text{by Lemma 7.3.18}\\
&= \Gamma(T)^\dagger \circ \Gamma(S)^\dagger && \text{by Lemma 7.3.21}\\
&\subseteq (\Gamma(S) \circ \Gamma(T))^\dagger && \text{by Lemma 7.3.22}\\
&= \Gamma(ST)^\dagger && \text{by Lemma 7.3.18}
\end{aligned}$$

□

引理 7.3.24。设 H 是一个希尔伯特空间。那么 $\Delta_H^\dagger = \Delta_H$

证明。我们有

$$\begin{aligned}
\Delta_H^\dagger &= \{(u,v) \in H \oplus H \mid \langle v, x\rangle_H = \langle u, y\rangle_H \text{ for all } (x,y) \in \Delta_H\}\\
&= \{(u,v) \in H \oplus H \mid \langle v, x\rangle_H = \langle u, x\rangle_H \text{ for all } x \in H\} = \Delta_H
\end{aligned}$$

最后一行用到了内积的非退化性。 □

定义 7.3.25. 设 H 和 H' 为希尔伯特空间，V 和 W 为从 H 到 H'的关系。映射集 *mapping set* $\hom(V,W)$ 定义如下:

$$\hom(V,W) := \begin{cases} \{\star\} & \text{if} \quad V \subseteq W \\ \emptyset & \text{else} \end{cases} \tag{7.14}$$

引理 7.3.26. 设 H 和 H' 为希尔伯特空间，V和 W 为从 H 到 H'的关系。那么$V \subseteq W \Rightarrow W^\dagger \subseteq V^\dagger$。

证明。我们有

$$\begin{aligned}
W^\dagger &= \{(u,v) \in H' \oplus H \mid \langle v, x\rangle_H = \langle u, y\rangle_{H'} \text{ for all } (x,y) \in W\},\\
&\subseteq \{(u,v) \in H' \oplus H \mid \langle v, x\rangle_H = \langle u, y\rangle_{H'} \text{ for all } (x,y) \in V\} = V^\dagger,
\end{aligned}$$

由此得证。 □

引理 7.3.27. 设 H, H'和 H'' 为希尔伯特空间，设 $V \subseteq W$ 为从 H 到 H' 的关系，$V' \subseteq W'$为从 H'到 H''的关系。那么 $V' \circ V \subseteq W' \circ W$。

证明。设 $(x,z) \in V' \circ V$。则存在一个 $y \in H'$，使得 $(x,y) \in V$且 $(y,z) \in V'$。因此 $(x,y) \in W$且 $(y,z) \in W'$，从而 $(x,z) \in W' \circ W$。 □

记号 7.3.28。我们将希尔伯特空间与关系构成的 2-范畴记为 $\mathrm{HilbRel}^{\mathrm{bi}}$，其 2-态射的集合为定义 7.3.25 中相应的映射集。

命题 7.3.29。 定义 7.3.17 中的构造 $V \to V^\dagger$ 可扩展为一个在对象上为恒等的弱 2-函子 $\mathbf{HilbRel}^{\mathrm{bi}} \to (\mathbf{HilbRel}^{\mathrm{bi}})^{(1,2)\,\mathrm{op}}$。

证明。 根据构造和引理 7.3.26，该指派是良定义的。它保持 2-态射的复合，因为 $V \subseteq W \subseteq X$ 蕴含 $X^\dagger \subseteq W^\dagger \subseteq V^\dagger$。我们已在引理 7.3.22 中构造了实现与 1-态射复合相容的松 2-胞腔，并在引理 7.3.24 中构造了实现与恒等 1-态射相容的 2-胞腔。 □

注记 7.3.30。 关系之间的映射空间还有更复杂的版本；我们选择定义 7.3.25 中的版本，作为一种简约的处理方式，以便将引理 7.3.22 解释为伴随运算与关系的复合之间的松相容性。

在确立了伴随运算的函子性质之后，我们现在转而关注关系的闭包。

引理 7.3.31。 设 V 是一个从 H 到 H' 的关系，并设 W 是一个从 H' 到 H'' 的关系。那么，$\overline{W \circ V} \subseteq \overline{W} \circ \overline{V}$。

