arXiv:2602.15908v1 [math.RA] 16 Feb 2026

在特征数 2 的域 K 上构造李代数 $G_2(K)$的一种简明方法

Mashhour Bani-Ata*，**Abdulkareem Alhuraiji**

数学系，基础教育学院，公共应用教育与培训局，
Ardiyah—科威特 mashhour ibrahi
m@yahoo.com
abdulkareemalhuriaji@gmail.com

摘要

本文旨在给出特征数 2 的域K 上 14 维 $G_2(K)$ 型李代数的显式而初等的构造。称其为初等构造，是因为我们仅使用了少量朴素的线性代数概念。

数学主题分类2010：20G20，20G40，17B25**关键词与短语**：根基、李根、广义四边形、嘉当子代数。

1 引言

我们利用类型为 $O_6^-(2)$ 的广义四边形 $(\mathbb{P}, \mathcal{L})$，其中 $\mathbb{P}$ 是点集，$\mathcal{L}$ 是直线集，引入李根 R_Δ 的概念；Δ 是根基 Φ 中的一个元素，并构造一个 27 维模 $A = \langle e_x | x \in \mathbb{P} \rangle$，以证明以下结果。

* 若 $L \in \mathcal{L}$，W 是类型为 E_6 的魏尔群，且 $d \in N_W(L)$ 的阶为 3，则我们证明，类型为 D_4 的李代数 D_L 中，d 的中心化子 $C_{D_L}(d)$ 是一个类型为 $G_2(K)$、维数为 14 的李代数。

* 我们证明，$G_2(K)$ 是类型为 D_4 的 28 维李代数的一个嵌入李子代数。

* 对于 Φ 中的根基 Δ、X，我们证明

$$G_2(K) = C_{H_L}(d) \oplus \langle R_\Delta, R_X | \Delta, X \in \Phi, R_\Delta^d = R_\Delta,$$
$$S_X = R_X + R_X^d + R_X^{d^2}, R_X^d \neq R_X \rangle,$$

其中，$C_{H_L}(d)$ 是 H_L 中 d 的中心化子，而 H_L 是 $D_4(K)$ 的 Cartan 李子代数，维数为 4。

*通讯作者

本文采用几何方法引入根基和李根的概念，从而简要而明确地构造 $G_2(K)$，并说明其嵌入特征数 2 的域 K 上的 D_4 型李代数中；这是一个著名的棘手情形。这有助于深入理解这类李代数。共有五种例外李代数，类型分别为 G_2、 F_4、 E_6、 E_7 和 E_8 ，维数依次为 14、56、78、133 和 248。Cartan [6], 、W. Killing [14], 、Tits [15], 、Harish-Chandra [11], 、Jacobson [12, 13], 、Adam [1], 、Fulton 和 Haris [9] 等多位作者先后研究了这些例外李代数的构造。在 [16], , N. Wildberger 给出了 G_2 的一种构造方法，无需具备李理论知识。Zhu、Hao、Xin 在 [17] 中讨论了 G_2 型李代数的直和分解。文献 [4] 给出了在特征数 2 的域上构造嵌入 $D_4 < F_4 < E_6$ 的方法。文献 [3] 给出了在特征数 2 的域 K 上构造 $E_6(K)$ 型李代数的方法。有关 G_2 的更多信息，可参阅 [10] , [5] ,[7] 和 [8]。

2 预备知识与记号

我们从一个维数为 6 的向量空间 V（定义在 $\mathbb{F}_2$ 上）以及其上的一个非退化二次型 Q（定义在 V 上）开始，其 Witt 指数最小。也就是说，全奇异子空间的最大维数为 2。由于所有具有最小 Witt 指数的二次空间都同构，我们可以将 $V = \mathbb{F}_4^3$ 视为 $\mathbb{F}_2$ 上的向量空间，并

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1\overline{x}_1 + x_2\overline{x}_2 + x_3\overline{x}_3 \text{ where } \overline{x} = x^2.$$

设 $\mathbb{P}$ 为 Q 的二次超曲面，即 $\mathbb{P} = \{0 \neq x \in V | Q(x) = 0\}$，而 $(.|.)$ 为相应的双线性型

$$(x|y) = Q(x + y) - Q(x) - Q(y).$$

$\mathbb{P}$ 的阶为 27， $\mathbb{P}$ 的元素称为点，而满足 $Q(x) \neq 0$ 的向量 $0 \neq x \in V$ 称为外部点，因此共有 36 个外部点。令

$$\mathcal{L} = \{X \leq V | dim X = 2 \text{ and } Q(x) = 0 \text{ for all } x \in X\}.$$

