arXiv:2602.15713v1 [math.FA] 17 Feb 2026

对偶截断 Toeplitz 算子的最小模

SUDIP RANJ AN BHUIA、RAMESH GOLLA 和 PUSPENDU NAG

Abstract. 本文系统研究了作用于模型空间 $\mathcal{K}_u^\perp$ 的正交补上的对偶截断 Toeplitz 算子（DTTOs） D_φ 的最小模，其中 u 是非常数内函数，且 $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$。我们首先建立压缩移位 S_u 及其对偶算子 D_u 的最小模关于 $|u(0)|$ 的显式公式，并证明该最小值总能取到。对于正规对偶截断 Toeplitz 算子，我们利用符号的本质值域推导出锐利的谱界，并刻画 $m(D_\varphi)$ 与 $|\varphi|$ 的本质下确界相等的条件。在一般情形下，对于模为一的 φ，我们通过分析相关托普利茨算子和汉克尔算子在模型空间上的限制范数，得到 $m(D_\varphi)$ 的精确公式和双边估计。最后，我们给出若干具体示例来说明所得结果。

1. Introduction

长期以来，对函数空间上算子的研究一直是现代分析的基石，而托普利茨算子和汉克尔算子则是具有丰富结构性质和谱性质的算子的典型例子 [10, 20]。该领域的一项重要进展是 Sarason 引入了截断托普利茨算子（TTOs） [24]。这类算子是乘法算子压缩到与非常数内函数u相关的模型空间 $\mathcal{K}_u = H^2 \ominus uH^2$ 上所得的算子。TTOs 具有丰富的结构特征，因其与复对称性、插值问题和模型理论有着深刻联系，受到广泛关注 [14]。近期，Ding 和 Sang [9] 引入了对偶截断 ***Toeplitz*** 算子（DTTOs）这一类算子。对于 $\varphi \in L^\infty$，DTTO D_φ 定义在$\mathcal{K}_u^\perp = uH^2 \oplus \overline{H^2_-}$ 上，形式如下:

$$D_\varphi = (I - P_{\mathcal{K}_u})\, M_\varphi|_{\mathcal{K}_u^\perp},$$

其中 M_φ 是 $L^2(\mathbb{T})$ 上的乘法算子。对偶截断 Toeplitz 算子的结构理论发展迅速；例如，Sang、Qin 和 Ding [25]建立了 Brown-Halmos 型定理，并证明对偶截断 Toeplitz 算子可表示为2×2Toeplitz–Hankel 算子矩阵。 [18, 26], 研究了它们的交换子、不变子空间和本质交换性质的进一步刻画，而 Gu [16] 则给出了它们的正规性和谱包含关系的基本刻画。尽管对偶截断 Toeplitz 算子的代数和谱特征已得到广泛研究，这些算子的定量行为，尤其是其极值性质，仍是一个活跃的研究领域

Date: 2026年2月18日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 47B35, 47A30, 47B32。
Key words and phrases. 对偶截断 Toeplitz 算子、最小模、约化最小模、最小值可达算子、Toeplitz 算子、Hankel 算子、模型空间。

这一领域的两个核心概念是范数达到算子和最小模达到算子。若算子 $T \in \mathcal{B}(H, K)$ 存在一个单位向量 x 使得 $\|Tx\| = \|T\|$，则称其为范数达到算子。这一概念历史悠久，最早可追溯至 Lindenstrauss 的研究 [19]。类似地， T 的最小模定义为

$$m(T) = \inf\{\|Tx\| : \|x\| = 1\},$$

它衡量算子与非可逆算子集合之间的距离 [15]。若某个单位球面上的向量使该下确界达到，则称 T 为最小值可达算子。例如，Carvajal 和 Neves 研究了在 [7, 8]中达到范数或最小值的算子。与对每个非零算子都严格为正的算子范数不同，非零算子的最小模可能为零。这一区别表明，范数达到与最小值达到在结构行为上存在根本差异。具体而言，希尔伯特空间上的每个紧算子都能达到其范数，而紧算子达到其最小模，当且仅当它不是单射（见 [7, 命题1。3]）。最小值可达算子的研究已受到广泛关注，尤其是其在 $\mathcal{B}(H, K)$ [17] 中的稠密性，以及它们在各种算子类中的结构刻画 [8, 11]。在函数空间背景下，托普利茨算子与汉克尔算子的极值行为已得到广泛研究。Brown 和 Douglas 最早在 [4]研究了达到范数的托普利茨算子。最近，Ramesh 和 Sequeira 在 [22, 23]刻画了绝对范数达到和绝对最小模达到的托普利茨算子与汉克尔算子。对于对偶截断 Toeplitz 算子，这类性质的研究相对较新。在 [3], 中，作者在 [9, 16]的奠基性工作基础上，根据诱导符号的因子分解，对极值集进行了分类，并刻画了范数达到的对偶截断托普利茨算子。本文的主要目标是系统研究对偶截断 Toeplitz 算子的最小模。我们首先建立模型空间上压缩移位 S_u 的最小模公式，为分析对偶压缩移位 D_u [5]奠定基础。对于后者，我们根据标量 $|u(0)|$推导出其最小模的显式表达式。这些结果刻画了分别作用于模型空间 $\mathcal{K}_u$ 及其正交补 $\mathcal{K}_u^{\perp}$上的压缩移位的行为。本分析的一个关键部分是定理 3.2，其中我们证明，若 $\dim N(T) = \dim N(T^*)$，则 $m(T) = m(T^*)$。这一结果推广了 [1]中关于谱性质的一个有用结论。作为一项重要应用，我们证明，对于所有复对称算子，这种最小模相等关系均成立；对偶截断 Toeplitz 算子自然属于这一类 [16]。随后，我们将研究扩展到正规对偶截断 Toeplitz 算子，并根据符号的本质值域建立了紧确界。最后，对于一般符号，我们利用相关的托普利茨算子范数和汉克尔算子范数，推导出 $m(D_\varphi)$的精确公式 [20], ，并辅以具体示例，说明这些估计是紧确的。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍模型空间几何及最小模和约化最小模的基本性质所需的预备知识。第 3 节研究压缩移位及其对偶对应，并给出它们的最小模的显式计算。第 4 节考察正规对偶截断 Toeplitz 算子类，并依据诱导符号的本质值域给出谱界。最后，第 5 节讨论一般

情形。对于模为一的符号，我们通过分析相关的托普利茨算子和汉克尔算子，推导出 DTTO 的最小模的精确公式和双边估计（参见定理 5.5）。此外，文中还讨论了若干具体例子，以说明所得界的精确性，并展示所推导公式在特定情形下的应用。最后，我们讨论 B_φ 关于 $\varphi \in H^\infty$ 的最小模。

2. Preliminaries

设 H 是一个无限维可分复希尔伯特空间，令 $\mathcal{B}(H)$表示 H上所有有界线性算子构成的代数。T的核 （或零空间）和值域（或值域空间）分别记为 $()$和 $()$。值域与核之间的基本关系包括 $()()()$若算子 有下界，则称其为有下界，如果存在 $c > 0$ 使得

$$\|Tx\| \geq c\|x\| \quad \text{for all } x \in H.$$

这等价于 $N(T) = \{0\}$和 $R(T)$是闭的。

希尔伯特空间 H 上的共轭是一个反线性等距算子 $C : H \to H$，同时也是一个对合，即 $C^2 = I$。有界线性算子 $T \in \mathcal{B}(H)$若存在共轭 C 使得 $T = CT^*C$，则称为复对称（参见 [13]）。

$T \in \mathcal{B}(H)$ 的谱是集合

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ is not invertible in } \mathcal{B}(H)\}.$$

谱是 $\mathbb{C}$的非空紧子集，包含于闭圆盘$\{z \in \mathbb{C} : \ |z| \leq \|T\|\}$。

T 的点谱（或特征值集合）定义为

$$\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ N(T - \lambda I) \neq \{0\}\},$$

也就是说，$\lambda \in \sigma_p(T)$ 当且仅当存在非零向量 $x \in H$ 使得$Tx = \lambda x$。T 的近似点谱是集合

$$\sigma_{\text{ap}}(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \exists \{x_n\} \subset H, \ \|x_n\| = 1, \ \|(T - \lambda I)x_n\| \to 0\}.$$

对于任意两个固定的非零向量 x，$y \in H$，秩一算子通常记作 $x \otimes y$，定义为

$$(x \otimes y)(f) = \langle f, y\rangle x, \quad \text{for all } f \in H.$$

对于 $T \in \mathcal{B}(H)$，T 的最小模定义为

$$m(T) = \inf_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

以下基本性质将在全文中使用（参见 [8, 15]）：

命题2.1. 设 $T \in \mathcal{B}(H)$。则下列陈述成立：

(1) $m(T) = 0$ 当且仅当 T 没有下界；等价地，当且仅当$R(T)$不是闭的，或 $N(T) \neq \{0\}$。*(2)* $m(T^*T) = [m(|T|)]^2$。*(3)* 若 $V : \ H \to H$ 是酉算子，则 $m(VTV^*) = m(T)$。*(4)* 若 $N(T) \neq \{0\}$，则 $m(T) = 0$，且最小模自动达到。*(5)* $m(T) = \inf \sigma(|T|)$，等价地，$m(T)^2 = \inf \sigma(T^*T)$。*(6)* $\lambda \in \sigma_{\text{ap}}(T)$当且仅当 $m(T - \lambda I) = 0$。

对于正规算子 $T \in \mathcal{B}(H)$，根据 [21, 命题 2.1],，我们有 $m(T) = \text{dist}(0, \ \sigma(T))$。

回顾一下，若存在$x_0 \in S_H$ 使得算子 $T \in \mathcal{B}(H)$ 满足下式，则称其为范数达到

$$\|Tx_0\| = \|T\|,$$

其中， S_H 表示 H的单位球面。我们用 $\mathcal{N}(H)$表示 H上所有范数达到算子构成的类。

若存在 $x_0 \in S_H$使得算子 $T \in \mathcal{B}(H)$最小值达到，则称其为

$$\|Tx_0\| = m(T) = \inf\{\|Tx\| : \ x \in S_H\}.$$

我们用 $\mathcal{M}(H)$表示 H上所有最小值可达算子构成的集合。

当一个算子具有非平凡核时，其最小模必为零。在这种情况下，研究 T 在其核的正交补上的行为是自然的。

对于 $T \in \mathcal{B}(H)$， T 的约化最小模定义为

$$\gamma(T) = \inf\{\|Tx\| : x \in N(T)^{\perp}, \|x\| = 1\}.$$

等价地,

$$\gamma(T) = \inf \sigma \left(|T||_{N(T)^{\perp}} \right), \qquad |T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}.$$

