arXiv:2602.15701v1 [math.AP] 17 Feb 2026

利用球化技术求解无界一致域上的狄利克雷问题

RIIKKA KORTE、SARI ROGOVIN、NAGESWARI SHANMUGALINGAM 和 TIMO TAKALA

ABSTRACT. 在配备倍增测度且支持 p-Poincar´e 不等式的度量空间中，利用变分法中的直接方法以及 Maz'ya 型不等式，可以确立此类度量空间中有界域上的狄利克雷问题解的存在性，而 Maz'ya 型不等式是 Poincar´e 不等式的推论。然而，当区域及其边界无界时，这种方法便不再适用。本文采用先前论文 [32], 中提出的球化技术，确立了在 p-调和函数的情形下，无界一致域及其无界边界上的狄利克雷边值问题解的存在性，其中 $1 < p < \infty$。我们还通过考察区域的 p-抛物性和 p-双曲性，探讨此类解是否唯一。

Keywords: 球化， p-调和性，狄利克雷问题， p-庞加莱不等式，倍增测度， p-抛物性， p-双曲性，Besov 空间，一致域。

Mathematics Subject Classification (2020): 主要分类：31E05；次要分类：30L10、30L15、51F30。

CONTENTS

1. 引言 1 2. 定义与预备结果 5 3. 度量与测度的共形变形 12 4. μ_ρ 和 ν_ρ 14 5. Besov 能量的准保持 20 6. 狄利克雷边界条件的概念 22 7. 无界一致域中的狄利克雷问题求解：定理 1.1 的证明 25 8. 示例 28 9. p-双曲性和 p-抛物性 29 参考文献 34

致谢： R.K. 部分支撑于芬兰研究委员会的项目 360184。N.S. 部分支撑于美国国家科学基金会（US）资助的项目 DMS#2348748。T.T. 由芬兰文化基金会资助。

1. INTRODUCTION

在配备倍增测度并满足 p-Poincar´e 不等式的度量测度空间中，对有界域求解狄利克雷边值问题，可通过变分法的直接方法实现；这是因为我们能够利用 Sobolev

函数的梯度 L^p 范数来控制其 L^p 范数。在无界域中，这种方法行不通，原因有二：我们的边界数据属于齐次Besov类，因此不一定全局可积；而且，能量全局有限的函数本身未必属于全局L^p 类，更不用说能用其能量来控制。因而，将无界域上的狄利克雷问题通过某种共形变换转化为有界域上的狄利克雷问题，会有所助益。在许多自然情境下，我们关注的无界域是一致域；在 [32] 中，我们提出了一种能够保持区域一致性性质的共形变换。 [32] 中考察的变换属于称为球化的变换子类。本文研究相应的边界数据变换及狄利克雷问题。

通过球化变换无界度量空间是一种强有力的方法，最初用于将复平面变换为有界空间——球面。球化是大多数复分析课程的教学内容，但其应用已超出复分析的范畴。Balogh 和 Buckley 在无界度量空间的背景下考察了球化的一般形式 [3]。文献 [6, 7, 11, 12, 13, 34, 35] 将球化方法扩展到度量测度空间，并纳入了对测度的变换。除 [13], 外，这些工作都通过链式过程构造球化，因此即使所讨论的区域可能有多个无穷远端，也只会产生一个新的无穷远边界点。文献 [13, 14, 32] 通过路径积分构造球化度量，因此，如果所研究区域有多个无穷远端，那么变换后空间产生的新边界点数量也会相应增加。与 [13, 14, 32], 一样，本文研究的是无界一致域，因此只有一个无穷远端。

本文所讨论的狄利克雷边值问题对应于欧几里得区域 Ω 中的经典情形，即寻找一个索博列夫函数 u，使得

$$-\Delta_p u = 0 \text{ on } \Omega,$$

且 u 在边界 $\partial\Omega$ 上的迹（记作 Tu）满足

$$Tu = f \text{ on } \partial\Omega$$

对于给定的定义在 $\partial\Omega$ 上的狄利克雷数据 f。感兴趣的读者可参阅 [19] 及其中的参考文献，了解这一问题的相关信息。度量空间背景下，方程 $-\Delta_p u = 0$ 的对应问题是对区域内的 p-能量进行极小化；关于度量空间背景的良好入门资料可见 [4] 及其中所列的参考文献。

为实现求解无界一致域上的狄利克雷边值问题这一目标，我们在论文 [32], 中考虑了无界一致域背景下更广泛的一类球化变换，并在本文中运用该文所发展的工具，将变换应用于一致域的边界。我们在此指出，将无界一致域、其测度及其边界变换为一个配备变换后的测度和变换后的边界的有界一致域，这种方法的用途并不局限于本文的目标。例如，研究无界区域中某些函数的大尺度行为时，考察变换后的函数在变换后区域的新边界点（该点对应于无穷远处）附近的相应行为，会使研究更加容易。

结构假设。 本文中，我们固定参数 $1 \le p < \infty$，并作如下假设：

(1) (X,d,μ) 是一个带有倍增测度 μ 的无界完备度量测度空间，并且满足 p-Poincar´é 不等式。
(2) $\Omega \subset X$ 是一个无界一致域，其边界 $\partial\Omega$ 无界且一致完美，常数为 κ，并配备了一个拉东测度 ν，该测度关于 θ 是 μ 余维的，其中某个 $0<\theta<p$ 如式（2.6）所示。

区域 Ω 的一致性，连同 μ 在 (X, d) 上的倍增性质，以及 (X, d, μ) 上支持 p-Poincar´e 不等式，保证 μ 是 $(\Omega\ d)$ 上的倍增测度，且 $(\Omega\ d, \mu)$ 支持 p-Poincar´e 不等式，见 [8, 定理 4.4]。因此，研究一致域 Ω 上的边值问题时，环境度量测度空间 X 不起任何作用，所以我们取 $X = \Omega^d$，其中 Ω^d 表示 Ω 的度量完备化。于是 Ω 的边界为$\partial\Omega = \Omega^d \setminus \Omega$。

本文中的球化通过使用一个正的度量密度函数来定义 ρ，该函数以固定基点为中心沿径向定义 $b \in \partial\Omega$。新度量 d_ρ 通过 ρ的路径积分定义。新测度 μ_ρ 相对于 μ 连续定义，并使用 ρ^p 作为权函数。类似地，新测度 ν_ρ 相对于 ν 连续定义，并使用 $\rho^{p-\theta}$ 作为权函数。精确定义见第 3 节。

我们假设度量密度函数 $\rho : (0,\infty) \to (0,\infty)$ 是下半连续的，并满足以下条件，称为条件 (A)、(B)、(C)和(D)。本文中，始终设 $|x| := d(x, b)$。

(A) 存在一个正的常数 C_A，使得当 $0 < r \le 2s+1$ 和 $0 < s \le 2r+1$ 时，

$$\rho(r) \le C_A \rho(s).$$

(B) 存在一个正的常数 C_B，使得对每个 $r > 0$,

$$\int_r^\infty \rho(t)dt \le C_B(r+1)\rho(r).$$

(C) 存在一个正的常数 C_C，使得对每个 $r > 0$,

$$\int_{\Omega\setminus B(b,r)} \rho(|x|)^p d\mu(x) \le C_C \rho(r)^p \mu(B(b, r+1)).$$

(D) 存在一个正的常数 C_D，使得对每个 $r > 0$,

$$\int_{\partial\Omega\setminus B(b,r)} \rho(|x|)^{p-\theta} d\nu(x) \le C_D \rho(r)^{p-\theta} \nu(B(b, r+1)).$$

条件（A）、（B）和（C）与 [32] 中的条件相同，采用 $\sigma = p$ 的选择。条件（D）是为了保持余维性质而要求的附加条件。第 4 节中证明的 ν_ρ 与 μ_ρ 之间的余维性关系要求 ν_ρ 也具有倍增性质；建立 ν_ρ 的倍增性质时需要条件（D）（这与建立 μ_ρ 的倍增性质时需要条件（C）相呼应，见 [32]）。鉴于条件（A）以及 μ 和 ν 的倍增性质，对于给定函数 ρ，只需在 $r \ge 1$ 的情况下验证条件（B）、（C）和（D）。请注意，ν 的倍增性质可由 μ 的倍增性质和余维性推出，另见定义 2.5 后的讨论。

本文的第一个主要定理如下，它证明了在无界一致域上狄利克雷问题解的存在性。

定理 1.1. 设 $p>1$，并假设$(\Omega\ d,\mu)$满足上述结构假设。对于每个 $f\in HB_p^{1-\theta/p,}{}_p(\partial\Omega\ d,\nu)$，存在唯一函数 $u_f\in D^{1,p}(\Omega\ d,\mu)$，它在$(\Omega\ d,\mu)$中是 p-调和的，并且在 $\partial\Omega$ 上几乎处处满足 $Tu_f=f\ \nu$。

上述定理中提到的 p-调和性的具体定义见下文的定义6.1。函数空间 $HB_p^{1-\theta/p,}{}_p(\partial\Omega\ d,\ \nu)$，称为光滑度指标为 $1-\theta/p$的齐次 Besov 空间，是齐次 Sobolev 空间 $D^{1,\ p}(\Omega\ d,\ \mu)$的迹空间，其定义见下文的定义2.17 。

定理的证明见第 7 节，证明中使用了与满足上述四个条件的 ρ相对应的球化工具；第 7 节之前的各节则致力于建立该变换的性质。在 [32] 中，已证明若函数 ρ满足条件 (A) 和 (B)，则在 Ω 上将度量从 d 改为 d_ρ 后，一致域的性质得以保留（ d_ρ的构造见第 3 节）。此外，该文还证明，当 $(\Omega\ d)$ 是一个无界一致域时，边界 $\partial_\rho\Omega:=\Omega^{d_\rho}\setminus\Omega$ 比 $\partial\Omega\ =\Omega^d\setminus\Omega$ 恰好多一个点。而且，该文还证明，如果ρ也满足条件 (C)，则倍增测度 μ 在 $(\Omega\ d)$ 上对应的变换μ_ρ 在 $(\Omega\ d_\rho)$ 上满足倍增性质。

然而，为了证明定理 1.1，我们还需要考察迹算子作用于齐次 Sobolev 空间（见定义 2.11）并在边界 $\partial\Omega$ 上给出函数时，如何通过 ρ 球化进行变换。本文第 5 节之前的各节将介绍必要的工具，以理解定义在 $\partial\Omega$ 上的测度 ν（即相对于 μ 具有 θ 余维的测度）经球化变换为测度 ν_ρ 后，如何保留其倍增性质以及相对于球化测度 μ_ρ 的 θ 余维性。定理 4.7 和 4.8 证明了这些性质得以保留。随后，在定理 5.4 中，我们证明，在 $(\partial\Omega\ d,\nu)$ 上的齐次 Besov 类函数与 $(\partial_\rho\Omega\ d_\rho,\nu_\rho)$ 上的 Besov 类相同，并且两种 Besov 能量相当（即在球化变换下准保持）。这些 Besov 类是 Ω 上相应 Sobolev 类的迹，其中包含的函数可作为定理 1.1 所述狄利克雷边值问题的狄利克雷边界数据。定理 1.1 所指狄利克雷边值问题的正式定义将在第 6 节讨论，随后的第 7 节则专门用于证明定理 1.1。

由于 $\partial_\rho\Omega$ 比 $\partial\Omega$ 多一个点 ∞，因此有必要了解这个额外的点会对解产生什么影响。度量测度空间的 p-双曲性这一概念，对应于该空间在大尺度上具有正容量，也就是说，“ ∞有很大的空间”。当$p=2$时，在黎曼流形的情形下，这一概念对应于布朗运动的暂留性，也就是说，几乎必然地，布朗路径最终会离开每个紧集并趋于∞。(Ω^d,d,μ) 的 p-双曲性等价于单点集 $\{\infty\}\subset\partial_\rho\Omega$ 的 p-容量为正，见命题 9.2。根据 [13], 的结果，我们知道，当 $\partial\Omega$ 有界且 Ω^d 为 p-双曲时，狄利克雷问题有无穷多个可能的解，如定义 6.1 所述。然而，正如我们在定理 1.1 中所证明的， $\partial\Omega$ 无界时情况并非如此，此时解总是唯一的。这一现象的原因来自定理 6.4：该定理表明，当 Ω^d 为 p-双曲时，齐次 Sobolev 类$D^{1,p}_0(\Omega\ d,\mu)$ 中函数的变换在 ∞ 处具有唯一确定的零迹值。当 Ω^d 为 p-抛物时，这些函数在 ∞ 处的迹值无关紧要，因为此时 $\{\infty\}$ 在 $(\Omega^{d_\rho},d_\rho,\mu_\rho)$ 中的 p-容量为零。

我们将此与 Hansevi [16, 17] 的研究进行对比。根据 [17] 中的结果，我们知道，只要 Ω 的补集具有正 p-容量，Ω 中的狄利克雷边值问题就存在唯一的全局能量极小解；然而，[17] 所考虑的能量极小化概念要求，解应当在 $D^{1,p}(\Omega)$ 中所有以迹作为给定边界数据的函数构成的类中具有最小能量，而不仅仅是在区域的紧子集上对极小解作扰动的函数。这一区别导致当 $\partial\Omega$ 有界且 Ω^d 为 p- 双曲时，存在大量解；而 [17] 则只得到一个解。定理 1.1 的新颖之处在于，即使 Ω^d 为 p- 双曲，只要 $\partial\Omega$ 无界，通过与 Ω 上的紧支撑扰动进行比较所得到的解仍是唯一的。我们在此强调，我们所考虑的解属于比 [17]更广泛的一类。在 [16], 中，当 Ω^d 为 p-抛物时，我们的解概念通过 Perron 方法加以考察和构造。

鉴于上一段指出的关于 p-双曲性的令人惊讶的现象，我们希望探究保证 p-双曲性的几何性质，以及保证p-抛物性的几何性质。在本文中，我们从体积增长的角度探究Ω^d 的 p-抛物性与 p-双曲性概念；以下是本文的第二个主要定理。

定理 1.2. 设 $p > 1$，并假设$(\Omega\ d, \mu)$ 满足本节开头所列的结构假设。则(Ω^d, d, μ) 是 p-抛物的，如果

$$\liminf_{R\to\infty} \frac{\mu(B(b,R))}{R^p} < \infty,$$

并且(Ω^d, d, μ) 是 p-双曲的，如果存在某个 $q_0 > p$ 使得

$$\liminf_{R\to\infty} \frac{\mu(B(b,R))}{R^{q_0}} > 0.$$

注 1.3. 上述定理的结论即使在 $\partial\Omega$有界时仍然成立，这一点可通过遵循其证明看出。

我们在第 1.2 定理中，利用本文在第 5 节之前提出的球化过程，并在第 [32]节证明第 1.2 定理。第 1.2 定理的第一部分作为定理 9.4 得到证明，第二项结论则作为定理 9 节中的关键结果是命题 9.2；该命题使我们能够将 Ω 中离开每个紧集的曲线族的 p-模$^{d\ d}$ 与关于球化空间 (Ω p 的 $\{\infty\}$ - 容量联系起来（$\Omega^{d_\rho}, d_{\overline{\rho}}, \mu_\rho$）。关于流形背景下相关体积增长现象的结果见 [23]。

在第 8 节中，我们还考察了度量密度函数的具体例子 ρ，其中一个例子此前已在 [5], 中讨论过，参见例 8.3。

2. Definitions and preliminary results

本节中，令 (Y, d_Y) 为一个度量空间。对于 $x \in Y$和 $r > 0$，以 x 为圆心、半径为 r的（开）球记作 $B(x,r) := \{y \in Y\colon d_Y(x,y) < r\}$。给定一个球 $B = B(x,r)$ 和一个正数 κ，集合 κB 表示同心球 $B(x,\kappa r)$。

定义 2.1. 设 (Y, d_Y) 是一个度量空间。对于任意集合 $A \subset Y$，若存在常数 $\kappa > 1$，使得对于每个满足 $A \cap B(a,r) \neq A$ 的 $r > 0$，都有 $(B(a,\kappa r) \setminus B(a,r)) \cap A \neq \varnothing$，则称 A 在点 $a \in A$ 处一致完美。若集合 A 在每个点 $a \in A$ 处都以相同常数 κ 一致完美，则称集合 A 一致完美。

定义 2.2. 若度量空间 (Y, d_Y) 上的测度 μ_Y 是博雷尔测度，且存在常数 $C_\mu \geq 1$ 使得

$$0 < \mu_Y(B(x, 2r)) \leq C_\mu \mu_Y(B(x, r)) < \infty$$

对每个 $x \in Y$和 $r > 0$。

若测度 μ_Y是倍增的，且空间在 x处一致完美，则存在 $0 < \alpha_\mu \leq \beta_\mu < \infty$，使得对每个 $0 < r \leq R < \operatorname{diam}(Y)$，都有

$$\left(\frac{r}{R}\right)^{\beta_\mu} \lesssim \frac{\mu_Y(B(x, r))}{\mu_Y(B(x, R))} \lesssim \left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha_\mu}. \tag{2.3}$$

上质量界指数α_μ 取决于倍增常数 C_μ 和一致完美性常数 κ，参见 [5, 引理 2。2]。容易看出，我们总可以取 $\beta_\mu = \log_2 C_\mu$。在（2.3）中，比较常数仅取决于 C_μ 和 κ。

定义 2.4。 完备度量空间 (Y, d_Y) 中的区域 Ω 称为一致 的，若 Ω 局部紧致但不完备，且存在常数 $C_U \geq 1$，使得对于每一对点 $x, y \in \Omega$，都存在一条可求长曲线 $\gamma \subset \Omega$ 连接这两点，并满足$\ell(\gamma) \leq C_U d_Y(x, y)$，且

$$\min\{\ell(\gamma_{[x,z]}), \ell(\gamma_{[z,y]})\} \leq C_U \operatorname{dist}(z, Y \setminus \Omega)$$

对每个 $z \in \gamma$。这里，$\gamma_{[x,z]}$ 表示 γ 中 x 与 z之间的任意子弧，而 $\ell(\gamma)$表示 γ的长度。

若完备度量空间 (Y, d_Y) 上存在倍增测度 μ_Y，则 (Y, d_Y) 也是正则的（也就是说，(Y, d_Y) 的闭且有界子集都是紧致的），因此 (Y, d_Y) 中的每个区域都是局部紧致的，参见 [4, 命题 3.1]。

定义 2.5. 设 Ω 是完备度量空间 (Y, d_Y) 中的一个开集，满足 $\partial\Omega \neq \varnothing$。给定 Y 中的拉东测度 μ_Y、$\partial\Omega$ 上的拉东测度 ν_Y 以及 $\theta > 0$，若存在常数 $C_\theta \geq 1$ 使得 ν_Y 相对于 μ_Y 是余维 θ的，则称

$$\frac{1}{C_\theta} \frac{\mu_Y(B(x, r))}{r^\theta} \leq \nu_Y(B(x, r)) \leq C_\theta \frac{\mu_Y(B(x, r))}{r^\theta} \tag{2.6}$$

对每个 $x \in \partial\Omega$ 以及 $0 < r < 2\operatorname{diam}(\partial\Omega)$.