$\mathcal{L}$ 的阶 $|\mathcal{L}|$ 为 45。 $\mathcal{L}$ 的元素称为直线。

每个 $x \in \mathbb{P}$ 恰好包含在 $\mathcal{L}$ 的 5 条直线中，广义四边形性质也成立；也就是说，若 $L \in \mathcal{L}$、 $x \in \mathbb{P}$ 满足 $x \notin L$，则存在唯一的 $y \in L$，使得 x， y 包含在一条直线上。数对 $(\mathbb{P}, \mathcal{L})$ 是一个类型为 $O_6^-(2)$ 的广义四边形。定义

$$W = \{g \in GL(V) | Q(x^g) = Q(x) \text{ for all } x \in V\}.$$

该群属于 $\Omega_6^-(2).2 = U_4(2) : 2$ 型，是一个由其 36 个反射生成的 3-换位群，即由以下变换 σ_v for

$$v \in V, Q(v) = 0 \text{ where } x^{\sigma_v} = x + (x|v)v \text{ for all } x \in V.$$

所有反射 $\sigma_v, Q(v) = 0$ 生成了 (V, Q) 的自同构群 $O(V, Q)$，也称为相应的正交群

$$O_6^-(2) = \Omega_6^-(2).2 \cong U_4(2).2.$$

这些反射 σ_v 在 W 中构成一个3-换位类，并生成 W。群 W 是 E_6 型的魏尔群，阶为51840。有关上述观察，可参见 [4] 和 [3]。

注 1 由维特引理可知，魏尔群在 $\mathbb{P}$上传递。也就是说，对于一个满足 U_1的正交空间 V，若 $U_2 \leq V$和 V是其两个子空间，使得$(U_1, Q|_{U_1})$和$(U_2, Q|_{U_2})$，其中 $Q|_{U_i}$、$i = 1$、2是 Q 在 U_i上的限制，且二者同构，即存在一个线性变换 $h: U_1 \to U_2$，使得对所有 $u_1 \in U_1$都有 $Q(u_1) = Q(u_1^h)$，那么 h 可扩张为 V 的一个同构；也就是说，存在$g \in O(V, Q)$，满足$U_1^g = U_2$和 $g|_{U_1} = h$。

定义 2 $\mathbb{P}$ 的子集 Δ 称为根基，若 Δ 是 V 的一个 $\mathbb{F}_2$-基，且对任意两个不同的元素 x、$y \in \Delta$，$(x|y) = 1$。$\mathbb{P}$ 中的根基集合记为 Φ。

注 3 若 Δ 是根基，则 $s_\Delta = \sum x$ 是一个外点，且$_{x\in\Delta}\Delta^* = \Delta + s_\Delta$ 也是一个根基。我们称 Δ 和 Δ^* 为对应根基。

$$Let\ \Delta_0 = \{v \in \mathbb{P} | (v|s_\Delta) = 0\},\ then\ \mathbb{P} = \Delta_0 \cup \Delta \cup \Delta^*.$$

一条直线要么包含于 Δ_0 中，要么是横截线，即与 Δ、Δ^* 和 Δ_0相交。

命题 4 *(1)* $\mathbb{P}$ 恰好包含72 个根基，即 $|\Phi| = 72$。

(2) 群 W 在 Φ 上传递作用，其稳定子为 S_6；并在 Φ 上非本原作用，其36 个块为 $\{\Delta, \Delta^*\}$、$\Delta \in \Phi$。

证明。参见 [3]。 ■

注 5 根基可以按如下方式构造。对于两个点 x 和 y，满足$(x|y) = 1$，令

$$\Delta_{x,y} = \{x\} \cup \{v \in \mathbb{P} | (x|v) = 1, (y|v) = 0\}$$

对于根基 Δ 和 $x \in \Delta$，有一个根基 $\Delta_{x,\ x+s_\Delta}$。显然，对于一个点 x，存在16 个点 y，满足$(x|y) = 1$。因此再次得到 $|\Phi| = \frac{27.16}{6} = 72$。任一根基都对应一个非各向同性向量 $s_\Delta = \sum_{b\in\Delta} b$和每个非各向同性向量 s 或一个反射 σ_s 对应于两个根基 $\Delta_1 = \Delta_2$，使得 $s = s_\Delta$。此外，

$$\Delta_2 = \Delta_1^{\sigma_s} = \Delta_1 + s\ and\ \Delta_1 \cup \Delta_2 = \{v \in \mathbb{P} | (s, v) = 1\}.$$

