arXiv:2602.15807v1 [math.CT] 17 Feb 2026

切丛的维数与垂直提升的万有性

Florian Schwarz

2026年2月18日

摘要

本文通过给出光滑流形维数的范畴化，从新的视角探讨切范畴中垂直提升的万有性。垂直提升的万有性是切范畴公理的关键组成部分，如 [4]中所述。本文提出的范畴维数有助于理解这一性质的本质。主要结果是定理3.7，表明若切丛的维数存在，则它必须满足一个将切丛维数与基底维数联系起来的方程。特别地，当维数函数为强切维数时，定理3.8 表明切丛的维数要么是基底维数的两倍，要么等于基底的维数。文中给出了维数函数的许多例子，以说明该定义的效用。特别地，定理3.7 的一个推论是，哪些函子可以成为某个范畴的切丛自函子受到限制。我们以此为例表明，集合上不存在非平凡的切结构。

目录

1 引言 2 2 切范畴 3 3 切丛的范畴维数 6 3.1 幺半群值维数.7 3.2 存在维数时的切结构.9 3.3 存在维数时的微分丛.12 4 群的基数作为 $\mathbb{S}\mathrm{et}^{\mathrm{op}}$ **13** 上的非平凡切结构 5 群的基数作为取值于非标准幺半群的维数 17 6 特征、克鲁尔维数与最小公倍数 20 6.1 特征作为取值于最小公倍数幺半群的维数.21 6.2 满足积但不满足拉回的克鲁尔维数.25 7 借助伴随在模与代数之间传递维数 26 7.1 环上模的秩.27 7.2 代数的模秩.29 7.3 $\mathbb{F}$inVect 上笛卡尔切结构的分类.30 8 同伦、切除与 CW 复形的对偶范畴 31 8.1 并非 CW 复形的经典维数.31 8.2 贝蒂数与切除函子.32 9 总结

1 引言

维数是刻画光滑流形最基础的性质之一。尽管维数无法唯一刻画一个流形，但它是一个在微分同胚下保持不变的数，因此能够有效区分维数不同的流形。除了在微分同胚下保持不变之外，维数还具备许多理想性质：它在积下具有可加性，而形成切丛时维数会加倍。在本文中，我们将推广维数的概念，并探究其在切范畴中的影响。

切范畴在范畴意义上推广了光滑流形的切丛，将几何结构编码到传统上可能不被认为属于几何学领域的情形之中。切范畴最初由 Ji˘r´ı Rosick´y 于 1984 [21] 发现，随后由 Robin Cockett 与 Geoff Cruttwell 在 2012 [4]中重新发现并重新诠释。切范畴的主要特征是一个自函子，它产生切丛的类似物，以及与从该丛到底空间的通常投影相对应的自然变换。定义中还涉及其他若干重要结构，这些结构列于定义 2.3。

切范畴按其定义必须满足的一个重要而微妙的性质是垂直提升的万有性，该性质表明

$$\begin{array}{ccc} T_2M & \xrightarrow{\nu} & T^2M \\ {\scriptstyle p_M\circ\pi_0}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle T(p_M)} \\ M & \xrightarrow[0_M]{} & TM \end{array}$$

是一个拉回图。在 [4] 中，Cockett 与 Cruttwell 指出：“尽管这或许是切结构中最不直观的方面，[垂直提升的万有性] 或许也是最重要的”。

对垂直提升的泛性质缺乏直观理解，使得构造切范畴的其他例子，或检验某个自函子是否属于某个切结构变得困难。

然而，在光滑流形范畴中，沿浸没的拉回满足这样的性质：沿两条对角线相加的维数相同。由一个简短的论证可知，垂直提升的泛性质将切丛的维数 $\dim(T(M))$ 限制为 $\dim(M)$ 或 $2\dim(M)$。

类似地，在定义 3.2中，我们定义其他范畴上的范畴维数，并用这些维数来诠释垂直提升的泛性质。

重点并非要推广许多不同范畴中已有的维数概念（尽管这确实推广了流形的维数和模的秩），而是要诠释垂直提升的泛性质，并对可能的切结构施加限制。

主要结果是定理 3.7，它指出，给定一个切范畴 $\mathbb{X}, T$ 上的维数 dim，对于任意对象 X，等式

$$\dim(T^2(X)) + 2\cdot\dim(X) = 3\cdot\dim(T(X))$$

成立。第二个主要结果，即定理 3.8，指出在某些情况下，$\dim(T(X)) = \dim(X)$ 或 $\dim(T(X)) = 2\cdot\dim(X)$ 必须成立。二者都是在存在维数的情况下垂直提升的万有性的推论。

回顾第 2 节中关于切范畴的背景知识后，我们将在第 3 节继续定义一种广义的维数概念。这种广义概念的一个关键之处在于，维数可以是任意交换幺半群中的元素，而不局限于带加法的自然数。在小节 3.2 中，我们将证明定理 3.7 和 3.8，这也是本文的主要结果。

这些结果使我们能够缩小对给定范畴（带维数）上的切结构的搜索范围。对于不同的底层范畴 $\mathbb{X}$，我们得到如下形式的结果："$\mathbb{X}$ 上的任意切结构都满足这个等式"。

我们给出几个范畴维数的例子，超越了光滑流形这一启发性例子。在第 4 节中，我们指出基数是 $\mathbb{S}\mathrm{et}^{\mathrm{op}}$ 上的一个范畴维数，并以此证明 $\mathbb{S}\mathrm{et}^{\mathrm{op}}$上的平凡切结构是唯一的笛卡尔切结构。在第5节中，我们指出基数是 $\mathbb{G}\mathrm{rp}$ 上的一个范畴维数。不过，它的取值并非加法所定义的幺半群，而是乘法所定义的幺半群，这体现了我们在定义中使用幺半群的灵活性。

在第 6 节中，我们指出，虽然克鲁尔维数并非环的范畴维数，但环的特征是一种范畴维数。有趣的是，这种维数的取值既非加法也非乘法，而是最小公倍数（lcm）。

在第 7节中，我们指出，环上模的秩是一种范畴维数。通过模与代数之间的自由-遗忘伴随这一例子，我们展示了伴随下维数的相容性。此外，对于向量空间，秩就是经典维数。利用该维数可以证明，在域 $\mathbb{V}\mathrm{ect}_F$ 上的向量空间范畴 F 中仅有两种笛卡尔切结构。

在第8 节中，我们观察到，CW 复形的维数并非范畴维数。然而，贝蒂数是 CW 复形对偶范畴上的一种维数 $\mathbb{C}\mathrm{W}^{\mathrm{op}}$。在命题8.8中，我们证明，在某些情况下，维数可以沿切除函子传递。由于切除函子可视为同调的一种推广，这暗示了范畴维数与同伦论之间存在深刻联系。

我们列举了许多反例，这些例子源自一些直觉上可能让人联想到维数的概念，但事实证明它们并非范畴维数。这凸显了本文引入这一概念的主要目的：维数旨在为垂直提升的泛性质提供背景。

致谢 我谨向 Marcello Lanfranchi 致谢，感谢他建议撰写本文。感谢 Geoff Vooys、David Spivak、Kristaps Balodis、Jose Cruz 和 Tracey Balehowsky 提出的想法、意见和问题，以及与他们进行的讨论。我还要感谢 Remy van Dobben de Bruyn 在 mathoverflow 上指出早期稿件中的一处错误。特别感谢我的博士导师 Kristine Bauer 为本文写作提供的大力支持。在开展本项目期间，我获得了 Alberta Innovates研究生奖学金的资助。

2 切范畴

本节旨在回顾 [4], 中的概念，即切范畴、切范畴之间的松/强切函子，以及切函子之间的（线性）切变换。切范畴最初由 Rosick´y 在 [21] 中以略有不同的方式定义；我们所采用的表述来自 [4]。

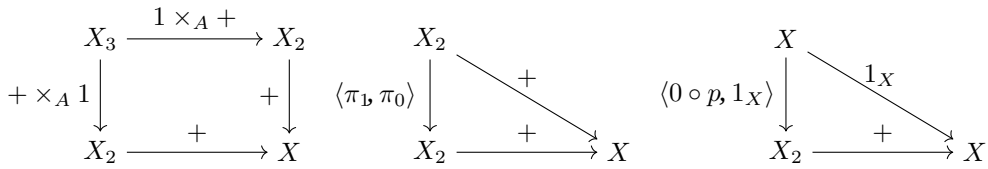
定义 2.1. [4, 定义 2.1]设 $\mathbb{X}$ 为一个范畴，$A \in \mathbb{X}_0$ 为一个对象。一个加性丛$(X, A, +, 0, p)$ 在 A 上由以下数据组成：

- 一个对象 X 以及一个态射 $p\colon X \to A$，使得 p 的拉回幂 X_n 存在，并且
- 个态射 $+\colon X_2 \to X$ 以及 $0 : A \to X$。

此外，这些态射必须满足以下条件：

- $p \circ + = p \circ \pi_0 = p \circ \pi_1$ 和 $p \circ 0 = 1_A$,
- 态射 $+$ 必须是结合的、交换且含幺的。

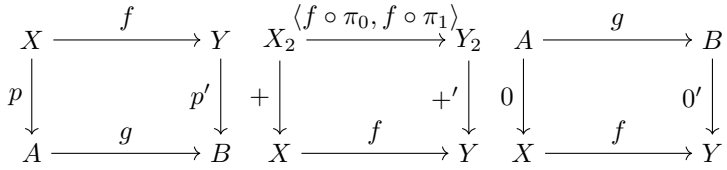
也就是说，以下结合律、交换律和幺元性图



必须可交换。

加法丛的态射由与这些结构相容的态射组成，具体解释见下述定义。

定义 *2.2.* [4, 定义 2.2]对于两个加性丛 $(X, A, p, +, 0)$ 和 $(Y, B, p', +', 0')$，加性丛态射 (f, g) 是一对映射 $f: X \to Y$ 和 $g: A \to B$，使得下列图表可交换:



加性丛是对向量空间所依托的基本结构的一种范畴化。这有助于定义切范畴，因为在经典情形中，每个切空间都是一个向量空间。在下面的定义中，请注意记号 T_2（指拉回）和 T^2（指函子 T 的两次应用）。对于任意范畴 $\mathbb{X}$，令 $\mathbf{1}: \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ 表示恒等函子。

定义 2.3。 [4, 定义 2。3] 一个切范畴 $(\mathbb{X}, T, p, 0, +, \ell, c)$ 由一个范畴 $\mathbb{X}$及以下结构组成:

- 一个函子 $T: \mathbb{X} \to \mathbb{X}$，称为切函子，并配有一个自然变换 $p: T \to 1$，使得 $p_M: TM \to M$ 的拉回幂对所有对象 $M \in \mathbb{X}$ 都存在，且 T 保留这些拉回幂;

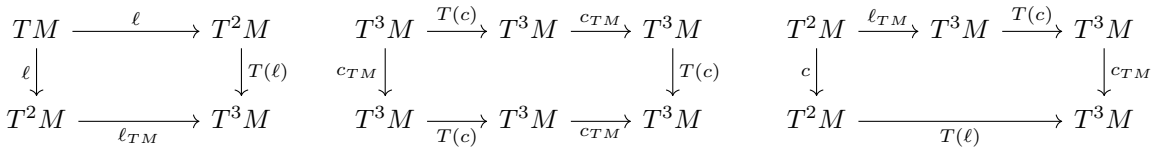
- 自然变换 $+: T_2 \to T$和 $0: 1 \to T$，使得每个 $(TM, M, p_M, +_M, 0_M)$ 都是一个加性丛;

- 一个自然变换 $\ell: T \to T^2$，称为垂直提升，使得 $(\ell_M, 0_M)$ 是一个加法丛态射，从$(TM, M, p_M, +_M, 0_M)$ 到$(T^2M, TM, Tp_M, T(+_M)\ T(0_M))$;

- 一个自然变换 $c: \ T^2 \to T^2$满足 $c^2 = 1$和 $lc = l$，使得 （c_M、$\mathbf{1}$） 是从 （T^2M、 TM、 Tp_M、 T （$+_M$） T （0_M）） 到 （T^2M、 TM、 p_{TM}、 $+_{TM}$、 0_{TM}）的加性丛态射。

拉回 T^nT_k 称为基础拉回。

此外， ℓ 和 c 必须与自身及彼此兼容，这意味着以下图表



均可交换。最后，我们要求

$$\begin{array}{ccc} T_2M & \xrightarrow{\nu} & T^2M \\ {\scriptstyle p_M\circ\pi_0}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle T(p_M)} \\ M & \xrightarrow[0_M]{} & TM \end{array} \tag{1}$$

是一个在 T 的幂下保持不变的拉回，其中 ν 是 $\nu = T(+)\circ\langle \ell_M\circ\pi_0,\ 0_{TM}\circ\pi_1\rangle$ 的简写记号。这个拉回称为垂直提升的万有性。基础拉回与应用于垂直提升的万有性的 T 的幂，统称为切拉回。

虽然最后一个条件在 [4]，的定义 2.3 中表述不同，但 [4] 的引理 2.12 表明，它等价于本文中的表述。

注 2.4。最后一个条件称为垂直提升的万有性，它表达了一种直觉：T^2M 与 T_2M 的关系，和 TM 与 M 的关系相同。例如，在流形及光滑映射构成的范畴 $\mathbb{S}$mMan 中，每个对象都有维数。

垂直提升保证了 $\dim(T^2M) - \dim(T_2M) = \dim(TM) - \dim(M)$。特别地，如果切丛的维数是流形维数的 n 倍，则有 $n^2 - (2n-1) = n-1$，而这只有在 $n=1$ 或 $n=2$ 时才成立。因此，$\mathbb{S}$mMan 中垂直提升的万有性要求切丛的维数要么与原流形相同，要么是其两倍。本文后续章节将探讨一般切范畴中垂直提升与切丛维数之间的关系。

定义中涉及的结构2.3 切范畴可以用如下图表概括：

$$\begin{array}{ccccc} & & T_2(M) & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle +} & & \\ M & \underset{p}{\overset{0}{\rightleftarrows}} & T(M) & \underset{T(p)}{\overset{\ell}{\rightleftarrows}} & T^2(M) \end{array} \qquad c : T^2(M) \to T^2(M)$$

对每个对象 M。

定义的主要动机示例是光滑流形。该切结构在 [4, 第 2 节2]中有所阐述。下面将介绍切结构的另一个示例。

笛卡尔切范畴是指具有有限积，且积投影与切结构相容的切范畴，参见 [4, 第 2 节4]。

例 2.5。 [4,第 2 节。2] 任何具有 $\mathbb{X}$ 恒等函子以及定义*2.3* 所要求的所有自然变换的恒等变换的范畴，都是切范畴的一个示例，$(\mathbb{X},\ 1_{\mathbb{X}},\ 1_{1_{\mathbb{X}}},\ 1_{1_{\mathbb{X}}},\ 1_{1_{\mathbb{X}}},\ 1_{1_{\mathbb{X}}},\ 1_{1_{\mathbb{X}}})$。

从这个示例可以看出，一般而言，给定的范畴 $\mathbb{X}$可以具有多个不同的切结构。例如，光滑流形范畴既具有微分几何中的经典切丛结构，也具有平凡切结构。事实上，任何具有非平凡切结构的范畴 $T \neq 1_{\mathbb{X}}$ 还具有平凡切结构，这表明它至少有两种不同的切结构。

切范畴研究的核心对象是微分丛，它是微分几何中向量丛概念在范畴论中的推广。现在我们回顾 [5] 中微分丛的定义：

定义 2.6. [5, 定义 2.3] 给定一个切范畴 $(\mathbb{X}, T)$，一个微分丛$(E, M, q, \zeta, \sigma, \lambda)$ 由以下部分构成

1. 一个对象 E （全空间），

2. 一个对象 M （底空间），

3. 一个态射 q： $E \to M$ （投影），它在自身上承认有限拉回幂 $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，且这些拉回幂被切函子 T^k 的幂保持，

4. 一个态射 ζ： $M \to E$ （零截面）以及一个态射 σ： $E_2 \to E$ （纤维逐点加法），使得 （q、ζ、σ）构成一个加性丛，并且

5. 一个态射 λ： $E \to T$（E）（提升），使得

$$(\lambda, 0) : (E, M, q, \sigma, \zeta) \to (T(E), T(M), T(q)), T(\sigma), T(\zeta))$$

and

$$(\lambda, \zeta) : (E, M, q, \sigma, \zeta) \to (T(E), E, p, +, 0)$$

是加性丛态射。

此外，图表

$$\begin{array}{ccc} E_2 & \xrightarrow{T(\sigma)\circ\langle\lambda\circ\pi_0, 0\circ\pi_1\rangle} & TE \\ {\scriptstyle q\circ\pi_0}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle T(q)} \\ M & \xrightarrow{\quad 0 \quad} & TM \end{array} \tag{2}$$

是一个拉回，且态射 $\ell_E \circ \lambda$、T（λ）$\circ\lambda$： $E \to T$（T（E））相等。

3 切丛的范畴维数

本节将给出范畴中维数的定义，该定义推广了光滑流形的维数定义。流形的维数具有许多理想性质，其中一些将在此列出。

注 3.1。设 X、X' 和 X'' 为光滑流形。流形的维数具有某些我们认为值得推广到一般维数定义中的理想性质。

(a) （取值于 $\mathbb{N}$）维数将流形映射到自然数 $\mathrm{Dim}(X) \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2...\}$。

(b) （关于拉回的可加性）维数在某些拉回下具有可加性：给定由横截映射构成的余跨$X \to X' \leftarrow X''$，$\mathrm{Dim}(X \times_{X'} X'')$ $+\mathrm{Dim}(X')$ $= \mathrm{Dim}(X)$ $+ \mathrm{Dim}(X'')$