因此，当且仅当 T在 $N(T)^{\perp}$上有下界时， $\gamma(T) > 0$，也就是说，存在$c > 0$，使得对于所有 $x \in N(T)^{\perp}$，均有 $\|Tx\| \geq c\|x\|$。显然， $m(T) \leq \gamma(T)$；特别地，当 $N(T) = \{0\}$时，我们有 $\gamma(T) = m(T)$。

设 (X, Σ, μ) 是一个测度空间。对于可测函数 $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$， f 的本质下确界定义为

$$\begin{aligned} \operatorname{ess\,inf} f :&= \sup\{a \in \mathbb{R} : \ f(x) \geq a \text{ for almost every } x \in X\} \\ &= \sup\{a \in \mathbb{R} : \ \mu(\{x : \ f(x) < a\}) = 0\}. \end{aligned}$$

若 $\varphi \in L^{\infty}(X, \mu)$，则其本质值域为集合

$$\operatorname{ess\,ran}(\varphi) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \forall \varepsilon > 0, \ \mu(\{x : \ |\varphi(x) - \lambda| < \varepsilon\}) > 0\}.$$

注意,

$$0 \in \operatorname{ess\,ran}(\varphi) \quad \iff \quad \operatorname{ess\,inf}|\varphi| = 0,$$

而当 $0 \notin$ 本质值域(φ)当且仅当本性下确界$|\varphi| > 0$，等价地， $\varphi^{-1} \in L^{\infty}(X, \mu)$。众所周知，对于 $\varphi \in L^{\infty}$，我们有 $\sigma(\varphi) =$ 本质值域(φ)以及 $\|\varphi\|_{\infty} =$sup$\{|\lambda| : \lambda \in$本质值域$(\varphi)\}$ （参见 [10, 第 2] 章）。

设 $\mathbb{D}$ 表示开单位圆盘， $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ 表示单位圆。我们用 $L^2 :=L^2(\mathbb{T})$表示$\mathbb{T}$ 上关于规范化勒贝格测度 μ的通常的平方可积可测函数的希尔伯特空间。Hardy空间 $H^2 :=H^2(\mathbb{T})$是 L^2 中由负傅里叶系数为零的函数所构成的闭子空间。

我们用 $L^{\infty} := L^{\infty}(\mathbb{T})$表示 $\mathbb{T}$上所有本性有界的 μ-可测函数所构成的巴拿赫空间。设 H^{∞} 表示单位圆盘 $\mathbb{D}$上所有有界解析函数构成的Banach代数，并配备范数

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)|.$$

用边界函数表示时，我们通常写作 $H^{\infty} := H^2 \cap L^{\infty}$。若函数$u \in H^{\infty}$ 满足以下条件，则称其为内函数

$$|u(\zeta)| = 1 \quad \text{for almost every } \zeta \in \mathbb{T}.$$

根据最大模原理，每个内函数 u 都满足 $|u(z)| \leq 1$，对所有 $z \in \mathbb{D}$均成立。此外，如果 u 不是常数函数，那么对所有 $z \in \mathbb{D}$，$|u(z)| < 1$。

令 P：$L^2 \to L^2$ 为到 H^2上的正交投影，并设 $P_- := I - P$.对于 $\varphi \in L^\infty$，令 M_φ 表示在 L^2上乘以 φ 的算子，而符号为 φ的托普利茨算子是有界算子

$$T_\varphi : H^2 \to H^2, \qquad T_\varphi f = P(\varphi f), \qquad f \in H^2.$$

符号为 $\varphi \in L^\infty$ 的汉克尔算子 是算子

$$H_\varphi : H^2 \to H^2_-, \qquad H_\varphi f = P_-(\varphi f), \qquad f \in H^2.$$

在全文中，S 表示单侧移位，其伴随算子记为 S^*，定义在 H^2上。

设 u 为单位圆盘 $\mathbb{D}$上的非常数内函数。相应的模型空间定义为

$$\mathcal{K}_u = H^2 \ominus uH^2.$$

它是 H^2 的一个闭子空间，且在反向移位算子 S^*下不变。我们用 $P_{\mathcal{K}_u}$表示 L^2 到 $\mathcal{K}_u$ 上的正交投影。

$\mathcal{K}_u$ 在 L^2 中的正交补具有如下分解

$$\mathcal{K}_u^\perp = uH^2 \oplus H^2_-, \text{ where } H^2_- = P_-(L^2) = \overline{zH^2}.$$

空间 $\mathcal{K}_u$ 是一个再生核希尔伯特空间。对每个 $\lambda \in \mathbb{D}$，$\mathcal{K}_u$ 在 λ 处的再生核为

$$k_\lambda^u(z) = \frac{1 - \overline{u(\lambda)}\, u(z)}{1 - \overline{\lambda} z}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

也就是说，对每个 $f \in \mathcal{K}_u$,

$$f(\lambda) = \langle f, k_\lambda^u \rangle.$$

特别地，在 $\lambda = 0$处，

$$k_0^u(z) = 1 - \overline{u(0)}\, u(z), \qquad \|k_0^u\|^2 = k_0^u(0) = 1 - |u(0)|^2. \tag{2.1}$$

再生核在对 $\mathcal{K}_u$ 上算子的分析中发挥着核心作用。例如，压缩移位 $S_u = P_{\mathcal{K}_u} S|_{\mathcal{K}_u}$ 满足秩一缺陷恒等式

$$I_{\mathcal{K}_u} - S_u^* S_u = S^* u \otimes S^* u, \qquad I_{\mathcal{K}_u} - S_u S_u^* = k_0^u \otimes k_0^u, \tag{2.2}$$

这对于研究 S_u 的范数和最小模性质至关重要。

具有符号 φ 和内函数 u 的对偶截断 *Toeplitz* 算子（DTTO）是算子

$$D_\varphi = (I - P_{\mathcal{K}_u}) M_\varphi \big|_{\mathcal{K}_u^\perp},$$

作用于 $\mathcal{K}_u^\perp$ 上。算子 D_φ 有界当且仅当 $\varphi \in L^\infty$，且此时$\|D_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$（参见 [9, 性质 2.1]）。此外，我们有 $D_\varphi^* = D_{\bar{\varphi}}$。通常记 $P_{\mathcal{K}_u^\perp} := I - P_{\mathcal{K}_u}$，表示从 L^2 到 $\mathcal{K}_u^\perp$ 的正交投影。

算子 D_φ 关于由 $\mathcal{K}_u^\perp \to \mathcal{K}_u^\perp$ 定义的共轭 C_u 是复对称的:

$$C_u f = u\overline{zf}, \quad f \in \mathcal{K}_u^\perp, \tag{2.3}$$

也就是说，$C_u D_\varphi C_u = D_\varphi^*$（参见 [16, 定理 2.7]）。

根据 [25]，存在一个酉映射

$$U = \begin{pmatrix} M_u & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} : H^2 \oplus H^2_- \longrightarrow uH^2 \oplus H^2_- = \mathcal{K}_u^\perp. \tag{2.4}$$

在该映射下， D_φ 与块算子酉等价

$$U^* D_\varphi U = \begin{pmatrix} T_\varphi & H^*_{u\bar{\varphi}} \\ H_{u\varphi} & S_\varphi \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

其中， $S_\varphi = P_- M_\varphi|_{H^2}$ 是对偶 *Toeplitz* 算子。定义在 L^2 上的反酉算子 V 由 $(Vf)(w) = \bar{w} f(w)$ $w \in \mathbb{T}$， $f \in L^2$ 满足以下性质：

$$V = V^{-1}, \qquad V T_\varphi = S_{\overline{\varphi}} V.$$

特别地，当 $\varphi(z) = z$ 时，对偶压缩移位记作 D_u。根据[5, 引理 4.1]， D_u 具有以下算子矩阵表示

$$U^* D_u U = \begin{pmatrix} S & H^*_{u\bar{z}} \\ 0 & Q \end{pmatrix} := \widetilde{D_u}, \qquad Qg = P_-(zg), \tag{2.6}$$

这在本文中起着核心作用。对偶压缩移位算子 D_u 的谱满足以下二分性质（参见 [5, 命题 3.4]）：

$$\sigma(D_u) = \begin{cases} \overline{\mathbb{D}}, & \text{if } u(0) = 0, \\ \mathbb{T}, & \text{if } u(0) \neq 0. \end{cases}$$

此外，根据 [6, 命题 8], ， D_u 的缺陷恒等式为

$$D_u D_u^* = I - (1 - |u(0)|^2)\, u \otimes u, \tag{2.7}$$

$$D_u^* D_u = I - (1 - |u(0)|^2) \bar{z} \otimes \bar{z}. \tag{2.8}$$

推论 2.2. 设 u 是一个内函数。当且仅当 u 是模为 1 的常数函数时， $\mathcal{K}_u^\perp$ 上的对偶截断 *Toeplitz* 算子 D_u 是等距算子。

3. Compressed shifts and dual compressed shifts

本节研究压缩移位型算子的最小模。我们首先考察作用于模型空间 $\mathcal{K}_u$ 上的压缩移位 S_u。在此情形下， S_u 满足的秩一缺陷恒等式使我们能够显式分析其谱，进而求出其最小模。这些结果为后续论证提供了有用的范例。接着，我们转而研究作用于 $\mathcal{K}_u^\perp$ 上的对偶压缩移位。它的结构较为复杂，但借助块算子表示以及压缩移位情形下获得的谱信息，仍可有效分析。这种方法阐明了压缩情形与对偶压缩情形之间的相似之处和区别。

3.1. 压缩移位的最小模。

本节首先给出一个简单但至关重要的引理，讨论恒等算子的秩一扰动的谱性质。尽管这个引理很基础，但它在我们的分析中发挥着关键作用；我们将反复运用它来计算由秩一缺陷恒等式所产生的算子的谱，进而求出其最小模，例如压缩移位所满足的这类恒等式。