我们用 σ_Δ 表示 σ_{s_Δ}，用 Δ^*表示 Δ^{σ_s}。

命题 6 对于满足 $s_\Delta \neq s_\Gamma$ 的根基 Δ 和 Γ，有

1. 若$(s_\Delta|s_\Gamma) = 0$，则 $|\Delta \cap \Gamma| = |\Delta \cap \Gamma^*| = 1$ 和 $\Delta^{\sigma_\Gamma} = \Delta$。*2.* 若$(s_\Delta|s_\Gamma) = 1$，则 *(i)* $|\Delta \cap \Gamma| = |\Delta^* \cap \Gamma^*| = 3$ 和 $\Delta \cap \Gamma^* = \Delta^* \cap \Gamma = \phi$，或 *(ii)* $|\Delta \cap \Gamma^*| = |\Delta^* \cap \Gamma| = 3$ 和 $\Delta \cap \Gamma = \Delta^* \cap \Gamma^* = \phi$。*(iii)* 若 $\Delta \cap \Gamma = \phi$，则$(\Delta^* \cap \Gamma)^{\sigma_\Delta} \cup (\Gamma^* \cap \Delta)^{\sigma_\Gamma} = \Delta^{\sigma_\Gamma} = \Gamma^{\sigma_\Delta}$ 是对应于 $s_\Delta + s_\Gamma$的根基。

证明。参见 [3] ■

3 E_6 型李代数与特征数 2

设 K 是一个特征数 2 的域，$(\mathbb{P}, \mathcal{L})$ 是上文定义的 $O_6^-(2)$ 型广义四边形，并设 A 是 K 上的一个 27维向量空间，其基为 $\{e_x|x \in \mathbb{P}\}$。令 $End_K(A)$ 表示由 $GL(A)$ 中所有元素构成的李代数，其李乘积为 $[X, Y] = XY - YX$。对于 $v \in V$，定义 $H_v \in End(A)$ 如下： $e_x^{H_v} = (x|v)e_x$， $x \in \mathbb{P}$；对于根基 Δ，定义 R_Δ 在 A 上的李根如下：

$$e_x^{R_\Delta} = \begin{cases} e_x^{\sigma_\Delta} = e_{x+s_\Delta} & , x \in \Delta \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

显然， R_Δ 的秩为 6，并且相对于基 $\{e_x|x \in \mathbb{P}\}$ 和 $R_\Delta^2 = 0$， R_Δ与 R_{Δ^*} 互为转置。

命题 7 对于根基 Δ 和 Γ 以及 v、$w \in V$，有：

1. $[H_v, H_w] = 0$ 和 $[H_v, R_\Delta] = (s_\Delta|v)R_\Delta$。*2.* $[R_\Delta, R_{\Delta^*}] = H_{s_\Delta}$。*3.* 若 s_Δ 和 s_Γ 互不相同且正交，则 $[R_\Delta, R_\Gamma] = 0$。*4.* 若 $(s_\Delta|s_\Gamma) = 1$ 和 $\Delta \cap \Gamma \neq \phi$，则 $[R_\Delta, R_\Gamma] = 0$。*5.* 若 $(s_\Delta|s_\Gamma) = 1$ 和 $\Delta \cap \Gamma = \phi$，则 $[R_\Delta, R_\Gamma] = R_{\Gamma^{\sigma_\Delta}} = R_{\Delta^{\sigma_\Gamma}}$。*6.* 若 $\Delta \neq \Gamma$，则 $R_\Delta R_\Gamma R_\Delta = R_\Delta [R_\Gamma, R_\Delta] = 0$。

证明。 证明见 [3] 和 [2]。 ■

注记 8 由元素 H_v、$v \in V$ 和72 个李根 R_Δ、$\Delta \in \Phi$ 生成的李代数 $\mathbb{E}$ 是 $End_K(A)$ 的一个子代数，其在 K 上的维数为78 。命题 7 表明，李代数 $\mathbb{E}$ 属于 E_6 型。群 W 通过 $e_x^g = e_{x^g}$ 在 A 上作用， W 置换根 R_Δ，并在李代数 $\mathbb{E}$ 上诱导出一个魏尔群，该魏尔群正规化嘉当子代数 $\mathbb{H} = \langle H_v|v \in V\rangle$。

.