(b') （关于积的可加性）维数在笛卡尔积下具有可加性：$\mathrm{Dim}(X \times X')$ $= \mathrm{Dim}(X) + \mathrm{Dim}(X')$

(c) (同构不变量***)*** 维数是同构不变量：给定 $X \cong X'$，则 $\mathrm{Dim}(X)$ $=\mathrm{Dim}(X')$。

光滑流形的拓扑和切结构也会对维数产生影响。

(e) （嵌入对应不等式）维数将嵌入映射为不等式：给定一个嵌入 $X \hookrightarrow X'$，$\mathrm{Dim}(X)$ $\leq$ $\mathrm{Dim}(X')$。***(e')*** （与局部情形相同）维数具有局部性：给定一个开子集 $U \hookrightarrow X$，$\mathrm{Dim}(U)$ $=$ $\mathrm{Dim}(X)$。***(f)*** （切丛使维数加倍）应用切丛自函子会使维数加倍：$\mathrm{Dim}(TX)$ $= 2 \cdot \mathrm{Dim}(X)$。***(g)*** （丛纤维的维数任意）向量丛的纤维可以具有任意维数：对于任意$n \in \mathbb{N}$，都存在一个向量丛 $E \to X$，使得 $\dim(E)$ $= \dim(X)$ $+ n$。

我们将性质（b）（关于拉回具有可加性）定义为范畴维数。之所以选择这一条件，是因为我们希望将维数的性质应用于拉回图

$$\begin{array}{ccc} T_2X & \longrightarrow & T^2X \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle T(p_X)} \\ X & \xrightarrow[0_X]{} & TX \end{array}$$

为了体现垂直提升的万有性。我们将用一个更一般的概念来替代横截性（横截性本质上依赖于切结构），以便在不知道切结构的情况下定义范畴上的维数。虽然我们不假设所需的性质 (b')（关于积可加），但如果终对象的维数是中性元 $\dim(*) = 0$，则由性质 (b) （关于拉回可加）可得。

我们将性质 (a)（取值于 $\mathbb{N}$）推广为要求维数的目标为交换幺半群。这在一定程度上受到维数现有推广形式（例如无限维数和分数维数）的启发。我们将在第4–8节给出一些满足该定义且非整数的维数概念示例。

由于我们的结果均不依赖于此，我们也不要求性质 (e) （嵌入对应不等式）。我们也选择不要求性质 (e')（与局部性质相同），因为我们希望避免使用任何局部性概念。

我们对维数的定义并非唯一。例如，常值赋值 $\dim(X) = 0, \forall X$是一种维数，其他任何常值赋值 $\dim(X) = 42, \forall X$也同样是维数。

按照惯例，我们用首字母大写的 Dim 表示流形和向量空间的经典维数概念，而用首字母小写的 dim 表示广义维数。

3.1 幺半群值维数

本节将定义范畴论意义下的维数。关键在于维数在拉回下的表现

$$\begin{array}{ccc} T_2M & \longrightarrow & TM \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle p} \\ TM & \xrightarrow[p]{} & M \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} T_2M & \longrightarrow & T^2M \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle T(p)} \\ M & \xrightarrow[0]{} & TM \end{array}$$

这正是 T_2M 的定义以及垂直提升的泛性质。因此，我们规定这种形式的拉回所满足的性质。

定义 3.2。设 M 是一个交换幺半群，$\mathbb{X}$ 是一个范畴。那么，$\mathbb{X}$ 上的 M 值维数 是一个函数 $\dim : \pi_0(\mathbb{X}) \to M$，它将 $\mathbb{X}$ 中对象的同构类映射到幺半群 M，并满足以下性质：

对于任意拉回

$$\begin{array}{ccc} A \times_B C & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r} \\ C & \xrightarrow[f]{} & B \end{array}$$

f 沿着一个收缩 r的

- 若 f 是收缩，或者
- 若 f 是截面，

该方程

$$\dim(A \times_B C) + \dim(B) = \dim(A) + \dim(C)$$

成立。

虽然我们选择放宽备注 (a) (取值于 $\mathbb{N}$) 中期望的性质 3.1，但性质 (c) (同构不变量) 以及性质 (b) (关于拉回的可加性) 根据定义成立。

在具有积的范畴中，指向终对象的态射 $*$ 是一个收缩，因此在终对象上的任何拉回都是定义 3.2 中的拉回之一。如果终对象的维数满足 $\dim(*) = 0$，我们得到 $\dim(X \times Y) = \dim(X) + \dim(Y)$。也就是说，如果 $\dim(*) = 0$性质 (b') （关于积的可加性）在备注 3.1 中成立。

我们主动拒绝将备注(e')中的性质（与局部情形相同）推广3.1 ，以便摒弃局部性的概念。由于一般而言，我们在幺半群 M 上没有序，性质 (e)（从嵌入到不等式）一般并不成立。不过我们将看到，它对我们列出的所有例子都成立，因为这些例子中的幺半群都是有序幺半群。

证明与(f)（切丛使维数加倍）以及(g)（丛纤维具有任意维数）类似性质的工作，将是第3.1 节3.2的主题。

在下面的命题中，我们将看到维数与函子，尤其是伴随，能很好地相互作用。

命题3.3。 设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 为范畴，设 $\mathbb{X}$ 具有一个取值于 R 的维数 $\dim_{\mathbb{X}} : \pi_0(\mathbb{X}) \to R$。设 $F\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ 是一个保有限极限的函子。那么，将 $Y \in \pi_0(\mathbb{Y})$ 映射到

$$Y \mapsto \dim_{\mathbb{X}}(F(Y))$$

是 R上的一个取值于 $\mathbb{Y}$ 的维数。

证明。 函子保持复合与恒等态射，因此 F 保持截面与回缩。由于它是右伴随， F 保持极限，尤其是拉回。因此，对于 $\mathbb{Y}$ 中沿回缩对截面或回缩作出的任意拉回，维数公式仍然成立。 □

保有限极限的函子的两个重要例子类别是全子范畴和右伴随函子。

推论 3.4. 设 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Y}$ 是范畴，设 $\mathbb{X}$ 具有一个取值于 R的维数 $\dim_{\mathbb{X}}$： $\pi_0(\mathbb{X}) \to R$。

(a) 设 F： $\mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ 是一个右伴随函子。则将 $Y \in \pi_0(\mathbb{Y})$映射为

$$Y \mapsto \dim_{\mathbb{X}}(F(Y))$$

是 R上的一个取值于 R的维数。

(b) 设 $\mathbb{Y}$ 是 $\mathbb{X}$的一个全子范畴。设 $\dim : \pi_0(\mathbb{X}) \to R$ 是 $\mathbb{X}$上的一个取值于 R的维数。则$\dim|_{\mathrm{Obj}(\mathbb{Y})}$ 是 $\mathbb{Y}$上一个取值于 R的维数。

文献中已有许多众所周知的伴随，因此，这条不起眼的推论为我们提供了一种利用已有维数构造新维数的实用方法，本文将频繁使用它。推论 3.4 的一个主要应用见第7.2节。届时我们将证明，从环 R 上的代数到 R 上的模的遗忘函子有一个左伴随，因此，模范畴上的维数将诱导出代数范畴上的维数。

回顾一下，在切范畴 $(\mathbb{X}, T)$ 中，若一个拉回在 T 的所有幂作用下都保持不变，则称其为 T-拉回。T- 拉回最初由 McAdam 在 [17，定义 1.1。3] 中提出，之后 Marcello Lanfranchi 和 Cruttwell 在 [7]中进行了分析。我们将使用 T-拉回的定义来定义一个稍弱的维数版本和一个稍强的维数版本。这些定义将为定理 3.7 和定理 3.8奠定基础。

定义 3.5。 设 M为一个交换幺半群，且（$\mathbb{X}, T$）为一个切范畴。那么，以 为值的切维数在（$\mathbb{X}, T$）上是一个函数dim： π_0（$\mathbb{X}$） $\to M$，满足以下性质：对于任意的 T-拉回

$$\begin{array}{ccc} A \times_B C & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r} \\ C & \xrightarrow[f]{} & B \end{array}$$

沿着一个收缩 r，

- 如果 f 是一个收缩，或者
- 如果 f 是一个截面，

等式

$$\dim(A \times_B C) + \dim(B) = \dim(A) + \dim(C)$$

成立。若 M 是一个交换半环，且存在一个元素$a \in \mathbb{M}$，使得对于每个对象 $X \in$Ob($\mathbb{X}$)，等式都成立，则一个 M值的切维数称为强 。

$$\dim(T(X)) = a \cdot \dim(X)$$

成立。

由于每个T-拉回都是拉回，显然每个 M值维数都是 M值切维数（无论切结构如何），但反之不然。

同样， M值切维数满足性质（b）（关于拉回可加）、（c）（同构不变），见注记3.1。我们将在接下来的几节中探讨与（f）（切丛使维数加倍）和（g）（丛纤维维数任意）相对应的性质。

例3.6. 给定任意切范畴（$\mathbb{X}, T, p, 0, +, \ell, c$）以及任意交换幺半群 M，设$m \in M$为 M的任意元素。则常值指派$\dim(X) = m$是一个 M值维数，也是一个强 M值切维数。在此情形下，所有等式都变得平凡。我们将这种形式的维数称为平凡维数（在 $\mathbb{X}$上）。

我们将在定理 3.7 和 3 中探讨 M 值切维数的性质。 8.

3.2 存在维数时的切结构

如果一个范畴上具有切维数，那么它会与切结构相互作用，因为切结构要求某些图为拉回。我们在定理 3.8 中看到，在某些情形下，切丛的维数表现得类似于备注 (f)（切丛维数加倍）中所期望的性质 3.1。

定理 3.7。 设 M 是一个交换幺半群。设 $(\mathbb{X}, T)$ 是一个切范畴。设 $\dim : \mathrm{Ob}(\mathbb{X}) \to M$ 是一个 M 值切维数。那么，对于每个对象 $X \in \mathrm{Ob}(\mathbb{X})$

$$\dim(T^2(X)) + 2 \cdot \dim(X) = 3 \cdot \dim(T(X)).$$

证明。 我们考虑以下两个拉回图：

$$\begin{array}{ccc} T_2X & \longrightarrow & TX \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle p} \\ TX & \xrightarrow[p]{} & X \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} T_2X & \xrightarrow{\nu} & T^2X \\ {\scriptstyle \pi_0 p}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle T(p)} \\ X & \xrightarrow[0]{} & TX \end{array}$$

其中， ν是 $\nu = T(+) \circ \langle \ell_M \circ \pi_0,\ 0_{TM} \circ \pi_1 \rangle$的简写记号。第一个图表是拉回，这是 T_2M的定义。第二个图表是拉回，因为这是垂直提升的万有性的一个等价表述。

由于 $0 : X \to T(X)$ 和 $p : T(X) \to X$ 构成一个截面-收缩对，上述拉回满足定义 3.2 的要求，我们得到

$$\dim(T_2(X)) + \dim(X) = 2\dim(T(X)) \text{ and } \dim(T_2(X)) + \dim(T(X)) = \dim(T^2(X)) + \dim(X)$$

因此我们得到

$$2 \cdot \text{维数}(T(X)) + \text{维数}(T(X)) = \text{维数}(T_2(X)) + \text{维数}(X) + \text{维数}(T(X)) = \text{维数}(T^2(X)) + \text{维数}(X) + \text{维数}(X)。$$

□

定理 3.8. 设 R 是一个整环（无零因子的含单位元的交换环）。设$(\mathbb{X}, T)$是一个切范畴。设 $\dim : \mathrm{Ob}(\mathbb{X}) \to R$是$(\mathbb{X}, T)$ 上的一个强 R 值切维数。则对任意对象 X，$\dim(T(X)) = \dim(X)$ 或 $\dim(T(X)) = 2 \cdot \dim(X)$ 成立。

如果存在一个对象满足 $\dim(X) \neq 0$，则这意味着 $a = 1$ 或 $a = 2$。

证明. 我们考虑以下两个拉回图：

$$\begin{array}{ccc} T_2X & \longrightarrow & TX \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle p} \\ TX & \xrightarrow[p]{} & X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} T_2X & \xrightarrow{\nu} & T^2X \\ {\scriptstyle \pi_0 p}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle T(p)} \\ X & \xrightarrow[0]{} & TX \end{array}$$

其中 ν是 $\nu = T(+) \circ \langle \ell_M \circ \pi_0,\ 0_{TX} \circ \pi_1 \rangle$ 的简写记号。

第一个图表是一个拉回，因为这是 T_2M 的定义。第二个图表是一个拉回，因为这是垂直提升的万有性的等价表述。因此我们得到

$$\dim(T(X)) + \dim(T(X)) - \dim(X) = \dim(T_2X) = \dim(T^2X) + \dim(X) - \dim(TX).$$

这可以改写为

$$\dim(T^2X) - 3\dim(TX) + 2\dim(X) = 0.$$

利用 $\dim(TX) = a \cdot \dim(X)$，我们得到方程

$$\begin{aligned} 0 &= a^2 \cdot \dim(X) - 3a \cdot \dim(X) + 2\dim(X) \\ 0 &= (a-1) \cdot (a-2) \cdot \dim(X) \end{aligned}$$

这意味着 $a = 1$, $a = 2$ 或 $\dim(X) = 0$。若 $a = 1$，则 $\dim(TX) = \dim(X)$。若 $a = 2$，则 $\dim(TX) = 2 \cdot \dim(X)$。若 $\dim(X) = 0$，则两者均成立。 □

定理 3.8 是性质 (g) 的对应结论

例*3.9*。在光滑流形的切范畴中，经典维数 $dim(M)$ =$Dim(M)$ 是一个取值于 $\mathbb{Z}$ 的强切维数的例子。如果收缩 $r : A \to B$ 是浸没，那么它与任意光滑映射 $C \to B$ 都横截。因此，由 [3, 定理 *15.2*]，可知，拉回满足 $dim(A \times_B C)$ =$dim(A)$ +$dim(C)$ −$dim(B)$。因此，定理 *3.8* 表明，对于 *SmMan* 上任意满足 $dim(TM) = a \cdot dim(M)$ 的切结构，我们都有 $a = 1$或 $a = 2$。我们在命题*3.12*中证明经典维数 *Dim* 满足定义 *3.2*，且不假设 r 是浸没。

定理3.7 和定理3.8 的一项重要应用，是提供一种方法来证明某些函子不可能成为切结构的一部分。如果一个范畴具有良好的维数概念，但所提出的切函子不满足定理3.7 和定理3.8的条件，那么该函子就不可能是切函子。以下例子由 G. Vooys 发现 [24], ，展示了这一应用。

例3.10。 设 SmMan 为光滑实流形及光滑映射构成的范畴。给定˜函子 $T : \mathrm{SmMan} \to \mathrm{SmMan}$，它将对象 M 映到对象 $M \times \mathbb{R}$，并将态射 f 映到$f \times 1_{\mathbb{R}}$。那么不存在切结构 $(\mathrm{SmMan}, \hat{}T, p, +, 0, \ell)$ 使得切函子为 $\tilde{T}$。原因是，根据定理3.7，等式

$$\dim(M \times I \times I) + 2 \cdot \dim(M) = 3 \cdot \dim(M \times I)$$

必须成立。然而，这意味着

$$3 \cdot \dim(M) + 2 = 3 \cdot \dim(M) + 3$$

从而 $3 = 2$ 通过反证法证明不存在这样的切结构。

˜事实上，对于这个自函子 T，可以定义自然变换 p，0，$+$，ℓ，c，使其满足切结构的所有性质，唯独垂直提升的万有性除外。

正如我们在例3.9中所承诺的，下面我们证明流形的维数满足定义 3.2中的拉回公式。我们先给出一个引理，将一般的收缩转化为浸没。

引理 3.11。 设 $r :\ A \to B$ 是一个收缩，其截面为 $s :\ B \to A$。那么存在一个开子集$U \subseteq A$，使得 $\mathrm{Im}(s) \subset U$ 且 $r|_U$ 是浸没。

$\mathrm{Im}(s) \subset U$ 这一事实同时表明 U 非空，也表明 s 是 $r|_U$的截面。

证明。 设 $U \subset A$ 为 A中正则点的集合。由 [14, 命题4.1]， U 是开的。根据其定义， U 中的所有点都是正则的，因此 $r|_U$ 是浸没。

只需证明 $\mathrm{Im}(s) \subset U$。设 $a = s(b)$属于 $\mathrm{Im}(s) \subset A$。为证明 a 是正则点，设 $v \in T_b(B)$为任意切向量。则 $T_b s(v) \in$ 是 a处的切向量，且满足

$$T_a r \circ T_b s(v) = T_a(r \circ s)(v) = v$$

由于 v 是任意的，故 a 是正则点。由于 $a \in \mathrm{Im}(s)$是任意的，这表明 $\mathrm{Im}(s) \subset U$，从而完成证明。 □

Prop命题 3.12。 设 $r : A \to B$ 为光滑流形的收缩。假设拉回 k

$$\begin{array}{ccc} A \times_B C & \xrightarrow{\pi_0} & A \\ {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle r} \\ C & \xrightarrow[f]{} & B \end{array}$$

存在。则等式

$$\dim(A \times_B C) = \dim(A) + \dim(C) - \dim(B)$$

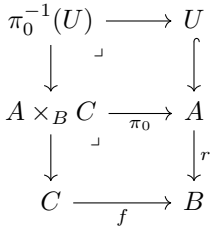
成立。

证明。 根据引理 3.11，存在一个包含 $\mathrm{Im}(\ U \subset A$ 的开子集 $s)$，使得 $r|_U$ 是浸没。由于嵌入 $U \hookrightarrow A$ 是浸没，拉回

$$\begin{array}{ccc} \pi_0^{-1}(U) & \longrightarrow & U \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ A \times_B C & \xrightarrow[\pi_0]{} & A \end{array}$$