引理 3.1. 设 H 为复 *Hilbert* 空间， $x \in H$ 为非零向量。对于 $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$，定义恒等算子的秩一扰动

$$T := \alpha I + \beta\, x \otimes x.$$

那么， T 的谱为

$$\sigma(T) = \{\alpha, \alpha + \beta\|x\|^2\}.$$

证明。 由谱映射定理可轻易得出。 □

定理 3.2。 设 $T \in \mathcal{B}(H)$ 满足 维数 $N(T)$ =维数 $N(T^*)$。那么

$$m(T) = m(T^*).$$

证明。 我们将分两种情况进行讨论：第一种，核非平凡；第二种，核平凡。

情形 1： dim $N(T) > 0$。 若核非平凡，则存在单位向量$x_0 \in N(T)$使得 $Tx_0 = 0$。由最小模的定义，

$$m(T) = \inf_{\|x\|=1} \|Tx\| \leq \|Tx_0\| = 0,$$

由此可得 $m(T) = 0$。由于 dim $N(T^*)$ =dim $N(T) > 0$，伴随算子T^* 也具有非平凡核。因此，存在单位向量 $y_0 \in N(T^*)$使得 $T^*y_0 = 0$，从而 $m(T^*) = 0$。在此情形下， $m(T) = m(T^*) = 0$。

情形 2： dim $N(T) = 0$。 于是 $N(T) = \{0\}$，且条件 dim $N(T)$ =dim $N(T^*)$蕴含 $N(T^*) = \{0\}$。我们根据 T 的值域是否闭来区分两种子情形：

(1) 如果 $R(T)$ 不闭，则 T 没有下界，这意味着 $m(T) = 0$。由于 $N(T^*) = \{0\}$，值域 $R(T)$ 是稠密的。如果 $R(T)$ 稠密但不闭，则 $R(T^*)$ 也不闭，这意味着 $m(T^*) = 0$。(2) 如果 $R(T)$ 闭，则由于 $N(T^*) = \{0\}$，我们有 $R(T) = N(T^*)^\perp = H$。因此， T 可逆，并由逆映射定理可知， $T^{-1} \in \mathcal{B}(H)$。

在可逆的情况下，最小模为

$$m(T) = \frac{1}{\|T^{-1}\|}.$$

由于 T可逆，其伴随算子 T^* 也可逆，且 $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$。我们有

$$m(T^*) = \frac{1}{\|(T^*)^{-1}\|} = \frac{1}{\|(T^{-1})^*\|} = \frac{1}{\|T^{-1}\|} = m(T).$$

因此， $m(T) = m(T^*)$。 □

注 3.3. 上述定理部分推广了 [1, 推论 3.14]。

以下结果可由定理 3.2 以及命题 1] 中关于复对称算子的已知性质推出。

命题 3.4. 设 $T \in \mathcal{B}(H)$ 是一个复对称算子。则以下结论成立：

(1) $m(T) = m(T^*)$；*(2)* T 有下界，当且仅当 T 可逆；*(3)* $m(T) > 0$，当且仅当 T 可逆。

值得强调的是，单侧移位 S 在 H^2 上的作用与其到模型空间 $\mathcal{K}_u$的压缩 S_u 之间形成鲜明对比。虽然 S 是等距算子，因此满足$m(S) = 1$，但其伴随算子 S^* 有非平凡核，所以 $m(S^*) = 0$。因此，一般而言，取伴随算子并不能保持最小模。与此形成鲜明对比的是，压缩移位 S_u 表现出根本不同的性质： S_u 和 S_u^*均

是带有秩一缺陷算子的压缩算子，且它们的最小模由标量 $|u(0)|$决定。下述定理表明，与单侧移位的情形不同，只要 $u(0) \neq 0$，算子 S_u 和 S_u^* 就具有相同且严格为正的最小模，并且这两个算子都能达到其最小模。

定理 3.5。设 u 是非常数内函数。则 $m(S_u) = |u(0)| = m(S_u^*)$。此外，$S_u$ 和 S_u^* 均能达到其最小模。

证明。根据缺陷恒等式 (2.2)，我们有，$S_u^* S_u$ 和 $S_u S_u^*$ 都是单位圆上恒等算子的秩一扰动。将引理 3.1 应用于 $\alpha = 1, \beta = -1$，得到

$$\sigma(S_u^* S_u) = \{\, 1,\ 1 - \|S^* u\|^2 \,\}, \qquad \sigma(S_u S_u^*) = \{\, 1,\ 1 - \|k_0^u\|^2 \,\}.$$

注意到 $S^* u = C_u k_0^u$，其中 C_u 由 (2.3) 给出。因此，利用 (2.1) 以及以下事实

$$\|S^* u\|^2 = \|C_u k_0^u\|^2 = \|k_0^u\|^2,$$

我们得到

$$\sigma(S_u^* S_u) = \{1,\, |u(0)|^2\}, \qquad \sigma(S_u S_u^*) = \{1,\, |u(0)|^2\}.$$

现在，由于 u 非常数，我们有 $|u(0)| < 1$。因此，

$$\inf \sigma(S_u^* S_u) = |u(0)|^2, \qquad \inf \sigma(S_u S_u^*) = |u(0)|^2.$$

由于 $m(S_u)^2 = \inf \sigma(S_u^* S_u)$ 且 $m(S_u^*)^2 = \inf \sigma(S_u S_u^*)$，我们得出

$$m(S_u) = |u(0)| = m(S_u^*).$$

最后，由 (2.2)，

$$S_u^* S_u (S^* u) = (1 - \|S^* u\|^2)\, S^* u = |u(0)|^2\, S^* u,$$

因此 $|u(0)|^2$ 是 $S_u^* S_u$ 的特征值。由此，根据 [11, 命题 3.1] 和 [12, 命题 3.2]，S_u 取得其最小模。同理，

$$S_u S_u^* (k_0^u) = (1 - \|k_0^u\|^2)\, k_0^u = |u(0)|^2\, k_0^u,$$

因此 $|u(0)|^2$ 是 $S_u S_u^*$ 的特征值，因此，S_u^* 取得其最小模。

□

3.2. **对偶压缩移位的最小模**。设 u 是非常数内函数。回顾一下，符号为 $\varphi \in L^\infty$ 的对偶截断 Toeplitz 算子（ DTTO ）为

$$D_\varphi = (I - P_{\mathcal{K}_u})\, M_\varphi|_{\mathcal{K}_u^\perp},$$

作用于 $\mathcal{K}_u^\perp = uH^2 \oplus H^2_-$。在本小节中，我们考虑特征符号$\varphi(z) = z$。

引理 3.6. 设 Q: $H^2_- \to H^2_-$ 定义为

$$Qg = P_-(zg), \qquad g \in H^2_-.$$

于是，Q 是一个部分等距，且 $N(Q) =$ 张成$\{\bar{z}\}$. 因此，Q 的约化最小模等于1。

证明。由于 $H^2_- = \overline{zH^2}$，每个 $g \in H^2_-$ 都可以进行傅里叶展开

$$g = \sum_{n\geq 1} a_n \bar{z}^n \quad \text{with} \qquad \|g\|^2 = \sum_{n\geq 1} |a_n|^2.$$

两边乘以 z，得到

$$zg = \sum_{n\geq 1} a_n \bar{z}^{(n-1)} = a_1 + \sum_{n\geq 2} a_n \bar{z}^{(n-1)}.$$

由于 P_- 是到 H^2_-上的正交投影，我们得到

$$Qg = P_-(zg) = \sum_{n\geq 2} a_n \bar{z}^{(n-1)}.$$

由此可知，$Qg = 0$ 当且仅当对所有 $n \geq 2$都有 $a_n = 0$，也就是说，$g = a_1\bar{z}$。因此，$N(Q) =$ 张成 $\{\bar{z}\}$。

现在假设 $g \perp \bar{z}$。那么 $a_1 = 0$，因此

$$\|Qg\|^2 = \sum_{n\geq 2} |a_n|^2 = \sum_{n\geq 1} |a_n|^2 = \|g\|^2.$$

因此，Q 是 $N(Q)^\perp$上的等距算子。特别地，Q 是一个部分等距算子（即在 $N(Q)^\perp$上为等距算子的算子）。

由于对于所有 $g \in N(Q)^\perp$，$\|Qg\| = \|g\|$，我们得到 $\gamma(Q) = 1$。 □

命题 3.7. 设 $\widetilde{D_u} = \begin{pmatrix} S & H^*_{u\bar{z}} \\ 0 & Q \end{pmatrix}$ 作用于 $H^2 \oplus H^2_-$，其中 S 是作用于 H^2 上的单侧移位，且 $Qg = P_-(zg)$ 作用于 H^2_-。则

$$N(\widetilde{D_u}) = \begin{cases} \{0\} \oplus \operatorname{span}\{\bar{z}\}, & \text{if } u(0) = 0, \\ \{0\}, & \text{if } u(0) \neq 0. \end{cases}$$

证明。设 $f \oplus g \in H^2 \oplus H^2_-$。则 $f \oplus g \in N(\widetilde{D_u})$ 当且仅当

$$Sf + H^*_{u\bar{z}} g = 0 \quad \text{and} \quad Qg = 0.$$

由引理 3.6

$$N(Q) = \operatorname{span}\{\bar{z}\}.$$

现在我们考虑两种涵盖所有可能性的情形。

情形 1： $u(0) = 0$。在这种情形下 $H^*_{u\bar{z}} = 0$，因此核方程化为

$$Sf = 0 \quad \text{and} \quad Qg = 0.$$

由于 S 在 H^2上是单射，我们得到 $f = 0$，而 $g \in N(Q) =$ 张成$\{\bar{z}\}$。因此

$$N(\widetilde{D_u}) = \{0\} \oplus \operatorname{span}\{\bar{z}\}.$$

情形 2： $u(0) \neq 0$。由 [5, 定理 4.2], 可得

$$H^*_{u\bar{z}} = \overline{u(0)}(1 \otimes \bar{z}).$$

由 $Qg = 0$ 可得，对于某个 $c \in \mathbb{C}$，有 $g = c\bar{z}$。于是

$$H^*_{u\bar{z}} g = \overline{u(0)}\, \langle c\bar{z}, \bar{z}\rangle\, 1 = \overline{u(0)}\, c.$$

第一个核方程变为

$$Sf + \overline{u(0)}\, c = 0.$$

由于 $Sf \in zH^2$ 的常数项为零，这个等式迫使 $c = 0$。因此 $g = 0$, $\widetilde{\ }$，进而 $Sf = 0$ 推出 $f = 0$。于是 $N(D_u) = \{0\}$。

结论由此得出。 □

定理 3.8。设 u 是一个非常数内函数。那么

$$m(D_u) = \begin{cases} 0, & u(0) = 0, \\ |u(0)|, & u(0) \neq 0, \end{cases}$$

并且在这两种情况下， D_u 都达到其最小模。

证明。由引理 3.6 可得 $N(Q) = \mathbb{C}\bar{z}$。此外， Q 是 $N(Q)^\perp$上的等距算子。由 [5, 定理 4.2], , 伴随汉克尔算子 $H^*_{u\bar{z}}$ 满足

$$H^*_{u\bar{z}} \equiv 0 \text{ if } u(0) = 0, \qquad H^*_{u\bar{z}} = \overline{u(0)}(1 \otimes \bar{z}) \text{ if } u(0) \neq 0.$$