若 μ_Y是倍增的，且相对于 μ_Y具有 θ 余维，则可知 ν_Y也具有倍增性质，其倍增常数为 $C_\nu = 2^{-\theta} C_\mu C_\theta^2$。此外，若 μ_Y是倍增的，由于余维测度 ν_Y 支撑于 $\partial\Omega$ 上，必有 $\mu_Y(\partial\Omega) = 0$，例如参见引理 8.1] [13, 。

设 μ_Y 是空间 (Y, d_Y) 上的博雷尔测度。对于 $\theta > 0$ 和 $0 < R < \infty$，令 $\mathcal{H}_R^{-\theta}$ 表示尺度为 R、余维为 θ 的豪斯多夫内容，即对于集合 $A \subset Y$，我们定义

$$\mathcal{H}_R^{-\theta}(A) := \inf\left\{ \sum_{i \in I \subset \mathbb{N}} \frac{\mu_Y(B(x_i, r_i))}{r_i^\theta} : A \subset \bigcup_{i \in I} B(x_i, r_i) \text{ and } r_i \leq R \text{ for all } i \in I \right\}. \tag{2.7}$$

余维豪斯多夫测度 θ 为 $\mathcal{H}^{-\theta}(A) := $ 极限$_{R \to 0^+} \mathcal{H}_R^{-\theta}(A)$。在（2.7）中，我们可以施加附加条件，即 $B(x_i, r_i) \cap A$ 对每个 $i \in I$都非空，因为在覆盖中舍弃不与 A 相交的球，只会得到一个总和更小的覆盖。

引理 2.8。 设(Y, d_Y, μ_Y)是一个度量测度空间，其中 μ_Y为博雷尔测度， $x_0 \in Y$、$r > 0$，并设 $E \subset B(x_0, r)$满足 $\mu_Y(E) \geq \alpha\mu_Y(B(x_0, r))$对某个 $0 < \alpha \leq 1$成立。则

$$\alpha \frac{\mu_Y(B(x_0, r))}{r^\theta} \leq \mathcal{H}_r^{-\theta}(E) \leq \frac{\mu_Y(B(x_0, r))}{r^\theta}.$$

证明。 由于 $\{B(x_0, r)\}$是 E的覆盖，因此可得 $\mathcal{H}_r^{-\theta}(E) \leq \mu_Y(B(x_0, r))/r^\theta$。另一方面，若 $\{B_i : i \in I \subset \mathbb{N}\}$是 E 的一个可数覆盖，且对每个 $i \in I$ 都有 $\operatorname{rad}(B_i) \leq r$，那么

$$\sum_{i\in I} \frac{\mu_Y(B_i)}{\operatorname{rad}(B_i)^\theta} \geq \frac{1}{r^\theta} \sum_{i\in I} \mu_Y(B_i) \geq \frac{1}{r^\theta}\, \mu_Y(E) \geq \alpha \frac{\mu_Y(B(x_0, r))}{r^\theta}.$$ □

引理 2.9。 设(Y, d_Y, μ_Y) 是一个度量测度空间，且 μ_Y是一个倍增测度。令$R > 0$, $\theta > 0$, $\tau \geq 1$和 $E \subset Y$。则

$$\mathcal{H}_{\tau R}^{-\theta}(E) \leq \mathcal{H}_R^{-\theta}(E) \lesssim \mathcal{H}_{\tau R}^{-\theta}(E),$$

比较常数仅取决于 μ_Y、 τ和 θ的倍增常数 C_μ。

证明。 最左侧的不等式直接由 $\mathcal{H}_r^{-\theta}$的定义得出，因此只需证明最右侧的不等式。只需在选择 $\tau = 2$的情况下证明最右侧的不等式，因为这已经蕴含了 $\tau \leq 2$ 情形下的结论，而对该不等式进行迭代便可得到所有 $\tau > 2$ 对应的结论。

为此，设 $\{B_i : i \in I\}$，其中 $I \subset \mathbb{N}$ 是由半径至多为$2R$的球构成的 E 的可数覆盖。对于每个 $i \in I$，有两种可能；或者$\operatorname{rad}(B_i) \leq R$，或者 $R <\operatorname{rad}(B_i) \leq 2R$。在第一种情况下，我们令 $\mathcal{F}_i = \{B_i\}$；而在第二种情况下，我们可以找到至多 N 个球，其球心位于 B_i 中、半径为 R，并覆盖 B_i，记这一集合为 $\mathcal{F}_i$。注意，这里的 N 仅取决于 μ_Y 的倍增常数 C_μ，例如参见 [18, 21]。现在，我们得到一个由半径至多为 R 的球构成的 E 的覆盖$\bigcup_{i\in I} \mathcal{F}_i$；于是，令 I_1 为所有满足$\operatorname{rad}(B_i) \leq R$的指标 $i \in I$ 所组成的集合，

$$\mathcal{H}_R^{-\theta}(E) \leq \sum_{i\in I_1} \frac{\mu_Y(B_i)}{\operatorname{rad}(B_i)^\theta} + \sum_{i\in I\setminus I_1} \frac{1}{R^\theta} \sum_{B\in\mathcal{F}_i} \mu_Y(B) \leq \sum_{i\in I_1} \frac{\mu_Y(B_i)}{\operatorname{rad}(B_i)^\theta} + \sum_{i\in I\setminus I_1} \frac{1}{R^\theta}\, N\, C_\mu\, \mu_Y(B_i).$$

由于对于每个 $i \in I \setminus I_1$都有$\operatorname{rad}(B_i) \leq 2R$，因此可得

$$\mathcal{H}_R^{-\theta}(E) \leq \sum_{i\in I_1} \frac{\mu_Y(B_i)}{\operatorname{rad}(B_i)^\theta} + 2^\theta\, N\, C_\mu \sum_{i\in I\setminus I_1} \frac{\mu_Y(B_i)}{\operatorname{rad}(B_i)^\theta} \leq 2^\theta\, N\, C_\mu \sum_{i\in I} \frac{\mu_Y(B_i)}{\operatorname{rad}(B_i)^\theta}.$$

对所有此类覆盖取下确界，即得最右侧的不等式。 □

定义 2.10. 设 $p \geq 1$ 和 μ_Y是度量空间 (Y, d_Y)上的博雷尔测度。设 Γ 是 Y上的曲线族。则我们定义 Γ 的 p-模 为

$$\operatorname{Mod}_p(\Gamma) = \inf \int_Y g^p d\mu_Y,$$

其中，下确界是对所有满足以下条件的非负博雷尔函数 g 取的：对于每条局部可求长曲线 $\gamma \in \Gamma$，均有 $\int_\gamma g ds \geq 1$。

关于曲线族模数的更多内容，请参见 [21, 第 5 节。2]

按照 Heinonen–Koskela 的定义， [20], 给定函数 $u\colon\ Y \to [-\infty,\infty]$我们称非负 Borel 函数 g 在 Y 上是上梯度 u，如果

$$|u(x)-u(y)| \le \int_\gamma g\,ds$$

对于每一对点 x、$y \in Y$，以及每一条连接 x 和 y 的非恒定可求长曲线 γ。当 $u(x)$ 和 $u(y)$ 中至少有一个不是实数时，我们将上述不等式也理解为 $\int_\gamma g\,ds$ 为无穷大。有关路径积分的更多信息，请参见 [21, 第 5] 节。在 $\int_\gamma g\,ds$ 有限的曲线 γ 上，这样的上梯度控制着绝对连续函数 $u\circ\gamma$ 导数的大小。过去二十年间，非光滑度量环境中的索博列夫型函数空间、位势理论和拟共形映射理论得到了蓬勃发展，例如参见 [4, 18, 20, 21, 27] 及其中的参考文献。利用源自上梯度概念的相关概念所取得的进一步进展，可见 [2, 10, 28] 及其中的参考文献。设 μ_Y 是 (Y,d_Y) 上的博雷尔测度。若函数 g 满足上述不等式，除一个模为零的曲线族外对所有曲线均成立，则 g 是 u 的 p-弱上梯度。若函数 u 有一个 p-弱上梯度 g，且 $\int_Y g^p\,d\mu_Y$ 有限，那么 u 存在唯一的 p-弱上梯度 g_u，其 L^p 范数在 u 的所有 p-弱上梯度 g 的 L^p 范数中最小。按照 [21], 的说法，我们称 g_u 为 u 的极小 p-弱上梯度。

定义 2.11. 若可测函数 u在 Y 上有一个 p-弱上梯度 $g \in L^p(Y,\mu_Y)$，则称其属于齐次 Sobolev 空间$D^{1,p}(Y,d_Y,\mu_Y)$。牛顿-索博列夫空间$N^{1,p}(Y,d_Y,\mu_Y)$由属于 $L^p(Y,\mu_Y)$ 且满足 $D^{1,p}(Y,d_Y,\mu_Y)$ 的函数 u构成。空间 $D^{1,p}(Y,d_Y,\mu_Y)$ 中函数 u的范数定义为$\|u\|_{D^{1,p}(Y,d_Y,\mu_Y)} := \|g_u\|_{L^p(Y,\mu_Y)}$。空间 $N^{1,p}(Y,d_Y,\mu_Y)$ 中函数 u的范数定义为$\|u\|_{N^{1,p}(Y,d_Y,\mu_Y)} := \|g_u\|_{L^p(Y,\mu_Y)} + \|u\|_{L^p(Y,\mu_Y)}$。

在确立某些狄利克雷问题解的存在性时，p-容量的概念起着关键作用。与容量概念相关的是电容器的变分容量概念。

定义 2.12. 给定集合 $E \subset Y$，p-容量 $\mathrm{Cap}_p(E)$ 为

$$\mathrm{Cap}_p(E) := \inf_u \int_Y [|u|^p + g_u^p]\,d\mu_Y,$$

其中下确界取遍所有满足 $u \ge 1$ 于 E 上的函数 $u \in N^{1,p}(Y,d_Y,\mu_Y)$。由于最小$p$-弱上梯度满足截断性质，我们也可以等价地将下确界取遍所有在 Y 上满足 $0 \le u \le 1$ 且在 E 上满足 $u = 1$ 的 $u \in N^{1,p}(Y,d_Y,\mu_Y)$。

给定一个开集 $U \subset Y$ 和两个不相交的集合 $E,F \subset U$，电容器 $(E,F;U)$ 的变分 p-容量 为

$$\mathrm{cap}_p(E,F;U) := \inf_u \int_U g_u^p\,d\mu_Y,$$

其下　　确界取遍所有在 E 上满足 $u \ge 1$ 且在 F 上满足 $u \le 0$ 的函数 $u \in N^{1,p}(U,d_Y,\mu_Y|_U)$.

$\mathrm{Cap}_p(E) = 0$ 具有该性质，当且仅当 $\mu_Y(E) = 0$ 且 $\mathrm{Mod}_p(\Gamma_E) = 0$，其中 Γ_E 是 Y中所有与 E相交的非恒定紧致可求长曲线的集合。有关 p-容量和变分 p-容量的更多内容，请参阅 [4, 21] 。

对于任意满足 $0 < \mu_Y(A) < \infty$ 的 μ_Y-可测集 $A \subset Y$，以及任意 $u \in L^1(A)$，我们用 $u_A := \int_A u\, d\mu_Y := \frac{1}{\mu_Y(A)} \int_A u\, d\mu_Y$ 表示 u 在 A 上的积分平均值。

定义 2.13. 度量测度空间 (Y, d_Y, μ_Y) 支持一个 *p-Poincaré 不等式*，若 $1 \le p < \infty$ 是博雷尔测度，且存在常数 $C_P > 0$ 和 $\lambda \ge 1$，使得对每个球 $B = B(x, r) \subset Y$、每个可测函数 u 以及 u 的每个上梯度 g，都有

$$\fint_{B(x,r)} |u - u_B| d\mu_Y \le C_P r \left(\fint_{B(x,\lambda r)} g^p d\mu_Y \right)^{1/p}.$$

若 Y 是测地空间，且 μ_Y 是倍增测度，那么我们可以取 $\lambda = 1$，代价是增大常数 C_P，见 [21, 定理 9.1。15]。

p-Poincaré 不等式的支集隐含地表明，对每个球 $B \subset Y$，每个函数 $u \in D^{1,p}(Y, d_Y, \mu_Y)$ 都满足 $\int_B |u|\, d\mu_Y < \infty$。我们将这一条件称为 $u \in L^1(B, \mu_Y)$；但读者应注意，$D^{1,p}(Y, d_Y, \mu_Y)$ 中的函数不能在 μ_Y-测度为零的集合上任意扰动（尽管可以在 p-容量为零的集合上任意扰动）。

下面的命题可能具有独立的研究价值，并且是下文定理 6.4证明所需的结果。在 [20], Heinonen 和 Koskela 研究了（局部）Ahlfors Q-正则完备度量测度空间，其中 $Q > 1$，并在这一情形下证明了 (2.15)，其中 $p = Q$，等价于该空间支持 Q-Poincaré 不等式。在这一受限情形下，即 Ahlfors$Q$-正则且 $p = Q$，这一性质在 [20], 中称为 Loewner 性质，因此下面的命题是 Loewner 性质的推广。我们指出，测度 μ_Y 为倍增测度这一假设比 Ahlfors 正则性假设更弱，而且我们可以任意选取 p，只要满足 $1 \le p < \infty$。

命题 2.14. 设 (Y, d_Y, μ_Y) 是一个度量测度空间，具有倍增测度并支持 *p-Poincaré 不等式*。设 E 和 F 是球 $B_R = B(x_0, R)$ 中的两个不相交子集，其中Y。假设对于某些 $0 < \theta < p$ 和 $M > 0$，有

$$\min\{\mathcal{H}_R^{-\theta}(E), \mathcal{H}_R^{-\theta}(F)\} \ge M \frac{\mu_Y(B_R)}{R^\theta}.$$

Then

$$\operatorname{cap}_p(E, F; 2\lambda B_R) \gtrsim M \frac{\mu_Y(B_R)}{R^p} \tag{2.15}$$

其中比较常数仅取决于 C_μ、p、λ、C_P 和 θ。

根据 $\mathcal{H}_R^{-\theta}$ 在（2.7）中给出的定义，显然有 $\mathcal{H}^{-\theta} \ge \mathcal{H}_R^{-\theta}$；以下证明将使用这一点。

证明。设 $u \in N^{1,p}(2\lambda B_R)$ 是一个函数，使得在 E 上有 $u \ge 1$，并且在 F 上有 $u \le 0$。由三角不等式，

$$|u(x) - u_{B(x_0,2R)}| \ge \frac{1}{2} \text{ for every } x \in E \quad \text{or} \quad |u(y) - u_{B(x_0,2R)}| \ge \frac{1}{2} \text{ for every } y \in F.$$

由对称性，只需考虑第一种情况。

设 $x \in E$ 是 u 的一个勒贝格点。则

$$\frac{1}{2} \le \sum_{j \in \mathbb{N}} |u_{B_j(x)} - u_{B_{j+1}(x)}|,$$

其中 $B_1(x) = B(x_0,\ 2R)$，且对于 $j \geq 2,\ B_j(x) = B(x,\ 2^{2-j}R)$。

注意到对每个正整数 $j,\ B_{j+1}(x) \subset B_j(x) \subset 2B_R$，由$\mu_Y$的倍增性质，继而应用庞加莱不等式，可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} |u_{B_j(x)} - u_{B_{j+1}(x)}| &\lesssim \sum_{j\in\mathbb{N}} \fint_{B_j(x)} |u - u_{B_j(x)}|\, d\mu_Y \\ &\lesssim \sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{-j}R \left(\fint_{\lambda B_j(x)} g_u^p\, d\mu_Y\right)^{1/p} \\ &\lesssim \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{2^{-j}R}{\mu_Y(B_j(x))^{1/p}} \left(\int_{\lambda B_j(x)} g_u^p\, d\mu_Y\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

因此，对任意 $\eta > 0$，有

$$\frac{1}{2}c(\eta)\sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{-j\eta} = \frac{1}{2} \lesssim \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{2^{-j}R}{\mu_Y(B_j(x))^{1/p}} \left(\int_{\lambda B_j(x)} g_u^p\, d\mu_Y\right)^{1/p}.$$

上述隐含提及的所有比较常数仅取决于倍增常数以及与庞加莱不等式相关的常数。因此，存在一个正整数 j_x，使得

$$\frac{c(\eta)}{2}\, 2^{-j_x\eta} \lesssim \frac{2^{-j_x}R}{\mu_Y(B_{j_x}(x))^{1/p}} \left(\int_{\lambda B_{j_x}(x)} g_u^p\, d\mu_Y\right)^{1/p},$$

也就是说，

$$2^{-j_x(\eta p - p + \theta)}\, \frac{\mu_Y(B_{j_x}(x))}{(2^{-j_x}R)^\theta} \lesssim c(\eta)^{-p}\, R^{p-\theta} \int_{\lambda B_{j_x}(x)} g_u^p\, d\mu_Y.$$

在上述分析中选取$\eta = 1 - \frac{\theta}{p} > 0$，得到

$$\frac{\mu_Y(B_{j_x}(x))}{\operatorname{rad}(B_{j_x}(x))^\theta} \lesssim R^{p-\theta} \int_{\lambda B_{j_x}(x)} g_u^p\, d\mu_Y,$$

此处的比较常数现在还取决于 c（η），它们对应于上文所作的 η 选择，不久还将取决于 p 和 θ。

令 $E_0 := \{x \in E :\ x$ 是 $u\}$的一个勒贝格点。则集合族 $\lambda B_{j_x}(x),\ x \in E_0$是 E_0的一个覆盖。根据 5-覆盖引理 [18]，，我们得到一个可数的两两不交子集族$\{B_k\}_{k\in I\subset\mathbb{N}}$，使得 $\{5B_k\}_{k\in I}$ 是 E_0 的一个覆盖。这里，每个 B_k 均具有 $\lambda B_{j_x}(x)$的形式，其中$x \in E_0$。

注意到 $p > \theta$，因此由 [13, 命题 3.11] 以及 [29, 定理 4.1]（针对情形 $p = 1$）和 [21, 定理 9.2.8]（针对情形 $p > 1$），我们知道 $\mathcal{H}^{-\theta}$-几乎处处的点都是 u 的勒贝格点。因此，不是 u 的勒贝格点的点 $x \in E$ 构成一个 $\mathcal{H}_R^{-\theta}$ - 零测集，所以它

由引理2.9 以及 μ_Y 的倍增性质可知

$$\begin{aligned} M\,\frac{\mu_Y(B(x_0,R))}{R^\theta} \le \mathcal{H}_R^{-\theta}(E) \lesssim \mathcal{H}_{10\lambda R}^{-\theta}(E) &\le \sum_{k\in I}\frac{\mu_Y(5B_k)}{\operatorname{rad}(5B_k)^\theta} \\ &\lesssim \sum_{k\in I}\frac{\mu_Y(\frac{1}{\lambda}\,B_k)}{\operatorname{rad}(\frac{1}{\lambda}B_k)^\theta} \\ &\lesssim R^{p-\theta}\sum_{k\in I}\int_{B_k} g_u^p\,d\mu_Y \le R^{p-\theta}\int_{2\lambda B_R} g_u^p\,d\mu_Y, \end{aligned}$$

也就是说,

$$M\,\frac{\mu_Y(B(x_0,R))}{R^p} \lesssim \int_{2\lambda B_R} g_u^p\,d\mu_Y.$$

对所有这样的 u 取下确界，即可完成命题的证明。 □

下一个引理可由 [13, 命题 3.11] 得出，其证明与 [13,引理 8.1] 的证明类似。该引理提供了一个有用的工具，用于联系 $\partial\Omega$（以及 $\partial_\rho\Omega$）的 p-容量零子集与 ν-零子集（分别为 ν_ρ-零子集）。

引理 2.16. 设 $p \ge 1$ 和 (Y, d_Y, μ_Y) 是一个度量测度空间，其中 μ_Y 是倍增测度，且支撑一个 p-*Poincaré* 不等式。再设 E 是 Y 的一个博雷尔子集，ν_E 是一个支撑于 E 的博雷尔测度，并且存在 $0 < \theta < p$，使得对每个 $x \in E$ 和 $0 < r < 2\mathrm{diam}(E)$，都有 $\nu_E(B(x,r)) \simeq r^{-\theta}\,\mu_Y(B(x,r))$。那么，若 $A \subset E$ 满足 $\mathrm{Cap}_p(A) = 0$，则必有 $\nu_E(A) = 0$。

我们现在转而定义本文关注的一个非局部函数空间 r.