存在，且等于原像 $\pi_0^{-1}(U)$。由于 $\pi_0^{-1}(U)$ 是某个开集的原像，因此它是 $A \times_B C$ 的开子集。

中的两个内方形



都是拉回。因此，外层方形是沿 $r \circ i$ 对 f 的拉回。由于 $r \circ i = r|_U$ 是浸没，维数公式

$$\dim(\pi_0^{-1}(U)) = \dim(U) + \dim(C) - \dim(B)$$

成立。由于开子集的维数等于其所在流形的维数，$\dim(\pi_0^{-1}(U)) = \dim(A \times_B C)$，且 $\dim(U) = \dim(A)$。因此我们得到

$$\dim(A \times_B C) = \dim(\pi_0^{-1}(U)) = \dim(U) + \dim(C) - \dim(B) = \dim(A) + \dim(C) - \dim(B)$$

由此证明得证。 □

3.3 存在维数时的微分丛

对于切结构，维数有助于阐明垂直提升的泛性质。类似地，图 2 中的拉回是微分丛的垂直提升。本节将证明微分丛版本的定理 3.7 和 3.8。

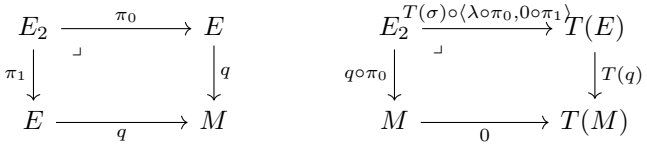
在经典的光滑流形情形下，注 (g)（丛纤维维数任意）的期望性质3.1 指出，微分丛的维数不受限制。然而，在某些非经典情形下，维数会受到限制。这将导致定理 (g)（丛纤维维数任意）的期望性质 3.1 在定理 3.14 中出现某种略显奇怪的推广。

定理 3.13。 设 M 是一个交换幺半群，并设 $\dim : \pi_0(X) \to M$ 是切范畴 $(\mathbb{X}, T, p, 0, +, \ell, c)$ 上的切维数。设 $(E, M, q, \zeta, \sigma, \lambda)$ 是一个微分丛。那么方程

$$\dim(T(E)) + 2 \cdot \dim(M) = \dim(T(M)) + 2 \cdot \dim(E)$$

成立。

证明。 这些图表



是拉回。由于 q 是一个收缩，0 是一个截面，而 $T(q)$ 是一个收缩，因此按照定义 3.2 的维数将满足以下方程

$$\dim(E_2) + \dim(M) = \dim(E) + \dim(E)$$
$$\dim(E_2) + \dim(T(M)) = \dim(M) + \dim(T(E)).$$

因此我们得到

$$\dim(T(E)) + 2 \cdot \dim(M) = \dim(E_2) + \dim(M) + \dim(T(M)) = \dim(T(M)) + 2 \cdot \dim(E).$$

□

定理 3.14。 设 R 为一个环，且 维数： $\pi_0(X) \to M$ 是切范畴 $(\mathbb{X}, T, p, 0, +, \ell, c)$ 上的强切维数，其中 $a \in R$ 满足 维数$(T(X)) = a \cdot$维数(X)。那么对于任意微分丛 $(E, M, q, \zeta, \sigma, \lambda)$， 方程

$$(a-2)\dim(E) = (a-2)\dim(M)$$

成立

证明。 由定理 3.13 等式

$$\dim(T(E)) + 2 \cdot \dim(M) = \dim(T(M)) + 2 \cdot \dim(E)$$

必须成 立。代入 $\dim(T(E)) = a \cdot \dim(E)$ 和 $\dim(T(M)) = a \cdot \dim(M)$，我们得到

$$a \cdot \dim(E) + 2 \cdot \dim(M) = a \cdot \dim(M) + 2 \cdot \dim(E).$$

在等式两边减去 $2 \cdot \dim(M) + 2 \cdot \dim(E)$，得到所需结果：

$$(a-2)\dim(E) = (a-2)\dim(M).$$

□

由定理 3.8可知 a只能是 1 或 2。若 $a = 2$，则对微分丛的维数没有任何限制。若 $a = 1$，则 $\dim(E) = \dim(M)$，这可以解释为微分丛具有 0 维纤维。因此，所需性质(g)(丛纤维任意维数) 可能仅在具有强切维数 $a = 2$的切范畴中成立。在光滑流形范畴的切范畴中，情况确实如此。

在以下各节中4-8 ，我们列举众所周知的范畴上的一些维数示例，以及由维数带来的结果。若该维数是强维数，则对微分丛的结果要么是不施加任何条件（若 $a = 2$），要么是 $\dim(E) = \dim(M)$（若 $a = 1$）。因此，我们只会在遇到切维数并非强维数的切范畴示例时，才提及微分丛。

4 基数作为 $\mathbb{S}\mathrm{et}^{\mathrm{op}}$上的非平凡切结构

所有数学对象都由集合构造而成。在推论3.4中，我们看到，与右伴随函子复合可保持维数。大多数代数结构都有一个从集合出发的自由函子，它是到集合的遗忘函子的左伴随。因此，通过与遗忘函子复合，集合上的一个维数便可在许多不同的范畴中产生许多维数。

由于集合是离散的，集合中没有明显的结构可供我们用来构造切向量。因此，我们并不认为集合范畴具有非平凡的切结构。

然而，这并不意味着集合范畴上不存在维数。事实上，正如命题 4.6 中所见，维数存在于 $\mathbb{S}\mathrm{et}^{\mathrm{op}}$ 上，而且这个维数可用于证明不存在非平凡切结构。

向量空间的维数（因而流形的维数）定义为一组基的基数。与向量空间的维数类似，基数是描述集合大小的主要量。

基数满足一些理想的性质 (a) (取值于 $\mathbb{N}$), (c) (同构不变量)，见注3.1；因为它取值于自然数，且在同构下保持不变。选择乘法作为幺半群结构时，它也满足 (b') (关于积可加)，因为 $\#(A \times B) = \#A \cdot \#B$。然而，按照定义 3.2 的意义，基数并不是范畴$\mathbb{S}$et 上的范畴维数。此外，我们将证明它是 $\mathbb{S}\mathrm{et}^{\mathrm{op}}$（集合的对范畴）上的一个维数。

因此，我们将能够描述范畴 $\mathbb{S}\mathrm{et}^{\mathrm{op}}$ 上可能存在的切结构。特别是，我们将利用维数证明 $\mathbb{S}\mathrm{et}^{\mathrm{op}}$ 上不存在非平凡的笛卡尔切结构。

定义 4.1. 令 $\mathbb{N}=\{0,1,2,...\}$ 为自然数集合。令 $\mathbb{N}_\infty$ 为集合 $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$。于是我们在 $\mathbb{N}_\infty$上定义以下三种交换幺半群结构。

(a) 加法 $+$： $\mathbb{N}_\infty\times\mathbb{N}_\infty\to\mathbb{N}_\infty$ 定义为自然数上的通常加法 $a+b$；如果两个输入中任一个是 ∞，则结果为 ∞。与单位元 $0\in\mathbb{N}\subset\mathbb{N}_\infty$ 一起，这构成一个交换幺半群。*(b)* 乘法 $\cdot$：$\mathbb{N}_\infty\times\mathbb{N}_\infty\to\mathbb{N}_\infty$ 定义为通常的乘法；如果两个输入中任一个是 ∞（尤其是 $0\cdot\infty=\infty$），则结果为 ∞。与单位元 $1\in\mathbb{N}\subset\mathbb{N}_\infty$ 一起，这构成一个交换幺半群。*(c)* 最大值 最大值：$\mathbb{N}_\infty\times\mathbb{N}_\infty\to\mathbb{N}_\infty$ 定义为输出大于或等于两个输入的最小数；如果两个输入中任一个是 ∞，则结果为 ∞。与单位元 $0\in\mathbb{N}\subset\mathbb{N}_\infty$ 一起，这构成一个交换幺半群。

注 4.2。 集合的基数不是 $\mathbb{N}_\infty$值维数（对于定义 *4.1*中的任一幺半群结构），定义在 $\mathbb{S}\mathrm{et}$ 这个由所有集合与函数构成的范畴上。其原因在于，集合的余积（不交并）在拉回下保持不变，并为拉回的基数引入了一些非平凡的组合。只需将任意一个拉回图与一个单元素集取不交并，即可轻易构造出一个反例。

然而，在对偶范畴 $\mathbb{S}\mathrm{et}^{\mathrm{op}}$ 上，基数是一个维数。

定理 4.3。 对于集合的对范畴， $\mathbb{S}\mathrm{et}^{\mathrm{op}}$ 基数 $\dim(X)=\#X$ 是 $\mathbb{N}$值维数，定义在 $\mathbb{S}\mathrm{et}^{\mathrm{op}}$ 上。

证明。 由于我们处于集合的对范畴中， $\mathbb{S}\mathrm{et}^{\mathrm{op}}$ 中的回缩恰好是集合的单射。对于沿着单射 i的每一个推出

$$\begin{array}{ccc} C\sqcup_A B & \longleftarrow & B \\ \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle i} \\ C & \underset{f}{\longleftarrow} & A \end{array}$$

集合 $C\sqcup_A B$ 可以写成 C 与 $B-A$的不交并。因此

$$\#(C\sqcup_A B)+\#A=\#C+\#(B-A)+\#A=\#C+\#B$$

因此，满足定义 3.2 中的条件。 □

注 4.4。 本节中关于 $\mathbb{S}\mathrm{et}$ 的所有结果也适用于 $\mathbb{F}\mathrm{inSet}$，即有限集范畴。由于 $\mathbb{F}\mathrm{inSet}$ 是 $\mathbb{S}\mathrm{et}$的全子范畴，这可由推论 *3.4* 以及我们在任何证明中都未使用无限集这一事实得出。

特别地，基数是 $\mathbb{F}\mathrm{inSet}^{\mathrm{op}}$上的一个$(\mathbb{N},+)$-值维数。

下文将把定理 3.7 和3.8 应用于作为维数的基数。一个特殊情形是笛卡尔切范畴。笛卡尔切范畴在 [4, 定义 2。8]中定义为具有有限积且积与切结构相容的切范畴。

推论 4.5。

(a) $\mathbb{S}\mathrm{et}^{\mathrm{op}}$ 上的任意切结构都满足

$$\#T^2(X)+2\cdot\#X=3\cdot\#T(X).$$

(b) $\mathbb{F}\mathrm{inSet}^{\mathrm{op}}$ 上的每个笛卡尔切结构都满足 $\#T(X) = \#T(\{*\}) \cdot \#X$，并且$\#T(\{*\})$ 要么是 $\{*\}$，要么是 $\{*, *\}$。

证明。 （a）部分是定理的直接应用3.7 于基数。

对于（b）部分，注意到 $\mathbf{FinSet}^{\mathrm{op}}$ 上的每个笛卡尔切结构都会保留不交并（余积），因此 $T(X) \cong T(\bigsqcup_{x\in X}\{*\}) \cong \bigsqcup_{x\in X} T(\{*\})$，这意味着 $\#T(X) = \#T(\{*\})\ \#X$。于是满足定理 3.8 的假设，因此 $\#T(X) = \#X$ 或 $\#T(X) = 2\,\#X$，这表明 $\#T(\{*\})$ 要么是 $\{*\}$，要么是 $\{*, *\}$。 □

我们可以进一步细化推论 4.5.bby 的结果，证明这些情形中只有一种可能。因此我们可以证明 $\mathbf{FinSet}^{\mathrm{op}}$ 除了平凡的笛卡尔切结构外，没有其他笛卡尔切结构。

命题 4.6。 设 $(\mathrm{FinSet}^{\mathrm{op}}, T, p, +, 0, \ell, c)$ 是 $\mathrm{FinSet}^{\mathrm{op}}$ 上的笛卡尔切结构。那么它实际上是平凡切结构，即 $T = 1_{\mathrm{FinSet}^{\mathrm{op}}}$, $p = + = 0 = \ell = c = 1$。

证明。 根据推论 4.5，有两种情况：切函子将单点集映为两点集 $T(\{*\}) = \{0, 1\}$，或 $T(\{*\}) = \{*\}$。

情况 1：假设 $T(\{*\}) = \{0, 1\}$。我们将证明这实际上是不可能的，并且会导致矛盾。为此，我们来看以下图表

$$\begin{array}{ccc} T(M) & \xrightarrow{\langle 0\circ p, 1_{T(M)}\rangle} & T_2(M) \\ & \searrow^{1_{T(M)}} & \downarrow{\scriptstyle +} \\ & & T(M) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} T(M) & \xrightarrow{\langle 1_{T(M)}, 0\circ p\rangle} & T_2M \\ & \searrow^{1_{T(M)}} & \downarrow{\scriptstyle +} \\ & & T(M) \end{array} \tag{3}$$

这些图表在任意切范畴中都必须交换。在 $\mathbb{F}\mathbf{inSet}^{\mathrm{op}}$ 中，若 $T(\{*\}) = \{0, 1\}$，则 T 沿自身的拉回需要有 3 个元素（因为基数就是维数），我们将其记作 $T_2(*) = \{a, b, c\}$。投影 $p\colon T(\{*\}) \to \{*\}$ in $\mathbb{F}\mathbf{inSet}^{\mathrm{op}}$ 对应于 $\mathbb{F}\mathbf{inSet}$ 中的一个函数 $\{*\} \to \{0, 1\}$。不失一般性，假设它将 $*$ 映为 0，即投影态射是零函数的嵌入 $p = i_0$。零截面 $0\colon \{*\} \to T(\{*\})$ 的起点是 $\mathbb{F}\mathbf{inSet}^{\mathrm{op}}$ 的始对象，因此它是唯一这样的态射。它对应于唯一的函数 $\{0, 1\} \to \{*\}$。利用这些观察，我们现在将图 3 写为

$$\begin{array}{ccc} \{0,1\} & \xleftarrow{a\mapsto 0, b\mapsto 0, c\mapsto 1} & \{a,b,c\} \\ & \nwarrow^{1_{\{0,1\}}} & \uparrow{\scriptstyle +} \\ & & \{0,1\} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \{0,1\} & \xleftarrow{a\mapsto 0, b\mapsto 1, c\mapsto 0} & \{a,b,c\} \\ & \nwarrow^{1_{\{0,1\}}} & \uparrow{\scriptstyle +} \\ & & \{0,1\} \end{array}$$

在 $\mathbb{F}\mathbf{inSet}$ 中。映射 $\{a, b, c\} \to \{0, 1\}$ 的存在，是因为到拉回的唯一态射与从推出出发的唯一态射相对应。第一个图仅当 $+(1) = c$ 时才交换，第二个图仅当 $+(1) = b$ 时才交换。因此，它们不可能同时交换，具有 $T(\{*\}) = \{0, 1\}$ 的切结构是不可能的

情况二：假设 $T(\{*\}) = \{*\}$。那么 $p_{\{*\}}$、$+_{\{*\}}$、$0_{\{*\}}$、$\ell_{\{*\}}$ 和 $c_{\{*\}}$ 都是从 $\{*\}$ 到 $\{*\}$ 的态射。由于 $\{*\}$ 是其中的始对象，这样的态射只有恒等态射。现在，由于 $(\mathbb{F}\mathbf{inSet}^{\mathrm{op}}, T, p, +, 0, \ell, c)$ 是笛卡尔的，且每个对象都是 $\{*\}$ 的乘积幂（不交并），因此函子和结构态射在其他每个对象上也都必须是恒等态射。

□

由于基数是 $\mathbb{S}\mathbf{et}^{\mathrm{op}}$ 上的一种维数，因此顶点集基数也是 $\mathbb{G}\mathrm{rph}^{\mathrm{op}}\mathbf{et}$ 上的一种维数；后者是带环图的对偶范畴。

带环图范畴 $\mathbb{G}\mathrm{rph}$ 有一个遗忘函子 $U\colon \mathbb{G}\mathrm{rph} \to \mathbb{S}\mathrm{et}$，它通过取顶点集来定义。这个遗忘函子有一个右伴随 $R\colon \mathbb{S}\mathrm{et} \to \mathbb{G}\mathrm{rph}$，它将一个集合映射为该集合上的完全图。

命题 4.7。

(a) 将图映射到其顶点数的赋值 $v\colon \pi_0(\mathbb{G}\mathrm{rph}) \to \mathbb{N}_\infty$ 是 $\mathbb{G}\mathrm{rph}^{\mathrm{op}}$上的一个$(\mathbb{N}_\infty, +)$值维数。

(b) 设$(\mathbb{G}\mathrm{rph}^{\mathrm{op}}, T, p, 0, +, \ell, c)$ 是 $\mathbb{G}\mathrm{rph}^{\mathrm{op}}$上的一个切结构。那么对于任意图 G，等式

$$v(T^2(G)) + 2 \cdot v(G) = 3 \cdot v(T(G))$$

成立。

(c) 设$(\mathbb{G}\mathrm{rph}^{\mathrm{op}}, T, p, 0, +, \ell, c)$ 是 $\mathbb{G}\mathrm{rph}^{\mathrm{op}}$ 上的一个切结构，并设 $a \in \mathbb{N}$满足：对于每个图 G, $v(T(G)) = a \cdot v(G)$。那么 $a = 1$ 或 $a = 2$。

证明。(a) 由于 $U\colon \mathbb{G}\mathrm{rph} \to \mathbb{S}\mathrm{et}$ 是左伴随，$U^{\mathrm{op}}\colon \mathbb{G}\mathrm{rph}^{\mathrm{op}} \to \mathbb{S}\mathrm{et}^{\mathrm{op}}$ 是右伴随。现在，推论 3.4 和定理 4.3 给出了上述带环图对偶范畴上的维数。