在后一种情形下 $H^*_{u\bar{z}}$ 是秩一的，且

$$H^*_{u\bar{z}} g = \overline{u(0)}\, \langle g, \bar{z} \rangle\, 1, \qquad g \in H^2_-.$$

$\widetilde{\ }$**情形 1：** $u(0) = 0$。于是 $H^*_{u\bar{z}} \equiv 0$，因此 $D_u = S \oplus Q$。由命题 3.7，$\widetilde{\ }$ $N(D_u) \neq \{0\}$，从而 $m(D_u) = 0$。事实上，对于 $x = 0 \oplus \bar{z}$，有 $\|x\| = 1$ 且

$$\widetilde{D_u} x = 0 \oplus Q\bar{z} = 0.$$

情形 2： $u(0) \neq 0$。令

$$\alpha := u(0) \text{ and } B := H^*_{u\bar{z}} = \overline{\alpha}(1 \otimes \bar{z}).$$

设 $e := \bar{z} \in H^2_-$。则 $\|e\| = 1$ 且 $e \in N(Q)$。此外， $Be = \alpha$。 $\bar{}$

对于 $f \in H^2$，有

$$\widetilde{D_u}(f \oplus e) = (Sf + Be) \oplus Qe = (Sf + \overline{\alpha}) \oplus 0.$$

由于 $R(S) = zH^2$ 且 $1 \perp zH^2$，可得

$$\|Sf + \overline{\alpha}\|^2 = \|Sf\|^2 + |\alpha|^2 = \|f\|^2 + |\alpha|^2.$$

因此，

$$\frac{\|\widetilde{D_u}(f \oplus e)\|^2}{\|(f \oplus e)\|^2} = \frac{\|f\|^2 + |\alpha|^2}{\|f\|^2 + 1}.$$

由于 $0 < |\alpha| = |u(0)| < 1$，我们有

$$\frac{\|f\|^2 + |\alpha|^2}{\|f\|^2 + 1} - |\alpha|^2 = \frac{\|f\|^2 + |\alpha|^2 - |\alpha|^2(\|f\|^2 + 1)}{\|f\|^2 + 1} = \frac{(1 - |\alpha|^2)\|f\|^2}{\|f\|^2 + 1} \geq 0.$$

因此 $\frac{\|f\|^2 + |\alpha|^2}{\|f\|^2 + 1} \geq |\alpha|^2$，从而对于 $f \oplus e \neq 0$，我们有

$$\frac{\|\widetilde{D_u}(f \oplus e)\|}{\|f \oplus e\|} \geq |\alpha|, \qquad \text{for all } f \in H^2.$$

$\widetilde{\ }$特别地，取 $f = 0$ 得到 $\|0 \oplus e\| = 1$ 以及 $\|D_u(0 \oplus e)\| = |\alpha|$。因此

$$m(\widetilde{D_u}) \leq \|\widetilde{D_u}(0 \oplus e)\| = |\alpha|. \tag{3.1}$$

现在令$f \oplus g \in H^2 \oplus H^2_-$，其中 $f \oplus g \neq 0$。将$H^2_- = N(Q) \oplus N(Q)^\perp$分解，并把 g 写成

$$g = ce + h, \text{ where } c \in \mathbb{C},\, h \in N(Q)^\perp.$$

于是 $Qe = 0$ 与 $\|Qh\| = \|h\|$，而 $Bh = \alpha\langle h, \vec{e}\rangle\, 1 = 0$ 与 $B(ce) = \alpha c$。因此我们得到

$$\widetilde{D_u}(f \oplus g) = (Sf + \overline{\alpha}c) \oplus Qh.$$

因此，利用 $Sf \perp 1$,

$$\|\widetilde{D_u}(f \oplus g)\|^2 = \|f\|^2 + |\alpha|^2|c|^2 + \|h\|^2, \qquad \|(f \oplus g)\|^2 = \|f\|^2 + |c|^2 + \|h\|^2.$$

令 $A := \|f\|^2 + \|h\|^2 > 0$，我们得到

$$\frac{\|\widetilde{D_u}(f \oplus g)\|^2}{\|f \oplus g\|^2} = \frac{A + |\alpha|^2|c|^2}{A + |c|^2} = |\alpha|^2 + \frac{A(1 - |\alpha|^2)}{A + |c|^2} \geq |\alpha|^2,$$

由于 $|\alpha| = |u(0)| < 1$。因此

$$m(\widetilde{D_u}) \geq |\alpha|. \tag{3.2}$$

$\widetilde{\ }$将 (3.1) 与 (3.2) 结合可得 $m(D_u) = |\alpha| = |u(0)|$。

最后，单位向量 $0 \oplus e$ 满足

$$\|\widetilde{D_u}(0 \oplus e)\| = \|\overline{\alpha} \oplus 0\| = |\alpha| = m(\widetilde{D_u}).$$

$\widetilde{\ }$因此在每种情形下， D_u 都达到其最小模。由于最小值达到性在酉等价下保持不变，由命题2.1与 (2.6)， D_u 是最小值达到的。□

注 3.9。上述证明完全依赖于最小模的定义。将缺陷恒等式 (2.8) 与引理 3.1相结合，可以得到另一种更简短的证明。

4. Minimum modulus of normal DTTOs

对于非常数内函数 u 以及 $\varphi \in L^\infty$， $\mathcal{K}_u^\perp$ 上的对偶截断 Toeplitz 算子 D_φ 满足 $\|D_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$ 最小模由下式给出

$$m(D_\varphi) := \inf\left\{\|D_\varphi x\| :\ x \in \mathcal{K}_u^\perp,\ \|x\| = 1\right\}.$$

回顾一下， $m(D_\varphi) > 0$ 当且仅当 D_φ 有下界。由于 D_φ 关于共轭 C_u是复对称的，因此算子 D_φ 有下界当且仅当 D_φ 可逆（参见命题 3.4）。

命题 4.1. 设 u 为非常数内函数，且 D_φ 是 $\mathcal{K}_u^\perp$ 上的正规对偶截断 *Toeplitz* 算子，其符号为 $\varphi \in L^\infty$。那么最小模 $m(D_\varphi)$ 满足以下不等式：

$$\operatorname{dist}\big(0, \operatorname{convex}(\operatorname{ess\ ran}(\varphi))\big) \leq m(D_\varphi) \leq \operatorname{ess\ inf}_{z\in\mathbb{T}}|\varphi(z)|. \tag{4.1}$$

证明. 由于 D_φ 是正规的，其最小模等于原点到其谱的距离：

$$m(D_\varphi) = \operatorname{dist}(0, \sigma(D_\varphi)). \tag{4.2}$$

我们利用对偶截断 Toeplitz 算子的谱包含关系。首先，根据 [16,推论 4.3]，我们有

$$\operatorname{ess\ ran}(\varphi) \subseteq \sigma(D_\varphi).$$

其次，根据 [16, 定理 4，5], 谱包含于本质值域的凸包中

$$\sigma(D_\varphi) \subset \operatorname{convex}(\operatorname{ess\ ran}(\varphi)).$$

由于 ess ran(φ) $\subseteq \sigma(D_\varphi)$，原点到谱的距离不会超过原点到子集 ess ran(φ) 的距离。因此

$$m(D_\varphi) \leq \operatorname{dist}(0, \text{ess ran}(\varphi)) = \text{ess inf}_{z\in\mathbb{T}}|\varphi(z)|.$$

由于 $\sigma(D_\varphi)$ $\subset$convex(本质值域(φ))，原点到谱的距离必定不小于原点到包含集合 convex(本质值域(φ)) 的距离。因此

$$m(D_\varphi) \geq \operatorname{dist}\big(0, \text{convex}(\text{ess ran}(\varphi))\big).$$

结合这些不等式，证明即告完成。 □

注 4.2. 对于 $\varphi \in L^\infty$，如果 D_φ 是自伴的，那么 φ 是实值函数。因此，convex(本质值域(φ)) $=$[本性下确界 φ,ess sup φ]，所以 dist(0,convex(本质值域(φ))) =本性下确界$_{z\in\mathbb{T}}|\varphi(z)|$。在这种情况下，由命题 4.1 可得

$$m(D_\varphi) = \text{ess inf}_{z\in\mathbb{T}}|\varphi(z)|.$$

例 4.3. 我们将命题 4.1 应用于符号

$$\varphi(z) = \psi(z) + \beta,$$

其中，$\beta \in \mathbb{C}$ 和 ψ 定义为

$$\psi(e^{it}) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq t < \pi, \\ -1 & \text{if } \pi \leq t < 2\pi. \end{cases}$$

φ的本质值域恰由两个点组成

$$\text{ess ran}(\varphi) = \{\beta - 1, \beta + 1\}.$$

因此，本质下确界是这两个点的模的最小值

$$\text{ess inf}_{z\in\mathbb{T}}|\varphi(z)| = \min\{|\beta - 1|, |\beta + 1|\}.$$

这两个点的凸包是连接它们的线段，也就是说，

$$\text{convex}(\text{ess ran}(\varphi)) = [\beta - 1, \beta + 1].$$

根据命题 4.1，最小模满足以下界

$$\operatorname{dist}\big(0, [\beta - 1, \beta + 1]\big) \leq m(D_\varphi) \leq \min\{|\beta - 1|, |\beta + 1|\}.$$

特例： 设 $\beta = 3i$。上界为

$$\text{ess inf}|\varphi| = \min\{|3i - 1|, |3i + 1|\} = \sqrt{10}.$$

对于下界，该线段连接 $-1 + 3i$ 与 $1 + 3i$。距原点最近的点是中点 $3i$。因此

$$\operatorname{dist}\big(0, \text{convex}(\text{ess ran}(\varphi))\big) = |3i| = 3.$$

该不等式给出 $3 \leq m(D_\varphi) \leq \sqrt{10}$。

命题 4.4. 设 D_φ 是以$\varphi \in L^\infty$为符号的正规对偶截断托普利茨算子。若本质值域本质值域(φ) 为凸集（例如，当 φ 连续时），则最小模恰好是该符号的本质下确界

$$m(D_\varphi) = \text{ess inf}_{z\in\mathbb{T}}|\varphi(z)|.$$

在这种情况下，D_φ 有下界，当且仅当 φ 在 L^∞中可逆。

证明。 对于任意正规对偶截断托普利茨算子，其最小模由原点到谱 $\sigma(D_\varphi)$的距离决定。由于本质值域 ess ran(φ)是凸集， $\sigma(D_\varphi)$ =ess ran(φ)（参见 [16,推论 4.6]）。因此，

$$m(D_\varphi) = \operatorname{dist}(0, \sigma(D_\varphi)) = \operatorname{dist}\big(0, \operatorname{ess\ ran}(\varphi)\big) = \inf\{|\lambda| : \lambda \in \operatorname{ess\ ran}(\varphi)\}.$$

