arXiv:2602.15969v2 [cond-mat.stat-mech] 17 Mar 2026

不对称性度量视角下聚类性质的破坏与宏观相干性

Florent Ferro*Université Paris-Saclay, CNRS, LPTMS, 91405, Orsay, France*

在一维系统中，自发对称性破缺（SSB）态本质上十分脆弱，因为人们预期，在基态之上注入非零能量密度会使对称性恢复。这种不稳定性意味着，局域扰动可能产生宏观关联剖面、破坏聚类性质，甚至形成宏观量子叠加态。在这项工作中，我们通过考察一个守恒畴壁数的相互作用模型，研究相互作用对这一唯象学的影响。该模型具有一个铁磁基态，它破坏了哈密顿量的 $\mathbb{Z}_2$ 对称性。我们首先表明，该系统中的局域淬火会放大量子干涉，产生直接反映模型散射相位的宏观磁化剖面。接着，我们采用两种不对称性度量——纠缠不对称性（EA）和量子费 Fisher 信息（QFI）——来刻画与磁化强度涨落相关的量子相干性。通过聚焦于尺寸与微扰光锥相当的子系统，我们证实，整个受扰区域内均会出现宏观量子相干性。最后，我们讨论 EA 与 QFI 之间的联系，并表明纯态的方差/纠缠不对称性不等式可以推广为混合态的 QFI/纠缠不对称性不等式。

I. 引言

量子物理学能够非常有效地描述物质的最小尺度，但真正的量子现象能否在宏观尺度上存续，仍未有定论。对于由局域哈密顿量描述的系统的平衡态，聚类性质确保在相距较远时，不同子系统彼此独立，因此不存在形成宏观量子叠加态的条件，例如薛定谔所设想的著名“猫态”或 GHZ态 [1] ¨odinger [2, 3]。然而，随着量子模拟器和量子电路近期取得突破，人们重新开始关注宏观量子效应；如今，人们已能够制备多达 ~ 20 量子比特 [4–6]的此类叠加态。不过，制备这类态的方案经过精细调控，而猫态本质上脆弱且不稳定：失去单个量子比特就会破坏叠加。因此，两个问题随之而来：宏观量子叠加态能否在更“自然”的情境中涌现？如果能，它们能否比猫态更加稳健?

在平衡态下，临界基态是很自然的候选者，因为它们具有代数衰减的关联，从而能够产生“增强的”量子相干性 [7–9]。在非平衡态下，自然的做法是直接寻找这样的情形：关联在某个给定区域内完全不衰减。聚类的破缺通常表现为磁化剖面在不同时刻经过重标度（弹道、扩散.....）后呈现自相似性。这类标度动力学出现在各种情境中：对铁磁基态进行局域淬火 [10–12] 、量子疤痕 [13], 、畴壁熔化 [14–16], 、存在阻塞的系统 [17, 18], 、界面物理 [19–23].....具体而言，在参考文献 [24] 中，我们证明了在有序相中对伊辛模型自发对称性破缺（SSB）基态进行局域淬火后，可能出现“稳健的”宏观量子叠加态。这一效应有一种非常简单的解释：对称性破缺相中的激发并非局域的，而是半局域的，这实质上意味着它们可以用半经典方式由畴壁描述 [25, 26]。畴壁波函数的弹道扩散会导致磁化强度宏观差异（随时间线性发散）的态发生量子叠加。因此，这种态类似于 W 态的 kink 版本 [27], ；相较于猫态，它稳健得多，因为即使系统的一部分丢失，它仍能存续（注意，W 态也可以通过实验制备，

例如参见参考文献 [28, 29]）。

然而，这种唯象学在存在相互作用时能否存续并不显然；相互作用会诱导非平凡的散射以及束缚态的形成。在本文中，我们填补这一空白，并将 [24]关于局域淬火的结果推广到相互作用情形。我们通过显式计算不对称性资源理论中的两个量来研究量子涨落 [30], ，并注意到：相对于由电荷 Q 生成的对称群的不对称性，本质上量化了 Q [31–34]的电荷扇区之间的相干性。

这些工具中的第一个是纠缠不对称性（EA），在量子信息领域也称为G 不对称性 [35] 或叠加态相对熵 [36]。自其最初被引入以研究量子姆潘巴效应 [37, 38], 以来，EA近来在多体和高能物理学界获得了大量关注 [39–61], ，甚至已被实验测量 [62, 63]。它现已被公认为量化一个量子态在多大程度上破缺对称性的标准工具。通过对尺寸与光锥相当的子系统的不对称性给出界限，我们将提取其主导行为，并表明这些子系统处于数目随时间发散的磁化扇区的量子叠加之中。

为完成这项分析，我们还计算了量子费 Fisher 信息（QFI），并基于熵与方差之间的关系，通过一个新的界明确推导出它们之间的联系。尽管 QFI 可用于量化不对称性 [35, 64–66], 它最初是在量子计量学背景下通过克拉美-罗界引入的：QFI 决定了参数估计所能达到的最高精度。事实上，文献 [67]表明，QFI 可用作多种资源理论中资源性量子态的探针。它的主要价值之一在于能给出纠缠深度（给定态中多体纠缠部分的最小数量）的下界，因此可作为多体纠缠的见证 [68–71]。此外，与后者不同，QFI 对系统不同部分之间无限小的关联并不敏感。因此，它是多体物理中探测多体纠缠的有效工具，已被用于表征平衡态中的多体纠缠，也用于非平衡态 [9, 72, 73] 和非平衡态 [24, 74]。尽管 QFI 通常是一个非常复杂、难以计算的量，人们已经开发出许多获取它的技术，尤其适用于自由费米子系统 [75–77]„ 也可借助维格纳-亚奈泽-戴森偏斜信息等更简单的相关量 [78], ，见文献 [24]。此外，QFI 还可表示为一系列可通过实验测得的量 [79], ；在热态中，它与磁化率 [72]的联系使其能够直接测量 [80]。