定理 9 设 L 是一条直线，且 $\Phi_L = \{\Delta \in \Phi | s_\Delta \in L^\perp\}$。那么

$$D_L = \langle R_\Delta | \Delta \in \Phi_L \rangle$$

是 F_4 的一个维数为28的李子代数。

证明。参见 [4]。 ■

4 李代数 $G_2(K)$

命题 10 设 Δ 是一个根基， $L \in \mathcal{L}$。则

(1) 集合 $R_L = \{R_\Delta | L \subseteq s_\Delta^\perp\}$ 的大小为24。*(2)* $H_L = \langle H_v | L \subseteq v^\perp, v \in V \rangle$ 的维数为4。*(3)* $D_L = \langle H_L, R_L \rangle = H_L \underset{R_\Delta \in R_L}{\oplus} R_L$*(4)* D_L 在李交换子乘法下封闭，且它是一个类型为 $D_4(K)$ 、维数为 $24 + 4 = 28$.的李代数。*(5)* $D_4(K)$ 嵌入在维数为56的李代数 $F_4(K)$ 中。

证明。参见 [4]。 ■

现在我们有如下主定理。

定理 11 设 $L \in \mathcal{L}$, $d \in N_W(L)$ 和 $order(d) = 3$，其中 W 是 E_6 型的魏尔群。那么， D_L 中 d 的中心化子$C_{D_L}(d)$ 是一个 G_2 型、维数为 14 的李子代数。

为证明定理 11，需要以下注释和命题。

注 12 魏尔群 W 置换 $\mathbb{P}$ 的点，从而在 27 个元素上诱导置换。因此， W 通过置换作用于 A ；若 $w \in W$，则 $e_x^w = e_{x^w}$，其中 $A = \langle e_x | x \in \mathbb{P} \rangle$ ；若 Δ 是一个根基，且 R_Δ 是 $End_K(A)$中的一个李根，则 $R_\Delta^w = P_w^{-1} R_\Delta P_w = R_{\Delta^w}$ ，其中 P_w 是 w 在 $\mathbb{P}$上诱导的置换。因此，若 $d \in N_W(L)$ 的阶为 3，则 $R_\Delta^d = R_{\Delta^d}$。令 $R_\Delta + R_\Delta^d + R_\Delta^{d^2} = S_\Delta$，则可得 $S_\Delta^d = S_\Delta^{d^2} = S_\Delta$ ，由此得到以下命题

命题 13 设 $d \in N_W(L)$、 $L \in \mathcal{L}$ 以及 $order(d) = 3$。那么 d 在 R_L 中有6 个固定李根，并有6 个长度为3的轨道。

证明。 由于 d 置换了 R_L中的李根，因此我们有 6 个固定李根

$$S_{\Delta_i} = R_{\Delta_i} + R_{\Delta_i}^d + R_{\Delta_i}^{d^2}, R_{\Delta_i}^d \neq R_{\Delta_i},$$

$i = 1,...,6$，以及 6 条长度为 3 的轨道，形如

$$\Delta \bullet\!\!-\!\!-\!\!\bullet \Delta^d \bullet\!\!-\!\!-\!\!\bullet \Delta^{d^2}.$$

这等价于 $C_{D_L}(d)$ 具有李根 $\{R_\Delta | R_\Delta^d = R_\Delta\}$ 以及李根

$$\{R_X + R_X^d + R_X^{d^2} | X \text{ is a root base}, R_X^d \neq R_X\}.$$

这些李根的总数为 $6.3 + 6 = 24$。

命题 14 设 X 为一个根基。定义李根

$$S_X = \begin{cases} R_X & if\ R_X^d = R_X \\ R_X + R_X^d + R_X^{d^2} & if\ R_X^d \neq R_X \end{cases}.$$