众所周知，本质值域中各值的模的下确界等于该函数的本质下确界

$$\inf\{|\lambda| : \lambda \in \operatorname{ess\ ran}(\varphi)\} = \operatorname{ess\ inf}_{z\in\mathbb{T}} |\varphi(z)|.$$

因此， $m(D_\varphi)$ =本质下确界$_{z\in\mathbb{T}}|\varphi(z)|$。 □

例 4.5。 考虑符号 $\varphi(z) = z + \bar{z} + 2i$。注意， $z + \bar{z} = 2\Re(z)$ 是定义在 $\mathbb{T}$上的实值连续函数。因此， φ 具有如下形式

$$\varphi = \psi + \beta, \quad \text{where } \psi(z) = 2\Re(z) \text{ is real, and } \beta = 2i.$$

根据正规对偶截断 Toeplitz 算子的刻画， D_φ 是正规算子。

首先注意到， φ 在单位圆上的本质值域是区间 $[-1, 1]$ 在映射 $t \mapsto 2t + 2i$下的像:

$$\operatorname{ess\ ran}(\varphi) = \{2x + 2i : x \in [-1, 1]\}.$$

最小模为

$$m(D_\varphi) = \operatorname{dist}(0, \sigma(D_\varphi)) = |2i| = 2.$$

应用命题 4.4 中所述的公式，我们还可得到

$$m(D_\varphi) = \operatorname{ess\ inf}_{z\in\mathbb{T}} |z + \bar{z} + 2i| = \operatorname{ess\ inf}_{x\in[-1,1]} |2x + 2i|.$$

模为 $\sqrt{(2x)^2 + 2^2} = \sqrt{4x^2 + 4}$。当 $x = 0$ 时，该函数取得最小值，从而得到

$$\sqrt{0 + 4} = 2.$$

由此得出 $m(D_\varphi) = 2$，验证了命题 4.4。

5. DTTOs with unimodular symbols

若 $\varphi \in L^\infty$ 几乎处处满足 $|\varphi| = 1$ ，则乘法算子 M_φ 是等距算子。根据分解 $L^2 = \mathcal{K}_u \oplus \mathcal{K}_u^\perp$，乘法算子 M_φ 具有如下分块矩阵形式

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} A_\varphi & B_{\bar{\varphi}}^* \\ B_\varphi & D_\varphi \end{pmatrix}.$$

这里，$A_\varphi = P_{\mathcal{K}_u} M_\varphi|_{\mathcal{K}_u}$ 和 $B_\varphi = P_{\mathcal{K}_u^\perp} M_\varphi|_{\mathcal{K}_u}$。

由于 $M_\varphi^* M_\varphi = I$，我们有

$$\begin{pmatrix} A_\varphi^* & B_\varphi^* \\ B_{\bar{\varphi}} & D_\varphi^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\varphi & B_{\bar{\varphi}}^* \\ B_\varphi & D_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{\mathcal{K}_u} & 0 \\ 0 & I_{\mathcal{K}_u^\perp} \end{pmatrix}.$$

我们得到

$$A_\varphi^* A_\varphi + B_\varphi^* B_\varphi = I_{\mathcal{K}_u},$$

or

$$B_\varphi^* B_\varphi = I_{\mathcal{K}_u} - A_\varphi^* A_\varphi. \tag{5.1}$$

取范数可得

$$\|B_\varphi\|^2 = \|B_\varphi^* B_\varphi\| = \|I_{\mathcal{K}_u} - A_\varphi^* A_\varphi\|.$$

但我们有

$$\|I_{\mathcal{K}_u} - A_\varphi^* A_\varphi\| = 1 - \inf_{\|x\|=1} \langle A_\varphi^* A_\varphi x, x\rangle = 1 - m(A_\varphi)^2.$$

因此,

$$\|B_\varphi\| = \sqrt{1 - m(A_\varphi)^2}. \tag{5.2}$$

对于任意 $f \in L^2$，我们有如下恒等式

$$\|f\|^2 = \|P_{\mathcal{K}_u} f\|^2 + \|(I - P_{\mathcal{K}_u}) f\|^2. \tag{5.3}$$

以下命题在诱导符号 φ 为模为一的条件下，精确地揭示了对偶截断 Toeplitz 算子 D_φ 的最小模与算子 $B_{\bar\varphi}$ 的范数之间的联系。

命题 5.1。 设 $\varphi \in L^\infty$ 在 $\mathbb{T}$上几乎处处满足 $|\varphi| = 1$ 。则

$$m(D_\varphi) = \sqrt{1 - \|B_{\bar\varphi}\|^2}. \tag{5.4}$$

证明。 设 $h \in \mathcal{K}_u^\perp$满足 $\|h\| = 1$。则

$$\begin{aligned} \|D_\varphi h\|^2 &= \|(I - P_{\mathcal{K}_u})\varphi h\|^2 \\ &= \|\varphi h\|^2 - \|P_{\mathcal{K}_u}\varphi h\|^2 \\ &= 1 - \|B_{\bar\varphi}^* h\|^2. \end{aligned}$$

因此 $\inf_{\|h\|=1} \|D_\varphi h\|^2 = 1 - \sup_{\|h\|=1} \|B_{\bar\varphi}^* h\|^2$，即 $m(D_\varphi)^2 = 1 - \|B_{\bar\varphi}^*\|^2$。因此,

$$m(D_\varphi) = \sqrt{1 - \|B_{\bar\varphi}\|^2}. \tag{5.5}$$ □

注5.2。 根据命题 5.1及关系式 (5.2)，对于模为一的 $\varphi \in L^\infty$，我们得到 $m(A_\varphi) = m(D_{\bar\varphi}) = m(D_\varphi)$。

下面的命题确立了截断托普利茨算子（截断 Toeplitz 算子）与其对偶对应之间的基本结构联系。在研究模型空间上的算子时，空间 $\mathcal{K}_u$ 与其正交补 $\mathcal{K}_u^\perp$ 之间的相互作用通常较为复杂；然而，该结果表明，通过等距映射 M_u 及其伴随算子 $M_{\bar u}$将对偶截断 Toeplitz 算子 D_φ拉回到模型空间后，它可以完全表示为作用于 $\mathcal{K}_u$上的算子。特别地，对于解析符号，该关系化为一个直接等式，从而能够将谱性质和范数性质从对偶空间转移回更易处理的截断 Toeplitz 算子。这一对应关系是刻画最小模以及同时出现这两类算子的块算子的可逆性的关键工具。

命题 5.3。 设 u 是一个非常数内函数，且 $\varphi \in L^\infty$。则下列恒等式在 $\mathcal{K}_u$ 上成立:

$$P_{\mathcal{K}_u} M_{\bar u} D_\varphi M_u|_{\mathcal{K}_u} = A_\varphi - A_{\bar u} A_{\varphi u}. \tag{5.6}$$

特别地，如果 $\varphi \in H^\infty$，那么 $A_{\varphi u} = 0$ 且

$$P_{\mathcal{K}_u} M_{\bar u} D_\varphi M_u|_{\mathcal{K}_u} = A_\varphi. \tag{5.7}$$

证明。设 $f \in \mathcal{K}_u$。由于 $uf \in uH^2 \subset \mathcal{K}_{\bar{u}}^{\perp}$，我们有

$$D_{\varphi}(uf) = P_{\mathcal{K}_{\bar{u}}^{\perp}}(\varphi\, uf) = (I - P_{\mathcal{K}_u})(\varphi\, uf).$$

应用 $M_{\bar{u}}$，然后投影到 $\mathcal{K}_u$，得到

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{K}_u} M_{\bar{u}} D_{\varphi} M_u f &= P_{\mathcal{K}_u} M_{\bar{u}} \left(\varphi\, uf\right) - P_{\mathcal{K}_u} M_{\bar{u}} P_{\mathcal{K}_u} \left(\varphi\, uf\right) \\ &= P_{\mathcal{K}_u} \left((\bar{u}\,\varphi\, u) f\right) - P_{\mathcal{K}_u} M_{\bar{u}} \left(A_{\varphi u} f\right) \\ &= P_{\mathcal{K}_u} \left(\varphi f\right) - P_{\mathcal{K}_u} M_{\bar{u}} \left(A_{\varphi u} f\right). \end{aligned}$$

根据定义，第一项等于 $A_{\varphi} f$。由于 $A_{\varphi u} f \in \mathcal{K}_u$，第二项可以写成

$$P_{\mathcal{K}_u} M_{\bar{u}} (A_{\varphi u} f) = A_{\bar{u}} (A_{\varphi u} f) = (A_{\bar{u}} A_{\varphi u}) f.$$

这就证明了 (5.6)。

若 $\varphi \in H^{\infty}$，则 $\varphi u \in uH^{\infty}$，因此对每个 $f \in \mathcal{K}_u$ 均有 $(\varphi u) f \in uH^2$，从而推出$A_{\varphi u} = 0$。故 (5.6) 化为 (5.7)。□

引理 5.4. 设 u 为非常数内函数。考虑由 $B_{\varphi} f = P_{\mathcal{K}_u^{\perp}}(\varphi f)$ $f \in \mathcal{K}_u$ 定义的算子 $B_{\varphi}\colon \mathcal{K}_u \to \mathcal{K}_u^{\perp}$。

(1) 对任意符号 $\varphi \in L^{\infty}$， B_{φ} 具有正交分解

$$B_{\varphi} = M_u\, T_{\bar{u}\varphi}|_{\mathcal{K}_u} + H_{\varphi}|_{\mathcal{K}_u}\,, \tag{5.8}$$

其中 $T_{\bar{u}\varphi}$ 是以 $\bar{u}\varphi$ 为符号的托普利茨算子， H_{φ} 是以 φ为符号的汉克尔算子。因此，范数由下式给出

$$\|B_{\varphi}\| = \sup_{f \in \mathcal{K}_u, \|f\|=1} \sqrt{\|T_{\bar{u}\varphi} f\|^2 + \|H_{\varphi} f\|^2}. \tag{5.9}$$