(b) 这是定理3.7的直接应用。

(c) 这是定理 3.8的直接应用。

□

集合的对范畴的一个重要扩展是多项式函子的范畴。因此，可以期望将基数扩展为多项式函子范畴上的维数。

例 4.8。多项式函子和自然变换的范畴在文献中已得到广泛研究，例如见 [20]。关于 $\mathbb{P}$中多项式函子的精确定义和构造，我们请读者参阅 [20]。它的一个关键性质是，它包含 $\mathbb{S}$集合^{op} 作为一个全子范畴，具体来说，即单项式的全子范畴。单项式的次数对应于一个集合的基数。

由于 $\mathbb{P}$多项式函子是 $\mathbb{S}$集合^{op} 的扩展，因此将多项式函子的次数定义为维数似乎很有希望。然而，我们将给出一个拉回的例子，其中多项式的次数并不像定义 *3.2*中那样相加。

$\mathbb{P}\mathrm{oly}$ 中的拉回在 [20, 例5.38]中有说明。它们通过对单项式集取拉回、对指数取推出而得到。根据拉回的这一刻画，下面的方块是 $\mathbb{P}\mathrm{oly}$中的一个拉回。

$$\begin{array}{ccc} y^{\{1,2,3\}} + y^{\{a,b,c\}} & \longrightarrow & y^{\{3\}} + y^{\{a,b\}} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle y^0+y^0} \\ y^{\{1,2\}} + y^{\{c\}} & \xrightarrow[y^0+y^0]{} & y^{\emptyset} + y^{\emptyset} \end{array}$$

其中，对任意集合 X，映射$0\colon \emptyset \to X$ 是$\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}\mathrm{et}(\emptyset, X)$ 的唯一元素，并且 $y\colon \mathbb{S}\mathrm{et}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Fun}(\mathbb{S}\mathrm{et}\ \mathbb{S}\mathrm{et})$ 是*Yoneda*嵌入。由于$0\colon \emptyset \to X$ 是 $\mathbb{S}\mathrm{et}$中的一个截面，自然变换y^0 与 $y^0 + y^0$ 是 $\mathbb{P}\mathrm{oly}$中的回缩。于是

$$\deg(y^{\{3\}} + y^{\{a,b\}}) + \deg(y^{\{1,2\}} + y^{\{c\}}) = 2 + 2 = 4$$

而

$$\deg(y^{\{1,2,3\}} + y^{\{a,b,c\}}) + \deg(y^0 + y^0) = 3 + 0 = 3.$$

Thus

$$\deg(y^{\{3\}}+y^{\{a,b\}})+\deg(y^{\{1,2\}}+y^{\{c\}})\neq\deg(y^{\{1,2,3\}}+y^{\{a,b,c\}})$$

表明多项式函子次数并非 $\mathbb{P}\mathrm{oly}$ 上的维数。

5 群的基数作为取值于非标准幺半群的维数

集合上最重要的代数结构之一是群。在 [12], 中，定义了一种基于群的阿贝尔化的群范畴切结构。与集合一样，基数是描述群大小的最重要量。因此，我们将在下文考察它是否是 $\mathbb{G}\mathrm{rp}$ 或 $\mathbb{G}\mathrm{rp}^{\mathrm{op}}$上的维数。

谈到群上的切结构时，人们可能首先想到李群的底层流形结构，它在离散群上给出一种平凡切结构。然而，在 [12], 中，Sacha Ikonicoff、Jean-Simon Lemay 和 Tim Van der Linden 指出，群范畴上还存在另一种切结构，它纯粹基于代数性质，而非群的拓扑性质。我们将在例5.4中探讨维数在这种切结构上的影响。

$\mathbb{G}\mathrm{rp}$ 上的维数有一个有趣之处：它取值于 $(\mathbb{N}_\infty,\cdot)$，而不是 $(\mathbb{N}_\infty,+)$。与此前所有例子不同，它所取值的交换幺半群结构由乘法而非加法给出。这表明，取值于任意交换幺半群所带来的作用。

将基数视为 $\mathbb{G}\mathrm{rp}$ 上维数的候选时，必须选择乘法作为幺半群运算，才能得到与备注 （b’）（关于积的可加性）中所需性质类似的性质 3.1 ，因为 $\#(G\times G')=\#G\cdot\#G'$。

引理 5.1。设 $A\xrightarrow{f}C\xleftarrow{g}B$ 是 $\mathbb{G}\mathrm{rp}$ 中的一个余跨，其中 f 是满态射。那么拉回 $A\times_C B$ 存在，并且

$$\#(A\times_C B)\cdot\#C=\#A\cdot\#B.$$

证明。由于有限群范畴是完备的，拉回存在。由于从有限群到有限集的遗忘函子保极限，拉回的底层集合可以用以下公式明确描述

$$A\times_C B=\{(a,b)\in A\times B\mid f(a)=g(b)\}.$$

现在我们将此公式改写为

$$A\times_C B=\bigsqcup_{c\in\mathrm{Im}(g)}g^{-1}(c)\times f^{-1}(c),$$

其中 $\mathrm{Im}(g)$ 表示像，$g^{-1}(c)$ 和 $f^{-1}(c)$ 表示原像。若 C 是有限的，因此 $\mathrm{Im}(g)$ 也是有限的，则由第一同构定理以及 f 的满射性可知，对于任意 $c\in\mathrm{Im}(g)$，这意味着 $\#g^{-1}(c)=\#B\,/\#\mathrm{Im}(g)$，且 $\#f^{-1}(c)=\#A\,/\#C$。因此我们得出

$$\#(A\times_C B)=\#\mathrm{Im}(g)\cdot\frac{\#B}{\#\mathrm{Im}(g)}\cdot\frac{\#A}{\#C}=\frac{\#B\cdot\#A}{\#C}.$$

将等式两边乘以 $\#C$，即可完成 C 为有限集时的证明。

如果 C 是无限的，则 f 的满射性意味着 A 也是无限的。因此

$$\#A\cdot\#B=\infty=\#C\cdot\#(A\times_B C).$$

这里我们采用定义 4.1 中的约定，即 $0\cdot\infty=\infty$。 □

我们注意到，这个公式与定义3.2 非常相似，只不过将加法换成了乘法。因此，我们现在来考虑定义$\mathbb{N}_\infty$、$\cdot$中定义的交换幺半群（4.1）。

定理 5.2。其基数为

(a) 在 $\mathbb{G}\mathrm{rp}$ 上取值于 $(\mathbb{N}_\infty, \cdot)$ 的维数，并且

(b) 在 $\mathbb{F}\mathrm{inGrp}$ 上取值于 $(\mathbb{N}, \cdot)$ 的维数。

证明。

(a) 这由引理5.1得出。

(b) 这由推论3.4 以及以下事实得出： $\mathbb{F}\mathbf{inGrp}$ 是 $\mathbb{G}$的全子范畴 rp.

□

推论 5.3。设 X 是一个群。

(a) 对于定义在 $\mathbb{G}\mathrm{rp}$ 或 $\mathbb{F}\mathrm{inGrp}$上的任意切结构 $(T, p, 0, +, \ell, c)$，等式

$$\#T^2(X) \cdot (\#X)^2 = (\#T(X))^3$$

必须成立。

(b) 对于定义在 $\mathbb{F}\mathrm{inGrp}$ 上且满足 $\#T(X) = (\#X)^n$ 的任意切结构 $(T, p, 0, +, \ell, c)$，常数 n 只能是 $n = 1$ 或 $n = 2$。

(c) 唯一的 满足 $T(X) \cong X$ 的定义在 $\mathbb{F}\mathrm{inGrp}$ 上且满足 $\#T(X) = n \cdot \#X$ 的切结构 $(T, p, 0, +, \ell, c)$.

证明。

(a) 这由定理 5.2 和 3.7 推出。对于交换幺半群 $(\mathbb{N}, \cdot)$ 来表述时，定理 3.7 中的交换幺半群运算“ ”变为乘法“ ”
$\cdot$.

(b) 根据 (a) 部分，等式

$$((\#X)^n)^n \cdot (\#X)^2 = (\#X)^{3n}$$

必须成立。为简洁起见，我们记作 $a{:=}\#X$，并将等式简化为

$$a^{n^2+2} = a^{3n}.$$

由于这对任意有限群 X 都必须成立，因此对任意 $a \in \mathbb{N}$ 都必须成立，这意味着 $n^2 + 2 = 3n$，而这仅在 $n = 1$ 或 $n = 2$ 时成立。

(c) 根据 (a) 部分，等式

$$n^2 \cdot \#X \cdot (\#X)^2 = (n \cdot \#X)^3$$

必须成立。这意味着 $n^2 = n^3$，而这仅在 $n = 0$ 和 $n = 1$ 时成立。然而， $n = 0$，因为每个群至少有一个元素，因此 $\#T(X) = 0$ 不可能成立。于是 $\#X = \#T(X)$。根据第一同构定理，不改变基数的满态射 $p : T(X) \to X$ 只能是同构。

□

作为一个例子，我们现在来看看这个公式如何应用于$\mathbb{G}\mathbf{rp}$ 上已知的非平凡切结构。

例 5.4 ([12], 例 3.8)。 在 $\mathbb{G}\mathrm{rp}$ 上存在一种切结构，其切丛自函子定义为

$$T(G) = G \times \mathrm{Ab}(G)$$

其中 $\mathrm{Ab}(G)$表示阿贝尔化。这意味着

$$T^2(G) \cong G \times \mathrm{Ab}(G) \times \mathrm{Ab}(G) \times \mathrm{Ab}(G)$$

因为 $\mathrm{Ab}(\mathrm{Ab}(G)) \cong \mathrm{Ab}(G)$。定义 $n_G := \#G$ 以及 $k_G := \#\mathrm{Ab}(G)$。由于 $\mathrm{Ab}(G)$ 是 G的商群，$k_G \leq n_G$且 k_G 整除 n_G。那么 $\#T(G) = n_G \cdot k_G$且 $\#T^2(G) = n_G \cdot (k_G)^3$。因此，该等式

$$\#T^2(G) \cdot (\#G)^2 = (\#T(G))^3$$

变为

$$n_G \cdot (k_G)^3 \cdot n_G^2 = (n_G \cdot k_G)^3.$$

因此，在这个例子中，推论5.3（a）中的等式成立。

事实上，Lemay 和 Ikonicoff 还在 [12, 例 4.16] 中给出了一个关于微分丛的结果：每个微分丛都具有 $M \times A \xrightarrow{\pi_0} M$ 的形式，其中 A 是某个阿贝尔群。这意味着

$$\frac{\#\mathrm{Ab}(M \times A)}{\#(M \times A)} = \#A = \frac{\#\mathrm{Ab}(M)}{\#M}.$$

现在，我们将通过使用基数作为维数，为这个等式提供另一种证明，以展示维数的可能性。

命题5.5。 设 $(\mathbb{G}\mathrm{rp}\ T, p, 0, +, \ell)$ 是由 [12] 在例 5.4 中描述的切结构。设 $E \to M$ 是 $(\mathbb{G}\mathrm{rp}\ T, p, 0, +, \ell)$中的一个微分丛。那么

$$\frac{\#\mathrm{Ab}(E)}{\#E} = \frac{\#\mathrm{Ab}(M)}{\#M}$$

证明。 根据定理 3.13，等式

$$\#T(E) \cdot (\#M)^2 = \#T(M) \cdot (\#E)^2$$

成立。由于 $\#T(E) = \#E \cdot \#\mathrm{Ab}(E)$ 且 $\#T(M) = \#M \cdot \#\mathrm{Ab}(M)$，可将其展开为

$$\#\mathrm{Ab}(E) \cdot \#E \cdot (\#M)^2 = \#\mathrm{Ab}(E) \cdot \#M \cdot (\#E)^2.$$

将等式两边同时除以 $\#E^2 \cdot \#M^2$ leads to the equation

$$\frac{\#\mathrm{Ab}(E)}{\#E} = \frac{\#\mathrm{Ab}(M)}{\#M}.$$

□

在例 7.8 中，我们还将看到，阿贝尔群子范畴上存在另一个非平凡的范畴维数，即整数上的秩。原因在于每个阿贝尔群都是整数模。由于基数是 $(\mathbb{N}_\infty, +)$值维数，定义在 $\mathbb{S}\mathrm{et}^{\mathrm{op}}$上，人们可能会猜想，基数也是 $(\mathbb{N}_\infty, +)$值维数，定义在 $\mathbb{G}\mathrm{rp}^{\mathrm{op}}$上，也就是群的对偶范畴，因为它已经是 $\mathbb{S}\mathrm{et}^{\mathrm{op}}$上的一个维数。然而，推论3.4 在此处并不适用，因为遗忘函子 $\mathbb{G}\mathrm{rp}^{\mathrm{op}} \to \mathbb{S}\mathrm{et}^{\mathrm{op}}$ 只有右伴随，没有左伴随。

事实上，基数并不是 $\mathbb{G}\mathrm{rp}^{\mathrm{op}}$ 上的维数。原因在于， $\mathbb{G}\mathrm{rp}^{\mathrm{op}}$ 中的积就是 $\mathbb{G}\mathrm{rp}$ 中的余积，即群的自由积。群的自由积不满足注记 (b') 中所需的性质（关于积的可加性），见 3.1。对于有限群 A 和 B，$\#(A \otimes B)$ 的基数甚至可能是无限的。

6 特征、克鲁尔维数与最小公倍数

本节将探讨环的维数的不同研究方法。首先，我们定义若干不同的环范畴。我们考虑的不同选择取决于环是否交换、是否含幺，以及同态是否必须保持幺元。

接下来，我们将证明含幺环的特征是一种范畴维数。这意味着，含幺环范畴上的任何切结构都必须满足某些约束。这是证明环上的任何切结构都必须保持特征的一部分。

接下来，我们将证明克鲁尔维数既不是环范畴上的范畴维数，也不是其对偶范畴上的范畴维数。这一点令人意外，因为交换含幺环的对偶范畴等价于仿射概形范畴，而概形的维数与环的克鲁尔维数相对应。不过，仿射概形的维数只有在光滑概形的切结构下才相容。我们推测，在与光滑概形相对应的交换含幺环子范畴的对偶范畴上，克鲁尔维数会是一种范畴维数。

令 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_n$ 为由所有环（可能没有幺元，n 表示不含幺元）及所有环同态（保持零元、加法和乘法的函数）构成的范畴。令 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_1$ 表示 $\mathbb{R}\mathrm{ing}$ 的全子范畴，其对象是所有含幺环，即带有幺元的环。态射不一定保持幺元。令 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_u$ 表示 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_1$ 的子范畴，其中只允许保持幺元的同态。我们将 $\mathbb{C}\mathrm{Ring}_n$、$\mathbb{C}\mathrm{Ring}_1$ 和 $\mathbb{C}\mathrm{Ring}_u$ 定义为 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_n$、$\mathbb{R}\mathrm{ing}_1$ 和 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_u$ 的全子范畴，其对象均为交换环。为便于概览，我们将这些内容汇总于表 1。

Name	对象	态射
$\mathbb{R}\mathrm{ing}_n$	任意环	任意环同态
$\mathbb{R}\mathrm{ing}_1$	含幺环	任意环同态
$\mathbb{R}\mathrm{ing}_u$	含幺环	保单位环同态
$\mathbb{C}$环$_n$	任意交换环	任意环同态
$\mathbb{C}$环$_1$	含幺交换环	任意环同态
$\mathbb{C}$环$_u$	含幺交换环	保单位环同态

表 1：我们对不同环范畴所采用的约定

在其他文献中，$\mathbb{R}\mathrm{ing}$ 有时表示 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_n$，有时表示 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_u$，而 $\mathbb{C}\mathrm{Ring}$ 最常表示 $\mathbb{C}\mathrm{Ring}_u$。为清晰起见，我们不使用未加修饰的 $\mathbb{R}\mathrm{ing}$ 和 $\mathbb{C}\mathrm{Ring}$。

在定义环范畴上的维数之前，我们将首先描述环的拉回。

引理 6.1。任意拉回

$$\begin{array}{ccc} A \times_B C & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow f \\ C & \xrightarrow[g]{} & B \end{array}$$

在 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_n$, $\mathbb{R}\mathrm{ing}_1$、$\mathbb{R}\mathrm{ing}_u$、$\mathbb{C}\mathrm{Ring}_n$、$\mathbb{C}\mathrm{Ring}_1$ 或 $\mathbb{C}\mathrm{Ring}_u$ 中，均具有如下形式

$$A \times_B C = \{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = g(b)\},$$

如果它存在。环运算是逐分量定义的。

证明。$\mathbb{R}\mathrm{ing}_n$ 的公式是极限定义的一个简单应用。$\mathbb{R}\mathrm{ing}_1$、$\mathbb{C}\mathrm{Ring}_n$ 和 $\mathbb{C}\mathrm{Ring}_u$ 的公式源于全子范畴的嵌入保持极限这一事实。$\mathbb{R}\mathrm{ing}_u$ 的公式直接应用了极限的定义，而 $\mathbb{C}\mathrm{Ring}_u$的公式则源于 $\mathbb{C}\mathrm{Ring}_u$ 是 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_u$的一个全子范畴这一事实。 □

拉回在 $\mathbb{R}\mathbf{ing}_1$ 和 $\mathbb{C}\mathbf{Ring}_1$中并不总是存在。下面是一个拉回的例子：

$$\begin{array}{ccc} 2\mathbb{Z} & \hookrightarrow & \mathbb{Z} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle x\mapsto(x,0)} \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow[x\mapsto(x,[x])]{} & \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2 \end{array}$$

在 $\mathbb{R}$中$_n$ w hich 在 $\mathbb{R}$中不存在，因为$_1$ ，即偶整数集合，没有乘法单位元 it.