证明。设 $(x,z) \in \overline{W \circ V}$。根据闭包的定义，存在一个序列 $(x_n, z_n)_n \in W \circ V$，使得 $\lim_n (x_n, z_n)_n = (x,z)$。根据复合的定义，存在一个序列 $(y_n)_n \in H'$，使得 $(x_n, y_n) \in V$ 且 $(y_n, z_n) \in W$，对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。因此，利用极限是逐点计算这一事实，我们有 $(x,y) = \lim_n (x_n, y_n) \in \overline{V}$ 且 $(y,z) = \lim_n (y_n, z_n) \in \overline{W}$。因此，$(x,z) \in \overline{W} \circ \overline{V}$。 □

引理 7.3.32。 设 H 是一个希尔伯特空间。则 $\Delta_H = \overline{\Delta_H}$。

证明。 回忆一下，拓扑空间 X 是豪斯多夫空间，当且仅当对角线作为积空间 $X \times X$ 的子集是闭的。又由于每个希尔伯特空间都是度量空间，尤其是豪斯多夫空间，因此可得所述结论。 □

命题 7.3.33。 运算 $V \mapsto \overline{V}$ 扩展为一个对象上恒等的 oplax 2-函子 $\mathbf{HilbRel}^{\mathrm{bi}} \to \mathbf{HilbRel}^{\mathrm{bi}}$。

证明。 为说明该赋值是良定义的，我们注意到，关系的包含 $V \subseteq W$ 蕴含 $\overline{V} \subseteq \overline{W}$。oplax 函子性由引理 7.3.32 和引理 7.3.31 给出。与 2-态射的复合的相容性源于以下观察：对于任意两个希尔伯特空间 H 和 H'，关系的包含 $V \subseteq W \subseteq X$ 蕴含，对于任意三个关系 V, W, X，从 H 到 H' 有 $\overline{V} \subseteq \overline{W} \subseteq \overline{X}$ □

备注 7.3.34。 我们强调，伴随是一个弱 2-函子，而闭包是 $\mathbf{HilbRel}^{\mathrm{bi}}$ 上的一个 oplax 2-函子。

注 7.3.35. 两个闭关系的复合仍然是闭的：事实上，设 V 是从 H 到 H' 的闭关系，设 W 是从 H' 到 H'' 的闭关系。将观察结果 $W \circ V \subseteq \overline{W \circ V}$ 与包含关系结合起来，

$$\overline{W \circ V} \subseteq \overline{W} \circ \overline{V} = W \circ V, \tag{7.15}$$

其中第一步用到了引理 7.3.31，第二步用到了我们的假设，即 V 和 W 是闭的，由此可得 $W \circ V = \overline{W \circ V}$。结合引理 7.3.32，这意味着希尔伯特空间、闭关系和包含关系构成一个子 2-范畴 $\mathbf{HilbRel}^{\mathrm{cl},\ \mathrm{bi}} \subseteq \mathbf{HilbRel}^{\mathrm{bi}}$。

接下来，我们希望研究伴随关系构造的对合性。我们的讨论是对 [Rem21] 中讨论内容的（略微）推广，将其推广到不同希尔伯特空间之间的关系。特别参见 [Rem21, Theorem 11.7] 中的以下结果。

引理 7.3.36。 设 H 和 H' 为希尔伯特空间，且设 V 是从 H 到 H' 的关系。那么有

(i) $\overline{V^\dagger} = V^\dagger$,

(ii) $V^{\dagger\dagger} = \overline{V}$, and

(iii) $\overline{V}^\dagger = V^\dagger$.