(2) 若 $\varphi \in H^{\infty}$，则 $H_{\varphi} = 0$，且 B_{φ} 的值域包含于 uH^2。该表达式简化为

$$B_{\varphi} = M_u\, T_{\bar{u}\varphi}|_{\mathcal{K}_u}\,. \tag{5.10}$$

In particular, $\|B_{\varphi}\| = \left\| T_{\bar{u}\varphi}|_{\mathcal{K}_u} \right\|$, *and* $B_{\varphi} = 0$ *if and only if* $\varphi \mathcal{K}_u \subset \mathcal{K}_u$ *(equivalently,* φ *is constant).*

证明。为证明 (1)，设 $f \in \mathcal{K}_u$。由于 $\mathcal{K}_u^{\perp} = uH^2 \oplus H^2_{-}$，我们记 $P_{\mathcal{K}_u^{\perp}} = P_{uH^2} + P_{-}$，从而

$$B_{\varphi} f = P_{uH^2}(\varphi f) + P_{-}(\varphi f).$$

对于第一项，利用恒等式 $P_{uH^2} = M_u P M_{\bar{u}}$，我们得到

$$P_{uH^2}(\varphi f) = M_u P(\bar{u}\varphi f) = M_u T_{\bar{u}\varphi} f.$$

对于第二项，根据定义， $P_{-}(\varphi f) = H_{\varphi} f$。将这些代回后得到分解式 (5.8)。由于 uH^2 和 H^2_{-} 正交，且 M_u 是等距的，我们有

$$\|B_{\varphi} f\|^2 = \|M_u T_{\bar{u}\varphi} f\|^2 + \|H_{\varphi} f\|^2 = \|T_{\bar{u}\varphi} f\|^2 + \|H_{\varphi} f\|^2.$$

对单位向量取上确界，得到 (5.9)。

为证明 (2)，假设 $\varphi \in H^{\infty}$。那么 $\varphi f \in H^2$，所以 $P_{-}(\varphi f) = 0$，这意味着 $H_{\varphi} f = 0$ 和 $B_{\varphi} f \in uH^2$。因此，分解 (5.8) 化为 (5.10)。范数等式立即成立。最后， $B_{\varphi} = 0$ 等价于对所有 $f \in \mathcal{K}_u$， $P_{uH^2}(\varphi f) = 0$，这意味着 $\varphi f \in H^2 \cap (uH^2)^{\perp} = \mathcal{K}_u$，也就是说，$\varphi \mathcal{K}_u \subset \mathcal{K}_u$ 等价于 φ 为常数（参见 [14, 定理 6.12]）。□

定理 5.5. 设 u 为非常数内函数，且 $\varphi \in L^\infty$ 为单模函数。 D_φ 的最小模由下式给出

$$m(D_\varphi) = \sqrt{1 - \|B_{\bar{\varphi}}\|^2} = \sqrt{1 - \sup_{f \in \mathcal{K}_u, \|f\|=1} (\|T_{\overline{u\varphi}} f\|^2 + \|H_{\bar{\varphi}} f\|^2)}. \tag{5.11}$$

此外， $m(D_\varphi)$满足

$$\begin{aligned} &\sqrt{\max\left(0, 1 - \left(\| T_{\overline{u\varphi}}|_{\mathcal{K}_u} \|^2 + \| H_{\bar{\varphi}}|_{\mathcal{K}_u} \|^2\right)\right)} \\ &\leq m(D_\varphi) \leq \min\left(\sqrt{1 - \| T_{\overline{u\varphi}}|_{\mathcal{K}_u} \|^2},\ \sqrt{1 - \| H_{\bar{\varphi}}|_{\mathcal{K}_u} \|^2}\right). \end{aligned} \tag{5.12}$$

证明。 由命题 5.1，我们有

$$m(D_\varphi) = \sqrt{1 - \|B_{\bar{\varphi}}\|^2}.$$

由引理 5.4， 将公式应用于符号 $\bar{\varphi}$，我们 have

$$\|B_{\bar{\varphi}}\|^2 = \sup_{f \in \mathcal{K}_u, \|f\|=1} \left(\|T_{\bar{u}\bar{\varphi}} f\|^2 + \|H_{\bar{\varphi}} f\|^2\right).$$

由于 $\bar{u}\bar{\varphi} = \overline{u\varphi}$， 我们直接代入即可得到精确公式 (5.11)。

为推导下界，我们利用这样一个性质：和的上确界不超过各项上确界之和

$$\sup_{f \in \mathcal{K}_u, \|f\|=1} \left(\|T_{\overline{u\varphi}} f\|^2 + \|H_{\bar{\varphi}} f\|^2\right) \leq \sup_{f \in \mathcal{K}_u, \|f\|=1} \|T_{\overline{u\varphi}} f\|^2 + \sup_{f \in \mathcal{K}_u, \|f\|=1} \|H_{\bar{\varphi}} f\|^2.$$

这意味着

$$\|B_{\bar{\varphi}}\|^2 \leq \|T_{\overline{u\varphi}}|_{\mathcal{K}_u}\|^2 + \|H_{\bar{\varphi}}|_{\mathcal{K}_u}\|^2.$$

将此不等式代入表达式 $m(D_\varphi) = \sqrt{1 - \|B_{\bar{\varphi}}\|^2}$，即可建立下界。（我们取与 0 的最大值，以考虑范数平方之和超过 1 的情形。）

为推导上界，我们注意到，对于任意非负函数 $F(f)$ 和 $G(f)$，有

$$\sup_f (F(f) + G(f)) \geq \sup_f F(f) \quad \text{and} \quad \sup_f (F(f) + G(f)) \geq \sup_f G(f).$$

因此， $\|B_{\bar{\varphi}}\|^2 \geq \|T_{u\varphi}|_{\mathcal{K}_{\overline{u}}}\|^2$ 和 $\|B_{\bar{\varphi}}\|^2 \geq \|H_{\bar{\varphi}}|_{\mathcal{K}_u}\|^2$。于是

$$m(D_\varphi) \leq \sqrt{1 - \| T_{\overline{u\varphi}}|_{\mathcal{K}_u} \|^2} \quad \text{and} \quad m(D_\varphi) \leq \sqrt{1 - \| H_{\bar{\varphi}}|_{\mathcal{K}_u} \|^2}.$$

取这两个不等式中的较小值，即得到 (5.12) 的上界。 □

例5.6. 考虑内函数 $u(z) = z^2$ 和符号 $\varphi(z) = z$。相应的模型空间为 $\mathcal{K}_u = \text{span}\{1, z\}$。注意， $\varphi \in L^\infty$ 且 $|\varphi| = 1$几乎处处成立于 $\mathbb{T}$上。若 $f \in \mathcal{K}_u$ 是一个单位向量，则 $f(z) = c_0 + c_1 z$，其中 $|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$，且 $c_0,\ c_1 \in \mathbb{C}$。现在我们计算 $H_{\bar{\varphi}} f = P_-(\bar{z}(c_0 + c_1 z)) = P_-(c_0 \bar{z} + c_1) = c_0 \bar{z}$。因此， $\|H_{\bar{\varphi}} f\|^2 = |c_0|^2$。现在 $u\varphi = \bar{z}^3$。于是 $T_{u\varphi} f = P(\bar{z}^3(c_0 + c_1 z)) = P(c_0 \bar{z}^3 + c_1 \bar{z}^2) = 0$。故， $\|T_{u\varphi} f\|^2 = 0$。

将这些代入公式，得到

$$m(D_u) = \sqrt{1 - \sup_{|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1} (|c_0|^2 + 0)} = \sqrt{1 - 1} = 0.$$

例 5.7. 考虑内函数 $u(z) = z^2$ （因此 $\mathcal{K}_u = \operatorname{span}\{1, z\}$）以及由下式定义的幺模符号 $\varphi(z)$

$$\varphi(z) = \bar{z}\left(\frac{z-\alpha}{1-\alpha z}\right), \quad \text{where } \alpha \in (0,1).$$

我们计算 $m(D_\varphi)$。

Now

$$\bar{\varphi}(z) = z\left(\frac{1-\alpha z}{z-\alpha}\right).$$

对于 $|z| = 1 > \alpha$，我们有展开式 $\frac{1}{z-\alpha} = \frac{z}{1-\alpha\bar{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \bar{z}^{k+1}$。因此

$$\bar{\varphi}(z) = z(1-\alpha z)\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \bar{z}^{k+1} = (z - \alpha z^2)(\bar{z} + \alpha\bar{z}^2 + \alpha^2\bar{z}^3 + \cdots).$$

这意味着

$$\bar{\varphi}(z) = \underbrace{-\alpha z + (1-\alpha^2)}_{\text{Analytic part } (\in H^2)} + \underbrace{(1-\alpha^2)\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \bar{z}^k}_{\text{Co-analytic part } (\in H^2_-)}.$$

现在，设 $f \in \mathcal{K}_u$ 是单位向量 $f(z) = c_0 + c_1 z$，满足 $|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$。

$$H_{\bar{\varphi}}(c_0 + c_1 z) = P_-\left[\left((1-\alpha^2)\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \bar{z}^k\right)(c_0 + c_1 z)\right].$$

注意到

$$H_{\bar{\varphi}}(1) = (1-\alpha^2)(\alpha\bar{z} + \alpha^2\bar{z}^2 + \cdots) = S_0,$$
$$H_{\bar{\varphi}}(z) = P_-(1-\alpha^2)(\alpha + \alpha^2\bar{z} + \cdots) = (1-\alpha^2)(\alpha^2\bar{z} + \alpha^3\bar{z}^2 + \cdots) = \alpha S_0.$$

因此， $H_{\bar{\varphi}} f = (c_0 + \alpha c_1) S_0$。由此

$$\|H_{\bar{\varphi}} f\|^2 = |c_0 + \alpha c_1|^2 \|S_0\|^2, \tag{5.13}$$

其中

$$\|S_0\|^2 = (1-\alpha^2)^2 \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha^2)^k = (1-\alpha^2)^2 \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} = \alpha^2(1-\alpha^2).$$

Next

$$\overline{u\varphi} = \bar{z}^2[-\alpha z + (1-\alpha^2) + \cdots] = -\alpha\bar{z} + (1-\alpha^2)\bar{z}^2 + \cdots \in H^2_-.$$

因此， $T_{\overline{u\varphi}}(1) = P(\overline{u\varphi}) = 0$，并且

$$T_{\overline{u\varphi}}(z) = P(\overline{u\varphi} z) = P(-\alpha + (1-\alpha^2)\bar{z} + \cdots) = -\alpha.$$