6.1 以最小公倍数幺半群中的维数值作为特征

本节将使用自然数上的一种幺半群结构，它既不是幺半环 N 上的任一种运算。起初，人们可能会认为环的特征作为维数是个奇怪的选择，因为一般而言，$\mathbf{char}(R\times R') \neq \mathrm{char}(R)+\mathrm{char}(R')$，因此，所希望的性质 (b')(关于积的可加性)并不成立。然而，最小公倍数也是 $\mathbb{N}_\infty^*$ 上的一种幺半群结构。

定义 6.2。 令 $\mathbb{N}_\infty^*$ 表示非零自然数集与无穷大

$$\mathbb{N}_\infty^* := \mathbb{N}\setminus\{0\}\sqcup\{\infty\} = \{1,2,3,...,\infty\}.$$

给定 a、 $b\in\mathbb{N}_\infty^*$，我们将它们的最小公倍数定义为

$$\mathrm{lcm}(a,b) = \min(\{x\in\mathbb{N}_\infty^* \mid \exists s,t\in\mathbb{N}_\infty^*, x = s\cdot a = t\cdot b\}).$$

我们定义 $\mathrm{lcm}(a,\infty) = \mathrm{lcm}(\infty,b) = \infty$ 对所有 $a,b\in\mathbb{N}_\infty\setminus\{0\}$。

最小公倍数构成一个以 1 为幺元的交换幺半群。特别地，lcm 是结合的，因为三个数 a、 b、 c的最小公倍数既等于 $\mathbf{lcm}(a,\ \mathbf{lcm}(b,\ c))$，也等于 $\mathbf{lcm}(\mathbf{lcm}(a,\ b)\ c)$。

特征关于这个幺半群结构是可加的，即

$$\mathrm{char}(R\times R') = \mathrm{lcm}(\mathrm{char}(R),\mathrm{char}(R')),$$

因此，性质(b')（关于积的可加性）相对于这个幺半群结构成立。

本节将证明，含幺环的特征是一个维数。特征定义如下。

定义 6.3。 设 R 是一个环。特征 $\mathrm{char}(R)$ 定义为

$$\mathrm{char}(R) = \min\{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\} \mid n\cdot x = 0\ ,\forall x\in R\}.$$

如果 不存在一个数 $n\in\mathbb{N}$，使得对于所有 $x\in R$、 $n\cdot x = 0$，我们称特征为 ∞ .

如果特征有限，这就是 [10] 中的经典定义。按照经典定义，若不存在一个数 $n\in\mathbb{N}$，使得对所有 x 都有 $n\cdot x = 0$，则特征定义为零。

在文献中，更常见的做法是：我们称特征为无穷时，将其称为零。我们采用这种不寻常的约定，因为这样更容易定义一种幺半群结构，使特征成为范畴维数。

引理 6.4。 设 $(R,+,;0)$ 是一个特征为 n 的环。那么存在一个元素 $x_R\in R$，使得对所有 $k<n$ 都有 $k\cdot x_R\neq 0$ 。我们称该元素为最大阶元素。

证明。 这个证明的关键在于， R 的乘法结构并不重要；这里所说的只是关于阿贝尔群（$R,+,\mathbf{0}$）的一个结论。由于有限指数的刻画

阿贝尔群中的 [13, 定理 8。6], 阿贝尔群（$R, +, 0$）与若干循环群的乘积（作为群）同构。

$$R \overset{\varphi}{\cong} \prod_{i \in i} \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$$

其中 n 是 n_i的最小公倍数。元素 $x_R = \varphi^{-1}(1, 1, \ldots\ldots)$ 满足所需性质，因为 $k \cdot (1, 1, \ldots\ldots) \neq 0$ 对于 $k < n$。 □

截面-收缩对在范畴维数的定义和切范畴的定义中起着关键作用。因此，我们会经常使用截面-收缩对来推理特征。为此，值得牢记的是，截面不会降低特征。

引理 6.5. 给定 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_n$中的一个截面 $A \xrightarrow{s} B$ 及其收缩 $B \xrightarrow{r} A$，不等式

$$\mathrm{char}(A) \leq \mathrm{char}(B)$$

成立。此外，特征(B) 是特征(A)的倍数。

证明。我们区 分 A 具有有限特征和 A 具有无限特征这两种情况 .

情况一： A 具有无限特征。由于 A 具有无限特征，对于每个 $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$，都存在一个 $x_n \in A$ 使得 $n \cdot x_n \neq 0$。于是 $s(x_n) \in B$ 满足

$$n \cdot x_n = n \cdot r(s(x_n)) = r(n \cdot s(x_n)) \neq 0.$$

因此 $n \cdot s(x_n) \neq 0$。由于 n 是任意的，这就证明了 B 具有无限特征 .

情况二： A具有有限特征。设 x_A为引理 中构造的元素。由于 $r \circ s = 1_A$，对于每个 $n <$特征(A)，我们知道

$$0 \neq n \cdot r(s(x_A)) = r(n \cdot s(x_A)).$$

由于 r是一个环同态，这意味着对于 $s(x_A) \in B$，有 $n \cdot s(x_A) \neq 0$，从而 $\mathrm{char}(B) \geq \mathrm{char}(A)$。

另一方面,

$$s(\mathrm{char(B)} \cdot x_A) = \mathrm{char}(B) \cdot s(x_A) = 0$$

因此

$$\mathrm{char(B)} \cdot x_A = r(s(\mathrm{char(B)} \cdot x_A)) = r(0) = 0$$

这意味着特征(B)是特征(A)的倍数。 □

命题 6.6. 特征特征 是定义在 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_n$、 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_1$ 以及$\mathbb{R}\mathrm{ing}_u$上的$(\mathbb{N}^*_\infty$,最小公倍数)值维数。

证明。 我们将首先检验定义 3.2 对于 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_u$ 的准则，然后再对于 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_1$的准则。

在 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_u$中，对任意态射 f： $R \to R'$，特征不能增大，特征(R') $\leq$ 特征(R)，因为$0 = f(0) = f($特征$(R) \cdot 1)$。因此，给定 R 与 R'之间的截面-收缩对，特征(R) $=$ 特征(R')。现令

$$\begin{array}{ccc} A \times_B C & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow r \\ C & \xrightarrow[f]{} & B \end{array}$$

可以是定义 3.2 中的任意一个拉回 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_u$。那么 f 和 r 都是截面-收缩对的一部分，且所有 4 个顶点的特征都相同。因此

$$\mathrm{lcm}(\mathrm{char}(A), \mathrm{char}(C)) = \mathrm{lcm}(\mathrm{char}(A \times_B C), \mathrm{char}(B))$$

显然成立。

现在令

$$\begin{array}{ccc} A \times_B C & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow r \\ C & \xrightarrow[f]{} & B \end{array}$$

为定义3.5 中 $\mathbb{R}$的$_n$中的任意一个拉回。假设 A和 C 具有有限特征，令 $x_A \in A$ 和 $x_C \in C$ 为引理6.4中构造的最大阶元素。我们将区分 f 是截面和 f 是收缩的情形。

情形 *1*：假设 f 是收缩，特别地，它是满射。因此存在一个 $y_C \in C$ 使得$f(y_c) = r(x_A)$，于是我们有$(x_a, y_C) \in A \times_B C$，使得对于 $k \leq$，char(A)，$k \cdot (x_A, y_C) = (k \cdot x_A, k \cdot y_C) \neq 0$。因此 char($A \times_B C$) 是 char($A$) 的倍数。

类似地，存在一个 $y_A \in A$ 使得$(y_A, x_C) \in A \times_B C$，因此 char($A \times_B C$) 是 char($C$) 的倍数。这表明 char($A \times_B C$) 是 lcm(char($A$)，char($C$)) 的倍数。由于 $A \times_B C$ 是 $A \times C$的子集，等式

$$\mathrm{char}(A \times_B C) = \mathrm{lcm}(\mathrm{char}(A), \mathrm{char}(C))$$

成立。根据引理 6.5，特征(B) 整除特征(A)，这意味着

$$\mathrm{lcm}(\mathrm{char}(A \times_B C), \mathrm{char(B)}) = \mathrm{lcm}(\mathrm{lcm}(\mathrm{char}(A), \mathrm{char}(C)), \mathrm{char}(B)) = \mathrm{lcm}(\mathrm{char}(A), \mathrm{char}(C)).$$

这恰好是我们需要证明的定义 3.2 中的等式。

情况二：设 f 是一个截面。那么，根据引理 6.5，特征(B) 和特征(C) 均整除特征(A)。

设 $s : B \to A$ 是收缩 r的一个截面。通过选取 $z_A = x_A - s(r(x_A))$，我们可以将最大阶元素 $x_A \in A$ 表示为$x_A = s(r(x_a)) + z_A$，其中 $r(z_A) = 0$。

对于 $k =$ lcm(特征($A \times_B C$),特征(B))，我们注意到

$$k \cdot x_A = k \cdot s(r(x_A)) + k \cdot z_A.$$

由于 k 是 char(B) 的倍数，因此 $k \cdot s(r(x_A)) = s(k \cdot r(x_A)) = 0$。由于 $r(z_A) = 0$，我们有元素 $(z_A, 0) \in A \times_B C$；又由于 k 是 char($A \times_B C$) 的倍数，$k \cdot (z_A, 0) = 0$，这意味着 $k \cdot z_A = 0$。

因此 $k \cdot x_A = 0$；又由于 x_A 的序最大，这表明 char(A) 整除 lcm(char($A \times_B C$)，char(B))。由于 char(C) 整除 char(A)，等式 lcm(char(A)，char(C)) $=$char(A) 成立，这意味着 lcm(char(A)，char(C)) $=$char(A) 整除 lcm(char($A \times_B C$)，char(B)。由于 $A \times_B C$ 是 $A \times C$ 的子集，这表明

$$\mathrm{lcm}(\mathrm{char}(A \times_B C), \mathrm{char}(B)) = \mathrm{lcm}(\mathrm{char}(A), \mathrm{char}(C)).$$

这正是我们需要为定义 3.2证明的等式。

现在只需证明该等式

$$\mathrm{lcm}(\mathrm{char}(A \times_B C), \mathrm{char}(B)) = \mathrm{lcm}(\mathrm{char}(A), \mathrm{char}(C)).$$

在 char(A) 或 char(C) 为无限时也成立。若 char(B) $= \infty$，则显然成立。假设 char(B) 有限。由于当 f 是截面时，char(C) $\leq$char(B)；而当 f 是收缩时，可以交换 C 和 A，因此不失一般性地，假设 char(A) $= \infty$。

任取 $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$。设 $x_n \in A$ 满足 $n \cdot$特征(B) $\cdot x_n \neq 0$。那么 r(特征(B) $\cdot x_n$) $= 0$，因此 (特征(B) $\cdot x_n$, 0) $\in A \times_B C$ 满足

$$n \cdot (\mathrm{char}(B) \cdot x_n, 0) \neq 0.$$

由于 n 是任意的，这表明特征$(A \times_B C) = \infty$，因此

$$\operatorname{lcm}(\operatorname{char}(A \times_B C), \operatorname{char}(B)) = \operatorname{lcm}(\operatorname{char}(A), \operatorname{char}(C)).$$

成立。由此完成了证明：特征是$\mathbb{N}_\infty^*$，lcm）值维数，定义在 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_n$上。由于 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_1$是 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_n$的全子范畴，推论 3.4 表明，它也在$\mathbb{N}_\infty^*$，lcm）值维数，定义在$\mathbb{R}\mathrm{ing}_1$上。

□

推论 6.7。 特征 char 是一个$(\mathbb{N}_\infty^*$,lcm)值维数，定义在 $\mathbb{C}$环$_1$ 和 $\mathbb{C}$环$_u$上。

证明。 这直接由命题 6.6 和推论 3.4得出。 □

因此，切丛的特征现在已在 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_1$ 和 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_u$中确定。然而，在 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_u$ 中，切丛的特征无论如何都是确定的。

命题 6.8。 设$(T, p, 0, +, \ell, c)$ 是 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_u$上的一个切结构。那么对于任意含幺环 R,

$$\operatorname{char}(T(R)) = \operatorname{char}(R).$$

证明。 这直接源于这样一个事实：保幺环同态只能使特征减小。由于 $R \xrightarrow{0} T(R)$ 和 $T(R) \xrightarrow{p} R$ 都是保幺环同态，因此它们的特征必然相等。

□

然而，对于 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_1$，维数还能带来额外的洞见。

推论 6.9。 设 $(T, p, 0, +, \ell, c)$ 是 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_n$ 或 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_1$ 上的一个切结构。那么，对于每个对象R,

$$\operatorname{lcm}(\operatorname{char}(T^2(R)), \operatorname{char}(R)) = \operatorname{char}(T(R))$$

证明。 这是将定理 3.7 应用于命题 6.6 中定义的维数所得。 □

然而，由于我们有一个截面-收缩对 $R \xrightarrow{0} T(R)$ $T(R) \xrightarrow{p} R$，因此甚至可以得出更强的结论。

推论 6.10。 设 $(T, p, 0, +, \ell, c)$ 是 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_n$ 或 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_1$ 上的一个切结构。那么，对于每个对象R，都存在一个数 n_R 使得

$$\operatorname{char}(T(R)) = n_R \cdot \operatorname{char}(R)$$

and

$$\operatorname{char}(T^2(R)) = \operatorname{char}(T(R)).$$

证明。推论 论 6.9 意味着 $T(R)$ 的特征是 R的特征的倍数。 .

推论 6.9 还意味着它是 $T^2(R)$ 的特征的倍数。将同样的论证应用于 $T(R)$，而不是 R，可得 char(T^2 (R)) 是 char($T(R)$) 的倍数。这意味着 char($T(R)$) =char($T^2(R)$).

□

在 [21] 中构造了 $\mathbb{C}\mathrm{Ring}_u$ 上切结构的一个例子。

例 6.11. [21, 例 2] 对于含幺交换环及保幺元环同态的范畴 $\mathbb{C}$环$_u$ ，在 $\mathbb{C}$环$_u$ 上存在切结构，其中切丛自函子 T 将环 R 映到 $R[x]/(x^2)$。

事实上，该切丛自函子保持特征：特征($T(R)$) $=$ 特征(R)。

所有 $\mathbb{C}$环$_u$ 的拉回都是由环同态组成的方块，且这些环同态是底层集合的拉回。因此，所有 $\mathbb{C}$环$_u$ 的拉回也是 $\mathbb{C}$环$_1$，中的拉回，这意味着 $\mathbb{C}$环$_u$ 上的任意切结构也是 $\mathbb{C}$环$_1$上的切结构。因此，6.11也是一个保持特征的 $\mathbb{C}$环$_1$ 上的切结构。

目前尚不清楚是否存在定义在 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_n$、 $\mathbb{C}$环$_n$、 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_1$ 或 $\mathbb{C}$环$_1$ 上的切结构，使得切丛自函子不保持特征。若存在，它必须满足推论 6.10的要求。

6.2 满足积但不满足拉回的克鲁尔维数

“环的维数”一词通常用于指交换环的克鲁尔维数，它通过素理想的升链来定义，并在代数几何中有广泛应用。由于

$$\dim(R \times R') = \max(\dim(R), \dim(R')),$$

理想性质 (b') （关于积的可加性），即备注 3.1中的性质，在选取 max 作为幺半群结构时成立。

然而，我们将证明定义 3.2 中的拉回条件不成立，因此它不是 $\mathbb{C}$环$_u$上的维数。

定义 6.12。 [9, 页 217] 设 R 是一个带幺元的交换环，其克鲁尔维数是素理想最长链的长度 n

$$0 \subsetneq p_1 \subsetneq ... \subsetneq p_n \subsetneq R.$$

克鲁尔维数具有一些有用的性质。

(a) 设 F 是一个域。则 $\dim(F[x_1, ..., x_n]) = n$.