则 $G = C_{H_L}(d) \oplus \langle S_X \rangle$ 是类型为 $G_2 < D_4$ 的李代数，其中 $C_{H_L}(d)$是维数为 2 的嘉当李子代数。

证明。集合 $\{S_X\}$ 的阶为 $6 + 6 = 12$。现在我们必须证明 G 在李乘法下封闭，即 $[S_X, S_Y]$ 是 $C_{H_L}(d)$ 的元素，或者为 0，或者对某个根基 Z 是李根 S_Z。因此我们计算以下情形 **情况（1）**。设 R_Δ属于 $\{S_X\}$，使得 $R_\Delta^d = R_\Delta$且 $R_\Gamma + R_\Gamma^d + R_\Gamma^{d^2}$属于 $\{S_X\}$，其中 $R_\Gamma^d \neq R_\Gamma$，则

$$\begin{aligned} [R_\Delta, R_\Gamma + R_\Gamma^d + R_\Gamma^{d^2}] &= [R_\Delta, R_\Gamma] + [R_\Delta, R_\Gamma^d] + [R_\Delta, R_\Gamma^{d^2}] \\ &= [R_\Delta, R_\Gamma] + [R_\Delta^d, R_\Gamma^d] + [R_\Delta^{d^2}, R_\Gamma^{d^2}] \\ &= [R_\Delta, R_\Gamma] + [R_\Delta, R_\Gamma]^d + [R_\Delta, R_\Gamma]^{d^2} \\ &= 0 \text{ or } R_D + R_D^d + R_D^{d^2} \end{aligned}$$

由命题 7，得到某个根基 D。

情况（2）。我们计算 $[R_\Delta, R_\Delta^*]$。令 $R_\Delta = M$, $R_{\Delta^*} = N$, $x, y \in \mathbb{P}$，则 $(MN)_{xy} = \sum M_{xz} N_{zy} = 1$ 当且仅当 $x = y \in \Delta \cap \Delta^{*^{\sigma_\Delta}} = \Delta$，且 $(NM)_{uv} =_z 1$ 当且仅当 $u = v \in \Delta^* \cap \Delta^{\sigma_\Delta} = \Delta^*$。因此，$[M, N]$ 是对角矩阵，其 $1's$ 恰好位于满足 $x \in \Delta \cup \Delta^* = \{x | (s_\Delta | x) = 1\}$ 的位置 (x, x)。因此 $[R_\Delta, R_{\Delta^*}] = H_{s_\Delta}$，其中 $s_\Delta \in L^\perp \setminus L$ 且 $H_{s_\Delta} \in C_{H_L}(d)$。

情况（3）。我们考虑情况 $[R_\Delta + R_\Delta^d + R_\Delta^{d^2}, R_\Gamma + R_\Gamma^d + R_\Gamma^{d^2}]$，其中 $R_\Delta^d \neq R_\Delta$

且 $R_\Gamma^d \neq R_\Gamma$。因此有

$$
\begin{aligned}
&[R_\Delta + R_\Delta^d + R_\Delta^{d^2}, R_\Gamma + R_\Gamma^d + R_\Gamma^{d^2}] = \\
&[R_\Delta, R_\Gamma] + [R_\Delta, R_\Gamma^d] + [R_\Delta, R_\Gamma^{d^2}] + [R_\Delta^d, R_\Gamma] + [R_\Delta^d, R_\Gamma^d] + [R_\Delta^d, R_\Gamma^{d^2}] + \\
&[R_\Delta^{d^2}, R_\Gamma] + [R_\Delta^{d^2}, R_\Gamma^d] + [R_\Delta^{d^2}, R_\Gamma^{d^2}] = \\
&[R_\Delta, R_\Gamma] + [R_\Delta, R_\Gamma]^d + [R_\Delta, R_\Gamma]^{d^2} + [R_\Delta, R_\Gamma^d] + [R_\Delta^d, R_\Gamma^{d^2}] + [R_\Delta^{d^2}, R_\Gamma] + \\
&[R_\Delta, R_\Gamma^{d^2}] + [R_\Delta^d, R_\Gamma] + [R_\Delta^{d^2}, R_\Gamma] = \\
&[R_\Delta, R_\Gamma] + [R_\Delta, R_\Gamma]^d + [R_\Delta, R_\Gamma]^{d^2} + [R_\Delta, R_\Gamma^d] + [R_\Delta, R_\Gamma^d]^d + [R_\Delta, R_\Gamma^d]^{d^2} + \\
&[R_\Delta, R_\Gamma^{d^2}] + [R_\Delta, R_\Gamma^{d^2}]^d + [R_\Delta, R_\Gamma^{d^2}]^{d^2} \\
&= (R_{D_0} + R_{D_0}^d + R_{D_0}^{d^2}) + (R_{D_1} + R_{D_1}^d + R_{D_1}^{d^2}) + (R_{D_2} + R_{D_2}^d + R_{D_2}^{d^2})
\end{aligned}
$$