注意，这尤其意味着 $V^\dagger = V^\dagger = V^{\dagger\dagger\dagger}$。

证明。(i) 首先，定义一个有界算子 $J\colon\ H \oplus H' \to H \oplus H'$，$(h',\ h) \mapsto (h',\ -h)$。我们断言$V^\dagger = (JV)^\perp$，其中 JV表示 V在 J下的像，而 $(-)^\perp$ 表示关于 $H \oplus H'$上内积的正交补。事实上，对 $(u,\ v) \in H' \oplus H$，我们有

$$\begin{aligned}(u,v) \in V^\dagger &\Leftrightarrow \langle v, x\rangle_H = \langle u, y\rangle_{H'} \ \forall\ (x,y) \in V \\ &\Leftrightarrow 0 = \langle v, x\rangle_H + \langle u, -y\rangle_{H'} \ \forall\ (x,y) \in V \\ &\Leftrightarrow 0 = \langle v, x\rangle_H + \langle u, z\rangle_{H'} \ \forall\ (x,z) \in JV \\ &\Leftrightarrow (u,v) \in (JV)^\perp.\end{aligned}$$

然而，正交补 $(JV)^\perp$ 是闭的，因此 $V^\dagger$ 也是闭的。(ii) 我们首先注意到，由内积的（半）线性性，$J(V^\perp) = (JV)^\perp$。然后我们计算

$$V^{\dagger\dagger} = (JV^\dagger)^\perp = J((JV)^\perp)^\perp = (J^2V)^{\perp\perp} = V^{\perp\perp} = \overline{V} \tag{7.16}$$

其中最后一个等式是一个标准事实。(iii) 我们计算

$$\overline{V}^\dagger \overset{(ii)}{=} (V^{\dagger\dagger})^\dagger = (V^\dagger)^{\dagger\dagger} \overset{(ii)}{=} \overline{V^\dagger} \overset{(i)}{=} V^\dagger. \tag{7.17}$$

至此证明完毕。 □

推论 7.3.37。包含 $V \subseteq V = V^{\dagger\dagger}$ 诱导一个弱 2-变换 $(-)^{\dagger\dagger} \to \mathrm{id}_{\mathrm{HilbRel}^{\mathrm{bi}}}$，其分量为恒等 1-态射分量。它的 2-态射分量在由希尔伯特空间、闭关系以及它们之间的包含构成的子 2-范畴 $\mathbf{HilbRel}^{\mathrm{cl},\ \mathrm{bi}} \subseteq \mathbf{HilbRel}^{\mathrm{bi}}$ 上是平凡的。

备注 7.3.38. 我们将本节的结果总结如下。

- 存在一个由希尔伯特空间、关系（包含无界算子的图）以及包含构成的 2-范畴 $\mathbf{HilbRel}_{\mathrm{bi}}$。

- 存在一个对象上恒等的松弛 2-函子 $(-)^\dagger\colon \mathbf{HilbRel}_{\mathrm{bi}} \to (\mathbf{HilbRel}_{\mathrm{bi}})_{(1,2)\mathrm{op}}$，它将每个关系 V 映为其伴随 $V^\dagger$（推广了稠密定义的无界算子的伴随算子构造），并将每个包含映为伴随关系的诱导包含。（正规）松函子性数据在引理 7.3.32 和引理 7.3.22 中加以描述。

- 存在一个（正规）对象上恒等的反松弛 2-函子 $(-)^{\dagger\dagger}\colon \mathbf{HilbRel}_{\mathrm{bi}} \to \mathbf{HilbRel}_{\mathrm{bi}}$，其对从 H 到 H' 的关系 V 以及从 H' 到 H'' 的关系 W 的（正规）oplax 函子性数据由这些包含给出

$$(W \circ V)^{\dagger\dagger} = \overline{W \circ V} \subseteq \overline{W} \circ \overline{V} = W^{\dagger\dagger} \circ V^{\dagger\dagger} \tag{7.18}$$

  其中我们用到了引理 7.3.31 和引理 7.3.36 (ii)。

- 存在一个恒等 1-态射分量弱 2-变换 $\chi\colon (-)^{\dagger\dagger} \to \mathrm{id}_{\mathrm{HilbRel}^{\mathrm{双}}}$，其 2-态射分量由包含 $V \subseteq V = V^{\dagger\dagger}$ 给出。此外，我们有 $V^\dagger = V^{\dagger\dagger\dagger}$，因此 χ 满足关于伴随三元组的相干性。