(b) 设 R， R' 是交换环，则 $\dim(R \times R') = \max(\dim(R), \dim(R'))$。

我们在此证明，它不是一个 $\mathbb{N}_\infty$ 取值于 $\mathbb{C}$环$_u$ 上的维数（按定义 3.2 的意义）。以下例子将表明，它不是取值于 $\mathbb{N}_\infty$ 上定义的任何幺半群结构的维数；这些结构见 4.1。

下面的例子将说明，它不可能是一个取值于 (N_∞,max) 的维数。

例 6.13。该图表

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q}[y] & \longrightarrow & \mathbb{Q}[x,y]/(xy) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathbb{Q} & \hookrightarrow & \mathbb{Q}[x] \end{array} \tag{4}$$

是 $\mathbb{C}$环$_u$ 中的一个拉回，其中映射 $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}[x]$ 将一个数作为常数项嵌入，映射 $\mathbb{Q}[x,y]/(xy) \to \mathbb{Q}[x]$ 则在 $y = 0$ 处取值。它是一个拉回，因为给出一对 (r, p)，其中 $r \in \mathbb{Q}$ 和 $p \in \mathbb{Q}[x,y]/(xy)$ 满足 $p(x,0) = r$，等价于给出一个没有 x 项的多项式 $p \in \mathbb{C}[x,y]/(xy)$，也就是说，一个多项式 $p \in \mathbb{C}[y]$。

同一个例子表明，它不是 $\mathbb{C}\mathrm{Ring}_1$ 上的范畴维数。

对于一个域 F，余积 $F[x_1, ..., x_n] \otimes F[x_1, ..., x_k] = F[x_1, ..., x_{n+k}]$。由于 $\dim(F[x_1, ..., x_n]) = n$，这表明对于对偶范畴 $\mathbb{C}\mathrm{Ring}_u^{\mathrm{op}}$，期望的性质 (b') （关于积具有可加性），见注释 3.1 适用于 $(\mathbb{N}_\infty, +)$。

代数几何的背景也会表明，克鲁尔维数是 $\mathbb{C}$环$_u^{\mathrm{op}}$上的一种范畴维数。范畴 $\mathbb{C}$环$_u^{\mathrm{op}}$等价于仿射概形范畴，并且对于

光滑仿射概形，概形论维数等于克鲁尔维数。然而，利用例6.14中对应于非光滑概形之拉回的反例，我们将证明，在定义3.2的意义下，它仍然不是维数。

例6.14。 令 $\mathbb{Q}$ 表示有理数域。令 i' 表示嵌入 $\mathbb{Q}[x] \hookrightarrow \frac{\mathbb{Q}[x,y]}{\langle x \cdot y \rangle}$ 。该图表

$$\begin{array}{ccc} \frac{\mathbb{Q}[x,y]}{\langle x \cdot y \rangle} & \xrightarrow{\quad i \quad} & \frac{\mathbb{Q}[x,y,z]}{\langle x \cdot y \rangle} \\ {\scriptstyle \mathrm{ev}_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1} \\ \mathbb{Q}[x] & \xrightarrow[i \circ i']{} & \frac{\mathbb{Q}[x,y,z]}{\langle x \cdot y \rangle} \end{array}$$

是 $\mathbb{C}$环 中的一个推出方块，因此对应于 $\mathbb{C}$环^{op}中的一个拉回方块。然而，所涉及的环的克鲁尔维数为

$$\dim(\mathbb{Q}[x]) = 1 \ , \ \dim\left(\frac{\mathbb{Q}[x,y,z]}{\langle x \cdot y \rangle}\right) = 3 \ , \ \dim\left(\frac{\mathbb{Q}[x,y]}{\langle x \cdot y \rangle}\right) = 2$$

因此

$$\dim\left(\frac{\mathbb{Q}[x,y,z]}{\langle x \cdot y \rangle}\right) + \dim(\mathbb{Q}[x]) = 3 + 1 \neq 3 + 2 = \dim\left(\frac{\mathbb{Q}[x,y,z]}{\langle x \cdot y \rangle}\right) + \dim\left(\frac{\mathbb{Q}[x,y]}{\langle x \cdot y \rangle}\right).$$

注6.15。 仿射概形范畴等价于 $\mathbb{C}$环$_u$ 的对偶范畴，而克鲁尔维数对应于概形的维数。然而，只有对于域上的光滑概形，概形的维数才与切结构相容；详见 [23, 第 13]章。

因此，几何直觉表明，克鲁尔维数是 $(\mathbb{N}, +)$-值维数（定义 *3.2* 意义下），定义在 $\mathbb{C}$环$_u^{\mathrm{op}}$的光滑对象上。我们猜想这是真的，但证明需要用到代数几何中的技术细节，超出了本文的范围。

7 利用伴随在模与代数之间传递维数

本节将给出一个定义在 R-模范畴上的范畴维数示例，并利用一个伴随将此维数传递到 R-代数范畴。

首先，我们将证明，对于任意主理想整环 R， $\mathbb{M}$其$_R$上的 R-模范畴以及 R-模同态范畴上的秩是一种范畴维数， R。特别地，这表明，对于域 $\mathbb{V}$，$_F$ 向量空间的维数是范畴 F上的一种范畴维数。因此， $\mathbb{M}$上的$_R$ 切结构必须满足推论 7.7中的方程。

接下来，我们将证明，利用 R-代数与 R-模之间的自由-遗忘伴随，可以在 R-代数上得到一个范畴维数。最后，作为补充观察，我们使用 $\mathbb{V}$ect 上的范畴维数，证明 $\mathbb{V}$ect 上至多存在两种切结构，并对它们加以识别。

在 [18][第四节中，2]Mac Lane 证明了 $\mathbb{M}\mathrm{od}_R$ 与$\mathbb{A}$bGrp 之间存在一个自由-遗忘伴随。因此，根据推论 3.4，底层阿贝尔群的基数已经是$\mathbb{N}_\infty$,-值维数 $\mathbb{M}\mathrm{od}_R$上的范畴维数。在7.1 节中，我们将证明秩是 $\mathbb{M}\mathrm{od}_R$上的第二个范畴维数。

例 7.1。 范畴 $\mathbb{M}\mathrm{od}_R$ 具有一种稍显退化的切结构，对于 R-模V ，该结构定义为

- *the tangent bundle endofunctor* $T(V) = V \times V$ *with* $T(f) = f \times f$,

- 投影 $p_V = \pi_0 :\quad V \times V \to V$,
- 零截面 $0_V = \langle 1_V,\ \mathrm{const}_0 \rangle :\quad V \to V \times V$,
- 加法 $+_V = \langle \pi_0,\ \mathrm{sum}(\pi_1,\ \pi_2) \rangle$, 其中 $\mathrm{sum}(v,\ w) = v + w$,
- 垂直提升 $\ell_V = \langle \pi_0,\ \mathrm{const}0,\ \mathrm{const}0,\ \pi_1 \rangle :\quad V \times V \to V \times V \times V \times V$
- 典范翻转 $c_V = \langle \pi_0,\ \pi_2,\ \pi_1,\ \pi_3 \rangle :\quad V \times V \times V \times V \to V \times V \times V \times V$。

这些映射满足所有所需的方程，并且是自然变换，因为所有态射都是 R-线性的。垂直提升的万有性成立，因为该图表

$$\begin{array}{ccc} V \times V \times V & \xrightarrow{\langle \pi_0, \pi_2, \mathrm{const}_0, \pi_1 \rangle} & V \times V \times V \times V \\ {\scriptstyle \pi_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \langle \pi_0, \pi_2 \rangle} \\ V & \xrightarrow[\langle 1_V, \mathrm{const}_0 \rangle]{} & V \times V \end{array}$$

是一个拉回方块。

7.1 环上模的秩

秩是将向量空间的维数推广到模的最常见方式。模的秩是一个自然数或无穷大（如期望性质 (a) （取值于 $\mathbb{N}$）见注3.1）所述），且是同构不变量（如期望性质 (c) （同构不变量）见注 3.1）所述，并且对笛卡尔积具有可加性（如期望性质 (b') （关于积的可加性）见注3.1）所述。期望性质(e)（嵌入对应不等式）成立，因为子模的秩小于或等于模本身的秩。期望性质 (e') （与局部情形相同）则无从谈起，因为模的开子集通常本身并不是模。

我们将在下文证明，它确实是定义 $\mathbb{N}_\infty$、 $+$意义下的一个（3.2）取值维数，因此期望性质 (b) （关于拉回的可加性）的推广形式成立。

回顾一下，**主理想整环** （PID）是一个含幺交换环，没有零因子，且每个理想都由单个元素生成。本节中，我们固定一个主理想整环R。

定义 7.2。 设有一个 R-模 A。那么秩 $\mathrm{rk}(A) \in \mathbb{N}_\infty$ 是其任意极大线性无关子集的基数 A。如果 A不存在有限的极大线性无关子集，则秩为$\mathrm{rk}(A) = \infty$。

这是一个标准结果，例如在 [1], 中可以证明， A 的任意极大线性无关子集都具有相同的基数。秩的一个关键性质是它在短正合序列下的行为。

引理 7.3。 设 R 是一个主理想整环，并且

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

be 是一个有限秩 R-模的短正合序列。那么$\mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(C) = \mathrm{rk}(B)$

这是一个标准结果，例如见 [1], 第 VI 章中的练习 3.14，因此此处略去证明。

事实上，正如我们将在下文中证明的，要求 A、 B 和 C 具有有限秩是不必要的。

命题 7.4。 设 R 是一个主理想整环，并且令

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

是一个 R-模的短正合序列。那么在 $\mathbb{N}_\infty$ 中，$\mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(C) = \mathrm{rk}(B)$。

证明。 当 A, B 和 C 具有有限秩的情形已在引理 7.3 中讨论。下面我们证明 A, B 或 C 具有无限秩时的公式。

(a) 设 A 的秩为无限秩。那么，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在一个基数为 n的线性无关子集 $U \subseteq A$。由于 f 是单射， $\{f(u)|u \in U\}$仍然线性无关。由于 n是任意的，这证明了 B 的秩也为无限秩。因此，等式

$$\mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(C) = \infty + \mathrm{rk}(C) = \infty = \mathrm{rk}(B)$$

成立。

(b) 设 C 的秩为无限秩。那么，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在一个基数为 n的线性无关子集 $U \subseteq C$。由于 g 是满射，因此存在原像 $(b_u)_{u\in U}$，使得 $g(b_u) = u$。它们构成 B 的一个线性无关子集，其基数为 n。由于 n 是任意的，$\mathrm{rk}(B) = \infty$，从而证明了

$$\mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(C) = \mathrm{rk}(A) + \infty = \infty = \mathrm{rk}(B).$$

(c) 设 B 的秩为无限秩，且 A 的秩为有限秩。那么，$\mathrm{Im}(f) \subset B$ 的秩为有限秩。因此，将 $\mathrm{Im}(f)$ 的一个极大线性无关子集扩展为 B 中一个任意大小的线性无关子集，可得到 $B/\mathrm{Im}(f)$ 的一个任意大小的线性无关子集。由余核的唯一性可知， $B/\mathrm{Im}(f) \cong C$，因此 $\mathrm{rk}(C) = \infty$。现在，等式

$$\mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(C) = \mathrm{rk}(A) + \infty = \infty = \mathrm{rk}(B)$$

成立。

□

对于任意 R-模 A，加法 $+ \colon A \times A \to A, (a, a') \mapsto a + a'$ 以及取负 $- \colon A \to A, a \mapsto -a$都是模同态。由此我们构造了模同态的差 $f - g$。对于$f : A \to B$ 和 $g : C \to B$，定义为

$$f - g : A \times C \to B\ ,\ (a, c) \mapsto f(a) - g(c).$$

我们将在引理 7.5 和命题 7.6的证明中使用这个差。注意， $f - g$ 是满射，当且仅当 f 或 g 是满射。

引理 7.5. 设 A、B、C为 R-模。令 $A \times_B C$表示由跨度 $A \xrightarrow{f} B \xleftarrow{g} C$的极限所得到的拉回。则下列序列正合

$$0 \to A \times_B C \xrightarrow{\langle \pi_0, \pi_1 \rangle} A \times C \xrightarrow{f-g} \mathrm{Im}(f - g) \to 0$$

证明。 由于任意映射到其像上都是满射，该序列在 $\mathrm{Im}(f - g)$ 处正合。由于 $\langle \pi_0, \pi_1 \rangle$ 是单射，该序列在 $A \times_B C$处正合。 $f - g$的核恰好是满足$f(a) = g(c)$的元素 (a, c)，因此它等于 $A \times C$的 $A \times_B C$ 像。

□

命题 7.6。 设 R 是一个主理想整环。则将 R-模 A 的秩赋给 $\mathrm{rk}(A)$，得到定义在 $\mathbb{M}\mathrm{od}_R$ 上的一个 $(\mathbb{N}_\infty, +)$-值维数rk 。

证明。 设

$$\begin{array}{ccc} A \times_B C & \longrightarrow & A \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow r \\ C & \xrightarrow[f]{} & B \end{array}$$

是形如定义 R 中拉回的 3.2 所述拉回 引理 7.5 表明

$$0 \to A \times_B C \xrightarrow{\langle \pi_0, \pi_1 \rangle} A \times C \xrightarrow{f-r} \mathrm{Im}(f - r) \to 0$$

是一个短正合序列。由于 r 是满射， $f-r$ 也是满射，即 $\mathrm{Im}(f-r) = B$，因此我们得到短正合序列

$$0 \to A \times_B C \xrightarrow{\langle \pi_0, \pi_1 \rangle} A \times C \xrightarrow{f-r} B \to 0.$$

因此，命题7.4 中的秩公式表明，$\mathrm{rk}(A \times C) = \mathrm{rk}(A \times_B C) + \mathrm{rk}(B)$。由于积下秩具有可加性，可将其展开为

$$\mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(C) = \mathrm{rk}(A \times_B C) + \mathrm{rk}(B)$$

□

现在我们 可以应用定理3.7 ， 得到任意切结构的明确维数公式 .

推论7.7。设$(T, p, 0, +, \ell, c)$ 是 $\mathbb{M}\mathrm{od}_R$ 上的一个切结构。那么对于任意 R-模 A，等式

$$\mathrm{rk}(T^2(A)) + 2 \cdot \mathrm{rk}(A) = 3 \cdot \mathrm{rk}(A)$$

成立。

由此可得几个特殊情形

例 7.8。 *1.* 设 F 是一个域，并设 $\mathbb{V}\mathrm{ect}_F$ 表示 F 上的向量空间范畴，其态射为F-线性映射。那么，维数是一个取值于$(\mathbb{N}_\infty, +)$ 的维数函数，并且对于 $\mathbb{V}\mathrm{ect}_F$上的任意切结构，

$$\dim(T^2(V)) + 2 \cdot \dim(V) = 3 \cdot \dim(V)$$

对任意向量空间 V都成立。

2. 设 $\mathbb{A}\mathrm{bGrp}$ 为阿贝尔群范畴（即整数上的模）。那么，阿贝尔群的秩是一个取值于$(\mathbb{N}_\infty, +)$ 的维数函数，并且对于 $\mathbb{A}\mathrm{bGrp}$上的任意切结构，

$$\mathrm{rk}(T^2(G)) + 2 \cdot \mathrm{rk}(G) = 3 \cdot \mathrm{rk}(G)$$

对任意阿贝尔群 G都成立。结合定理5.2中的基数可知，阿贝尔群范畴有两个不同的非平凡 $\mathbb{N}_\infty$-取值维数函数。

在接下来的两节中，我们将解释这对有限维向量空间和主理想整环上的代数所产生的影响。

7.2 代数的模秩

本节利用模与代数之间的自由-遗忘伴随，得到带幺元交换环 R 上的代数的维数。根据 [18, 第四节，遗忘函子 $U : \mathbb{A}\mathrm{lg}_R \to \mathbb{M}\mathrm{od}_R$ 将 R-代数映射到其底层的 R-模，并且其左伴随是张量代数。因此，我们在 R-代数范畴上得到一个维数。

命题 7.9。 设 R 是带幺元的交换环， $\mathbb{A}\mathrm{lg}_R$ 是由 R-代数及代数同态构成的范畴。

(a) 将代数 A 映射到其底层 R-模的秩 $\mathrm{rk}\ \mathrm{rk}(U(A))$ 的赋值，是 $\mathbb{A}\mathrm{lg}_R$上的一个取值于$(\mathbb{N}_\infty, +)$的维数。

(b) 对 于 $\mathbb{A}\mathrm{lg}_R$ 范畴上的任意切结构$(\mathbb{A}\mathrm{lg}_R, T, p, 0, +, \ell, c)$ 以及任意对象 A ，

$$\mathrm{rk}(U(T^2(A))) + 2 \cdot \mathrm{rk}(U(A)) = 3 \cdot \mathrm{rk}(U(T(A))).$$

证明。 （a）部分由推论 3.4 得出。（b）部分由定理 3.7 得出。 □

特别地， $\mathbb{Z}$ 上的代数与环相同。因此，我们在环范畴上得到一个额外的维数。

推论 7.10. 令$\mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}$ 表示阿贝尔群在整数上的秩。

(a) 秩$\mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}$ 是一个取值于 $\mathbb{N}_\infty$ 的维数，定义在 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_n$、 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_1$、 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_u$、 $\mathbb{C}\mathrm{Ring}_n$、 $\mathbb{C}\mathrm{Ring}_1$ 和 $\mathbb{C}\mathrm{Ring}_u$上。

(b) 对任意环 R 以及定义在 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_n$、 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_1$、 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_u$、 $\mathbb{C}\mathrm{Ring}_n$、$\mathbb{C}\mathrm{Ring}_1$ 或 $\mathbb{C}\mathrm{Ring}_u$上的任意切结构$(T, p, 0, +, \ell, c)$，

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}(T^2(A)) + 2 \cdot \mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}(A) = 3 \cdot \mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}(T(A)).$$

证明。 (a) 由于 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_n$ 是 $\mathbb{A}\mathrm{lg}_{\mathbb{Z}}$中结合代数的全子范畴，因此由命题 7.9 和推论 3.4 可知，$\mathbf{rk}_{\mathbb{Z}}$ 是定义在 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_n$上的维数。范畴 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_1$、 $\mathbb{C}\mathrm{Ring}_u$ 和$\mathbb{C}\mathrm{Ring}_1$ 是 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_n$ 的全子范畴，因此推论3.4 表明，$\mathbf{rk}_{\mathbb{Z}}$ 也是定义在这些范畴上的维数。

> 在 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_u$ 中的拉回也是 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_1$，中的拉回，因为在这两种情况下，交换方块是拉回，当且仅当它们是底层集合的拉回。因此，定义在 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_1$上的任意维数也是定义在 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_u$上的维数，特别是 $\mathbf{rk}_{\mathbb{Z}}$。由于 $\mathbb{C}\mathrm{Ring}_u$ 是 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_u$的全子范畴，推论 3.4 表明，$\mathbf{rk}_{\mathbb{Z}}$ 也是定义在 $\mathbb{C}\mathrm{Ring}_u$上的维数。

(b) 现在由 3.7 得出。

□

因此，现在我们在 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_1$ 和 $\mathbb{R}\mathrm{ing}_u$上有两个不同的非平凡维数：特征（如第 6 节所示）和秩。

如果我们考虑例 6.11 中的切结构，就会看到，对于任意含幺交换环 R，

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}(T(R)) = \mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}(R[x]/(x^2)) = 2 \cdot \mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}(R).$$

因此，在这种情况下，切丛函子会使这个维数加倍，就像经典流形的情形一样。

7.3 $\mathbb{F}$上笛卡尔切结构的分类inVect

域 F 上的向量空间范畴 $\mathbb{M}\mathrm{od}_F$ 正好是环 F 上的模范畴。向量空间 V 的经典维数 $\mathbf{Dim}(V)$ 正好是其秩 $\mathbf{rk}(V)$。根据命题 7.6，它是一个取值于 $(\mathbb{N}_\infty, +)$ 的维数。