定义 2.17. 设 (Y, d_Y, μ_Y) 为一个度量测度空间。对于 $p \ge 1$、$0 < \Theta < 1$ 和 u（Y 中的一个可测函数），我们考虑 Besov 能量

$$\|u\|^p_{B^\Theta_{p,p}(Y,d_Y,\mu_Y)} := \int_Y\int_Y \frac{|u(y)-u(x)|^p}{\mu_Y(B(x,d_Y(x,y)))\,d_Y(x,y)^{p\Theta}}\,d\mu_Y(y)\,d\mu_Y(x).$$

若 $\|u\|_{B^\Theta_{p,p}(Y,d_Y,\mu_Y)}$ 有限，则称 u 属于齐次 Besov 空间 $\mathrm{HB}^\Theta_{p,p}(Y, d_Y, \mu_Y)$。若 $\|u\|_{B^\Theta_{p,p}(Y,d_Y,\mu_Y)}$ 有限且 $\int_Y |u|^p\,d\mu_Y$ 也有限，则称 u 属于 Besov 空间 $B^\Theta_{p,p}(Y, d_Y, \mu_Y)$。当$u \in B^\Theta_{p,p}(Y, d_Y, \mu_Y)$ 时，我们将 $B^\Theta_{p,p}(Y, d_Y, \mu_Y)$ 上的范数定义为 $\|u\|_{B^\Theta_{p,p}(Y,d_Y,\mu_Y)} + \|u\|_{L^p(Y,\mu_Y)}$。

虽然上述概念即使在 $\Theta \ge 1$ 时也有意义，但除非 $B^\Theta_{p,p}(Y)$ 仅由常数函数构成，否则当 $\Theta \ge 1$ 时，它并非度量测度空间上牛顿 - 索博列夫类函数的迹。即使对于某些 $\Theta \ge 1$，$B^\Theta_{p,p}(Y)$ 也可能包含非恒定函数，例如谢尔宾斯基地毯的情形，参见 [25, 33]。本文关注的是作为牛顿-索博列夫空间的迹而出现的 Besov 空间，因此这里 $0 < \Theta < 1$。

回顾一下，本文采用以下基本假设：完备度量空间 (X, d) 配备倍增测度 μ，并支持一个 p-Poincaré 不等式。我们假设 $\Omega \subset X$ 是无界一致域，且 $\Omega^d = X$。我们假设边界 $\partial\Omega$ 无界、一致完美，并配备测度 ν，该测度相对于 μ 是 θ-余维的。最后，我们假设度量密度函数 ρ 下半连续，并满足条件 (A)、(B)、(C) 和 (D)。因此，我们有以下结构数据：C_U、C_μ、p、λ、C_P、θ、C_θ、κ、C_A、C_B、C_C 和 C_D。

3. Conformal deformations of the metric and measure

本节的重点是描述如何将无界域变形为有界域。这里的大部分构造最初见于 [32]。其中，在测度变形中引入了参数σ ，而在本文中，我们选择 $\sigma = p$。

如上一节末尾所指出的，$(X,\ d,\ \mu)$ 是一个完备度量测度空间，而 Ω 是该度量空间中的一致域，且 $\partial\Omega$ 无界。因此，Ω 是可求长曲线连通的；也就是说，对于每一对 $x,\ y \in \Omega$，都存在一条位于 Ω 内的可求长曲线 γ_{xy}，其端点为 x 和 y。尽管本文的结构假设包括 Ω 是一致域，且μ 是 $(\Omega,\ d)$ 上的倍增测度，并且 $(\Omega,\ d,\ \mu)$ 对某个固定的$1 \le p < \infty$ 满足 p-Poincar´e 不等式，但即使 Ω 仅为可求长曲线连通，d_ρ 和 μ_ρ 的定义仍然有意义。回想一下，我们假设 $X = \overline{\Omega}^d$。

我们固定一个基点 $b \in \partial\Omega$，并对每个 $x \in \Omega^d$ 令 $|x| := d(x,b)$。我们考虑一个下半连续度量密度函数 $\rho : (0,\infty) \to (0,\infty)$。$\Omega$ 上的新度量 d_ρ 对任意 $x, y \in \Omega$ 定义为

$$d_\rho(x,y) := \inf_{\gamma\in\Gamma(x,y)} \int_\gamma \rho(|\cdot|)ds,$$

其中 $\Gamma(x,y)$ 是 Ω 中以 x 和 y为端点的可求长曲线的集合。注意，Ω^{d_ρ} 是 $(\Omega,\ d_\rho)$ 中柯西序列的等价类的集合，其中收敛到 Ω 中某一点的序列与该点等同。因此 $\Omega \subset \Omega^{d_\rho}$，于是我们定义 $\partial_\rho\Omega := \Omega^{d_\rho} \setminus \Omega$。给定表示点 $x, y \in \Omega^{d_\rho}$ 的两个 d_ρ–柯西序列 $(x_i)_{i=1}^\infty$ 与 $(y_i)_{i=1}^\infty$，我们令 $\overline{d_\rho}(x,y) = \lim_{i\to\infty} d_\rho(x_i,y_i)$。该数与表示这两点的序列无关，并且此 d_ρ 在 Ω^{d_ρ} 上定义了一个度量。若 $x, y \in \Omega$ 两者皆成立，则此概念与 Ω 上的 d_ρ 一致。

Ω 上的新测度定义为

$$d\mu_\rho(x) := \rho(|x|)^p d\mu(x).$$

假设第 1 节列出的 ρ 的结构假设满足条件 (A)、(B) 和 (C)，由 [32] 可得，$(\Omega,\ d_\rho)$ 是一个有界的一致度量空间，并且 μ_ρ 是该空间上的倍增测度。此外，我们还得到，空间 $(\Omega,\ d_\rho,\mu_\rho)$ 支集一个 p-Poincar´e 不等式。并且，关于度量 d_ρ 完备化 Ω，恰好比关于 d 完备化 Ω 多出一个点。这个点称为无穷远点，记作 ∞。最后，我们得到，u 在 $(\Omega,\ d_\rho,\mu_\rho)$ 中的 p-可积上梯度 g，当且仅当 u 在 $(\Omega,\ d,\mu)$ 中的 p-可积上梯度为 $\rho(|\cdot|)g(\cdot)$。

回顾我们的既定假设，$\partial\Omega$ 配备了一个拉东测度 ν，它相对于测度 μ 是 θ-余维的。现在我们转而将边界 $\partial\Omega$ 上的测度 ν 变换为 $\partial_\rho\Omega = \partial\Omega \cup \{\infty\}$ 上的测度；[32] 中未曾考虑过这种变换。我们将边界 $\partial_\rho\Omega$ 上的新球化测度定义为

$$d\nu_\rho(x) := \rho(|x|)^{p-\theta} d\nu(x)$$

且 $\nu_\rho(\{b\}) := \nu_\rho(\{\infty\}) := 0$。注意，$\nu(\{b\}) = 0$，因为 ν 在 $(\partial\Omega,\ d)$ 中是倍增的，而 $(\partial\Omega,\ d)$ 是一致完美的，见 [5，引理 2.2] 和 [36，定理 1]。

的倍增性质 ν 和条件(A) 可得

$$\int_{\partial\Omega\setminus B(b,r)} \rho(|x|)^{p-\theta} d\nu(x) \gtrsim \rho(r)^{p-\theta}\nu(B(b,r+1)), \tag{3.1}$$

其中，比较常数取决于 C_μ， p， θ， C_θ， κ和 C_A。类似地， μ 和条件(A) 可得

$$\int_{\Omega\setminus B(b,r)} \rho(|x|)^p d\mu(x) \gtrsim \rho(r)^p \mu(B(b,r+1)), \tag{3.2}$$

其中，比较常数依赖于 C_μ、 p和 C_A。

引理 3.3。 条件 *(D)* 等价于存在一个常数 C'_D 使得

$$\int_{\Omega\setminus B(b,r)} \rho(|x|)^{p-\theta}(|x|+1)^{-\theta} d\mu(x) \le C'_D\, \rho(r)^{p-\theta}(r+1)^{-\theta}\mu(B(b,r+1))$$

对于每个 $r>0$。

证明。 由余维性质可立即得出，上述条件右侧与条件 (D) 右侧具有可比性。为了证明上述条件左侧与条件 (D)左侧的可比性，先假设 $r\ge 1$。于是有

$$\nu\left(B\left(b,(2\kappa)^j r\right)\setminus B\left(b,(2\kappa)^{j-1}r\right)\right) \gtrsim \nu\left(B\left(b,(2\kappa)^j r\right)\right)$$

对于每个正整数 j，其中 κ 是与 $(\partial\Omega,\ d)$ 相关联的一致完美性常数。这由 $(\partial\Omega,\ d)$ 的一致完美性以及 ν的倍增性质可得。然后由条件 (A)，

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega\setminus B(b,r)} \rho(|x|)^{p-\theta} d\nu(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{B(b,(2\kappa)^j r)\setminus B(b,(2\kappa)^{j-1}r)} \rho(|x|)^{p-\theta} d\nu(x) \\
&\simeq \sum_{j=1}^{\infty} \nu\left(B\left(b,(2\kappa)^j r\right)\setminus B\left(b,(2\kappa)^{j-1}r\right)\right) \rho\left((2\kappa)^j r\right)^{p-\theta} \\
&\simeq \sum_{j=1}^{\infty} \nu\left(B\left(b,(2\kappa)^j r\right)\right) \rho\left((2\kappa)^j r\right)^{p-\theta}.
\end{aligned}$$

同样，我们有

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega\setminus B(b,r)} \rho(|x|)^{p-\theta}(|x|+1)^{-\theta} d\mu(x) &\simeq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{B(b,(2\kappa)^j r)\setminus B(b,(2\kappa)^{j-1}r)} \rho(|x|)^{p-\theta}|x|^{-\theta} d\mu(x) \\
&\simeq \sum_{j=1}^{\infty} \mu\left(B\left(b,(2\kappa)^j r\right)\setminus B\left(b,(2\kappa)^{j-1}r\right)\right) \rho\left((2\kappa)^j r\right)^{p-\theta}\left((2\kappa)^j r\right)^{-\theta} \\
&\simeq \sum_{j=1}^{\infty} \mu\left(B\left(b,(2\kappa)^j r\right)\right) \rho\left((2\kappa)^j r\right)^{p-\theta}\left((2\kappa)^j r\right)^{-\theta}.
\end{aligned}$$

注意 Ω 是连通的，且 μ 在 Ω 中是倍增的。最后，可比性由余维性得出。另一方面，若 $0<r<1$，则

$$\begin{aligned}
\int_{B(b,1)\setminus B(b,r)} \rho(|x|)^{p-\theta} d\nu(x) &\lesssim \rho(1)^{p-\theta}\nu(B(b,1)) \simeq \rho(1)^{p-\theta}\nu(B(b,2\kappa)\setminus B(b,1)) \\
&\simeq \int_{B(b,2\kappa)\setminus B(b,1)} \rho(|x|)^{p-\theta} d\nu(x) \le \int_{\partial\Omega\setminus B(b,1)} \rho(|x|)^{p-\theta} d\nu(x),
\end{aligned}$$

其中我们使用了条件 (A)、 ν 的倍增性质以及（$\partial\Omega$ d）的一致完美性。类似地

$$\begin{aligned}\int_{B(b,1)\setminus B(b,r)} \rho(|x|)^{p-\theta}(|x|+1)^{-\theta}d\mu(x) &\lesssim \rho(1)^{p-\theta}\mu(B(b,1)) \simeq \rho(1)^{p-\theta}\mu(B(b,2)\setminus B(b,1))\\ &\simeq \int_{B(b,2)\setminus B(b,1)} \rho(|x|)^{p-\theta}(1+|x|)^{-\theta}d\mu(x)\\ &\le \int_{\Omega\setminus B(b,1)} \rho(|x|)^{p-\theta}(1+|x|)^{-\theta}d\mu(x).\end{aligned}$$

现在，应用先前在情形 $r \ge 1$ 下选取$r = 1$时得到的可比性，并结合前两个不等式，可得

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega\setminus B(b,r)} \rho(|x|)^{p-\theta}d\nu(x) &= \int_{\partial\Omega\setminus B(b,1)} \rho(|x|)^{p-\theta}d\nu(x) + \int_{B(b,1)\setminus B(b,r)} \rho(|x|)^{p-\theta}d\nu(x)\\ &\simeq \int_{\partial\Omega\setminus B(b,1)} \rho(|x|)^{p-\theta}d\nu(x) \simeq \int_{\Omega\setminus B(b,1)} \rho(|x|)^{p-\theta}(|x|+1)^{-\theta}d\mu(x)\\ &\simeq \int_{\Omega\setminus B(b,r)} \rho(|x|)^{p-\theta}(|x|+1)^{-\theta}d\mu(x).\end{aligned}$$

□

4. The codimensionality of μ_ρ and ν_ρ

本节首先证明，ν_ρ 是 $(\partial_\rho\Omega\ d_\rho)$ 上的倍增测度。然后利用μ_ρ 和ν_ρ 的倍增性质，证明这些测度满足余维关系。为证明ν_ρ 在 $(\partial_\rho\Omega\ d_\rho)$ 上是倍增的，我们使用 [32]的结果。度量 d_ρ 中的球记作 B_ρ，即

$$B_\rho(x,r) := \left\{ y \in \overline{\Omega}^{d_\rho} : d_\rho(x,y) < r \right\}$$

对每个 $x \in \Omega^{d_\rho}$ 和 $r > 0$,

下面两个引理在 [32], 中有类似结果，其中考虑的点假定属于 Ω。然而，得益于条件 (A)，借助 ∂和 d 的连续性，我们也可以得出边界 $d_\rho\Omega$ 上各点对应的结果。我们省略证明，但给出 [32] 中相应结果的参考文献。注意，我们不令 x 等于 b，原因很简单： $\rho(0)$ 未定义。不过， $d_\rho(b, y)$ 可定义为将 d_ρ 从 Ω 延拓到其度量完备化 $\Omega \cup \partial\Omega \cup \{\infty\}$，其中 $b \in \partial\Omega$。

引理4.1. 每当 $x, y \in \Omega^d$ 满足 $x \ne b$ 且 $\frac{1}{2}(|x|+1) \le |y|+1 \le 2(|x|+1)$时，

$$d_\rho(x,y) \simeq \rho(|x|)d(x,y),$$

其中比较常数仅依赖于 C_U, C_A 和 C_B。

利用 ρ 的倍增性质，并用Ω中的点逼近 $\partial\Omega$中的点，可以从 [32, 引理 3.11] 推出上述引理。

引理 4.2。 令 $x, y \in \Omega^d$ 满足 $x \ne b$ 和 $|y| \ge 2|x|+1$。则

$$d_\rho(x,y) \simeq \rho(|x|)(|x|+1),$$

其中比较常数仅依赖于 C_U, C_A 和 C_B。特别地，存在常数C_1 和 C_2，它们依赖于 C_U, C_A 和 C_B，使得

$$C_1\rho(|x|)(|x|+1) \le d_\rho(x,\infty) \le C_2\rho(|x|)(|x|+1).$$

证明与 [32, 引理 312], 中的证明非常相似，因此此处略去。

令 $h\colon (0,\ \infty) \to (0,\ \infty)$，定义为 $h(t) := (t+1)\rho(t)$，方式与 [32] 中相同。h 的反函数定义为

$$h^{-1}(\tau) := \inf\{t>0 : h(t) \le \tau\}, \quad \tau > 0.$$

注意，h^{-1} 单调递减且无界（因为当 $t \to \infty$ 时，$h(t) \to 0$，见 [32,注 2.1]）。注意，当 $0 < \tau \le \rho(1)/C_A$ 时，我们知道 $h^{-1}(\tau) \ge 1 > 0$。由 [32,引理 4.2] 可得，对于每个满足 $0 < \tau \le \rho(1)/C_A$ 的 $\tau/2$，都有 $h^{-1}(\tau) \simeq h^{-1}(\tau/2)$，其中比较常数仅取决于 C_A 和 C_B。然后，取引理 4.2 中的 C_1 和 C_2，可得对于每个$0 < r \le C_1\rho(1)/C_A$,

$$\overline{\Omega}^{d_\rho} \setminus B\left(b, 2h^{-1}\left(\frac{r}{2C_2C_AC_B}\right)\right) \subset B_\rho(\infty,r) \subset \overline{\Omega}^{d_\rho} \setminus B\left(b, h^{-1}\left(\frac{r}{C_1}\right)\right). \tag{4.3}$$

（4.3）的证明与 [32, 引理 4.4] 的证明类似，因此省略。

引理 4.4. 存在正数常数 c_0、a_1 和 a_2，它们仅依赖于 C_U、C_A 和 C_B，使得若 $x \in \Omega^d \setminus \{b\}$ 且 $0 < r \le 2c_0 d_\rho(x,\infty)$，则

$$B\left(x, \frac{a_1 r}{\rho(|x|)}\right) \setminus \{b\} \subset B_\rho(x,r) \setminus \{b\} \subset B\left(x, \frac{a_2 r}{\rho(|x|)}\right).$$

此外，对每个 $y \in B_\rho(x,r) \setminus \{b\}$，都有 $\frac{1}{C_A}\rho(|x|) \le \rho(|y|) \le C_A\rho(|x|)$。

证明与 [32, 引理 4.9], 的证明相同，因此省略。

引理 4.5. 对所有 $r > 0$，我们有

$$0 < \nu_\rho(B_\rho(\infty,2r)) \lesssim \nu_\rho(B_\rho(\infty,r)) < \infty,$$

其中比较常数依赖于 C_U、C_μ、p、θ、C_θ、κ、C_A、C_B 和 C_D。

证明。由条件 (A)和 (D) 可得

$$\nu_\rho(\partial\Omega \setminus B(b,r)) \le C_D\rho(r)^{p-\theta}\nu(B(b,r+1)) \le C_DC_A^{p-\theta}\rho(1)^{p-\theta}\nu(B(b,2))$$

对每个 $0 < r \le 1$ 都成立。因此取极限 $r \to 0$，可得

$$\nu_\rho(\partial_\rho\Omega) \le C_DC_A^{p-\theta}\rho(1)^{p-\theta}\nu(B(b,2)) < \infty \tag{4.6}$$

由此可得最终不等式。此外，由于 $\rho > 0$ 和 $\nu(B_\rho(\infty,\ r)) > 0$ 根据（4.3），我们有 $\nu_\rho(B_\rho(\infty,\ r)) > 0$。