其中

$$
[R_\Delta, R_\Gamma] = \begin{cases} 0 \\ \text{or } R_{D_0} \\ \text{or in } C_{H_L}(d) \end{cases}, [R_\Delta, R_\Gamma^d] = \begin{cases} 0 \\ \text{or } R_{D_1} \\ \text{or in } C_{H_L}(d) \end{cases}
$$

and

$$
[R_\Delta, R_\Gamma^{d^2}] = \begin{cases} 0 \\ \text{or } R_{D_2} \\ \text{or in } C_{H_L}(d) \end{cases}
$$

根据命题 7。证明至此完成。 ■

定理 11 的证明。这是命题 14、13 的直接推论，因此中心化子 $C_{D_L}(d)$ 是一个 G_2 型李代数。它的维数为 14，因为 $dim\langle S_X \rangle = 12$ 且 $dim C_{H_L}(d) = 2$，此外它是 D_4 的李子代数。因此结论成立。

5 致谢

作者谨此感谢公共应用教育与培训局对本研究项目 No BE-25-13 的支持。

参考文献

[1] F. Adam.《例外李群讲义》。芝加哥数学讲座丛书，芝加哥大学出版社，1996年。

[2] S. Aldhaferri, M. Bani-Ata，关于类型为 F_4 的李代数和切瓦莱群 $F_4(K)$、$E_6(K)$ 及 ${}^2E_6(K)$在特征数 2 的域 K 上的研究，《代数通讯》，47(2)，516-522。

[3] S. Aldhafeeri, M. Bani-Ata，关于特征数 2 的域 K 上类型为$E_6(K)$的李代数构造。Beitr̈ge zur Algebra und Geometrie，58(3) (2016)，1-6。[4] M. Alrwajfeh, M. Bani-Ata，关于特征数 2 的域上嵌入 $D_4 <F_4 < E_6$ 的构造，《李理论杂志》，35 (2025)，157-164。[5] E. Bunina, M. Vladykina，交换环 R 上的类型为 G_2的切瓦莱群的自同构（该环含有 1，且由可逆元素和$2R$生成），《数学科学杂志》，284(2024)，431-441。[6] E. Cartan，《论文集》，巴黎，1894；第 2 版，Vuibert，巴黎，1933。[7] A. Elduque, M.Kochetov，类型为 G_2和 D_4的单李代数上的分次，《代数杂志》512(2018)，382-426。[8] A. Elduque, M. Kochetov，例外李代数 F_4 和G_2 上的分次（再探），Rev. Mat. Iberoamericana 28(2012)，第 3 期，$775 - 815$。[9] W. Fulton 和 Harris，《表示论》，研究生数学丛书，施普林格出版社，纽约，1991。[10] C. Fontalas，关于 G_2的笔记，《李代数与李群》，《微分几何及其应用》57 (2018)，23-24。[11] Harish-Chandra，关于半单李代数的泛包络代数的一些应用，《美国数学会汇刊》70 (1951)，28-96。[12] N. Jacobson，《李代数》，约翰·威利父子出版公司，纽约，1962。[13] N. Jacobson，《例外李代数》，纯数学与应用数学讲义 I，Marcel Dekker，纽约，1971。[14] W. Killing，《连续有限变换群的结构》 I、 II、 III 和 IV，《数学年刊》31(1888)、33(1889)、34(1889)、36(1890)。[15] J. Tits，关于半单李代数的结构常数和存在性定理，èd的 théoè，《高等科学研究所数学出版物》31 (1966)，21-58。[16] N. J. Wildberger， G_2的组合构造，《李理论杂志》13(2003)，155-165。[17] X. Zhu, H. Hao, B. Xin，类型为 G_2 的李代数的直和分解，《数学研究通讯》35(2019) 1，10-20。