- 运算 $(-)^\dagger$ 限制在闭关系的子 2-范畴 $\mathbf{HilbRel}_{\mathrm{cl,bi}} \to (\mathbf{HilbRel}_{\mathrm{cl,bi}})_{(1,2)\mathrm{op}}$ 上，成为一个弱 2-函子，并满足 $(-)^{\dagger\dagger} = \mathrm{id}$。

注记 7.3.39。 我们在此建立的理论有一个特别有趣的方面：弱 2-函子 $(-)^\dagger$ 会导出一个 oplax 2-函子 $(-)^{\dagger\dagger}$。先验而言，$(-)^\dagger$ 的 (1,2)-反向会是一个 oplax 2-函子，因此并不清楚 $(-)^\dagger$ 与其 (1,2)-反向的复合究竟会不会是某种 2-函子，无论是伪、弱还是 oplax。这正是我们不将结果表述为 $\mathbf{HilbRel}^{\mathrm{bi}}$ 上存在某种弱高阶 dagger 结构的主要原因，尽管两者显然相似。即使只考虑闭关系，同样的异议依然成立。

7.4 Bornological 代数

在本小节中，我们关注完备（凸）bornological 向量空间所构成的、具有（余）等化子的闭对称幺半范畴 $c\mathfrak{Born}$。根据定理 6.6.4，Mor($c\mathfrak{Born}$) 是一个对称幺半 2-范畴，它是 1-闭的，并且具有对象对偶。接下来，我们希望在当前语境下研究第 6.6 节中讨论的程序。

设 A 是 Mor($c\mathfrak{Born}$) 中的一个对象，即一个完备 bornological 代数。回想一下，Mor($c\mathfrak{Born}$) 中的恒等 1-态射 $A \to A$ 由 Bornological A-A-双模 A 给出。我们计算

$$A_A^A = \mathrm{eq}(A^A \rightrightarrows A^{A\otimes A}) = \hom_A(A,A) \cong A \tag{7.19}$$

其中，在最后一步我们用到了：A-模的交织子 $A \to A$ 完全由其在 $1 \in A$ 上的取值所决定。接下来，我们考虑 Mor($c\mathfrak{Born}$) 中的三个对象 A，B，C 以及两个 1-态射 $X\colon\ A \to B$ 与 $Y\colon\ B \to C$。我们计算 $B_B^X = \hom_B(X,\ B)$ 与 $C_C^Y = \hom_C(Y,\ C)$。另一方面，我们有 $C_C^{Y\otimes_B X} = \hom_C(Y \otimes_B X,\ C)$。由 Mor($c\mathfrak{Born}$) 的闭性，我们有一个 A-C-双模的交织子

$$\begin{aligned}\hom_B(X,B) \otimes_B \hom_C(Y,C) &\to \hom_C(Y \otimes_B X, C)\\ \phi \otimes \psi &\mapsto \left(Y \otimes_B X \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes_B \phi} Y \otimes_B B \cong Y \xrightarrow{\psi} C \right)\end{aligned}$$

不过，一般而言，它不必是同构。至此，我们关于弱 2-函子 $\mathcal{J}$ on Mor($c\mathfrak{Born}$) 的结构 2-态射的讨论就结束了：实现幺元性的结构 2-态射是同构，而表达与复合相容性的结构 2-态射则不是（除非对所涉及的模施加严格的有限性条件）。