若 $0 < r \le \frac{C_1\rho(1)}{2C_A}$，则利用（4.3）、条件 (D)、条件 (A)、$h^{-1}$ 和 ν的倍增性质，以及（3.1），可得

$$\begin{aligned}
\nu_\rho(B_\rho(\infty, 2r)) &\le \nu_\rho\left(\overline{\Omega}^{d_\rho} \setminus B(b, h^{-1}(2r/C_1))\right) = \int_{\partial\Omega\setminus B(b,h^{-1}(2r/C_1))} \rho(|x|)^{p-\theta} d\nu(x) \\
&\le C_D \rho(h^{-1}(2r/C_1))^{p-\theta} \nu(B(b, h^{-1}(2r/C_1) + 1)) \\
&\simeq \rho\left(2h^{-1}\left(\frac{r}{2C_2C_AC_B}\right)\right)^{p-\theta} \nu\left(B\left(b, 2h^{-1}\left(\frac{r}{2C_2C_AC_B}\right) + 1\right)\right) \\
&\lesssim \int_{\partial\Omega\setminus B\left(b, 2h^{-1}\left(\frac{r}{2C_2C_AC_B}\right)\right)} \rho(|x|)^{p-\theta} d\nu(x) \\
&= \nu_\rho\left(\partial_\rho\Omega \setminus B\left(b, 2h^{-1}\left(\frac{r}{2C_2C_AC_B}\right)\right)\right) \le \nu_\rho(B_\rho(\infty, r)).
\end{aligned}$$

如果 $r \ge \frac{C_1\rho(1)}{2C_A}$，那么类似地可得

$$\nu_\rho(B_\rho(\infty, r)) \ge \nu_\rho\left(B_\rho\left(\infty, \frac{C_1\rho(1)}{2C_A}\right)\right) \gtrsim \nu_\rho(\partial_\rho\Omega) \ge \nu_\rho(B_\rho(\infty, 2r)).$$

这里我们还用到了（4.6）以及这一事实：$h^{-1}\left(\frac{\rho(1)}{C_A}\right) \simeq 1$，它可由 [32, 引理 22]推出。 □

定理 4.7。测度 ν_ρ 在空间 $(\partial_\rho\Omega, d_\rho)$ 中是倍增的，即存在一个常数$C_{\nu_\rho} \ge 1$，它依赖于 C_U、C_μ、p、θ、C_θ、κ、C_A、C_B 和 C_D，使得

$$0 < \nu_\rho(B_\rho(x, 2r)) \le C_{\nu_\rho} \nu_\rho(B_\rho(x, r)) < \infty$$

对于每个 $x \in \partial_\rho\Omega$ 和 $r > 0$。

该定理的证明与 [32, 定理 4.10], 的证明类似，但为方便读者，我们在此给出证明，特别是因为用于在 $\partial_\rho\Omega$ 上构造度量 d_ρ 的曲线不一定位于 $\partial_\rho\Omega$ 内。

证明。对于 $x = \infty$ 的情形，这一点已经得到证明。如果我们证明除 b 以外的点满足这一点，那么通过用 $\partial\Omega$ 中的一个序列逼近 b，$x = b$ 的情形也可得出相同结论；这是可能的，因为 $(\partial\Omega, d)$ 是一致完美的。

因此，设 $x \in \partial\Omega \setminus \{b\}$。根据（4.6）可得最终不等式。对于第一个不等式，根据引理 4.4 可得

$$\nu_\rho(B_\rho(x, r)) \ge \nu_\rho(B_\rho(x, \min\{r, 2c_0 d_\rho(x, \infty)\})) \ge \nu_\rho\left(B\left(x, \frac{a_1 \min\{r, 2c_0 d_\rho(x, \infty)\}}{\rho(|x|)}\right)\right).$$

这是正的，因为 ρ 是正的，并且球的 ν-测度也是正的，因为

$$a_1 \min\{r, 2c_0 d_\rho(x, \infty)\}/\rho(|x|) > 0.$$

证明的其余部分分为以下三种情形。

(1) $0 < r \le c_0 d_\rho(x, \infty)$ (2) $r \ge 2d_\rho(x, \infty)$ (3) $c_0 d_\rho(x, \infty) \le r \le 2d_\rho(x, \infty)$

这里 c_0 是引理中的常数4.4。

在情形（1）中，我们由引理 4.4 以及 ν 的倍增性质得到

$$\begin{aligned}\nu_\rho(B_\rho(x,2r)) &\simeq \rho(|x|)^{p-\theta}\nu(B_\rho(x,2r)) \le \rho(|x|)^{p-\theta}\nu\left(B\left(x,\frac{2a_2 r}{\rho(|x|)}\right)\right)\\ &\simeq \rho(|x|)^{p-\theta}\nu\left(B\left(x,\frac{a_1 r}{\rho(|x|)}\right)\right) \le \rho(|x|)^{p-\theta}\nu(B_\rho(x,r)) \simeq \nu_\rho(B_\rho(x,r)).\end{aligned}$$

这就完成了情形（1）的证明。

对于情形（2），我们由引理 4.5

$$\nu_\rho(B_\rho(x,2r)) \le \nu_\rho(B_\rho(\infty,3r)) \lesssim \nu_\rho(B_\rho(\infty,r/2)) \le \nu_\rho(B_\rho(x,r)).$$

现在我们转而考虑情形（3）。我们将证明

$$\nu_\rho(B_\rho(x,r)) \simeq \rho(|x|)^{p-\theta}\nu(B(x,|x|+1)),$$

若 $c_0 d_\rho(x,\infty) \le r \le 4d_\rho(x,\infty)$。由于右端不依赖于 r，这就将完成证明。

我们首先证明“$\lesssim$”部分。因此，假设 $y \in B_\rho(x, r) \setminus \{b,\infty\}$。第一步是证明存在一个常数 $M \ge 2$，它仅取决于 C_U、C_A 和 C_B，使得$|x|+1 \le M(|y|+1)$。若 $|x|+1 \le 2(|y|+1)$，则对任意 $M \ge 2$，结论都成立。若 $|x|+1 \ge 2(|y|+1)$，即 $|x| \ge 2|y|+1 \ge |y|$，则由引理4.2 可得

$$\rho(|y|)(|y|+1) \simeq d_\rho(x,y) < 4d_\rho(x,\infty) \simeq \rho(|x|)(|x|+1) \lesssim \left(\frac{|y|+1}{|x|+1}\right)^{\frac{1}{C_A C_B}}(|y|+1)\rho(|y|),$$

其中我们还用到了这样一个事实：$d_\rho(x, y) < r \le 4d_\rho(x, \infty)$，以及引理 2.2]。因此，存在一个常数 M，使得 $|x|+1 \le M(|y|+1)$。

下一步是分别讨论以下情形：$|x|+1 \le M$和 $|x|+1 > M$。我们先考虑$|x|+1 \le M$。在这种情况下，由条件(A) 可得 $\rho(1) \simeq \rho(|x|)$，因此由（4.6）以及 ν的倍增性质，

$$\nu_\rho(B_\rho(x,r)) \le \nu_\rho(\partial_\rho\Omega) \lesssim \rho(1)^{p-\theta}\nu(B(b,2)) \lesssim \rho(|x|)^{p-\theta}\nu(B(b,1)) \le \rho(|x|)^{p-\theta}\nu(B(x,|x|+1)).$$

现在设 $|x|+1 > M$。记 $r_x := \frac{1}{M}(|x|+1) - 1 > 0$。那么 $|y| \ge r_x$ 对每个$y \in B_\rho(x, r) \setminus \{b,\infty\}$ 且 $\rho(|x|) \simeq \rho(r_x)$，由条件(A)可得。因此由条件(D)，

$$\begin{aligned}\nu_\rho(B_\rho(x,r)) &= \int_{B_\rho(x,r)} \rho(|y|)^{p-\theta} d\nu(y) \le \int_{\partial\Omega\setminus B(b,r_x)} \rho(|y|)^{p-\theta} d\nu(y) \le C_D\rho(r_x)^{p-\theta}\nu(B(b,r_x+1))\\ &= C_D\rho(r_x)^{p-\theta}\nu\left(B\left(b,\frac{1}{M}(|x|+1)\right)\right) \simeq \rho(|x|)^{p-\theta}\nu(B(x,|x|+1)).\end{aligned}$$

由此我们证明了“$\lesssim$”部分。

现在来证明“$\gtrsim$”部分。我们证明存在一个正的常数 a，它仅依赖于 C_U、C_A 和 C_B，使得

$$B(x, a(|x|+1)) \setminus \{b\} \subset B_\rho(x,r).$$

因此，假设 $y \in B(x, a(|x|+1)) \setminus \{b\}$。然后根据三角不等式，

$$\frac{1}{2}(|x|+1) \le |y|+1 \le 2(|x|+1),$$

若设 $a \le 1/2$。因此，由条件 (A) 可得 $\rho(|y|) \simeq \rho(|x|)$。然后由引理 4.1 和 4.2，

$$d_\rho(x,y) \simeq \rho(|x|)d(x,y) < a\rho(|x|)(|x|+1) \simeq ac_0 d_\rho(x,\infty) \le ar.$$

因此，通过将 a 取得足够小，我们得到 $B(x,\ a(|x|+1)) \setminus \{b\} \subset B_\rho(x,\ r)$。因此，

$$\begin{aligned}\nu_\rho(B_\rho(x,r)) &= \int_{B_\rho(x,r)} \rho(|y|)^{p-\theta} d\nu(y) \ge \int_{B(x,a(|x|+1))} \rho(|y|)^{p-\theta} d\nu(y) \simeq \rho(|x|)^{p-\theta}\nu(B(x,a(|x|+1)))\\ &\simeq \rho(|x|)^{p-\theta}\nu(B(x,|x|+1)).\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

现在我们可以证明 ν_ρ 和 μ_ρ 具有余维性质。

定理 4.8. 存在一个常数 $C_{\theta,\ \rho} \ge 1$ 它依赖于 C_U、 C_μ、 p、 θ、 C_θ、 κ、 C_A、 C_B、C_C 和 C_D ，使得

$$\frac{1}{C_{\theta,\rho}} \frac{\mu_\rho(B_\rho(x,r))}{r^\theta} \le \nu_\rho(B_\rho(x,r)) \le C_{\theta,\rho} \frac{\mu_\rho(B_\rho(x,r))}{r^\theta}$$

对于每个 $x \in \partial_\rho\Omega$ 以及 $0 < r < 2$直径$_\rho(\partial_\rho\Omega)$。

证明。 若我们证明此结果对任意 $x \in \partial_\rho\Omega \setminus \{b\}$ 都成立，那么通过用 $\partial\Omega$ 中的一个序列逼近 $x = b$，也可得到关于 $x = b$ 的结论；这是可行的，因为 $(\partial\Omega,\ d)$ 是一致完美的。因此，设 $x \ne b$ 成立。证明分为四种情形。

(1) $0 < r \le 2c_0 d_\rho(x,\ \infty)$, (2) $x = \infty$ 以及 $0 < r \le \frac{C_1\rho}{(1)\ C_A}$, (3) ~~$x \ne \infty$~~ 以及 $2c_0 d_\rho(x,\ \infty) < r \le \frac{C_1\rho}{(1)\ C_A}$, (4) ~~$\frac{C_1\rho}{(1)\ C_A} < r < 2$直径$_\rho(\partial_\rho\Omega)$~~。

因此，在证明情形（2）时，我们可以使用（4.3）。

在情形（1）中，由引理 4.4 可得

$$\begin{aligned}\mu_\rho(B_\rho(x,r)) &\simeq \rho(|x|)^p \mu(B_\rho(x,r)) \le \rho(|x|)^p \mu\left(B\left(x, \frac{a_2 r}{\rho(|x|)}\right)\right) \simeq \rho(|x|)^p \mu\left(B\left(x, \frac{a_1 r}{\rho(|x|)}\right)\right)\\ &\simeq \rho(|x|)^p \left(\frac{a_1 r}{\rho(|x|)}\right)^\theta \nu\left(B\left(x, \frac{a_1 r}{\rho(|x|)}\right)\right) \lesssim \rho(|x|)^{p-\theta} r^\theta \nu(B_\rho(x,r)) \simeq r^\theta \nu_\rho(B_\rho(x,r)),\end{aligned}$$

其中 我们还用到了 μ 的倍增性质，以及 μ 和 ν 的余维性。类似地 ly

$$\begin{aligned}\nu_\rho(B_\rho(x,r)) &\simeq \rho(|x|)^{p-\theta} \nu(B_\rho(x,r)) \le \rho(|x|)^{p-\theta} \nu\left(B\left(x, \frac{a_2 r}{\rho(|x|)}\right)\right)\\ &\simeq \rho(|x|)^{p-\theta} \left(\frac{a_2 r}{\rho(|x|)}\right)^{-\theta} \mu\left(B\left(x, \frac{a_2 r}{\rho(|x|)}\right)\right) \simeq \rho(|x|)^p r^{-\theta} \mu\left(B\left(x, \frac{a_1 r}{\rho(|x|)}\right)\right)\\ &\le \rho(|x|)^p r^{-\theta} \mu(B_\rho(x,r)) \simeq r^{-\theta} \mu_\rho(B_\rho(x,r)).\end{aligned}$$

在情形（2）中，我们使用（4.3）和条件(D)得到

$$\begin{aligned}\nu_\rho(B_\rho(x,r)) &\le \nu_\rho\left(\overline{\Omega}^{d_\rho} \setminus B(b, h^{-1}(r/C_1))\right) = \int_{\partial\Omega \setminus B(b,h^{-1}(r/C_1))} \rho(|y|)^{p-\theta} d\nu(y)\\ &\le C_D \rho(h^{-1}(r/C_1))^{p-\theta} \nu(B(b, h^{-1}(r/C_1)+1))\\ &\le C_D C_\theta \rho(h^{-1}(r/C_1))^p \rho(h^{-1}(r/C_1))^{-\theta} (h^{-1}(r/C_1)+1)^{-\theta} \mu(B(b, h^{-1}(r/C_1)+1)).\end{aligned}$$

这里我们还利用了 μ 和 ν的余维性。然后，利用条件(A)、 μ 和 h^{-1}的倍增性质，以及 h的定义，我们得到

$$\simeq h(h^{-1}(r/C_1))^{-\theta}\rho\left(2h^{-1}\left(\frac{r}{2C_2C_AC_B}\right)\right)^p\mu\left(B\left(b,2h^{-1}\left(\frac{r}{2C_2C_AC_B}\right)+1\right)\right).$$

注意到 $h(h^{-1}(r/C_1)) > \frac{r}{C_1C_A}$。因此，利用（3.2），可得

$$\lesssim \left(\frac{r}{C_1C_A}\right)^{-\theta}\int_{\Omega\setminus B\left(b,2h^{-1}\left(\frac{r}{2C_2C_AC_B}\right)\right)}\rho(|y|)^p d\mu(y)$$
$$\simeq r^{-\theta}\mu_\rho\left(\Omega\setminus B\left(b,2h^{-1}\left(\frac{r}{2C_2C_AC_B}\right)\right)\right)\le r^{-\theta}\mu_\rho(B_\rho(x,r)),$$

其中在最后一步中，我们再次用了（4.3）。利用条件(C)以及 ν的倍增性质，可类似地得到

$$\begin{aligned}\mu_\rho(B_\rho(x,r))&\le\mu_\rho\left(\overline{\Omega}^{d_\rho}\setminus B(b,h^{-1}(r/C_1))\right)=\int_{\Omega\setminus B(b,h^{-1}(r/C_1))}\rho(|y|)^p d\mu(y)\\&\le C_C\rho(h^{-1}(r/C_1))^p\mu(B(b,h^{-1}(r/C_1)+1))\\&\le C_CC_\theta\rho(h^{-1}(r/C_1))^{p-\theta}\rho(h^{-1}(r/C_1))^\theta(h^{-1}(r/C_1)+1)^\theta\nu(B(b,h^{-1}(r/C_1)+1))\\&\simeq h(h^{-1}(r/C_1))^\theta\rho\left(2h^{-1}\left(\frac{r}{2C_2C_AC_B}\right)\right)^{p-\theta}\nu\left(B\left(b,2h^{-1}\left(\frac{r}{2C_2C_AC_B}\right)+1\right)\right).\end{aligned}$$

注意到 $h(h^{-1}(r/C_1)) \le \frac{C_A}{C_1}r$。因此，利用（3.1），可得

$$\lesssim\left(\frac{C_A}{C_1}r\right)^\theta\int_{\partial\Omega\setminus B\left(b,2h^{-1}\left(\frac{r}{2C_2C_AC_B}\right)\right)}\rho(|y|)^{p-\theta}d\nu(y)$$
$$\simeq r^\theta\nu_\rho\left(\partial\Omega\setminus B\left(b,2h^{-1}\left(\frac{r}{2C_2C_AC_B}\right)\right)\right)\le r^\theta\nu_\rho(B_\rho(x,r)).$$

在情形（3）中，我们结合情形（2）的结果，使用μ_ρ 和ν_ρ 的倍增性质。由于 $r\gtrsim d_\rho(x,\ \infty)$，可得

$$\mu_\rho(B_\rho(x,r))\simeq\mu_\rho(B_\rho(\infty,r))\simeq r^\theta\nu_\rho(B_\rho(\infty,r))\simeq r^\theta\nu_\rho(B_\rho(x,r)).$$

最后考虑情形（4）。由于对每个 $y\in\Omega$，$d_\rho(y,\infty)\simeq\rho(|y|)(|y|+1)$，且 $\rho(t)(t+1)$是准递减的，见[32, 注2.1], 可得，对满足 $|z|\ge|y|$的任意 $z,y\in\Omega$，均有 $d_\rho(z,y)\le d_\rho(z,\infty)+d_\rho(\infty,y)\simeq\rho(|y|)(|y|+1)$。特别地，可得 $d_\rho(z,y)\lesssim\rho(1)$，这意味着$\mathrm{diam}_\rho(\Omega)\lesssim\rho(1)$。此外，对于任意满足 $0<|y|\le1$的 $y\in\partial\Omega$，我们有 $d_\rho(y,\infty)\simeq\rho(|y|)(|y|+1)\simeq\rho(1)$。因此，$\rho(1)\lesssim\mathrm{diam}_\rho(\partial_\rho\Omega)\le\mathrm{diam}_\rho(\Omega)\lesssim\rho(1)$，所以在情形（4）中有$\mathrm{diam}_\rho(\Omega)\simeq\mathrm{diam}_\rho(\partial_\rho\Omega)\simeq\rho(1)\simeq r_\circ$。此外，由（3.1）和（4.6）可得

$$\rho(1)^{p-\theta}\nu(B(b,2))\lesssim\int_{\partial\Omega\setminus B(b,1)}\rho(|y|)^{p-\theta}d\nu(y)\le\nu_\rho(\partial_\rho\Omega)\le C_DC_A^{p-\theta}\rho(1)^{p-\theta}\nu(B(b,2))$$

因此，根据 ν 的倍增性质，我们有 $\nu_\rho(\partial_\rho\Omega)\simeq\rho(1)^{p-\theta}\nu(B(b,1))$。另一方面，对于任意 $0<s\le1$

$$\int_{\Omega\setminus B(b,s)}\rho(|y|)^p d\mu(y)\le C_C\rho(s)^p\mu(B(b,s+1))\le C_CC_A^p\rho(1)^p\mu(B(b,2)).$$

因此，令 $s \to 0$，我们有 $\mu_\rho(\Omega) \le C_C C_A^p \rho(1)^p \mu(B(b,2))$。由式（3.2）可得

$$\rho(1)^p \mu(B(b,2)) \lesssim \int_{\Omega \setminus B(b,1)} \rho(|y|)^p \, d\mu(y) \le \mu_\rho(\Omega).$$