所以 $T_{u\varphi} f = -\alpha c_1$。因此，

$$\|T_{\overline{u\varphi}} f\|^2 = \alpha^2 |c_1|^2. \tag{5.14}$$

因此，我们有如下最小模

$$m(D_\varphi) = \sqrt{1 - \sup_{|c_0|^2+|c_1|^2=1} (\alpha^2|c_1|^2 + |c_0 + \alpha c_1|^2 \alpha^2(1-\alpha^2))}.$$

例5.8。设 u 为非常数内函数，并考虑定义在 $\mathcal{K}_u^{\perp}$ 上、以 $\varphi = u$为符号的对偶截断托普利茨算子 D_{φ}。由于 u 是内函数，在$\mathbb{T}$上几乎处处有 $|\varphi| = 1$，满足模为一条件。我们应用定理 5.5 来计算$m(D_{\varphi})$。

$$m(D_{\varphi}) = \sqrt{1 - \|B_{\bar{u}}\|^2} = \sqrt{1 - \sup_{f \in \mathcal{K}_u, \|f\|=1} \left(\|T_{\overline{u^2}} f\|^2 + \|H_{\bar{u}} f\|^2\right)}.$$

设 $f \in \mathcal{K}_u = H^2 \cap (uH^2)^{\perp}$。由于 $u^2 H^2 \subset uH^2$，可得 $f \perp u^2 H^2$。由于M_u 是等距算子，我们有 $\langle \bar{u}^2 f,\ h\rangle = \langle f,\ u^2 h\rangle = 0$ 对所有 $h \in H^2$均成立。这意味着$\bar{u}^2 f \in H^2_-$，因此 $T_{u^2} f = P(\bar{u}^2 f) = 0$对所有 $f \in \mathcal{K}_u$均成立。接下来，对于任意满足$\|f\| = 1$的 $f \in \mathcal{K}_u$，我们有

$$\|H_{\bar{u}} f\|^2 = \|P_-(\bar{u} f)\|^2 = \|\bar{u} f\|^2 - \|P(\bar{u} f)\|^2 = 1 - \|P(\bar{u} f)\|^2 = 1.$$

因此，

$$m(D_{\varphi}) = \sqrt{1 - \sup_{f \in \mathcal{K}_u, \|f\|=1} (1 - \|P(\bar{u} f)\|^2)} = 0.$$

5.1. 一些特殊的符号类。在本小节中，我们给出符号 φ 满足特定结构条件时，对偶截断 Toeplitz 算子的最小模的显式公式。我们首先回顾 Toeplitz 算子及其核的标准性质。

命题 5.9。 [10, 命题 7。5] 设 $\varphi \in L^{\infty}$，且设 ψ、$\theta \in H^{\infty}$。则有以下代数恒等式：

(1) $T_{\theta} T_{\varphi} = T_{\theta\varphi}$;
(2) $T_{\varphi} T_{\psi} = T_{\varphi\psi}$.

命题5.10。 [14, 命题 5。8] 若 $\varphi \in H^{\infty} \setminus \{0\}$，且 η 是 φ 的内因子，则伴随算子的核满足 $N(T_{\varphi}^*) = \mathcal{K}_{\eta}$。

我们的主要关注点是利用定理 5.5 中推导出的公式，精确计算 $m(D_{\varphi})$。对于模为一的符号 φ，以及所有满足 $\|f\| = 1$的 $f \in \mathcal{K}_u$，并利用 $1 = \|\bar{\varphi} f\|^2 = \|T_{\bar{\varphi}} f\|^2 + \|H_{\bar{\varphi}} f\|^2$，有

$$\|T_{\overline{u\varphi}} f\|^2 + \|H_{\bar{\varphi}} f\|^2 = \|T_{\overline{u\varphi}} f\|^2 + 1 - \|T_{\bar{\varphi}} f\|^2. \tag{5.15}$$

以下推论刻画了一般界限退化为精确等式的情形。

推论5.11. 设 u 为非常数内函数，$\varphi \in L^{\infty}$ 为酉模的。以下等式成立：

(1) 若 φ 是共解析的（$\varphi = \bar{\psi}$ 对 $\psi \in H^{\infty}$而言），则 $m(D_{\bar{\psi}}) = \sqrt{1 - \| T_{\bar{u}\psi}|_{\mathcal{K}_u} \|^2}$。*(2)* 若 $T_{u\varphi}|_{\mathcal{K}_u} = 0$（例如，若 $u\varphi \in H^2$），则 $m(D_{\varphi}) = \sqrt{1 - \| H_{\bar{\varphi}}|_{\mathcal{K}_u} \|^2}$。*(3)* 若存在一个单位向量 $f_0 \in \mathcal{K}_u$，它同时是 $\|T_{u\varphi} f\|$ 和 $\|H_{\bar{\varphi}} f\|$的极大化向量，则

$$m(D_{\varphi}) = \sqrt{1 - \left(\| T_{\overline{u\varphi}}|_{\mathcal{K}_u} \|^2 + \| H_{\bar{\varphi}}|_{\mathcal{K}_u} \|^2\right)}.$$

证明。(1)：若 $\varphi = \psi$ 满足 $\psi \in H^\infty$，则 (5.11) 中汉克尔算子的符号为 $\bar{\varphi} = \psi$。由于 ψ 是解析的，$H_\psi = 0$，故得所求结果。

(2)：若 $T_{u\varphi}|_{\mathcal{K}_u} = 0$，则 (5.11) 中上确界的第一项为零。因此结论成立。

(3)：一般而言，$\sup(F+G) \le \sup F + \sup G$。然而，若存在一个 f_0，使得 $F(f_0) = \sup F$ 且 $G(f_0) = \sup G$，那么 $\sup(F+G) \ge F(f_0) + G(f_0) = \sup F + \sup G$。因此，不等式变为等式，且范数 $\|B_{\bar{\varphi}}\|^2$ 恰好等于受限算子的范数平方之和。□

现在我们考虑 $\varphi \in H^\infty$ 为模为一函数的情形。

推论 5.12. 设 φ 为一个内函数。那么，D_φ的最小模为

$$m(D_\varphi) = m\left(T_{\bar{\varphi}}|_{\mathcal{K}_u}\right). \tag{5.16}$$

此外，若 u 是 φ的内因子，则 $m(D_\varphi) = 0$。

证明. 由于 $\varphi \in H^\infty$，由命题5.9可得 $T_{u\varphi} = T^*_{u\bar{\varphi}} = T^*_{\bar{\varphi}} T^*_u$。对于任意$f \in \mathcal{K}_u$，有 $T^*_u f = P(\bar{u}f) = 0$。因此，对所有 $f \in \mathcal{K}_u$，都有 $T_{u\varphi} f = 0$。将其代入 (5.11)，得到

$$\begin{aligned} m(D_\varphi) &= \sqrt{1 - \sup_{f\in\mathcal{K}_u, \|f\|=1} (1 - \|T_{\bar{\varphi}} f\|^2)} \\ &= \sqrt{1 - \left(1 - \inf_{f\in\mathcal{K}_u, \|f\|=1} \|T_{\bar{\varphi}} f\|^2\right)} \\ &= \sqrt{\inf_{f\in\mathcal{K}_u, \|f\|=1} \|T_{\bar{\varphi}} f\|^2} = m\left(T_{\bar{\varphi}}|_{\mathcal{K}_u}\right). \end{aligned}$$

若 u 是 φ的内因子，由命题5.10可知 $T_{\bar{\varphi}}|_{\mathcal{K}_u} = 0$，因此$m(D_\varphi) = 0$。□

推论 5.13. 设 $\varphi \in L^\infty$ 为一个模为一函数。那么，$m(D_\varphi) = 1$ 当且仅当 φ 是一个模为一的常数。

证明。显然可得。 □

5.2. **的最小模** B_φ。本节致力于研究算子 B_φ 的最小模，其中 $\varphi \in L^\infty$ 是模为一函数；并研究 φ 为有界解析函数的情形。我们首先回顾关于解析符号的截断托普利茨算子范数的以下已知结果（参见定理 1.3 和公式 2.9，第 15] 页）。为完整起见，我们简要证明这一结果。

引理 5.14。设 u 为非常数内函数，且令 $\varphi \in H^\infty$。截断托普利茨算子 $A_\varphi : \mathcal{K}_u \to \mathcal{K}_u$ 定义为 $A_\varphi f = P_{\mathcal{K}_u}(\varphi f)$。则

$$\|A_\varphi\| = \|H_{\bar{u}\varphi}\| = \operatorname{dist}_{L^\infty}(\bar{u}\varphi, H^\infty). \tag{5.17}$$

特别地，$\|A_\varphi\| = 0$ 当且仅当 $\varphi \in uH^\infty$。

证明。令 $f \in \mathcal{K}_u$。由于 $H^2 = \mathcal{K}_u \oplus uH^2$，我们有 $P_{\mathcal{K}_u} = I_{H^2} - P_{uH^2}$。因此，

$$A_\varphi f = \varphi f - P_{uH^2}(\varphi f).$$

由于 $\varphi f \in H^2$，我们有

$$P_{uH^2}(\varphi f) = M_u P(\bar{u}\varphi f).$$

这表明

$$\begin{aligned} A_\varphi f &= u(\bar{u}\varphi f) - uP(\bar{u}\varphi f) \\ &= u\left(\bar{u}\varphi f - P(\bar{u}\varphi f)\right) \\ &= u\left((I-P)(\bar{u}\varphi f)\right). \end{aligned}$$

因此，

$$A_\varphi f = M_u H_{\bar{u}\varphi} f.$$

我们得出 $\|A_\varphi\| = \left\| H_{\bar{u}\varphi}|_{\mathcal{K}_u} \right\|$。汉克尔算子 $H_{\bar{u}\varphi}$ 在子空间 uH^2 上为零，因为若 $g = uh \in uH^2$，则 $\bar{u}\varphi g = \varphi h \in H^2$，从而 $P_-(\varphi h) = 0$。由于 $H_{\bar{u}\varphi}$ 在 H^2中 $\mathcal{K}_u$ 的正交补 $\mathcal{K}_u^\perp$ 上为零，我们有

$$\left\| H_{\bar{u}\varphi}|_{\mathcal{K}_u} \right\| = \|H_{\bar{u}\varphi}\|.$$

最后，Nehari定理给出 $\|H_{\bar{u}\varphi}\| = \text{dist}_{L^\infty}(\bar{u}\varphi, H^\infty)$。条件 $\|A_\varphi\|$ =0等价于 $\bar{u}\varphi \in H^\infty$，或 $\varphi \in uH^\infty$。□

命题 5.15。设 $\varphi \in L^\infty$ 满足 $|\varphi| = 1$几乎处处成立于 $\mathbb{T}$上。算子 B_φ 的最小模为

$$m(B_\varphi) = \sqrt{1 - \|A_\varphi\|^2}. \tag{5.18}$$

证明。 B_φ 的最小模的平方为

$$m(B_\varphi)^2 = \inf_{f \in \mathcal{K}_u, \|f\|=1} \langle B_\varphi^* B_\varphi f, f\rangle.$$

由 (5.1)，我们有

$$m(B_\varphi)^2 = \inf_{\|f\|=1} \langle (I_{\mathcal{K}_u} - A_\varphi^* A_\varphi) f, f\rangle = \inf_{\|f\|=1} (1 - \|A_\varphi f\|^2).$$

我们得到

$$m(B_\varphi)^2 = 1 - \|A_\varphi\|^2.$$

开平方后即得所需结果。 □

定理 5.16。设 u 是非常数内函数，且设 $\varphi \in H^\infty$。算子 B_φ： $\mathcal{K}_u \to \mathcal{K}_u^\perp$ 的最小模满足以下性质：

(1) $m(B_\varphi) = m\left(T_{\bar{u}\varphi}|_{\mathcal{K}_u}\right) \geq m(T_{\bar{u}\varphi})$.