回顾一下，Mor($c\mathfrak{Born}$) 是对称幺半的，具有对象对偶，并带有由复共轭给出的对称幺半对合，因此特别具有一个 O(1)-对合结构，其底层函子将每个 bornological 代数 A 映为其复共轭反代数 A^{op}，将每个 bornological A-B-双模映为与之对应的 bornological B^{op}-A^{op}-双模，2-态射也类似。转到 O(1)-dagger 2-范畴 $S_{\mathrm{O}(1)}$Mor($c\mathfrak{Born}$)，相当于将 bornological $*$-代数[8], 以及与之前相同的 1-态射和 2-态射纳入考量。下文中，我们将用 (d,η) 表示 dagger 结构。设 $M\colon\ A \to B$ 是 $S_{\mathrm{O}(1)}$ Mor($c\mathfrak{Born}$) 中的一个 1-态射。那么，我们有 A-B-双模 $J(M) = B_B^M$，此外还有 B-A-双模 $dJ(M) = B_B^M = \hom_B(M,B)$，其中，后者的双模作用是利用 A 和 B 的 $*$-结构定义的。

现在我们可以在此背景下讨论（松弛）厄米不动点。为了让讨论更易于理解，可以用配对的方式来表述（松弛）厄米不动点。设 $M\colon\ A \to B$ 是一个 1-态射，并带有松弛厄米不动点结构 $\theta_M\colon\ M \to \hom_B(M,\ B)$。我们可以将这些数据解释为定义在 M 上、取值于 B 且可能退化的厄米配对。现在再设有另一个 1-态射 $N\colon\ B \to C$，并带有松弛厄米不动点结构。那么，按构造 6.5.9 定义的二者的复合 $N \otimes_B M$ 配备了如下配对：

$$\langle m \otimes n, m' \otimes n' \rangle = \langle n, n' \langle m, m' \rangle \rangle \tag{7.20}$$

[8]严格来说，$\star$-结构是通过可逆双模而非代数同构实现的。不过，后者是前者的一种特殊情况。

其中，右侧用到了分别对应于 θ_M 和 θ_N 的配对，以及 N 上的右 B-作用。

我们在一般性讨论中强调过，此处方程（7.20）的配对不必是非退化的；也就是说，相应的松弛厄米不动点结构 $\theta_{N\otimes_B M}$不必是同构，即使 θ_M 和 θ_N 是同构也是如此。不过，在当前情形下，可以通过一种操作消除潜在的退化。具体而言，可以将各向同性向量取商，也就是满足 $\langle v,\ v\rangle = 0$的向量。经过适当的完备化后，便可得到真正的厄米固定点。采用这一新的复合，我们得到一个子 2-范畴，其 1- 态射为真正的厄米固定点，其 Hom- 范畴因而具有 dagger 结构，而整个子范畴则具有全 dagger 结构。我们再次强调，这些结论仅适用于当前情形，不能很好地推广到任意全闭对称幺半 2-范畴。

在本节余下部分，我们希望将其与冯·诺依曼代数及希尔伯特／厄米双模进行比较。首先回顾一下，任意冯·诺依曼代数都是巴拿赫空间$\star$-代数，因而也是完备 bornological $\star$-代数，也就是说，它是 O(1)-dagger 2-范畴 $S_{\mathrm{O}(1)}$Mor($c\mathfrak{Born}$) 中的一个特殊对象。这里我们回顾一下，函子 Ban $\to c\mathfrak{B}$orn 是对称幺半的，因此诱导出一个函子 Alg(Ban) $\to$ Alg($c\mathfrak{Born}$)，其中 Alg($\mathcal{C}$) 指幺半范畴 $\mathcal{C}$中的代数及代数同态所构成的范畴。
进一步回顾经典结果 [Pas73, 定理3.2]：对于冯·诺依曼代数上的任意希尔伯特模，该配对诱导出一个同构，使其成为我们意义下的（真正的）厄米不动点；这是经典黎斯表示定理的推广，考虑平凡代数 $\mathbb{C}$时便可还原为该定理。根据[Pas73; Pas74]，冯·诺依曼代数上的任意希尔伯特（双）模都以我们所说的意义定义了一个（真正的）厄米不动点，这里我们再次使用了函子 Ban $\to c\mathfrak{Born}$。我们在上文说明的修正复合律，正是此类希尔伯特双模（或者更确切地说，它们的 bornological 类比物）的复合律。