因此，根据 μ 的倍增性质，我们有$\mu_\rho(\Omega) \simeq \rho(1)^p \mu(B(b,\ 1))$。因此我们得 t

$$\begin{aligned}\nu_\rho(B_\rho(x,r)) &\simeq \nu_\rho(B_\rho(x, \operatorname{diam}_\rho(\partial_\rho \Omega))) \simeq \nu_\rho(\partial_\rho \Omega) \simeq \rho(1)^{p-\theta} \nu(B(b,1)) \simeq \rho(1)^{-\theta} \rho(1)^p \mu(B(b,1)) \\ &\simeq r^{-\theta} \mu_\rho(\Omega) \simeq r^{-\theta} \mu_\rho(B_\rho(x, \operatorname{diam}_\rho(\Omega))) \simeq r^{-\theta} \mu_\rho(B_\rho(x,r)).\end{aligned}$$

这里我们用到了μ_ρ 和ν_ρ 的倍增性质，以及 μ 和 ν的余维性。 □

5. Quasi-preservation of Besov energy

与第 2 节一样，我们所说的结构数据是指常数 C_U、 C_μ、 p、 λ、 C_P、 θ、 C_θ、 κ、 C_A、 C_B、C_C和 C_D。其中， C_U、 C_μ、 p、 λ、 C_P、 θ、 C_θ和 κ是与空间 $(\Omega\ d,\ \mu)$ 及测度 ν相关的结构数据。本节将探讨在本文所考虑的球化过程中，Besov 空间如何变换。我们现在知道，

(1) 当 ν 相对于 μ是 θ-余维时，变换后的测度ν_ρ 相对于变换后的测度μ_ρ是 θ-余维；(2) 当 $(\Omega\ d)$ 是边界为 $\partial\Omega$ 的一致域时，变换后的区域 $(\Omega\ d_\rho)$ 也是边界为 $\partial_\rho\Omega = \partial\Omega \cup \{\infty\}$ 的一致域；(3) 当 $(\Omega\ d,\ \mu)$ 是倍增的且支集一个 p-Poincar´e 不等式时，变换后的空间 $(\Omega\ d_\rho,\ \mu_\rho)$ 也是倍增的，且支集一个 p-Poincar´e 不等式。

由上述三点，根据 Mal´y [37] （另见 [14]），我们得到以下命题。

命题 5.1。 存在有界线性迹算子

$$T_d : D^{1,p}(\Omega, d, \mu) \to HB_{p,p}^{1-\theta/p}(\partial\Omega, d, \nu)$$

and

$$T_\rho : N^{1,p}(\Omega, d_\rho, \mu_\rho) \to B_{p,p}^{1-\theta/p}(\partial_\rho\Omega, d_\rho, \nu_\rho)$$

以及有界线性延拓算子

$$E_d : HB_{p,p}^{1-\theta/p}(\partial\Omega, d, \nu) \to D^{1,p}(\Omega, d, \mu)$$

and

$$E_\rho : B_{p,p}^{1-\theta/p}(\partial_\rho\Omega, d_\rho, \nu_\rho) \to N^{1,p}(\Omega, d_\rho, \mu_\rho)$$

使得 $T_d \circ E_d$ 是 $HB_{p\,p}^{1-\theta/p}{}_{,}(\partial\Omega\ d,\nu)$ 上的恒等映射，而 $T_\rho \circ E_\rho$ 是$B_{p\,p}^{1-\theta/p}{}_{,}(\partial_\rho\Omega\ d_\rho,\nu_\rho)$上的恒等映射。

对于 $u \in D^{1,p}(\Omega\ d,\mu)$，且对于 ν-几乎处处的 $\xi \in \partial\Omega$，我们有

$$T_d u(\xi) = \lim_{r\to 0^+} \fint_{B(\xi,r)} u \, d\mu = \lim_{r\to 0^+} \fint_{B_\rho(\xi,r)} u \, d\mu_\rho = T_\rho u(\xi),$$

因此，我们可以明确地将 $T_d u = T_\rho u|_{\partial\Omega}$ 记作 Tu。对于每个 $\xi \in \partial\Omega$，只要上述 u 的勒贝格值存在，我们就令 $T_d u(\xi)$ 等于该值；对于 $T_\rho u$，也有类似结论。这样便能比在 ν-几乎处处的意义下更精确地确定 Tu 的值。

此外，对于每个 $u \in N^{1,p}(\Omega\ d_\rho, \mu_\rho)$ 和 $v \in B^{1-\theta/p}_{p\ p,}(\partial_\rho\Omega\ d_\rho, \nu_\rho)$，我们都有以下能量界：

$$\begin{aligned}\|T_\rho u\|_{B^{1-\theta/p}_{p,p}(\partial_\rho\Omega, d_\rho, \nu_\rho)} &\lesssim \|g_u\|_{L^p(\Omega,\mu_\rho)},\\ \|g_{E_\rho v}\|_{L^p(\Omega,\mu_\rho)} &\lesssim \|v\|_{B^{1-\theta/p}_{p,p}(\partial_\rho\Omega, d_\rho, \nu_\rho)}.\end{aligned}$$

这里，最小的 p-弱上梯度是相对于空间 $(\Omega\ d_\rho, \mu_\rho)$而言的。上述估计中的比较常数仅取决于结构数据。线性算子 T_d 和 E_d 的界仅取决于与 $(\Omega\ d, \mu)$ 及 ν相关的结构数据。

回顾一下，$\partial\Omega$ 的子集是 ν_ρ-测度为零集，当且仅当它们是 ν-测度为零集。此外，$\nu_\rho(\{\infty\}) = 0$。然而，在空间 $(\Omega^{d_\rho}, d_\rho, \mu_\rho)$ 中，$\{\infty\}$ 的容量可能为正。当 $\{\infty\}$ 的容量为正时，∞ 必然是每个 $u \in N^{1,p}(\Omega\ d_\rho, \mu_\rho)$ 的 d_ρ-勒贝格点（见 [21, 定理 9.2.8]），因此 $T_\rho u(\infty)$ 取对应的勒贝格值，但 $T_d u(\infty)$ 没有意义。因此，根据 Tu，我们所指的仅是 $T_d u = T_\rho u|_{\partial\Omega}$。

我们还由 [32, 命题5.4] 得知，若 $u \in D^{1,p}(\Omega\ d, \mu)$，则 $u \in D^{1,p}(\Omega\ d_\rho, \mu_\rho)$，并具有如下性质

$$\int_\Omega g_u^p \, d\mu = \int_\Omega \widehat{g}_u^p \, d\mu_\rho, \tag{5.2}$$

其中 g_u 是 u 关于空间$(\Omega\ d, \mu)$的上梯度，而 $\widehat{g}_u$ 是 u 关于空间$(\Omega\ d_\rho, \mu_\rho)$的上梯度，且

$$\widehat{g}_u = \frac{1}{\rho} g_u. \tag{5.3}$$

由于在 L^p-空间中，p-可积的 p-弱上梯度可由上梯度逼近，恒等式(5.2)对分别关于$(\Omega\ d, \mu)$与$(\Omega\ d_\rho, \mu_\rho)$的 p-弱上梯度同样成立。这种逼近给出了 u 关于$(\Omega\ d, \mu)$的极小 p-弱上梯度与 u 关于$(\Omega\ d_\rho, \mu_\rho)$的极小 p-弱上梯度之间相应的关系(5.3)。由 [21, 定理9.1.2], 可知，支撑 p-Poincar´e不等式蕴含更强的不等式，其中左端也是一个 L^p-方差；因此，在配备加倍测度并支撑 p-Poincar´e不等式的有界度量测度空间上，$D^{1,p}$-空间中的函数属于整体 L^p-类。由于$(\Omega\ d_\rho, \mu_\rho)$有界且支撑 p-Poincar´e不等式，我们有 $D^{1,p}(\Omega\ d_\rho, \mu_\rho) = N^{1,p}(\Omega\ d_\rho, \mu_\rho)$。接下来我们证明，我们的球化保持Besov能量。

定理 5.4。作为集合，我们有 $HB^{1-\theta/p}_{p\ p,}(\partial\Omega\ d, \nu) = B^{1-\theta/p}_{p\ p,}(\partial_\rho\Omega\ d_\rho, \nu_\rho)$，此外，存在一个常数 $C \geq 1$，使得对于每个 $u \in HB^{1-\theta/p}_{p\ p,}(\partial\Omega\ d, \nu)$，我们有

$$\frac{1}{C}\|u\|_{B^{1-\theta/p}_{p,p}(\partial\Omega, d, \nu)} \leq \|u\|_{B^{1-\theta/p}_{p,p}(\partial_\rho\Omega, d_\rho, \nu_\rho)} \leq C\|u\|_{B^{1-\theta/p}_{p,p}(\partial\Omega, d, \nu)}.$$

常数 C 仅取决于结构数据。

证明。将命题 5.1 应用于 $u \in HB^{1-\theta/p}_{p\ p,}(\partial\Omega\ d,\ \nu)$ 和 (5.2)，我们注意到 $E_d u$ 属于$D^{1,\ p}(\Omega\ d,\ \mu)$，且

$$\int_\Omega \widehat{g}^p_{E_d(u)} \, d\mu_\rho = \int_\Omega g^p_{E_d(u)} \, d\mu \leq C\|u\|^p_{B^{1-\theta/p}_{p,p}(\partial\Omega, d, \nu)}.$$

根据命题 5.1，我们知道 $T_\rho \circ E_d(u) = T_d \circ E_d(u) = u$。再次应用命题 5.1，我们得到

$$\|u\|^p_{B^{1-\theta/p}_{p,p}(\partial_\rho\Omega,d_\rho,\nu_\rho)} \le C \int_\Omega \widehat{g}^p_{E_d(u)}\, d\mu_\rho \le C \|u\|^p_{B^{1-\theta/p}_{p,p}(\partial\Omega,d,\nu)}.$$

一旦我们看到 $u \in L^p(\partial_\rho\Omega\, \nu_\rho)$，由 [9, 引理 2.2], 可知，我们便得到 $HB^{1-\theta/p}_{p\,p}{}_{,}$ $(\partial\Omega\ d,\ \nu)$ 是 $B^{1-\theta/p}_{p\,p}{}_{,}$ $(\partial_\rho\Omega\ d_\rho,\ \nu_\rho)$ 的子集。

现在，若 $v \in B^{1-\theta/p}_{p\,p}{}_{,}$ $(\partial_\rho\Omega\ d_\rho,\ \nu_\rho)$，那么再次注意到 $T_d \circ E_\rho(v) = v$，由命题 5.1 中所述算子 T_d 和 E_ρ 的有界性，再结合 (5.2)，我们还可得出

$$\|v\|^p_{B^{1-\theta/p}_{p,p}(\partial\Omega,d,\nu)} \le C \|v\|^p_{B^{1-\theta/p}_{p,p}(\partial_\rho\Omega,d_\rho,\nu_\rho)},$$

证明至此完成。 □

6. Notions of Dirichlet boundary condition

偏微分方程和位势理论中的一个标准问题如下。给定一个区域 U 以及作用于该区域上函数空间的微分算子 L 或能量算子 I。相应的狄利克雷问题是寻找该空间中的一个函数 u，使其在 U 中（以某种意义）满足$Lu = 0$，或者使能量 I达到最小；也就是说，对于同一函数空间中的每个 v，只要 u 和 v 都满足边界 ∂U上给定的狄利克雷边界条件，就有 $I(u) \le I(v)$。在黎曼流形的背景下，一类有用的算子是 p-拉普拉斯-贝尔特拉米算子 Δ_p。若索布列夫函数 u 在该流形中的区域 U 内满足 $\Delta_p u = 0$，则

$$\int_U |\nabla u|^{p-2}\langle \nabla u, \nabla v\rangle\, d\mu = 0,$$

每当 v 属于紧支撑包含于 U的 Sobolev 类时。一个索伯列夫函数 u满足上述方程，当且仅当对每一个具有紧支撑的索伯列夫函数 v，我们有

$$I(u) := \int_U |\nabla u|^p\, d\mu \le \int_U |\nabla(u+v)|^p\, d\mu = I(u+v).$$

在本文中，我们关注如下狄利克雷问题。

定义 6.1. 给定函数 $f \in HB^{1-\theta/p}_{p\,p}{}_{,}$ $(\partial\Omega\ d,\ \nu)$，我们称函数 $u \in D^{1,\,p}(\Omega\ d,\ \mu)$求解以 f 为边界值的 p-调和函数的狄利克雷问题，如果

(1) u 在 Ω 中是 p-调和的，即 u 在 Ω 中连续，且

$$\int_\Omega g^p_u\, d\mu \le \int_\Omega g^p_{u+v}\, d\mu$$

每当 $v \in D^{1,\,p}(\Omega\ d,\ \mu)$在 Ω 中具有紧支撑时，

(2) 在 $\partial\Omega$ 上 $T_d u = f$ ν-几乎处处。

如果存在一个函数 $u \in D^{1,\,p}(\Omega\ d,\ \mu)$，满足上述定义中的所有条件，但在 Ω 上不满足连续性条件，那么在一个容量为零的集合上对 u进行修改后，可得到一个局部 H¨older 连续函数，该函数满足上述定义中的所有条件，参见 [30]。

在表述函数 u在 Ω 中为 p-调和函数的定义时，一个相关概念是所谓的 Cheeger p-调和性，即用积分 $\int_\Omega |\nabla u|^p\, d\mu$ 取代上梯度能量 $\int_\Omega g^p_u\, d\mu$，其中 ∇u 是 u的 Cheeger 微分。当 $(\Omega\ d, \mu)$ 满足倍增条件并支持 p-Poincar´e 不等式时，存在这样一个微分，它是 $N^{1,p}(\Omega)$ 上的可测线性微分算子；例如参见 [21]。Cheeger p-调和性的优点在于

存在与之对应的微分方程弱形式，即相关积分最小化问题对应的欧拉-拉格朗日方程；然而，Cheeger 微分结构有许多可能的选择，因此与上梯度不同，它们并非度量测度空间所固有。不过，本节所得结果经过对证明作相应修改后，同样适用于 Cheeger$p$-调和解。

在表述狄利克雷问题时，我们可以偏离上述传统表述：要求在 $\partial\Omega$ 上对 $T_d v = 0$ ν 几乎处处成立，而不是要求 v 在 Ω 中具有紧支撑。一个合理的问题是，如果我们不要求 v 在 Ω 中具有紧支撑，而改为要求在 $\partial\Omega$ 上对 $T_d v = 0$ ν 几乎处处成立，最终得到的问题解是否会不同。本节将证明这两种表述等价。具体而言，我们将通过下述定理 6.4 证明 $D^{1,p}_0(\Omega, d, \mu)$ 与 $N^{1,p}_0(\Omega, d_\rho, \mu_\rho)$ 作为集合是相同的；由此，结合 [39] 中所示的紧支撑 Lipschitz 函数在 $N^{1,p}_0(\Omega, d_\rho, \mu_\rho)$ 中的稠密性以及 (5.2)，即可完成论证。请注意，相对于度量 d_ρ 所生成的拓扑，Ω 的紧致性与相对于原度量 d 所生成的拓扑的紧致性相同，因为 Ω 上的拓扑保持不变，见 [32, 命题 3.2]。在 [13]，所考虑的情形下，这两个问题并不一致：当时 Ω 无界而 $\partial\Omega$ 有界；此时若 Ω^d 也为 p-双曲，则这两种概念有所不同。回顾一下，本文中 $\partial\Omega$ 是无界的。

注 6.2. 由于 $(\Omega, d_\rho, \mu_\rho)$ 是倍增的，且支持 p-Poincar´e 不等式，根据 [1,命题 7.1]，我们知道 $N^{1,p}(\Omega, d_\rho, \mu_\rho) = N^{1,p}(\Omega^{d_\rho}, d_\rho, \mu_\rho)$。下文中，$\overline{N^{1,p}_0}(\Omega, d_\rho, \mu_\rho)$ 表示所有满足以下条件的 $v \in N^{1,p}(\Omega, d_\rho, \mu_\rho) = N^{1,p}(\Omega^{d_\rho}, d_\rho, \mu_\rho)$ 的集合

$$\mathrm{Cap}_p(\{x \in \partial_\rho\Omega : v(x) \neq 0\}) = 0,$$

其中 Cap$_p$ 是定义 2.12 中给出的 p-容量。这里的 p-容量是相对于空间 $(\Omega^{d_\rho}, d_\rho, \mu_\rho)$ 而言的。变换后的空间 $(\overline{\Omega}, d_\rho, \mu_\rho)$ 是局部紧致的，而 $(\Omega^{d_\rho}, d_\rho, \mu_\rho)$ 是紧致、倍增的，且支持 p-Poincar´e 不等式；这是由 [1, 命题 7.1]得出的。因此，根据 [39,定理 4.8],，我们知道 $N^{1,p}_0(\Omega, d_\rho, \mu_\rho)$ 也可由在 $N^{1,p}(\Omega, d_\rho, \mu_\rho)$ 中紧支撑于 Ω 的 Lipschitz 函数经 $N^{1,p}$-范数闭包得到。注意，在 (Ω, d_ρ) 中紧支撑的函数，在 (Ω, d) 中也紧支撑。

引理 6.3. 假设 $u \in D^{1,p}(\Omega, d, \mu)$ 使得在 $\partial\Omega$ 上几乎处处有 $T_d u = 0$ ν-。记 W 为满足 $\limsup_{r\to 0^+} |u_{B_\rho(x,r)}| > 0$ 的点 $x \in \partial_\rho\Omega$ 的集合，则当 ***Cap***$_p$ 是相对于空间 $(\Omega^{d_\rho}, d_\rho, \mu_\rho)$测量时，***Cap***$_p(W) = 0$。

证明. 在此证明中，除非另有说明，球均是相对于空间 $(\Omega^{d_\rho}, d_\rho, \mu_\rho)$ 而言。我们先假设 $0 \leq u \leq 1$。由 [32, 定理 5.4] 可得 $u \in N^{1,p}(\Omega, d_\rho, \mu_\rho)$，根据上述讨论，我们也有 $u \in \overline{N^{1,p}_0}(\Omega^{d_\rho}, d_\rho, \mu_\rho)$。

固定 $0 < \delta \leq 1$，并令 A 为所有满足 $\limsup_{r\to 0^+} u_{B_\rho(x,r)} > \delta$ 的点 $x \in \partial_\rho\Omega$ 的集合。只需证明对每个 $0 < \delta \leq 1$，Cap$_p(A) = 0$。注意，在证明的其余部分，比较常数可以依赖于 δ。

固定 $0 < R < 1$。利用 $5B$-覆盖定理（例如参见 [21, 第 60] 页），我们用球 $B_\rho(x_i, 10\lambda r_i)$ 覆盖 A，使得这些球 $B_\rho(x_i, 2\lambda r_i)$ 两两不相交，$x_i \in A$, $u_{B_\rho(x_i,r_i)} > \delta$ 并且 $r_i < R$。

注意，由于 $u \le 1$,

$$\begin{aligned}\delta &< \fint_{B_\rho(x_i,r_i)} u\,d\mu_\rho = \frac{1}{\mu_\rho(B_\rho(x_i,r_i))}\left[\int_{B_\rho(x_i,r_i)\cap\{u\le\delta/2\}} u\,d\mu_\rho + \int_{B_\rho(x_i,r_i)\cap\{u>\delta/2\}} u\,d\mu_\rho\right]\\ &\le \frac{\frac{\delta}{2}\,\mu_\rho(B_\rho(x_i,r_i)\cap\{u\le\delta/2\})}{\mu_\rho(B_\rho(x_i,r_i))} + \frac{\mu_\rho(B_\rho(x_i,r_i)\cap\{u>\delta/2\})}{\mu_\rho(B_\rho(x_i,r_i))}\\ &\le \frac{\delta}{2} + \frac{\mu_\rho(B_\rho(x_i,r_i)\cap\{u>\delta/2\})}{\mu_\rho(B_\rho(x_i,r_i))}.\end{aligned}$$