域 F 上的所有有限维向量空间都同构于该域 F 的幂 F^n。因此，切结构与笛卡尔结构之间的相互作用决定了整个切结构。

定理 7.11。 设 F 是一个域，并设 $\mathbb{F}\mathrm{inVect}_F$ 是由有限维向量空间构成的 $\mathbb{V}\mathrm{ect}_F$ 全子范畴。那么， $\mathbb{F}\mathrm{inVect}_F$ 上的每个笛卡尔切结构 $(T, p, 0, +, \ell, c)$ 都满足以下条件之一：

$$T(V) \cong V \quad \forall V \in \mathrm{Obj}(\mathbb{F}\mathrm{inVect})$$

or

$$T(V) \cong V \times V \quad \forall V \in \mathrm{Obj}(\mathbb{F}\mathrm{inVect}).$$

证明。每个有限维向量空间都具有 $V = F^n$ 的形式，其中 n 是 V 的维数。因此，每个笛卡尔切结构都满足 $T(V) \cong T(F^n) \cong T(F)^n$。于是 $\mathbf{Dim}(T(V)) = \mathbf{Dim}(T(F)) \cdot \mathbf{Dim}(V)$，这意味着向量空间维数是一个取值于$\mathbb{Z}$的强切维数。现在，定理 3.8 证明了，要么 $\mathbf{Dim}(T(V)) = 2 \cdot \mathbf{Dim}(V)\ \forall V$，要么 $\mathbf{Dim}(T(V)) = \mathbf{Dim}(V)\ \forall V$。

□

事实上，这两种情况都是已知的。带有 $T(V) \cong V$的平凡切结构在例 2.5中有所说明。使维数加倍的切结构是例 7.1 中针对 R 为域的情况所给出的切结构。

8 同伦、切除与 CW 复形的对偶范畴

CW 复形在拓扑学中被广泛用于描述性质良好的拓扑空间。传统上，CW 复形的维数是该复形中维数最高的胞腔。然而，这一概念在同伦下表现并不良好。本节将说明，按照定义 3.2 的含义，它并不是一种范畴维数。

有理同调是一种工具，它通过一列有理向量空间 $H_n(X, \mathbb{Q})_{n\in\mathbb{N}}$，以同伦不变的方式描述拓扑空间 X。这些向量空间的维数称为该空间的贝蒂数。

n 阶贝蒂数 B_n 常被解释为“计数空间中的 n 维孔洞”。由于贝蒂数反映的是空间补集的维数，因此将其视为 CW 复形对偶范畴上的一种范畴维数，似乎是合乎直觉的。

一个**CW 复形**是一个拓扑空间 X，由每个 $k \in \mathbb{N}$ 对应的标准胞腔 $D_k = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | x^2\}$ 通过归纳构造得到。归纳构造见 [11] 的第 0 章。在归纳构造的第 k 阶段得到的空间称为 X 的 k**-骨架** X^k。

如果连续映射 $f: X \to Y$ 在 CW 复形 $X = \cup_{k\in\mathbb{N}} X^k$ 与 $Y = \cup_{k\in\mathbb{N}} Y^k$ 之间满足**胞腔的**条件，即对所有 $k \in \mathbb{N}$，$f(X^k) \subseteq Y^k$，则称其为胞腔映射。

定义 8.1. 我们将范畴 $\mathbb{C}$W 定义为 $\mathbb{T}$op的子范畴，其对象包括

- *CW* 复形，作为对象；以及
- 胞腔映射，作为态射。

8.1 CW 复形的非经典维数

CW 复形的经典维数被认为是用于构造它的所有 n-胞腔中最大的 n。

定义 8.2。 设 $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} X^n$ 是一个 *CW* 复形。

(a) 使得 $X = X^n$ 成立的最小数 $n \in \mathbb{N}$，称为 X的经典维数。

(b) 如果不存在这样的 n，则经典维数为 ∞。

特别地，对于 CW 复形 X 和 X'，$X \times X'$ 的最大维数胞腔等于 X 和 X'中胞腔最大维数之和，因此期望的性质(b')（关于积可加）——备注3.1 中的性质——关于加法成立。

虽然经典维数是 CW 复形最常见的维数概念，但我们将证明它并非定义 3.2意义下的维数。我们将构造 CW 中回缩的一个拉回，作为定义 3.2中维数公式的反例。

这个反例的思路是将一个空间 Bl 粘合起来，其中包含一维和三维的分支。在拉回中，通过将三维分支映射到区间 D^1 的另一端，阻止它们彼此组合。

例8.3。 我们通过将单位区间$D^1 = [0, 1]$与一个 *3*-胞腔 $D^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x + 1)^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ 沿原点粘合，定义所得到的“气球形”*CW* 复形Bl，得到一个

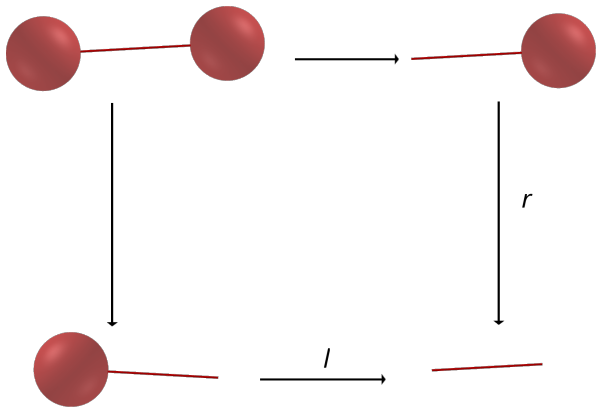


图 1：左端带有一个 3-胞腔的区间与右端带有一个 3-胞腔的区间的拉回，是一个两端各带有一个 3-胞腔的区间。

可以明确描述为如下形式的空间

$$\{(x,0,0)\in\mathbb{R}^3|0\le x\le 1\}\cup\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|(x+1)^2+y^2+z^2\le 1\}$$

我们定义两个映射 $l,r:\mathrm{Bl}\to D^1$，它们都会将 3-胞腔收缩掉。不过，l 将原先带有 3-胞腔的区间端点映到左侧，而 r 将原先带有 3-胞腔的区间端点映到右侧。用显式坐标表示，这意味着

$$l(x,y,z)=\begin{cases}x & if \quad x\ge 0\\ 0 & if \quad x<0\end{cases}$$

$$r(x,y,z)=\begin{cases}1-x & if \quad x\ge 0\\ 1 & if \quad x<0.\end{cases}$$

很容易看出这两个 l 和 r 都是回缩。正如我们从图 1 中可以直接看出，拉回 k

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Bl}\times_{D^1}\mathrm{Bl} & \longrightarrow & \mathrm{Bl}\\ \downarrow & & \downarrow r\\ \mathrm{Bl} & \xrightarrow[l]{} & D^1\end{array}$$

将是一个两端都粘有 3-胞腔的区间。

因为

$$\dim(\mathrm{Bl}\times_{D^1}\mathrm{Bl})+\dim(D^1)=3+1\neq 3+3=\dim(\mathrm{Bl})+\dim(\mathrm{Bl}),$$

定义 3.2 中的条件不成立。因此，CW 复形的经典维数不是$(\mathbb{N},+)$-值维数，不符合定义 $\mathbb{C}\mathrm{W}$ 的意义下的定义 3.2。

一般而言，粘合（即余极限）中的组合学会产生反例，证明 CW 复形的维数不是定义 3.2意义下的维数。

8.2 贝蒂数与切除函子

本节将证明，贝蒂数是 CW 复形对偶范畴上的一个范畴维数。

直观地说，n次贝蒂数表示 n维孔洞的数量 X。循此直观，我们检验注记(b') 中的性质（关于积可加）3.1。在 $\mathbb{C}\mathrm{W}^{\mathrm{op}}$中，积是不交并。两个分别有 n 和 k 个孔洞的复形，其不交并总共有 $n+k$ 个孔洞，因此所需的性质(b') （关于积可加）对于 $\mathbb{C}\mathrm{W}^{\mathrm{op}}$ 上的幺半群（$\mathbb{N}_\infty$，$+$）成立。

我们将证明，贝蒂数确实是定义3.2意义下的维数。因此，所有贝蒂数构成的序列将是一个取值于无限序列的范畴维数。

在 [8], Eilenberg 和 Steenrod 将广义同调理论定义为一种赋值：它把 CW 复形 X 映射到一个由阿贝尔群组成的序列 $H_n(X)$，并满足一组包含函子性在内的 7 条公理。奇异同调是广义同调理论的典型例子。一个标准结果是，例如在 [11, 第 2 节.3], 中所示，任意广义同调理论都存在 Mayer-Vietoris 长正合列。Mayer-Vietoris 长正合列将是我们用来验证贝蒂数是范畴维数的主要工具。因此，我们的论证适用于任意广义同调理论。

设 H_n be 是满足 Eilenberg-Steenrod 公理的一个同调理论。设 $\mathbb{C}$W 为 CW 复形及胞腔映射构成的范畴。那么， n阶贝蒂数 $B_n(X)$ =rk($H_n(X)$) 是空间 X的 n阶同调的秩。不难看出，这等于 X的 n 阶有理同调的维数 dim($H_n(X;\mathbb{Q})$)。

命题 8.4。 n 阶 *Betti* 数是 $\mathrm{CW}^{\mathrm{op}}$ 上取值于 $\mathbb{N}_\infty$ 的维数。

证明。一个 pu llback 沿 $\mathrm{CW}^{\mathrm{op}}$ 中一个收缩的拉回，对应于沿 CW 中一个截面 s 的推出。

$$\begin{array}{ccc} C \sqcup_A B & \longleftarrow & B \\ \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle s} \\ C & \underset{f}{\longleftarrow} & A \end{array}$$

截面恰好是收缩的嵌入，它们是闭子空间的胞腔嵌入，因而是子复形。因此，根据 [11] 的命题 0.16，它具有同伦延拓性质，因而是一个余纤维化。

[19] 的第 10.7 节表明，沿任意余纤维化的推出都与双映射柱同伦等价。

$$C \sqcup_A B \simeq {}_CM_B = (C \sqcup (A \times I) \sqcup B)/\sim, \text{ where } (a,0) \sim f(a) \text{ and } (a,1) \sim s(a).$$

这个双映射柱是两个开集 $X = C \sqcup (A \times [0,1))/\sim$ 与 $Y = (A \times (0,1]) \sqcup B/\sim$ 的并。它们的交 $X \cap Y = A \times (0,\ 1)$ 与 A 同伦等价。因此我们得到 Mayer-Vietoris 长正合列

$$\ldots \to H_{n+1}({}_CM_B) \xrightarrow{0} H_n(A) \xrightarrow{\langle H_n(s), H_n(f)\rangle} H_n(B) \oplus H_n(C) \longrightarrow H_n({}_CM_B) \xrightarrow{0} H_{n-1}(A) \to \ldots$$

其中映射 $H_{n+1}({}_CM_B) \to H_n(A)$ 均为零，因为 $H_n(s)$ 是一个截面，因此 $(\langle H_n(s)\ H_n(f)\rangle)$ 的核为零。因此

$$B_n(C \sqcup_A B) + B_n(A) = B_n(C) + B_n(B).$$

因此， B_n 是 $\mathrm{CW}^{\mathrm{op}}$ 上取值于 $\mathbb{N}_\infty$ 的维数。 □

我们不必将贝蒂数视为维数的无限序列，也可以将它们视为取值于数的无限序列的维数：令 $\mathbb{N}_\infty^\infty$ 为 $\mathbb{N}_\infty$ 中无限序列（或无限向量）的集合。它具有交换幺半群结构 $+$，其加法按分量进行。

推论 8.5。 贝蒂数序列

$$(B_n)_{n\in\mathbb{N}} : X \mapsto (B_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$$

是 CW^{op} 上取值于$(\mathbb{N}_\infty^\infty, +)$的维数。

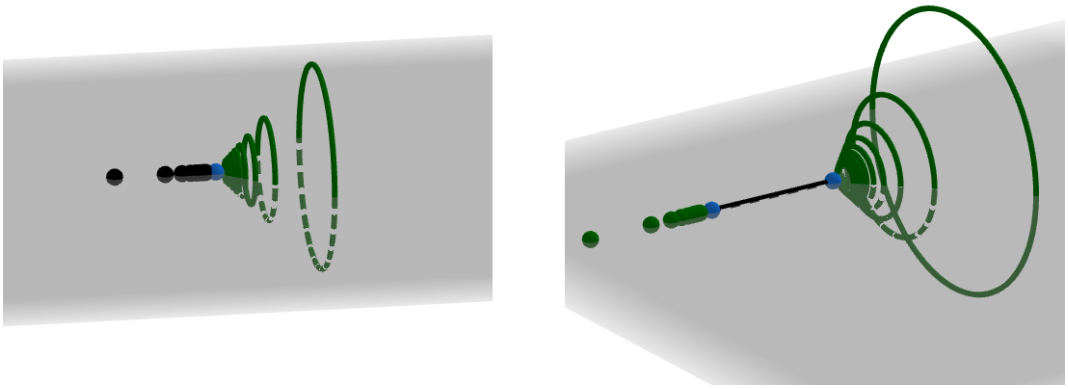


图 2：左侧是 A 与 B 在例 8.7中的推出，右侧是双映射柱 ${}_AM_B$。它们不同伦等价。直观地说，左侧蓝点周围的每个开邻域都包含无限多个点和圆，而右侧没有这样的点。

推论 8.6。对于 CW^{op} 上的任意切结构 T，贝蒂数$(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 满足

$$B_n(T^2(X)) + 2 \cdot B_n(X) = 3 \cdot B_n(T(X)).$$

现在我们将考察一个反例：沿一个截面取豪斯多夫空间的推出，它与双映射柱不同伦等价。这表明，我们对命题8.4的证明在豪斯多夫空间和连续映射这一更一般的情形下并不成立。

例 8.7。考虑豪斯多夫空间

$$\begin{aligned}
A' =& \left\{ x \in \mathbb{R} | x = \frac{1}{n} \text{ for some } n \in \mathbb{N}_{>0} \right\}, \\
B' =& \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x,y,z) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\sin(\varphi), \frac{1}{n}\cos(\varphi) \right) \text{ for some } n \in \mathbb{N}_{>0},\ \varphi \in [0, 2\pi] \right\}, \\
A =& \{0\} \cup A', \text{ and} \\
B =& \{(0,0,0)\} \cup B'
\end{aligned}$$

以及推出图表

$$\begin{array}{ccc}
* & \xrightarrow{i_0} & A \\
{\scriptstyle i_{(0,0,0)}}\downarrow & & \downarrow \\
B & \longrightarrow & P
\end{array}$$

其中严格推出为

$$P = \{(-x,0,0) | x \in A\} \cup B \subset \mathbb{R}^3.$$

如附录 A 所示，并见图 2，双映射柱与此严格推出不同伦等价。

我们在命题8.4 的证明中所使用的最重要性质是，广义同调理论将推出方块映为

$$\begin{array}{ccc}
C \sqcup_A B & \longleftarrow & B \\
\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle s} \\
C & \underset{f}{\longleftarrow} & A
\end{array}$$

到模的拉回方块，并且模的秩是一个维数。在同伦论中，将同伦推出方块映射为同伦拉回方块的同伦函子通常称为**1-切除函子**。下面我们将命题 8.4 推广到 1-切除函子。

在下面的命题中，我们假设同伦极限/余极限与严格极限/余极限相同。这使我们能够将定义3.2中的假设（该定义使用严格极限/余极限）与切除函子的性质（其定义依据是它们对同伦极限/余极限的作用）进行比较。

命题 8.8. 设 $\mathbb{X}$ 是一个模型范畴，其中截面沿截面的（严格）推出以及截面沿回缩的（严格）推出都是同伦推出。设 $\mathbb{Y}$ 是一个完备且余完备范畴。我们将其视为具有平凡模型结构的模型范畴。设 $F\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ 是一个 *1*-切除函子。若 维数 是 $\mathbb{Y}$上的一个范畴维数，则将 $\mathbb{X}^{\mathrm{op}}$上的对象 X 映射到 维数$(F(\mathbb{X}))$ 的赋值 维数$\circ F$ 是 $\mathbb{X}^{\mathrm{op}}$上的一个范畴维数。

证明。 定义 3.2 中的 $\mathbb{X}^{\mathrm{op}}$ 拉回在 $\mathbb{X}$中是推出，并且根据假设，它们也是同伦推出。由于 F 是切除函子，它将它们映射为 $\mathbb{Y}$中的拉回。维数的维数公式现在推出维数 $\circ F$的维数公式。 □

备注 8.9. 或许可以定义一个同伦范畴维数，用同伦极限/余极限代替定义 *3.2*中的严格极限/余极限。与命题 *8.8*类似，任何模型范畴之间的任意切除函子都将保持这种同伦维数，而无需要求同伦极限/余极限与严格极限/余极限相一致。

给定某种高阶切结构，如在 [2], 中，其中切结构的拉回被同伦拉回所取代，这种同伦维数应产生类似于定理*3.7*、*3.8*、*3.7* 和*3.8*的结果。

备注 8.10. 期望性质 *(e)* （嵌入到不等式）对于备注*3.1*而言，对作为 $\mathbb{C}\mathrm{W}^{\mathrm{op}}$上维数的贝蒂数并不成立。存在单态射 $A \hookrightarrow A'$ 于 $\mathbb{C}\mathrm{W}^{\mathrm{op}}$ 中（即满态射 $A' \to A$ 于 $\mathbb{C}\mathrm{W}$中），使得 $B_n(A) > B_n(A')$。其中一个例子是如下映射

$$[0,1] = I \to S^1 = \{e^{ix}\} \subset \mathbb{C}\ ,\ x \mapsto e^{3\pi x}.$$

由于它绕圆不止一圈，故为满射，从而是满态射，并且 $B_1(I) = 0$且 $B_1(S^1) = 1$。

然而，如果我们只考虑截面 $A \hookrightarrow A'$ 于 $\mathbb{C}\mathrm{W}^{\mathrm{op}}$ 中（即回缩于 $\mathbb{C}\mathrm{W}$中），则性质*(e)*（嵌入到不等式）可由同调的函子性得出。未来，我们希望这一见解能帮助我们将维数的定义提炼为一种函子性且万有的构造。