(2)

$$m(B_\varphi) \geq \sqrt{(\text{ess inf}_{z\in\mathbb{T}} |\varphi(z)|)^2 - \text{dist}_{L^\infty}(\bar{u}\varphi, H^\infty)^2}. \tag{5.19}$$

此外，如果 φ是一个内函数，那么

$$m(B_\varphi) = \sqrt{1 - \text{dist}_{L^\infty}(\bar{u}\varphi, H^\infty)^2}. \tag{5.20}$$

证明。令 $\varphi \in H^\infty$。那么

（1）：根据引理 5.4 中确立的算子恒等式 $B_\varphi = M_u\, T_{\bar{u}\varphi}|_{\mathcal{K}_u}$，最小模为

$$m(B_\varphi) = \inf_{f \in \mathcal{K}_u, \|f\|=1} \|M_u T_{\bar{u}\varphi} f\|.$$

我们得到 $m(B_\varphi) = \inf_{f\in\mathcal{K}_u,\ \|f\|=1}\|T_{\bar{u}\varphi}f\| = m\left(T_{\bar{u}\varphi}|_{\mathcal{K}_u}\right)$。不等式 $m(B_\varphi) \geq m(T_{\bar{u}\varphi})$ 成立，因为子集 $\mathcal{K}_u$ 上的下确界有下界，且该下界不小于整个空间 H^2上的下确界。

(2)：令 $f \in \mathcal{K}_u$。由于 $M_\varphi f = P_{\mathcal{K}_u}(\varphi f) + P_{\mathcal{K}_u^\perp}(\varphi f) = A_\varphi f + B_\varphi f$，我们有$\|B_\varphi f\|^2 = \|\varphi f\|^2 - \|A_\varphi f\|^2$。对单位向量 $f \in \mathcal{K}_u$取下确界，得到

$$m(B_\varphi)^2 = \inf_{f\in\mathcal{K}_u,\|f\|=1}\left(\|\varphi f\|^2 - \|A_\varphi f\|^2\right).$$

利用性质 $\inf(X-Y) \geq \inf X - \sup Y$，我们有

$$m(B_\varphi)^2 \geq \left(\inf_{\|f\|=1}\|\varphi f\|^2\right) - \|A_\varphi\|^2.$$

应用逐点界 $\inf \|\varphi f\|^2 \geq$ (本性下确界$|\varphi|)^2$ 以及距离公式$\|A_\varphi\| = \mathrm{dist}_{L^\infty}(\bar{u}\varphi,\ H^\infty)$，得到所述下界。若 φ 是内函数，则对所有单位向量都有$\|\varphi f\| = 1$，且该不等式成为精确恒等式。□

推论 5.17. 设 u 为非常数内函数。算子 B_z： $\mathcal{K}_u \to \mathcal{K}_u^\perp$ 的最小模由下式给出

$$m(B_z) = \begin{cases} 0, & \dim\mathcal{K}_u > 1, \\ \sqrt{1-|u(0)|^2}, & \dim\mathcal{K}_u = 1. \end{cases}$$

证明. 由于 $\varphi(z) = z$ 是内函数，由命题 5.15，我们有

$$m(B_z) = \sqrt{1-\|A_z\|^2},$$

其中 $A_z = P_{\mathcal{K}_u}M_z|_{\mathcal{K}_u}$ 是模型空间上的压缩移位算子。利用[2, 定理 3.3],即得结论。□

注 5.18. 若 $\dim\mathcal{K}_u = 1$，利用定理 3.5 与推论 5.17，可得 $m(B_z)^2 + m(A_z)^2 = 1$。

对任意 $\lambda \in \mathbb{D}$，Blaschke因子 b_λ 定义为

$$b_\lambda(z) = \frac{z-\lambda}{1-\bar{\lambda}z}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

命题 5.19. 设 u 为非常数内函数。则 $m(B_z) = 0$ 当且仅当$\dim\mathcal{K}_u > 1$。

证明。由 (5.18)，我们有 $m(B_z)^2 = 1 - \|A_z\|^2$。条件 $m(B_z) = 0$ 等价于 $\|A_z\| = 1$。根据 [2, 定理 3.3], ，我们有 $\|A_z\| = 1$ 当且仅当 $\dim\mathcal{K}_u > 1$。当 $\dim\mathcal{K}_u = 1$时，内函数是一个单独的 Blaschke因子 b_λ，且 $\|A_z\| = |\lambda| < 1$，这意味着 $m(B_z) > 0$。□

References

[1] N. Bala 和 G. Ramesh，绝对最小值达到算子的谱性质，Banach J. Math. Anal.**14** (2020)，第 3 期，630–649。

[2] Bala, Neeru；Dhara, Kousik；Sarkar, Jaydeb；Sensarma, Aryaman 达到其范数的幂等算子、模型算子和 Toeplitz 算子。Linear Algebra Appl. 622 (2021), 150–165。

[3] Sudip Ranjan Bhuia 和 Puspendu Nag；范数达到的对偶截断 Toeplitz 算子，arXiv:2601.09375。

[4] A. Brown and R. G. Douglas, 部分等距托普利兹算子, Proc. Amer. Math. Soc. **16** (1965), 681–682.

[5] M. C. Cˆamara and W. T. Ross, 压缩移位的对偶, Canad. Math. Bull. 64 (2021), no. 1, 98–111. [6] M. C. Cˆamara 等, 乘法算子的压缩及其刻画, Results Math. 75 (2020), no. 4, Paper No. 157, 23 pp. [7] X. Carvajal and W. Neves, 达到范数的算子, Integral Equations Operator Theory 72 (2012), no. 2, 179–195. [8] X. Carvajal and W. Neves, 达到最小值的算子, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) 45 (2014), no. 2, 293–312. [9] X. H. Ding and Y. Q. Sang, 对偶截断 Toeplitz 算子, J. Math. Anal. Appl. 461 (2018), no. 1, 929–946. [10] R. G. Douglas, *Banach algebra techniques in operator theory*, 第二版, 数学研究生教材, 179, 施普林格, 纽约, 1998.[11] J. Ganesh, G. Ramesh and D. Sukumar, 绝对最小达到算子的结构, J. Math. Anal. Appl. 428 (2015), no. 1, 457–470. [12] J. Ganesh, G. Ramesh and D. Sukumar, 绝对最小达到算子的刻画, J. Math. Anal. Appl. 468 (2018), no. 1, 567–583. [13] S. R. Garcia and M. Putinar, 复对称算子及其应用, Trans. Amer. Math. Soc. 358 (2006), no. 3, 1285–1315. [14] S. R. Garcia, J. Mashreghi, and W. T. Ross, *Introduction to Model Spaces and Their Operators* 2016 ,

剑桥大学出版社, .[15] H. A. Gindler and A. E. Taylor, 线性算子的最小模及其在谱理论中的应用, Studia Math. 22 (1962/63), 15–41. [16] C. Gu, 对偶截断 Toeplitz 算子的刻画, J. Math. Anal. Appl. 496 (2021), no. 2, Paper No. 124815, 24 pp. [17] S. H. Kulkarni and G. Ramesh, 最小值可达算子的稠密性, Oper. Matrices 12 (2018), no. 3, 699–709. [18] Y. Li, Y. Q. Sang and X. H. Ding, 对偶截断 Toeplitz 算子的换位子与不变子空间, Banach J. Math. Anal. 15 (2021), no. 1, Paper No. 17, 26 pp. [19] J. Lindenstrauss, 关于达到其范数的算子, Israel J. Math. 1 (1963), 139–148. [20] V. V. Peller, *Hankel operators and their applications*, 数学专著丛书, 施普林格, 纽约, 2003.[21] G. Ramesh, $\mathcal{AN}$ **96** 2014 3, - 386 395

算子的结构定理, J. Aust. Math. Soc. ( ), no. – .[22] G. Ramesh and S. S. Sequeira, 绝对范数达到的 Toeplitz 算子与绝对最小达到Hankel算子, J. Math. Anal. Appl. 516 (2022), no. 1, Paper No. 126497, 12 pp. [23] G. Ramesh and S. S. Sequeira, 绝对最小模达到的 Toeplitz 算子与绝对范数达到 Hankel算子, C. R. Math. Acad. Sci. 巴黎 361 (2023), 973–977. [24] D. Sarason, *Algebraic properties of truncated Toeplitz operators*, Oper. Matrices 1 (2007), 491–526.[25] Y. Q. Sang, Y. Qin and X. H. Ding, 对偶截断 Toeplitz 算子的 Brown-Halmos 型定理, Ann. Funct. Anal. 11 (2020), no. 2, 271–284. [26] C. Wang, X. Zhao and D. Zheng, 本质交换的对偶截断Toeplitz算子, Chinese Ann. Math. Ser. B 45 (2024), no. 4, 597–636.Shiv Nadar IoE, NH91, Tehsil Dadri, Greater Noida, Gautam Buddha Nagar, UttarPradesh-201314, India*Email address*: sudipranjanb@gmail.com; sudip.bhuia@snu.edu.inDepartment of Mathematics, IIT Hyderabad, Kandi, Sangareddy, Telangana, India, 502 284*Email address*: rameshg@math.iith.ac.inDepartment of Mathematics, IIT Hyderabad, Kandi, Sangareddy, Telangana, India, 502 284*Email address*: ma23resch11003@iith.ac.in; puspomath@gmail.com