由此可得 $\mu_\rho(\{u>\delta/2\}\cap B_\rho(x_i,r_i)) > \frac{\delta}{2}\mu_\rho(B_\rho(x_i,r_i))$。令 $E_i = \{u>\delta/2\}\cap B_\rho(x_i,r_i)$，且$F_i = \{x\in\partial_\rho\Omega \cap B_\rho(x_i,r_i)\colon\ u(x) = T_\rho u(x) = 0\}$。注意，在 $\partial_\rho\Omega$ 上几乎处处成立 $T_\rho u = u$ p-容量，因此在 $\partial_\rho\Omega$ 上也几乎处处 ν_ρ，见引理 2.16。由于在 $\partial_\rho\Omega$ 上几乎处处 $T_\rho u = 0$ ν_ρ（见命题 5.1），我们有 $\nu_\rho(F_i) = \nu_\rho(B_\rho(x_i,r_i))$。由于 $\mu_\rho(E_i) \simeq \mu_\rho(B_\rho(x_i,r_i))$，可得 $\mathcal{H}^{-\theta}_{r_i}(E_i) \simeq {}^{\mu_\rho(B_\rho(x_i,r_i))}\,r_i^\theta$，由引理 2.8 得出。这里的比较常数仅取决于 $\delta/2$。

接下来我们估计 F_i的 θ-余维豪斯多夫内容。设 $B_\rho(z_j,s_j)$是 F_i的一个由球构成的覆盖，使得 $s_j \le r_i$且 $B_\rho(z_j,s_j)\cap F_i$非空。则存在 $y_j \in B_\rho(z_j,s_j)\cap F_i$。因此$\mu_\rho(B_\rho(y_j,2s_j)) \simeq \mu_\rho(B_\rho(z_j,s_j))$且 $B_\rho(z_j,s_j) \subset B_\rho(y_j,2s_j)$。于是由$\nu_\rho$ 的 θ-余维性，我们有

$$\begin{aligned}\sum_j \frac{\mu_\rho(B_\rho(z_j,s_j))}{s_j^\theta} \simeq \sum_j \frac{\mu_\rho(B_\rho(y_j,2s_j))}{(2s_j)^\theta} &\simeq \sum_j \nu_\rho(B_\rho(y_j,2s_j))\\ &\ge \nu_\rho(F_i) = \nu_\rho(B_\rho(x_i,r_i)) \simeq \frac{\mu_\rho(B_\rho(x_i,r_i))}{r_i^\theta},\end{aligned}$$

并且因此也有 $\mathcal{H}^{-\theta}_{r_i}(F_i) \gtrsim {}^{\mu_\rho(B_\rho(x_i,r_i))\ r_i^\theta}$。

由于 $\frac{2}{\delta}u = 0$ 在 F_i 上且 $\frac{2}{\delta}u \ge 1$ 在 E_i上，由命题2.14，我们有

$$\int_{B_\rho(x_i,2\lambda r_i)} \widehat{g}_u^p d\mu_\rho \simeq \int_{B_\rho(x_i,2\lambda r_i)} \widehat{g}^p_{\frac{2}{\delta}u} d\mu_\rho \gtrsim \mu_\rho(B_\rho(x_i,r_i))/r_i^p.$$

注意 $\frac{2}{\delta}u \in N^{1,p}(B_\rho(x_i,2\lambda r_i)\ d_\rho,\mu_\rho)$。由 [21, 引理9.2.3] 或利用函数

$$v(x) = \left(1 - \frac{\operatorname{dist}_\rho(x,B_\rho(x_i,10\lambda r_i))}{10\lambda r_i}\right)_+,$$

我们知道 $\mathrm{Cap}_p(B_\rho(x_i,\ 10\lambda r_i)) \lesssim \mu_\rho(B_\rho(x_i,\ 10\lambda r_i))/(10\lambda r_i)^p$。因此，

$$\begin{aligned}\mathrm{Cap}_p(A) &\le \sum_i \mathrm{Cap}_p(B_\rho(x_i,10\lambda r_i)) \lesssim \sum_i \frac{\mu_\rho(B_\rho(x_i,10\lambda r_i))}{(10\lambda r_i)^p} \simeq \sum_i \frac{\mu_\rho(B_\rho(x_i,r_i))}{r_i^p}\\ &\lesssim \sum_i \int_{B_\rho(x_i,2\lambda r_i)} \widehat{g}_u^p d\mu_\rho = \int_{\cup_i B_\rho(x_i,2\lambda r_i)} \widehat{g}_u^p d\mu_\rho.\end{aligned}$$

由于 $\bigcup_i B_\rho(x_i,\ 2\lambda r_i) \subset \{x\in\Omega^{d_\rho}\colon \operatorname{dist}_\rho(x,\ \partial_\rho\Omega) < 2\lambda R\}$，根据控制收敛定理以及 $\widehat{g}_u \in L^p(\Omega,\mu_\rho)$ 这一事实，我们看到最后一个积分在 $R\to 0$ 时趋于 0。因此，$\mathrm{Cap}_p(A) = 0$，如所求。

最后，我们去掉约束 $0\le u\le 1$。假设 $u\ge 0$。定义 $v := \min\{u,1\}$。那么 $v \in D^{1,\ p}(\Omega\ d,\ \mu)$，且在 $\partial\Omega$ 上几乎处处有 $T_d v = 0$ ν。因此 v也满足引理的条件，故对于 $A := \{x\in\partial_\rho\Omega\colon \limsup_{r\to 0^+} v_{B_\rho(x,\ r)} > 0\}$，我们有 $\mathrm{Cap}_p(A) = 0$。现在令

$E \subset \partial_\rho\Omega$ 为不是 u 的勒贝格点的点集。类似地，令 $F \subset \partial_\rho\Omega$ 为不是 v 的勒贝格点的点集。根据 [21, 定理 9.2.8]（情形 $p > 1$）以及 [29,定理 4.1]（情形 $p = 1$），我们有 $\mathrm{Cap}_p(E) = \mathrm{Cap}_p(F) = 0$。最后，若 $x \in \partial_\rho\Omega \setminus (A \cup E \cup F)$，则 $\min\{u(x)\ 1\} = v(x) = \lim_{r\to 0^+} v_{B_\rho(x,r)} = 0$，因此 $\lim_{r\to 0^+} u_{B_\rho(x,r)} = u(x) = 0$。结论由 $\mathrm{Cap}_p(A \cup E \cup F) = 0$ 得出。

分别考虑 u 的负部和正部，即可得到一般情形下的结果。 □

定理 6.4. 设 $D_{0}^{1,p}(\Omega\ d, \mu)$ 为所有满足 $T_d v = 0$ ν-几乎处处成立于$\partial\Omega$的 $v \in D^{1,p}(\Omega\ d, \mu)$ 的集合。那么

$$D_0^{1,p}(\Omega, d, \mu) = N_0^{1,p}(\Omega, d_\rho, \mu_\rho).$$

证明。首先设 $v \in D_{,0}^{1\ p}(\Omega\ d, \mu)$。由 [32] 可得 $v \in N^{1,p}(\Omega\ d_\rho, \mu_\rho)$。注意，$(\Omega\ d_\rho, \mu_\rho)$ 支持一个 p-Poincar´e 不等式；根据 [32], ，由 [1, 命题 7.1], 可知，v 可延拓到 Ω^{d_ρ}，延拓后仍记为 v，使得 $v \in N^{1,p}(\Omega^{d_\rho}, d_\rho, \mu_\rho)$，且空间 $(\Omega^{d_\rho}, d_\rho, \mu_\rho)$ 支持一个 p-Poincar´e 不等式，见注 6.2。根据 [21, 定理 9.2.8]（情形 $p > 1$）和 [29, 定理 4.1]（情形 $p = 1$），在 $(\Omega^{d_\rho}, d_\rho, \mu_\rho)$ 中，除去一个 p-容量零集后，每一点都是 v 的勒贝格点。因此，我们可以假设，只要 $x \in \Omega^{d_\rho}$ 且满足 $\lim_{r\to 0^+} \int_{B_\rho(x,r)} v(y)d\mu_\rho(y) = 0$，就有 $v(x) = 0$。于是，应用引理 6.3 可得

$$\mathrm{Cap}_p(\{x \in \partial_\rho\Omega : v(x) \neq 0\}) \le \mathrm{Cap}_p\left(\left\{x \in \partial_\rho\Omega : \lim_{r\to 0^+} \fint_{B_\rho(x,r)} v(y)d\mu_\rho(y) \neq 0\right\}\right) = 0,$$

因此 $v \in N^{1,}{}_{0}^{\ p}(\Omega\ d_\rho,\ \mu_\rho)$。

现在设 $v \in N_{,0}^{1\ p}(\Omega\ d_\rho, \mu_\rho) \subset N^{1,p}(\Omega\ d_\rho, \mu_\rho) = D^{1,p}(\Omega\ d, \mu)$。那么，正如注 6.2 所示，存在函数 $v_i \in N^{1,p}(\Omega\ d_\rho, \mu_\rho)$，它们具有紧致支撑，且 v_i 在 $N^{1,p}(\Omega\ d_\rho, \mu_\rho)$ 范数下收敛于 v。由命题 5.1 可得 $T_\rho v_i(x) = \lim_{r\to 0^+} \int_{B_\rho(x,r)} v_i(y)d\mu_\rho(y) = 0$对 ν_ρ-几乎处处的 $x \in \partial_\rho\Omega$ 成立。因此，由命题 5.1,

$$\|T_\rho v\|_{L^p(\partial_\rho\Omega,\nu_\rho)} = \|T_\rho(v - v_i)\|_{L^p(\partial_\rho\Omega,\nu_\rho)} \le C\|v - v_i\|_{N^{1,p}(\Omega,d_\rho,\mu_\rho)} \to 0 \text{ as } i \to \infty.$$

因此 $T_\rho v(x) = 0$ 对 ν_ρ-几乎处处 $x \in \partial_\rho\Omega$ 成立，因此由命题 5.1 可得 $T_d v(x) = 0$ 对ν-几乎处处 $x \in \partial\Omega$ 成立，这正是我们想要证明的。 □

7. Solving the Dirichlet problem in unbounded uniform domains: proof of Theorem 1.1

本节考虑如下问题：对于每个 $f \in HB_{p\ p}^{1-\theta/p,}(\partial\Omega\ d, \nu)$，当 $\partial\Omega$ 无界时，求一个函数 $u_f \in D^{1,p}(\Omega\ d, \mu)$，使得 u_f 在 Ω 中是 p-调和的，并且在 $\partial\Omega$ 上几乎处处满足 $Tu_f = f$ ν。这里，若对于每个满足 $Tv = 0$ ν、在 $\partial\Omega$ 上几乎处处成立的 $v \in D^{1,p}(\Omega\ d, \mu)$，都有

$$\int_\Omega g_u^p\, d\mu \le \int_\Omega g_{u+v}^p\, d\mu.$$

情形 $p = 1$ 更多地与有界变差函数理论相关，而情形$p = \infty$ 更多地与绝对极小Lipschitz延拓理论相关；这两种情形的性质都不同于情形 $1 < p < \infty$。本文聚焦于情形 $1 < p < \infty$。

本节旨在证明本文的主要定理，即定理 1.1。为方便读者，我们在此重述该定理。

定理 7.1。设 $p > 1$。对于每个 $f \in HB^{1-\theta/p}_{p\,p}(\partial\Omega\ d,\nu)$，存在唯一的函数 $u_f \in D^{1,\,p}(\Omega\ d,\mu)$，该函数在 $(\Omega\ d,\mu)$ 中是 p- 调和的，并且在 $\partial\Omega$ 上几乎处处满足 $Tu_f = f\ \nu$。

这里指出，下面关于该定理唯一性主张的证明遵循了 [10]中类似唯一性结果的证明思路。由于 [10] 中所考虑的结构与本文中的结构并不完全相同，为方便读者，我们也给出了该部分的证明。

证明。固定 $f \in HB^{1-\theta/p}_{p\,p}(\partial\Omega\ d,\nu)$，利用定理 5.4 可知 $f \in B^{1-\theta/p}_{p\,p}(\partial_\rho\Omega\ d_\rho,\nu_\rho)$ 也成立。由引理 2.16 可得 $\mathrm{Cap}_p(\partial_\rho\Omega) > 0$，其中 p-容量是相对于空间 $(\Omega^{d_\rho}, d_\rho,\mu_\rho)$ 而言的。因此，根据 [4, 中的 Maz'ya 不等式以及定理 5.53] （关于欧几里得情形下的原始证明，见 [38] ），我们有

$$\int_\Omega |v|^p\,d\mu_\rho \le C\int_\Omega \widehat{g}_v^{\,p}\,d\mu_\rho = C\int_\Omega g_v^p\,d\mu \tag{7.2}$$

每当 $v \in N^{1,\,p}(\Omega\ d_\rho,\ \mu_\rho)$ 上几乎处处成立，其中 $T_\rho v = 0\ \nu_\rho$是 $\partial_\rho\Omega$ 上几乎处处的。这里 $\widehat{g}_v$是 p在 $(\Omega\ v,\ d_\rho)$ 中的最小 μ_ρ- 弱上梯度，并且我们使用了（ 5.2 ）。比较常数取决于 $\mu_\rho(\Omega)$、$\mathrm{diam}_\rho(\Omega)$、$p$、$\mathrm{Cap}_p(\partial_\rho\Omega)$ 和 C_P。

现在我们着手求解如下问题：寻找函数 $u_f \in N^{1,\,p}(\Omega\ d_\rho,\ \mu_\rho)$，使其关于度量 d_ρ 在 Ω 中为 p-调和函数，并且其迹 $T_\rho(u_f)$ 在 $\partial\Omega$ 上几乎处处等于 $= f\ \nu$。令

$$\Delta := \inf\left\{\int_\Omega \widehat{g}_u^{\,p}\,d\mu_\rho \,:\, u \in N^{1,p}(\Omega,d_\rho,\mu_\rho) \text{ with } T_\rho u = f\ \nu\text{-a.e. on } \partial\Omega\right\}.$$

由于 $f \in B^{1-\theta/p}_{p\,p}(\partial_\rho\Omega\ d_\rho,\ \nu_\rho)$，根据命题 5.1 可知 $\Delta \le \int_\Omega \widehat{g}^{\,p}_{E_\rho f}\,d\mu_\rho < \infty$。因此，我们可以从 $N^{1,\,p}(\Omega\ d_\rho,\ \mu_\rho)$ 中找到一个序列 $(u_k)_k$，使得在 $\partial\Omega$ 上几乎处处有 $T_\rho u_k = f\ \nu$，满足

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega \widehat{g}^{\,p}_{u_k}\,d\mu_\rho = \Delta.$$

若 $\Delta = 0$，则函数 u_k 具有最小的 p-弱上梯度 $\widehat{g}_k \in L^p(\Omega\mu_\rho)$，使得$\widehat{g}_k \to 0$属于 $L^p(\Omega\,\mu_\rho)$。此外，对于每个 k，在 $\partial\Omega$ 上几乎处处（相对于 $T_\rho u_k = f\ \nu$）成立，并且对于每个 k、$m \in \mathbb{N}$ 和 $\widehat{g}_{u_k-u_m} \le \widehat{g}_k + \widehat{g_m}$，$T_\rho(u_k - u_m)$ 在$\partial\Omega$ 上几乎处处（相对于 $= 0\ \nu$）成立。将 (7.2) 应用于 $u_k - u_m$，我们还得到 $\int_\Omega |u_k - u_m|^p\,d\mu_\rho \le C\int_\Omega[\widehat{g}_k^{\,p} + \widehat{g_m}^{\,p}]\,d\mu_\rho$。由此可知，$(u_k)_k$ 是 $N^{1,p}(\Omega\ d_\rho,\mu_\rho)$ 中的一个柯西序列，并收敛到一个常值函数（极限函数的上梯度为零，因此根据庞加莱不等式，我们知道极限函数也是常值函数）。由于 T_ρ 是一个有界线性算子，因此可得 $f = T_\rho u_k \to c$，其中 c 是作为极限函数得到的常值函数。因此 f 是常值函数，而这个极限常值函数自然就是相应狄利克雷问题的唯一解。

在证明的其余部分，我们假设 $\Delta > 0$。不失一般性，我们还可以假设$\int_\Omega \widehat{g}^{\,p}_{u_k}\,d\mu_\rho \le 2\Delta$。此外，由（7.2）可知

$$\begin{aligned}
\|u_k\|_{L^p(\Omega,\mu_\rho)} &\le \|u_k - E_\rho f\|_{L^p(\Omega,\mu_\rho)} + \|E_\rho f\|_{L^p(\Omega,\mu_\rho)}\\
&\lesssim \|\widehat{g}_{u_k-E_\rho f}\|_{L^p(\Omega,\mu_\rho)} + \|f\|_{B^{1-\theta/p}_{p,p}(\partial_\rho\Omega,d_\rho,\nu_\rho)} + \|f\|_{L^p(\partial_\rho\Omega,\nu_\rho)}\\
&\le \|\widehat{g}_{u_k}\|_{L^p(\Omega,\mu_\rho)} + \|\widehat{g}_{E_\rho f}\|_{L^p(\Omega,\mu_\rho)} + \|f\|_{B^{1-\theta/p}_{p,p}(\partial_\rho\Omega,d_\rho,\nu_\rho)} + \|f\|_{L^p(\partial_\rho\Omega,\nu_\rho)}\\
&\lesssim 2^{1/p}\Delta^{1/p} + 2\|f\|_{B^{1-\theta/p}_{p,p}(\partial_\rho\Omega,d_\rho,\nu_\rho)} + \|f\|_{L^p(\partial_\rho\Omega,\nu_\rho)} < \infty.
\end{aligned}$$

在上述估计中，我们还用到了命题 5.1。由此可知，$(u_k)_k$ 是 $N^{1,p}(\Omega\ d_\rho,\mu_\rho) = N^{1,p}(\Omega^{d_\rho}, d_\rho,\mu_\rho)$ 中的有界序列；根据 $N^{1,p}(\Omega^{d_\rho}, d_\rho,\mu_\rho)$ 的自反性（这可由

以下事实推出： μ_ρ 具有倍增性，且 $(\Omega\ d_\rho,\mu_\rho)$ 支持一个 p-Poincar´e 不等式，见 [21,定理 13.5。7]）结合 Mazur引理，我们可以找到一个序列 $(v_n)_n$ ，其元素是由 u_k 以

$$v_n = \sum_{k=n}^{N(n)} \lambda_{n,k}\, u_k, \text{ for a choice of nonnegative } \lambda_{n,k} \text{ with } \sum_{k=n}^{N(n)} \lambda_{n,k} = 1$$

以及函数 $u_f \in N^{1,\,p}(\Omega\ d_\rho,\ \mu_\rho)$，使得当 $n\to\infty$ 时， $v_n \to u_f$in $N^{1,\,p}(\Omega\ d_\rho,\ \mu_\rho)$。注意，由于 T_ρ 是线性的，我们有 $T_\rho(v_n) = \sum_{k=n}^{N(n)} \lambda_{n,\,k}\, T_\rho(u_k) = f$；又由于 T_ρ 是有界线性算子，因而连续，我们还得到 $T_\rho(u_f) = f$。由此可得

$$\Delta \le \int_\Omega \widehat{g}_{u_f}^{\,p}\, d\mu_\rho = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \widehat{g}_{v_n}^{\,p}\, d\mu_\rho.$$