参考文献

[†24] Giovanni Ferrer、Brett Hungar、Theo Johnson-Freyd、Cameron Krulewski、Lukas M¨uller、Nivedita、David Penneys、David Reutter、Claudia Scheimbauer、Luuk Stehouwer 和 Chetan Vuppulury。“Dagger n 范畴 ”。载于：(2024)。arXiv：2403。01651 [math.CT]。URL：https://arxiv.org/abs/2403.01651。[AB25] David Aretz 和 Christian Blohmann。“bornological 群胚卷积的函子性”。载于：(2025)。arXiv：2508。11005 [math.DG]。URL：https://arxiv.org/abs/2508.11005。[BD86] Francis Borceux 和 Daniel Dejean。“范畴论中的柯西完备化”。载于：Cahiers de Topologie et G´eom´etrie Diff´erentielle Cat´egoriques 27 (1986)，第133–146页。[B´en73] Jean B´énabou。“分配子”。载于：Rapport no. 33 (1973年)。[CL25] Nils Carqueville 和 Tim L¨uders。“轨形、高阶 dagger 结构与幂等元”。载于：(2025)。arXiv：2504。17764 [math.QA]。URL：https://arxiv.org/abs/2504.17764。[DLRS25] Arghan Dutta、Stefano Luneia、Martina Rovelli 和 Sam Silver。“幺半范畴的 Morita $(\infty, 2)$-范畴作为一个 2-complicial集”。载于：(2025)。arXiv：2509.21472[math.CT]。URL：https://arxiv.org/abs/2509.21472。[HLS16] Hadrian Heine、Alejo Lopez-Avila 和 Markus Spitzweck。“带对偶的无穷范畴与厄米乘法无穷循环空间机器”。载于：Journal of Pure and Applied Algebra 229.6 (2016)。DOI：https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2025.107929。arXiv：1610。10043 [math.KT]。URL：https://arxiv.org/abs/1610.10043。

[Hov99] M. Hovey。《模型范畴》。第63卷。数学调查与专著。美国数学会，1999年。[JY20] Niles Johnson 和 Donald Yau。《二维范畴》。牛津大学出版社，2020年。DOI: 10.1093/oso/9780198871378.001.0001。arXiv：2002。06055 [math.CT]。URL: https://arxiv.org/abs/2002.06055。[Lor21] Fosco Loregian。《（余）端演算》。剑桥大学出版社，2021年6月。DOI：10.1017/9781108778657。arXiv：1501。02503 [math.CT]。URL: http://dx.doi.org/10.1017/9781108778657。[Lur17] Jacob Lurie。《高等代数》。2017年。URL: https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/HA.pdf。[Mey07] Ralf Meyer。《局部与解析循环同调》。第3卷。EMS数学论丛。2007年8月。DOI：10.4171/039。[Pas73] W. L. Paschke。“B*-代数上的内积模”。载于：Transactions of the American Mathematical Society 182 (1973年)，第443–468页。[Pas74] W. L. Paschke。“C*-代数B上的内积模的双B-对偶”。载于：加拿大数学杂志 26.5 (1974年)，第1272–1280页。[PS00] Fabienne Prosmans 和 Jean-Pierre Schneiders。“Bornological空间的同调研究”。载于：(2000年)。预出版。[Rem21] Christian Remling。《无界算子与关系》。讲义。2021年。URL：https://math.ou.edu/~cremling/。[Sch10] Marco Schlichting。“正合范畴的厄米K理论”。载于：K理论杂志 5.1 (2010年)，第105–165页。DOI：10.1017/is009010017jkt075。[Sch12] Konrad Schm¨udgen。《希尔伯特空间上的无界自伴算子》。第265卷。研究生数学丛书。2012年。DOI：10.1007/978-94-007-4753-1。[SS24] Luuk Stehouwer 和 Jan Steinebrunner。“通过反 involution 与正性构造 dagger 范畴”。载于：范畴理论及其应用 41 (2024年)，第2013–2040页。arXiv：2304。02928 [math.CT]。

¨维也纳大学，物理系，玻尔兹曼巷5号，维也纳1090，奥地利 ti
m.lueders@univie.ac.at