9 结语

这一维数概念的目标并非推广许多经典维数概念（尽管它至少推广了其中一些）。其目标是在给定范畴上寻找切结构时提供一个额外工具。具体而言，如果人们心中已有一个范畴维数，并希望它与某个切结构相容（从而使该范畴维数成为相对于该切结构的强维数），那么只需考虑那些保持维数不变、或使维数加倍的切丛自函子。这可以排除许多情形，从而为构造切结构提供另一种工具。

后续示例构想

文献中还有更多关于对象“大小”的概念。例如，有限度量空间与图的量级由 Andrew Solow 和 Stephen Polasky 在 [22]中首次提出，并由 Tom Leinster 在 [15] 中进一步阐述，它具有一些颇有前景的性质，表明它可能是一种维数。

此外，在第 8 节中，我们看到可以从任意广义同调理论得到一个无穷维数族。我们猜想，类似的结果也可能适用于图与链环的同调。在这些传统上并非几何学研究对象的领域中找到维数，将使我们能够在其中找到切结构，并为传统上不被视为几何学的领域提供几何视角。

与切范畴文献的关联

在 [16], Leung 按如下方式分类范畴 $\mathbb{X}$上的切结构：取从范畴 $\mathbb{W}$eil 的 Weil代数到 $\mathbb{X}$ 的自函子的函子。可以证明，底层 $\mathbb{N}$-模的秩是 $\mathbb{W}$eil 上的一种范畴维数。因此，今后我们将研究能否利用范畴 $\mathbb{W}$eil 上的维数，在给定的切范畴上构造一种非平凡维数。如果我们能证明该结果对每个切范畴都成立，那么只需证明某个范畴上不存在非平凡的范畴维数，就能证明该范畴只有平凡切结构；这将为此提供另一种工具。

在 [6], Cockett、Lemay 和 Rory Lucyshyn-Wright 证明，微分范畴的余Eilenberg-Moore范畴是切范畴。因此，我们想知道，是否存在某种描述微分范畴的维数概念，类似于定义3.2 中的维数描述切范畴的方式。

虽然我们使用回缩定义了维数，但在微分几何中，沿浸没的任意拉回都满足所需的性质(b) （关于拉回的可加性）。在 [7], 切范畴的背景下，Cruttwell 和 Lanfranchi 证明，展示映射是浸没的一种推广。因此，为了更好地理解维数，研究范畴维数在沿展示映射进行拉回时的行为似乎很有意义。

万有维数

定义 3.2和3.5 中的维数，正是理解垂直提升的泛性质所需的维数。

我们希望最终能发现一个密切相关的维数概念，它相对于某些期望性质的列表具有普遍性，这些性质类似于注3.1中的性质，但这里尚未确定这个列表。定义3.2 并未充分刻画一种维数，正如给定范畴上存在多种非平凡维数这一事实所表明的那样。例如，基数和秩都是阿贝尔群范畴上的非平凡维数。

文中列举了一些维数的理想性质，其中有些符合我们的维数概念，有些则不符合。我们对维数的定义并不具有普遍性；尤其是，给定范畴上可以存在多种维数。

期望性质(e) （嵌入对应不等式）指出，注3.1 中的子流形嵌入会映射为维数不等式：若 $M' \hookrightarrow M$是 M的子流形，则 $\dim(M') \leq \dim(M)$。

尽管注8.10 表明，对于贝蒂数，并非所有单态射都会产生不等式，但我们给出的所有例子中，所有截面都会映射为不等式。

我们希望这一观察能够启发未来对维数的推广，使其不只是对对象的赋值，而实际上是一个函子。

参考文献

[1] P. Aluffi, *Algebra: Chapter 0*，数学研究生教材，美国数学学会，2009年。[2] K. Bauer、M. Burke 和 M. Ching, *Tangent infinity-categories and Goodwillie calculus*，arXiv，2021年。[3] G. E. Brendon, *Topology and geometry*，数学研究生教材，Springer New York，1993年。[4] J. R. B. Cockett 和 G. S. H. Cruttwell, *Differential structure, tangent structure, and sdg*，《应用范畴结构》**第22卷** (2014)，331–417。[5] , *Differential bundles and fibrations for tangent categories* (2016)。[6] R. Cockett、J.-S. P. Lemay 和 R. B. B. Lucyshyn-Wright, *Tangent Categories from the Coalgebras of DifferentialCategories*，第28届欧洲计算机科学逻辑年会（CSL 2020），2020年，第17:1–17:17页。[7] G. CruttwellandM. Lanfranchi, *Pullbacks in tangent categories and tangent display maps*，arXiv:2502.20699，2025年。

[8] S. Eilenberg 和 N.E. Steenrod, *Axiomatic approach to homology theory*, 《美国国家科学院院刊》**31 (4)** (1945年), 117–120。[9] D. Eisenbud, *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, 数学研究生教材, Springer New York, 1995年。[10] J. A. Gallian, *Contemporary abstract algebra*, 加利福尼亚州贝尔蒙特: Brooks/Cole, Cengage Learning, 2010年。[11] A. Hatcher, *Algebraic topology*, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2000年。[12] S. Ikonicoff、J.-S. P. Lemay 和 T. Van der Linden, *From abelianization to tangent categories* 2510 12324, , 2025
arXiv: . .[13] I. Kaplansky, *Infinite abelian groups.*, Dover数学丛书, Dover出版社, 2018年。[14] J. M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, 第2版, 数学研究生教材, Springer New York, 2012年。[15] T. Leinster, *The magnitude of metric spaces*, 《数学文献》**第18卷** (2013年), 857–905。[16] P. Leung, *Classifying tangent structures using Weil algebras*, 《范畴论与应用》**32**(2017年), 286–337。[17] B. MacAdam, *Vector bundles and differential bundles in the category of smooth manifolds*, arXiv:2007.11708, 2020年。[18] S. MacLane, *Categories for the working mathematician*, 施普林格出版社, 纽约, 1971年。数学研究生教材, 第5卷。MR0354798 (50 #7275)[19] J.P. May, *A concise course in algebraic topology*, 芝加哥数学讲座丛书, 芝加哥大学出版社, 1999年。[20] N. Niu 和 D. I. Spivak, *Polynomial functors: A mathematical theory of interaction*, 伦敦数学学会讲义系列, 剑桥大学出版社, 2025年。[21] J. Rosick´y, *Abstract tangent functors*, 《Diagrammes》**12** (1984年) (英文)。报告: 3。MR800500[22] A. R. Solow 和 S. Polasky, *Measuring biological diversity*, 《环境与生态统计》**1** (1994年), 95–107。[23] R. Vakil, *The rising sea: Foundations of algebraic geometry*, 普林斯顿大学出版社, 2025年。[24] G. Vooys, 2025年2月20日。私人通信。

A 何时推出不是双映射柱

本附录旨在证明例 8.7 中的陈述。具体而言，本附录给出了命题 A.2 的证明。其目的是说明：虽然贝蒂数在 CW 复形与胞腔映射构成的范畴上构成一种维数，但我们的证明并不适用于将贝蒂数视为豪斯多夫空间与连续映射构成的范畴上的维数。

首先，我们将回顾陈述中用到的一些定义。

定义 A.1。 设 X, Y 为拓扑空间， $f, f' \colon X \to Y$ 为连续映射。记闭单位区间为 $I = [0,1]$。

(a) 若存在连续映射 $h \colon I \times X \to Y$，使得对所有 $x \in X$，$h(0,x) = f(x)$ 且 $h(1,x) = f'(x)$，则映射 f 和 f' 同伦。这样的映射 h 称为同伦。*(b)* X 与 Y 之间的同伦等价由连续映射 $g \colon X \to Y$ 和 $g' \colon Y \to X$，以及同伦 h（连接 $g \circ g'$ 与恒等态射 1_Y）和 h'（连接 $g' \circ g$ 与恒等态射 1_X）组成。*(c)* 若两点 $x, y \in X$ 之间存在路径，即存在连续映射 $\gamma \colon I \to X$，使得 $\gamma(0) = x$ 且 $\gamma(1) = y$，则称它们路径连通。 X 的路径连通分支是极大的路径连通子集。*(d)* 给定一个由拓扑空间构成的跨度 $X \xleftarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$，双映射柱 ${}_X M_Z$

$$ {}_X M_Z = (X \sqcup (Y \times I) \sqcup Z)/\sim, \ \textit{where } (y,0) \sim f(y) \ \textit{and } (y,1) \sim g(y), \ \forall y \in Y. $$

以下命题是本附录的核心结果。

命题 A.2。 对于豪斯多夫空间

$$
\begin{aligned}
A' =& \left\{ x \in \mathbb{R} | x = \frac{1}{n} \ \textit{for some } n \in \mathbb{N}_{>0} \right\}, \\
B' =& \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x,y,z) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\sin(\varphi), \frac{1}{n}\cos(\varphi) \right) \ \textit{for some } n \in \mathbb{N}_{>0} \ , \ \varphi \in [0, 2\pi] \right\}, \\
A =& \{0\} \cup A', \ \textit{and} \\
B =& \{(0,0,0)\} \cup B'
\end{aligned}
$$

以及推出图

$$
\begin{array}{ccc}
* & \xrightarrow{i_0} & A \\
{\scriptstyle i_{(0,0,0)}}\downarrow & & \downarrow \\
B & \longrightarrow & P
\end{array}
$$

P 与双映射柱 ${}_A M_B$之间不存在同伦等价

在证明这一结果之前，我们先说明这样一个直观认识：同伦等价保持路径连通分支。

引理 A.3。 设 A、B 是拓扑空间，并且 A 与 B 之间存在由 $f \colon A \to B$、$g \colon B \to A$、$h \colon A \times I \to A$ 以及 $k \colon B \times I \to B$ 组成的同伦等价。

(i) 如果 a、$a' \in A$ 可以通过路径 $I \to A$、$f(a)$ 连接，且 $f(a')$ 可以通过路径 $I \to B$ 连接。

(ii) 如果 a、a' 无法通过路径 $I \to A$、$f(a)$ 连接，且 $f(a')$ 无法通过路径$I \to B$连接。

(iii) 设 $X \subset A$是 A 的一个路径连通分支， $Y \subset B$ 是 B 的一个路径连通分支，并设对于某个 $x \in X$，像 $f(x)$属于 Y。那么限制映射$(f|_X, g|_Y, h|_{X\times I}, k|_{Y\times I})$在 X 与 Y之间构成一个同伦等价。

证明。 利用路径与 f的后复合，(i) 可立即得出。

对于 (ii)，假设 $f(a)$ 和 $f(a')$ 由路径 $\gamma\colon I \to B$连接。那么 $g\circ\gamma\colon I \to A$是在 A中的一条路径，它连接 $g(f(a))$ 和 $g(f(a'))$。现在， h与 $g\circ f$和 1_A之间的同伦给出路径 $h(a, -)\colon I \to A$以及 $h(a', -)$，分别连接 a与 $g(f(a))$，以及 a'与 $g(f(a'))$。将这些路径复合，便得到一条从 a 到 a' 的路径，从而证明 (ii)。

对于 (iii)，我们需要证明限制映射的像分别包含在 X 和 Y 中 ly.

给定一个与 x位于同一路径连通分支 X 中的 x'，(i) 表明 $f(x')$ 将与 $f(x)$ 位于同一路径连通分支中，而后者就是 Y。对于任意 $t \in I$， $h(x', t)$ 有一条路径连接到 $h(x', 1) = x'$，因此它与 x'位于同一路径连通分支 X 中。

由于 $h(x, -)\colon I \to A$是连接 $g(f(x))$ 与 x 之间的路径，元素 $f(x) \in Y$被映射到 x 的连通分支。因此，我们可以使用与上一段相同的论证，得到 $g|_Y$ 和 $k|_{Y\times I}$ 的像分别落在 X 和 Y 中。

现在，由于我们证明了限制映射的类型分别为 $f|_X\colon X \to Y$、$g|_Y\colon Y \to X$、$h|_{X\times I}\colon X\times I \to X$ 以及 $k|_{Y\times I}\colon Y \times I \to Y$，它们在 X 与 Y 之间构成同伦等价，因为 (f, g, h, k) 在 A 与 B 之间构成同伦等价。 □

利用这个引理，我们现在可以证明命题A.2。

命题 *A.2* 的证明。 我们采用显式描述

$$P = \left\{(-\frac{1}{n}, 0, 0) | n \in \mathbb{N}_{>0}\right\} \cup \{(0,0,0)\} \cup \left\{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\sin(\varphi), \frac{1}{n}\cos(\varphi)) | n \in \mathbb{N}_{>0}, \varphi \in [0, 2\pi]\right\} \subset \mathbb{R}^3 \text{ and}$$

$${}_AM_B \cong \left\{(-\frac{1}{n}, 0, 0) | n \in \mathbb{N}_{>0}\right\} \cup [0,1]\times\{(0,0)\} \cup \left\{(1+\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\sin(\varphi), \frac{1}{n}\cos(\varphi)) | n \in \mathbb{N}_{>0}, \varphi \in [0, 2\pi]\right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

这些显式描述在图 2 中以图示呈现。该证明通过反证法进行。假设存在一个同伦等价 (f, g, h, k)，它连接 P 与 ${}_AM_B$。那么，对于 $\vec{0} = (0, 0, 0)$，我们考虑点 $p_0 = f(\vec{0}) \in {}_AM_B$ 以及其周围的一个小开邻域 U_0。由于 f 是连续的， $f^{-1}(U_0)$ 是 $\vec{0}$ 周围的一个开邻域。因此，对于 p_0 的任意开邻域 U_0，$f^{-1}(U_0)$ 包含无穷多个形如 $(-1/n, 0, 0)$ 的点，以及无穷多个形如 $\{(1/n, 1/n\sin(\varphi)\ 1/n\cos(\varphi)) | \varphi \in [0, 2\pi]\}$ 的圆。现在我们将区分 p_0 可能处于的不同情形，并证明每一种情形都会导致矛盾

- 如果 $p_0 = (-1/n, 0, 0) \in {}_AM_B$对于某个 $n \in \mathbb{N}_{>0}$， U_0可以取为集合 $U_0 = \{p_0\}$，它在子集拓扑中是半径为 $1/n - 1/(n+1)$ 的开球。由于 $f^{-1}(U_0)$ 包含无穷多个路径连通分支， f 将无穷多个路径连通分支映射到一个路径连通分支。根据引理 A.3(ii)，这与 (f, g, h, k) 是同伦等价的假设相矛盾。

- 如果 $p_0 = (1 + 1/n, 1/n\sin(\varphi)\ 1/n\cos(\varphi)) \in {}_AM_B$对于某个 $n \in \mathbb{N}_{>0}$ 以及某个 $\varphi \in [0, 2\pi]$，U_0可以取为开集 $\{(1 + 1/n, 1/n\sin(\varphi)\ 1/n\cos(\varphi)) | \varphi \in [0, 2\pi]\}$（在子空间拓扑中为开集）。由于 $f^{-1}(U_0)$ 包含无穷多个路径连通分支， f 将无穷多个路径连通分支映射到一个路径连通分支。根据引理 A.3(ii)，这与 (f, g, h, k) 是同伦等价的假设相矛盾。

- 如果对于某个 $x \in (0, 1)$， $p_0 = (x, 0, 0) \in {}_AM_B$可以选为 $(0, 1) \times \{(0, 0)\}$（在子空间拓扑中是开集）。由于 $f^{-1}(U_0)$ 包含无穷多个路径连通分支， f 会将无穷多个路径连通分支映射到一个路径连通分支上。根据引理 A.3(ii)，这与 (f, g, h, k) 是同伦等价这一假设矛盾。

- 如果 $p_0 = (0, 0, 0) \in {}_AM_B$， U_0可以选择使其第一个坐标小于 $1/2$。由于 $f^{-1}(U_0)$包含一个形如 $\{(1/n, 1/n\sin(\varphi)\ 1/n\cos(\varphi)) | \varphi \in [0, 2\pi]\}$ 的圆，且这些圆与 $\vec{0}$位于不同的路径连通分支中，引理A.3(ii)表明，这个圆被映射到

形式为$(-1/m,\ 0,\ 0)$。根据引理A.3(i)，并且由于所有这些点都是路径不连通的，整个圆都被映射到同一个点。由引理A.3(iii)可知，这意味着$(f,\ g,\ h,\ k)$限制为圆与点之间的一个同伦等价。经典结果表明，这样的同伦等价并不存在（例如，可通过观察它们的基本群不同来证明），从而得到所需的矛盾。

• 如果 $p_0 = (1, 0, 0) \in {}_AM_B$，则可以选择 U_0，使其第一坐标大于 $1/2$。由于 $f^{-1}(U_0)$ 包含一个形如 $(-1/n, 0, 0)$ 的孤立点，引理 A.3(ii) 表明，该点被映射到形如 $\{(1 + 1/m, 1/m \sin(\varphi)\ 1/m \cos(\varphi) | \varphi \in [0, 2\pi]\})$ 的某个圆上。根据引理 A.3(iii)，这意味着 (f, g, h, k) 限制为从一个圆到一个点的同伦等价。再次地，这导致所需的矛盾。

□