另一方面,

$$\left(\int_\Omega \widehat{g}_{v_n}^{\,p}\, d\mu_\rho\right)^{1/p} \le \sum_{k=n}^{N(n)} \lambda_{n,k} \left(\int_\Omega \widehat{g}_{u_k}^{\,p}\, d\mu_\rho\right)^{1/p} \to \Delta^{1/p} \text{ as } n\to\infty.$$

因此可得

$$\int_\Omega \widehat{g}_{u_f}^{\,p}\, d\mu_\rho = \Delta.$$

现在假设 $v \in N^{1,\,p}(\Omega\ d_\rho,\ \mu_\rho)$，使得 $T_\rho v = 0$。那么 $T_\rho(u_f + v) = f$，因此

$$\int_\Omega \widehat{g}_{u_f}^{\,p}\, d\mu_\rho = \Delta \le \int_\Omega \widehat{g}_{u_f+v}^{\,p}\, d\mu_\rho,$$

也就是说， u_f 在 $(\Omega\ d_\rho,\ \mu_\rho)$ 中是 p-调和的。由命题 5.1 和（5.2）可得， $u_f \in D^{1,\,p}(\Omega\ d,\ \mu)$，其中 $Tu_f = f$ 在 Ω 上，且 u_f 在 $(\Omega\ d,\ \mu)$ 上是 p-调和的。

最后，假设 v 是 $(\Omega\ d,\mu)$ 中具有边界数据 f 的另一个解。则由 $L^p(\Omega\ \mu)$ 的一致凸性可知，在 Ω 中 $g_v = g_{u_f}$ μ-a.e.，例如参见。因此 g_{u_f} 也是 $\min\{u_f, v\}$ 与 $\max\{u_f, v\}$ 两者的极小 p-弱上梯度，参见 [4, 推论 2.20]。令$a, b \in \mathbb{Q}$，其中 $a < b$，并考虑集合 $W[a,b] := \{x \in \Omega :\ v(x) \ge b > a \ge u_f(x)\}$。我们固定一个满足 $a < c < b$ 的实数 c，并在 Ω 上如下定义函数 w

$$w = \min\{v,\, \max\{u_f, c\}\}.$$

注意，此时只要 $x \in W[a,b]$，就有 $w(x) = c$。由此可得 $w \in D^{1,p}(\Omega\ d,\mu)$，其中在 Ω 上 $g_w \le g_{u_f} = g_v\mu$-a.e.，而在 $W[a,b]$ 上 $g_w = 0$ μ-a.e.。此外， $Tw = f$。这是因为在 $\partial\Omega$ 上 $v = f = u_f\nu$-a.e.，并且对 ν-a.e. $x \in \partial\Omega$ 有 $Tw(x) = w(x)$。注意，若对 $A \subset \partial\Omega$ 有 $\mathrm{Cap}_p(A) = 0$ ，则 $\nu(A) = 0$，参见上文引理 2.16。由此我们得到

$$\Delta = \int_\Omega g_{u_f}^{\,p}\, d\mu \le \int_\Omega g_w^{\,p}\, d\mu \le \int_{\Omega\setminus W} g_{u_f}^{\,p}\, d\mu,$$

这只有在 $g_{u_f} = 0$ μ-几乎处处于 W 时才可能成立。由于 $U_+ := \{x \in \Omega :\ v(x) > u_f(x)\}$ 是形如 $W[a,b]$ 的集合的可数并，因此可知 $g_{u_f} = 0$ μ-几乎处处于 U_+。在上述论证中交换 u_f 和 v 的角色，同样可得 $g_{u_f} = 0$ μ-几乎处处于集合 $\{x \in \Omega :\ v(x) < u_f(x)\}$ 上。因此，$0 \le g_{u_f - v} \le g_{u_f} + g_v = 0$ μ-几乎处处于集合 $U := \{x \in \Omega :\ u_f(x) \ne v(x)\}$ 上。在集合 $\Omega \setminus U$ 上，我们有 $u_f = v$，因此在 $\Omega \setminus U$ 上也有 $g_{u_f - v} = 0$ μ- 几乎处处成立，也就是说，在 Ω 上 $g_{u_f - v} = 0$ μ-几乎处处成立。由于 Ω 是连通的，且支集为 p-Poincar´e 不等式，并且 u_f 和 v 在 Ω 上连续，因此 $u_f - v$ 在 Ω 上为常数。由于 $T(u_f - v) = 0$ 于 $\partial\Omega$，因此 $u_f - v = 0$ 在 Ω 上成立，证明完毕。□

8. Examples

在本文中 本节给出三个例子，以说明前几节中发展的技巧 .

例 8.1. 我们从读者最熟悉的一个例子开始。设 $n \geq 2$ 为正整数，考虑上半空间 Ω: $= \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ x_n > 0\}$，并赋予其欧几里得度量和标准的 n 维勒贝格测度。这样的 Ω 满足我们关于 Ω 的所有假设，并且 $\partial\Omega$ 与 $\mathbb{R}^{n-1}$ 等距。取 $b = (0, \cdots, 0)$ 以及

$$\rho(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$$

得到变换后的空间（Ω d_ρ），即将 Ω 立体投影到 n 维球面中的开球冠上，该球面位于 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中，其边界 ∂_ρ Ω 是一个（$n-1$）维大圆。此处选择的 ρ 满足条件 (A)–(D)，如果 $p > (n+1)/2$。注意，此处 $\theta = 1$。

例 8.2. 在本例中，我们令 $\rho(t) = \min\{1, t^{-\beta}\}$，其中 β 足够大。假设我们的 Ω、 μ 和 ν 如常设假设所述，且 $b \in \partial\Omega$ 是一个固定点。则当 β 充分大时，$\rho(t) = \min\{1, t^{-\beta}\}$ 满足条件（A）、（B）、条件 (C) 和条件（D）。条件（A）和（B）可由直接计算得出，其中需要 $\beta > 1$。我们可以取 $C_A = 3^\beta$ 和 $C_B = \beta/(\beta-1)$。回想一下，鉴于条件（A）以及 μ 和 ν 的倍增性质，条件 (C) 和条件（D）只需在情形 $r \geq 1$ 下验证。因此假设 $r \geq 1$。则

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega\setminus B(b,r)} \rho(|x|)^p \, d\mu(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{B(b,2^{j+1}r)\setminus B(b,2^j r)} \rho(|x|)^p \, d\mu(x) \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty} \rho(2^j r)^p \mu(B(b, 2^{j+1}r)) \\
&\leq C_\mu \rho(r)^p \mu(B(b,r)) \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{C_\mu}{2^{\beta p}}\right)^j,
\end{aligned}$$

其中第一个不等式来自 ρ 和 μ 的单调性，第二个不等式利用了 μ 的倍增性质以及 ρ 的定义。若该和收敛，则条件 (C) 成立，而这在 $\beta > \log_2(C_\mu)/p$ 时发生。由于我们知道 ν 也是倍增测度，条件（D）可类似地证明，只需将 p 替换为 $p-\theta$，并将 μ 替换为 ν。对于条件（D），我们需要 $\beta > \log_2(C_\nu)/(p-\theta)$。回想一下，我们可以选取 $C_\nu \leq 2^{-\theta} C_\mu C_\theta^2$，见 (2.6)。

当 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中如上面 例 8.1 所示的上半空间时，我们有 $C_\mu = 2^n$ 以及$C_\nu = 2^{n-1}$，因此我们需要 $\beta >$ 最大值$\{1, (n-1)\ /\ (p-1)\}$。

例 8.3。 在 [5] 中已证明，使用度量密度函数 ρ 时， $[0,\infty) \to (0, \infty)$ 定义如下，-Besov 能量在球化下保持不变:

$$\rho(t) = \frac{1}{(t+1)\nu(\overline{B}(b, t+1))^{1/(p-\theta)}}, \tag{8.4}$$

其中 $B(\overline{b}, t+1))$ 表示半径为 $t+1$ 的闭球。实际上，在 [5] 中使用的是开球 $B(b, t+1)$，而非闭球 $B(b, t+1)$。由于测度ν具有倍增性质，上述将开球改为闭球的变化只会影响 [5]，中的一些数值常数，其他部分均不受影响。这里采用闭球的原因是，我们希望 ρ 下半连续，而采用闭球时它确实如此。

ˆ在 [5], 中定义的球化度量 d，是通过对链上的和取下确界来定义的，而不是对曲线积分取下确界。这是因为 Besov空间通常自然地定义在区域的边界上，而那里未必存在可求长曲线。

为比较 [5] 中的球化与本文的工作，考虑本文的设定。于是 $\partial\Omega$ 配备度量 d 和测度 ν，满足 [5] 中所考虑设定的所有假设。函数 ρ 在 (8.4) 中定义，满足条件(A)、(B)、(C)和(D)。

条件(A) 直接由以下事实得出： ν 也是倍增测度。条件(B) 由 ν的上质量界得出，见 (2.3)。对于条件(C) 令 $r \geq 1$。则

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\setminus B(b,r)} \rho(|x|)^p \, d\mu(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{B(b,2^{j+1}r)\setminus B(b,2^j r)} \rho(|x|)^p \, d\mu(x) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \rho(2^j r)^p \mu(B(b,2^{j+1}r)) \\ &\leq C_\mu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mu(B(b,2^j r))}{(2^j r)^p \nu(B(b,2^j r))^{p/(p-\theta)}} \leq C_\theta C_\mu r^{\theta-p} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2^{(\theta-p)})^j}{\nu(B(b,2^j r))^{\theta/(p-\theta)}} \\ &\leq \frac{C_\theta C_\mu}{1-2^{(\theta-p)}} \frac{r^{\theta-p}}{\nu(B(b,r))^{\theta/(p-\theta)}} \leq \frac{C_\theta^2 C_\mu}{1-2^{(\theta-p)}} \frac{\mu(B(b,r))}{r^p \nu(B(b,r))^{p/(p-\theta)}} \\ &\lesssim \rho(r)^p \mu(B(b,r+1)),\end{aligned}$$

其中对于 t 第三个和第五个不等式用到了 ν 的余维性。计算条件 r 条件 关于 (D)，其性质相似，但更为容易。

因此，函数 ρ 中所呈现的 [5] 适用于 [32] 中的所有结果以及本文。因此， $B^{1-\theta/p}_{p\,p}$, -Besov 能量也通过本文的结果得以保持。然而，球化后的ˆ度量 d 在 [5] 中定义的度量略有不同，但它与本文以及 d_ρ 中所使用的度量 [32]是双Lipschitz等价的。通过比较引理 4.1 和 4.2 与 [5, 引理 4.2 (b) 和推论 54], 可以看出这种双Lipschitz等价性。

9. p-HYPERBOLICITY AND p-PARABOLICITY

本节的目标是证明定理 1.2，该定理涉及 p-抛物性和p-双曲性的概念。度量空间的 p-抛物性和 p-双曲性概念源于布朗运动理论。在该理论中，配备狄利克雷型的拓扑测度空间称为常返的，如果空间上的布朗运动会返回空间中任意具有正容量的紧集；否则称为暂留。布朗运动的暂留性等价于空间 [15] 上奇异函数的存在性，以及相对于该空间中某个紧子集的无穷远边界的 2-容量为正 [22, 23, 24]。暂留性的术语后来改称为 2-双曲性 [22]。相应地，将 p-双曲性定义为相对于空间紧子集的无穷远边界的 p-容量为正，即使对于 $p \neq 2$（见下文定义9.1）也有意义；这一概念最初由 Holopainen 在 Hadamard 流形的背景下提出 [22]。

定义9.1。 若存在一个球$B \subset Y$，使得以 $\Gamma(\infty)$ 表示所有满足 $[0,\infty) \to Y$ 且$\gamma(0) \in B$ 的局部可求长曲线 γ 的集合，并且对每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在某个 $t_n > 0$，使得 $\gamma([t_n,\infty)) \subset Y \setminus nB$，且 $\mathrm{Mod}_p(\Gamma(\infty)) > 0$，则称度量测度空间 (Y, d_Y, μ_Y) 为 p-双曲的 。若空间 (Y, d_Y, μ_Y) 不是 p-双曲的，则称其为 p-抛物的。

假设空间 (Y, d_Y) 是完备的， μ_Y具有倍增性，并且 (Y, d_Y, μ_Y) 支持一个 p-Poincar´e 不等式。那么，若 (Y, d_Y, μ_Y) 是 p-双曲的，则定义p-双曲性时所要求的正 p-模性质对 Y 中的每个球 B 都成立。这可由 [24, 备注 3.10 和引理 3.15] 得出。

由引理 6.3 可知，若 ρ 满足条件 (A)–(D)，且 $u \in D^{1,p}(\Omega\ d,\mu)$ 满足$Tu = 0$，则所有满足 $T_\rho u(\xi) \neq 0$ 的点 $\xi \in \partial_\rho\Omega$ 的集合，相对于 Sobolev 类 $N^{1,p}(\Omega^{d_\rho}, d_\rho, \mu_\rho)$ 具有零 p-容量。这意味着，若 (Ω^d, d, μ) 是 p-双曲的，则$T_\rho u(\infty)$ 必须等于 0。

本节余下部分，我们不关注 $D^{1,p}(\Omega\ d,\mu)$ 中函数的迹，因此无需假设条件(D)。我们也无需假设 $\partial\Omega$ 配备了一个θ-余维测度 ν，也无需假设 $(\partial\Omega\ d)$ 是一致完美的或无界的。不过，我们仍假设 Ω 是空间 (X, d) 中的一个无界一致域。特别地，本节的结果适用于这样的情形：Ω 是一个无界一致域，配备了一个具有倍增性质且支持 p-Poincaré 不等式的测度，即使 $\partial\Omega$ 如 [13] 中那样是有界的。

现在我们得到一个关键结果，它使我们能够利用球化这一工具来证明定理 1.2。

命题 9.2. 设 $p > 1$。空间 (Ω^d, d, μ) 是 p-双曲的，当且仅当

$$\operatorname{cap}_p(\{\infty\}, \overline{\Omega}^{d_\rho} \setminus B_\rho(\infty, r_0); \overline{\Omega}^{d_\rho}) > 0$$

for 某个 $r_0 > 0$。这里的变分 p-容量是相对于空间 $(\Omega^{d_\rho}, d_\rho, \mu_\rho)$而言的。

证明。设 B 是 (Ω^d, d) 中的一个球，并令 $\Gamma(\infty)$ 为所有局部可求长曲线$\gamma : [0,\infty) \to \Omega^d$ 且满足 $\gamma(0) \in B$ 的集合；对每个正整数 n，都存在某个 $t_n > 0$ 使得$\gamma([t_n,\infty)) \subset \Omega^d \setminus nB$。我们还令 $\Gamma_\rho(\infty)$ 为所有可求长 $\gamma\colon [0,1] \to \Omega^{d_\rho}$ 且满足$\gamma(0) \in B$ 和 $\gamma(1) = \infty$的集合，并令 $\Gamma_\rho^P(\infty)$ 为所有曲线 $\overline{\gamma} \in \Gamma_\rho(\infty)$ 且满足$\gamma([0,1)) \subset \Omega^d$的集合。于是

$$\operatorname{Mod}_{\rho,p}(\Gamma_\rho(\infty)) = \operatorname{Mod}_{\rho,p}(\Gamma_\rho^P(\infty)),$$

其中 $\operatorname{Mod}_{\rho,p}$ 表示在空间 $(\Omega$ 中测得的曲线族的 p-模 Mod_p $^{d_\rho}, d_\rho, \mu_\rho)$。

由于由 (4.3) 可知，当 $R \to \infty$ 时 $\operatorname{diam}_\rho(\Omega^{d_\rho} \setminus B(b, R)) \to 0$，因此每条路径 $\gamma \in \Gamma(\infty)$ 满足 $\lim_{t\to\infty} d_\rho(\gamma(t)\ \infty) = 0$。通过对 γ 经由变换 $\phi\colon [0,1) \to [0,\infty)$ 重新参数化（该变换由$\phi(t) = \frac{t}{1-t}$ 给出），我们得到 $\beta = \gamma \circ \phi\colon [0,1) \to \Omega^d$；然后将 β 延拓至 $[0,1]$，并令 $\beta(1) = \infty$，我们便得到 $\Gamma(\infty)$ 与 $\Gamma_\rho^P(\infty)$ 之间的一一对应。注意，Ω^d 上的非负 Borel 函数 g 对于计算 $\operatorname{Mod}_p(\Gamma(\infty))$ 是容许的，当且仅当由 $\widehat{g}(x) = \rho(|x|)^{-1} g(x)$ 给出的函数 $\widehat{g}$ 对于计算 $\operatorname{Mod}_{\rho,p}(\Gamma_\rho^P(\infty))$ 是容许的；这可由 [32, 引理 5.3] 的证明中的同一论证得出。由于我们还有 $\int_\Omega g^p d\mu = \int_\Omega \widehat{g}^p d\mu_\rho$，故得到

$$\operatorname{Mod}_{\rho,p}(\Gamma_\rho^P(\infty)) = \operatorname{Mod}_p(\Gamma(\infty)).$$

综合以上内容可知，

$$\operatorname{Mod}_{\rho,p}(\Gamma_\rho(\infty)) = \operatorname{Mod}_p(\Gamma(\infty)).$$

利用 [26,备注 3.3] 可得

$$\operatorname{cap}_p(\{\infty\}, \overline{B}; \overline{\Omega}^{d_\rho}) = \operatorname{Mod}_{\rho,p}(\Gamma_\rho(\infty)),$$

并将其与前一个等式及（4.3）结合，即可得到所需结果。 □

[23] 中的结果告诉我们一种体积增长性质，它保证流形的 p-抛物性，而 [31] 中的结果给出了度量测度空间中的一点具有正 p-容量（或不具有）的条件。上述命题告诉我们，[31]给出了判定

p-抛物性以及 p-双曲性（Ω）^{d}。在本节中，我们给出两个体积增长性质，参见定理9.4 与9.6（见下文）。为证明这些结果，我们使用球化工具。我们还给出保证其正性（或为零）的性质，即 p-容量（ $\{\infty\}$ ），其思路沿 [31,定理3。4]。这些性质在下文所陈述的相应命题中加以描述。

命题 9.3。 设 $p>1$，且 (Y, d_Y, μ_Y) 是一个度量测度空间，其中 μ_Y具有倍增性。固定 $x_0 \in Y$ 和 $r_0>0$。若

$$\liminf_{r\to 0^+} \frac{\mu_Y(B(x_0,r))}{r^p} < \infty$$

则 $\operatorname{cap}_p(\{x_0\}, Y\setminus B(x_0,r_0); Y) = 0$。

证明。 固定 $M > \liminf_{r\to 0^+} \frac{\mu_Y(B(x_0,r))}{r^p}$。于是存在一个序列 $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，使得 $r_1 \le r_0$、$0<r_{i+1}<\frac{r_i}{2}$，并且对每个 $i\in\mathbb{N}$，都有 $\mu_Y(B(x_0,r_i))/r_i^p \le M$。对每个 $i\in\mathbb{N}$，令

$$u_i(x) = \left(1 - \frac{\operatorname{dist}(x, B(x_0,r_i))}{r_i}\right)_+.$$

于是 $u_i = 1$ 属于 $B(x_0,r_i)$，$u_i = 0$ 属于 $Y\setminus B(x_0,2r_i)$，$g_{u_i} \le 1/r_i$ 属于 $B(x_0,2r_i)\setminus B(x_0,r_i)$，并且

$$\int_Y g_{u_i}^p d\mu_Y \le \frac{\mu_Y(B(x_0,2r_i))}{r_i^p} \le C_{\mu_Y} M.$$

注意到，函数 g_{u_i} 的支集两两不相交。现在固定一个正整数 K。令

$$v_K = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^K u_i.$$

我们注意到， $v_K = 0$ 属于 $Y\setminus B(x_0,\ r_0)$，且 $v_K = 1$ 属于 $B(x_0,\ r_K)$。因此

$$\operatorname{cap}_p(\{x_0\}, Y\setminus B(x_0,r_0); Y) \le \int_Y g_{v_K}^p d\mu_Y = \sum_{i=1}^K \int_Y \frac{1}{K^p} g_{u_i}^p d\mu_Y \le K^{1-p} C_{\mu_Y} M.$$

令 $K\to\infty$，即可完成证明。 □

定理 9.4. 设 $p>1$，并假设

$$\liminf_{R\to\infty} \frac{\mu(B(b,R))}{R^p} < \infty.$$

则 (Ω^d, d, μ) 是 p-抛物型的。

证明。设 R_i 为一个序列，使得 $\lim_{i\to\infty} R_i = \infty$ 且 $\sup_i \frac{\mu(B(b,R_i))}{R_i^p} < \infty$。回顾 [32]或第 4 节开头的内容可知， $h(t) = (t+1)\rho(t)$。令 $r_i = h(R_i)$，则有 $\lim_{i\to\infty} r_i = 0$，参见备注 2.1]。若 i 足够大，由 (4.3) 和条件 (C) 可得

$$\mu_\rho(B_\rho(\infty, r_i)) \le \mu_\rho(\Omega\setminus B(b, h^{-1}(r_i/C_1))) \le C_C \rho(h^{-1}(r_i/C_1))^p \mu(B(b, h^{-1}(r_i/C_1)+1)).$$

对于较大的 i，由 [32, 引理 2.2] 可得

$$R_i \ge h^{-1}(h(R_i)) \ge \frac{R_i}{2(C_A C_B)^{C_A C_B}}.$$

因此，我们有 $h^{-1}(h(R_i)) \simeq R_i$。然后利用 [32, 引理 4。2], 条件(A) 以及 μ的倍增性质，可得

$$\rho(h^{-1}(r_i/C_1))^p \mu(B(b, h^{-1}(r_i/C_1)+1)) \simeq \rho(h^{-1}(r_i))^p \mu(B(b, h^{-1}(r_i)+1)) \simeq \rho(R_i)^p \mu(B(b, R_i)$$

其中，比较常数仅依赖于 C_U、 C_μ、 p、 C_A 和 C_B。因此

$$\limsup_{i\to\infty}\frac{\mu_\rho(B_\rho(\infty,r_i))}{r_i^p}\lesssim\limsup_{i\to\infty}\frac{\rho(R_i)^p\mu(B(b,R_i))}{(R_i\rho(R_i))^p}<\infty.$$

因此，命题 9.3告诉我们

$$\operatorname{cap}_p(\{\infty\},\overline{\Omega}^{d_\rho}\setminus B_\rho(\infty,r_0);\overline{\Omega}^{d_\rho})=0$$

只要 $r_0>0$。现在应用命题 9.2 即可完成证明。 □

命题 9.5。 设(Y,d_Y,μ_Y) 是一个完备度量测度空间，其中 μ_Y是倍增的，且该空间支集一个 p-*Poincar´e* 不等式。固定 $x_0\in Y$。假设存在某个 $q>0$，使得 $0<q<p<\infty$ 并且

$$\liminf_{r\to0^+}\frac{\mu_Y(B(x_0,r))}{r^q}>0.$$

那么，对于每个满足 $Y\setminus B(x_0,2r_0)$ 非空的 $r_0>0$，都有

$$\operatorname{cap}_p(\{x_0\},Y\setminus B(x_0,r_0);Y)>0.$$

证明。设 $0<r<r_0$满足 $Y\setminus B(x_0,2r_0)$ 非空，并设 $u\in N^{1,p}(Y,d_Y,\mu_Y)$ 满足：$u=1$在 $B(x_0,r)$ 上， $u=0$在 $Y\setminus B(x_0,r_0)$ 上，且 $0\le u\le1$在 Y 上。设 $k\ge2$为满足$2^{-k+1}r_0<r\le2^{-k+2}r_0$的整数，并且对于 $i=0,\ 1,\ \cdots,\ k$，令 $B_i:=B(x_0,2^{1-i}r_0)$。

由于 $Y\setminus B(x_0,\ 2r_0)$ 非空，且 Y 是连通的（这是支持 p-Poincar´e不等式的结果），因此存在某个 $z_0\in Y$，使得 $d_Y(x_0,\ z_0)=\frac{3r_0}{2}$。因此，根据 μ_Y 的倍增性质，

$$\mu_Y(B(x_0,2r_0)\setminus B(x_0,r_0))\ge\mu_Y(B(z_0,r_0/2))\ge\frac{1}{C_{\mu_Y}^3}\,\mu_Y(B(x_0,r_0)),$$

因此

$$\mu_Y(B(x_0,2r_0))\ge\left(1+\frac{1}{C_{\mu_Y}^3}\right)\mu_Y(B(x_0,r_0)).$$

由于 $u=0$ 在 $Y\setminus B(x_0,\ r_0)$ 上，且 $0\le u\le1$ 在 $B(x_0,\ r_0)$ 上，因此

$$u_{B_0}=\frac{1}{\mu_Y(B(x_0,2r_0))}\int_{B(x_0,2r_0)}u\,d\mu_Y\le\frac{\mu_Y(B(x_0,r_0))}{\mu_Y(B(x_0,2r_0))}\le c<1,$$

其中 $c=(1+\frac{1}{C_{\mu_Y}^3})^{-1}$。因此

$$\begin{aligned}0<1-c\le1-u_{B_0}=|u_{B_0}-u_{B_k}|&\le\sum_{j=0}^{k-1}|u_{B_j}-u_{B_{j+1}}|\le C_{\mu_Y}\sum_{j=0}^{k-1}\fint_{B_j}|u-u_{B_j}|\,d\mu_Y\\&\le C_{\mu_Y}C_{P_Y}\sum_{j=0}^{k-1}2^{1-j}r_0\left(\fint_{\lambda B_j}g_u^p\,d\mu_Y\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

由此可得

$$1-c\le2C_{\mu_Y}C_{P_Y}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{(2^{-j}r_0)^q\,(2^{-j}r_0)^{p-q}}{\mu_Y(\lambda B_j)}\right)^{1/p}\left(\int_Y g_u^p\,d\mu_Y\right)^{1/p}.$$

根据假设，存在一个正整数 k_1 和一个常数 $c_1 > 0$，使得每当$j > k_1$时，我们有 $\mu_Y(\lambda B_j) \geq c_1($ $2^{-j}r_0)^q$。因此

$$1 - c \leq 2C_{\mu_Y}C_{P_Y}\left(\int_Y g_u^p \, d\mu_Y\right)^{1/p}\left[\sum_{j=0}^{k_1}\frac{2^{-j}r_0}{\mu_Y(\lambda B_j)^{1/p}} + \sum_{j=k_1+1}^{\infty}\left(\frac{r_0^{p-q}}{c_1}\right)^{1/p} 2^{-j(1-q/p)}\right].$$

上面方括号中的项现在与 u 和 r 无关，并且级数 $\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j(1-q/p)}$ 收敛。因此，令

$$0 < A := 2C_{\mu_Y}C_{P_Y}\left[\sum_{j=0}^{k_1}\frac{2^{-j}r_0}{\mu_Y(\lambda B_j)^{1/p}} + \sum_{j=k_1+1}^{\infty}\left(\frac{r_0^{p-q}}{c_1}\right)^{1/p} 2^{-j(1-q/p)}\right] < \infty,$$

我们可得

$$\left(\int_Y g_u^p \, d\mu_Y\right)^{1/p} \geq \frac{1-c}{A} > 0.$$

对所有 u 取下确界，然后令 $r \to 0^+$，由 [4, 定理 6。19], □可得该命题的结论。

定理 9.6。设 $p > 1$。假设存在某个 $q_0 > p$，使得

$$\liminf_{R\to\infty}\frac{\mu(B(b,R))}{R^{q_0}} > 0.$$

那么 (Ω^d, d, μ) 是 p-双曲的。

证明。设 $\beta > \max\left\{\frac{q_0}{p}, \frac{\log_2(C_\mu)}{p}\right\}$。由例 8.2 可知，$\rho$取为$\rho(t) = \min\{1, t^{-\beta}\}$ 满足条件 (A)、(B) 和 (C)。回想一下，本节不需要条件 (D) 。设 $q = \frac{\beta p - q_0}{\beta - 1}$。注意，当 $p < q_0$时，必有 $0 < q < p$。

设 $(r_i)_{i=1}^{\infty}$ 是一个正数序列，使得 $\lim_{i\to\infty} r_i = 0$ 且 $r_i \leq 1$ 对每个 i都成立。回顾第 4 节开头的内容，$h(t) = (t+1)\rho(t)$。定义 $R_i = h^{-1}(r_i)$。则 $R_i \geq 1$，且对每个 i，$h(R_i) = (R_i+1)$ $R_i^{-\beta} = r_i$ 成立，并且 $\lim_{i\to\infty} R_i = \infty$。若 i 足够大，由 (4.3)、(3.2) 和 [32,引理 4.2]可得

$$\begin{aligned}
\mu_\rho(B_\rho(\infty, r_i)) &\geq \int_{\Omega\setminus B\left(b, 2h^{-1}\left(\frac{r_i}{2C_2C_AC_B}\right)\right)} \rho(|x|)^p d\mu(x) \\
&\gtrsim \rho\left(2h^{-1}\left(\frac{r_i}{2C_2C_AC_B}\right)\right)^p \mu\left(B\left(b, 2h^{-1}\left(\frac{r_i}{2C_2C_AC_B}\right)+1\right)\right) \\
&\gtrsim \rho(h^{-1}(r_i))^p \mu(B(b, h^{-1}(r_i)))
\end{aligned}$$

比较常数依赖于 C_U、C_μ、p 和 β。由此可得

$$\frac{\mu_\rho(B_\rho(\infty, r_i))}{r_i^q} \gtrsim \frac{\rho(R_i)^p\mu(B(b,R_i))}{\left((R_i+1)R_i^{-\beta}\right)^q} \simeq \frac{R_i^{-\beta p}\mu(B(b,R_i))}{R_i^{(1-\beta)q}} = \frac{\mu(B(b,R_i))}{R_i^{q_0}}$$

比较常数也依赖于 q_0。因此命题9.5 的假设对 $(Y, d_Y, \mu_Y) = (\Omega^{d_\rho}, d_\rho, \mu_\rho)$ 和 $x_0 = \infty$成立。因此若 $r_0 > 0$ 足够小，则有

$$\operatorname{cap}_p(\{\infty\}, \overline{\Omega}^{d_\rho} \setminus B_\rho(\infty, r_0); \overline{\Omega}^{d_\rho}) > 0.$$

命题 9.2的应用现已完成证明。 □

References

[1] H. Aikawa 和 N. Shanmugalingam。 *Carleson-type estimates for p-harmonic functions and the conformal Martin boundary of John domains in metric measure spaces.* **53** 2005 1, 165 188 Michigan Math. J.（），第 – 期。[2] L. Ambrosio、N. Gigli 和 G. Savar´e。 *Calculus and heat flow in metric measure spaces and applications to spaces with Ricci bounds from below.* **195** 2014 2, 289 391 Invent. Math.（），第 – 期。[3] Z. M. Balogh 和 S. M. Buckley。 *Sphericalization and flattening.* Conform. Geom. Dyn. 9 (2005), 76–101。[4] A. Bj¨orn 和 J. Bj¨orn。 *Nonlinear potential theory on metric spaces.* EMS Tracts Math.，第 17 卷，欧洲数学会 (EMS)，苏黎世，2011。[5] A. Bj¨orn、J. Bjorn、R. Korte、S. Rogovin 和 T. Takala。 *Preserving Besov (fractional Sobolev) energies under sphericalization and flattening.* arXiv:2409.17809 J. Reine Angew. Math.，即将发表，。[6] A. Bj¨orn、J. Bjorn 和 X. Li。 *Sphericalization and p-harmonic functions on unbounded domains in Ahlfors regular spaces.* **474** 2019 2, 852 875 J. Math. Anal. Appl.（），第 – 期。[7] A. Bj¨orn、J. Bjorn 和 X. Li。 *Doubling measures and Poincaré inequalities for sphericalizations of metric spaces.* arXiv:2508.09795 2025 预印本，，。[8] J. Bj¨orn 和 N. Shanmugalingam。 *Poincaré inequalities uniform domains and extension properties for Newton-Sobolev functions in metric spaces.* **332** 2007 1, 190 208 J. Math. Anal. Appl.（），第 – 期。[9] L. Capogna、J. Kline、R. Korte、N. Shanmugalingam 和 M. Snipes。 *Natanson problems for p-harmonic functions and induced nonlocal operators in metric measure spaces.* **147** 2025 6, 1653 1711 ，Amer. J. Math.（），第 – 期。[10] J. Cheeger。 *Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces.* Geom. Funct. Anal. 9 (1999), no. 3, 428–517。[11] E. Durand-Cartagena 和 X. Li。 *Preservation of p-Poincaré inequality for large p under sphericalization and flattening.* **59** 2015 4, 1043 1069 Illinois J. Math.（），第 – 期。[12] E. Durand-Cartagena 和 X. Li。 *Preservation of bounded geometry under sphericalization and flattening: quasiconvexity and ∞-Poincaré inequality.* **42** 2017 1, 303 324 Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.（），第 – 期。[13] R. Gibara、R. Korte 和 N. Shanmugalingam。 *Solving a Dirichlet problem on unbounded domains via a conformal transformation.* **389** 2024 3, 2857 2901 Math. Ann.（），第 — 期。[14] R. Gibara 和 N. Shanmugalingam。 *Trace and extension theorems for homogeneous Sobolev and Besov spaces for unbounded uniform domains in metric measure spaces.* **323** 2023 1, 101 Proc. Steklov Inst. Math.（），第 , 119 期。[15] A. Grigor'yan。 *Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds.* **36** 1999 2, 135 249 Bull. Amer. Math. Soc.（），第 – 期。[16] D. Hansevi。 *The obstacle and Dirichlet problems associated with p-harmonic functions in unbounded sets in $\mathbb{R}^n$ and metric spaces.* **40** 2015 1, 89 108 Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.（），第 – 期。[17] D. Hansevi。 *The Perron method for p-harmonic functions in unbounded sets in $\mathbb{R}^n$ and metric spaces.* Math. Z. 288 (2018), no. 1-2, 55–74。[18] J. Heinonen。 *Lectures on analysis on metric spaces.* Springer-Verlag，纽约，2001。[19] J. Heinonen、T. Kilpel¨ainen 和 O. Martio。 *Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations.* Oxford Mathematical Monographs，Oxford Science Publications，The Clarendon Press，牛津大学出版社，纽约，1993。[20] J. Heinonen 和 P. Koskela。 *Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry.* Acta Math. 181 (1998), no. 1, 1–61。[21] J. Heinonen、P. Koskela、N. Shanmugalingam 和 J. T. Tyson。 *Sobolev spaces on metric measure spaces.* 剑桥大学出版社，剑桥，2015。[22] I. Holopainen。 *Volume growth Green's functions and parabolicity of ends.* **97** 1999 2, , , Duke Math. J.（），第 – 期。[23] I. Holopainen 和 P. Koskela。 *Volume growth and parabolicity.* **129** 2001 11, Proc. Amer. Math. Soc.（），第 – 期。[24] I. Holopainen 和 N. Shanmugalingam。 *Singular functions on metric measure spaces.* Collect. Math. 53 (2002), no. 3, 313–332。[25] N. Kajino 和 R. Shimizu。 *Contraction properties and differentiability of p-energy forms with applications to nonlinear potential theory on self-similar sets.* arXiv:2404.13668 2024 预印本，，。[26] S. Kallunki 和 N. Shanmugalingam。 *Modulus and continuous capacity.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 26 (2001), no. 2, 455–464。[27] S. Keith。 *Modulus and the Poincaré inequality on metric measure spaces.* Math. Z. 245 (2003), no. 2, 255–292。

[28] **S. Keith**。 *Measurable differentiable structures and the Poincaré inequality.* **Indiana Univ. Math. J. 53 (2004)，第 4 期，1127–1150**。[29] **J. Kinnunen、R. Korte、N. Shanmugalingam 和 H. Tuominen**。 *Lebesgue points and capacities via the boxing inequality in metric spaces.* **57** 2008 1, 401 430 **Indiana Univ. Math. J.（），第 – 期**。[30] **J. Kinnunen 和 N. Shanmugalingam**。 *Regularity of quasi-minimizers on metric spaces.* **Manuscripta Math. 105 (2001)，第 3 期，401–423**。[31] **R. Korte**。 *Geometric implications of the Poincaré inequality.* **Results Math. 50 (2007)，第 1-2 期，93–107**。[32] **R. Korte、S. Rogovin、N. Shanmugalingam 和 T. Takala**。 *Sharp conditions for preserving uniformity doubling measure and Poincaré inequality under sphericalization.* arXiv:2501.01348 **即将出版，**。[33] **T. Kumagai、N. Shanmugalingam 和 R. Shimizu**。 *Finite dimensionality of Besov spaces and potential-theoretic decomposition of metric spaces.* **50** 2025 1, 347 369 **Ann. Fenn. Math.（），第 – 期**。[34] **X. Li**。 *Preservation of bounded geometry under transformations of metric spaces.* **博士学位论文 — 辛辛那提大学，2015 年，140 页**。[35] **X. Li 和 N. Shanmugalingam**。 *Preservation of bounded geometry under sphericalization and flattening.* **Indiana Univ. Math. J. 64 (2015)，第 5 期，1303–1341**。[36] **R. A. Macıas 和 C. Segovia**。 *Lipschitz functions on spaces of homogeneous type.* **Adv. in Math. 33 (1979)，第 3 期，257–270**。[37] **L. Maly**。 *Trace and extension theorems for Sobolev-type functions in metric spaces.* arXiv:1704.06344**，2017 年**。[38] **V. G. Maz'ja**。 *Sobolev Spaces.* **Springer Ser. Soviet Math. Springer-Verlag，柏林，1985 年**。[39] **N. Shanmugalingam**。 *Harmonic functions on metric spaces.* **Illinois J. Math. 45 (2001)，第 3 期，1021–1050**。**补充**

址：

R.K.：阿尔托大学数学与系统分析系，邮政信箱 11100，FI-00076 阿尔托，芬兰。电子邮箱：
R.K.：riikka.korte@aalto.fi

S.R.：阿尔托大学数学与系统分析系，邮政信箱 11100，FI-00076 阿尔托，芬兰。电子邮箱：
S.R.：sari.rogovin@aalto.fi

N.S.：辛辛那提大学数学科学系，邮政信箱 210025，辛辛那提，俄亥俄州 45221-0025，美国。电子邮箱：N.S.：shanmun@uc.edu

T.T.：阿尔托大学数学与系统分析系，邮政信箱 11100，FI-00076 阿尔托，芬兰。电子邮箱：
T.T.：timo.i.takala@aalto.fi