我们采用对偶 XXZ 自旋链 [81] ——它由 XXZ 链经 Kramers-Wanier 变换得到——作为相互作用玩具模型，研究局域微扰对自发对称性破缺基态的影响；该基态会自发破缺哈密顿量的 $\mathbb{Z}_2$ 对称性。我们利用其坐标贝特 ansatz 描述来求解淬火后的动力学，并表明，正如预期的那样，横向磁化分布会使其在弹道尺度上不再具有聚类性质。通过对模型的散射相位进行“对角化”，我们对纠缠不对称性和量子费舍尔信息的标度极限作出解析预测，并将预测结果与精确数值数据进行比较；这些数据是利用局域淬火后可达希尔伯特空间维数较低这一特点得到的。我们表明，相互作用不会破坏自由模型中出现的唯象学，而且任何靠近微扰、尺寸随光锥大小缩放的子系统，都会进入稳定的宏观量子叠加态。

II. 设置

本文中，我们考虑对偶 XXZ 哈密顿量 [81]:

$$H = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{N}(\sigma_j^x - \Delta)(1 - \sigma_{j-1}^z\sigma_{j+1}^z) - h\sum_{j=1}^{N}\sigma_j^z\sigma_{j+1}^z, \tag{1}$$

其中我们选择施加周期性边界条件（PBC） $\sigma^{\alpha}_{N+1} = \sigma^{\alpha}_{1}$，并将讨论限制在$\Delta \geq 0$。根据与 XXZ 模型的对偶关系，该哈密顿量可通过坐标贝特 ansatz[82]精确求解。它具有由荷算符 $Q = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}(1-\sigma^{z}_{j}\sigma^{z}_{j+1})$生成的 $U(1)$ 对称性，该算符用于计数横向磁化强度相反的铁磁区域之间的畴壁数。此外，系统还具有由自旋翻转算符 $P = \prod_{j=1}^{N}\sigma^{x}_{j}$表示的 $\mathbb{Z}_2$ 对称性。在零粒子扇区（$Q = 0$）中， H 的每个 P特征值都对应两个本征态:

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle^{\otimes N} \pm |\downarrow\rangle^{\otimes N}), \tag{2}$$

使得 $P|\pm\rangle = \pm|\pm\rangle$。我们可以预期，当 h足够大时，铁磁相互作用占主导，且 H 的基态位于 $Q = 0$ 扇区。容易看出， $|+\rangle$ 与 $|-\rangle$ 是简并的，$H|\pm\rangle = 0$，因此具有最大和最小横向磁化强度的平凡乘积态 $|\Uparrow\rangle = |\uparrow\rangle^{\otimes N}$ 和 $|\Downarrow\rangle = |\downarrow\rangle^{\otimes N}$也是 H的本征态。这些态明确破缺了系统的 $\mathbb{Z}_2$ 对称性。

我们关注局域微扰对对称性破缺基态 $|\Uparrow\rangle$的影响。最简单的此类微扰是在相邻格点 $[\![j_1, j_2]\!] = \{j_1, j_1+1, \cdots, j_2\}$上产生一个大小为 $d_0 = j_2 - j_1 + 1$的小铁磁畴。不失一般性（H是平移不变的），并为简单起见假设 d_0 为奇数，我们将该畴中心置于格点0（$\equiv N$，由周期性边界条件）。因此，局域微扰后的态可写为:

$$|\Psi_{d_0}(t)\rangle = e^{-iHt}\prod_{j=-(d_0-1)/2}^{(d_0-1)/2}\sigma^{x}_{l}|\Uparrow\rangle\,. \tag{3}$$

由于 $[H, Q] = 0$ 态始终处于 $Q = 2$ 扇区中。这意味着两个畴壁可以移动，彼此间的距离也可以变化，但它们不能被产生或湮灭。因此，这种局域淬火对应的物理情形与参考文献 [11, 24],中研究的情形相似，只是畴壁并非自由传播，而是可以发生散射或形成束缚态。

III. 坐标贝特拟设描述

我们可以使用坐标 Bethe Ansatz 显式求出式（3）所给态的时间演化。令畴壁位置以半整数 l_1, $l_2 \in [\![\frac{1}{2},\ N-\frac{1}{2}]\!]$编号。对于 $l_1 < l_2$，我们将 $Q = 2$ 扇区的基底态定义为:

$$|l_1 l_2\rangle_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\cdots\uparrow\uparrow\downarrow_{l_1+1/2}\cdots\downarrow_{l_2-1/2}\uparrow\uparrow\cdots\rangle \pm |\cdots\downarrow\downarrow\uparrow_{l_1+1/2}\cdots\uparrow_{l_2-1/2}\downarrow\downarrow\cdots\rangle), \tag{4}$$

其中 $P|l_1 l_2\rangle_{\pm} = \pm|l_1 l_2\rangle_{\pm}$。边界条件取决于宇称扇区 $|l_1 N + \frac{1}{2}\rangle_{\pm} = \pm|\frac{1}{2}l_1\rangle$，并且也允许我们写出负的畴壁位置。在这个基底中，态 $|\Psi_{d_0}(t)\rangle$ 可表示为不同宇称扇区中各态的叠加:

$$|\Psi_{d_0}(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-iHt}\left(\left|-\frac{d_0}{2}, \frac{d_0}{2}\right\rangle_{+} + \left|-\frac{d_0}{2}, \frac{d_0}{2}\right\rangle_{-}\right). \tag{5}$$

我们在附录 A 中证明，在热力学极限 $N \to \infty$下，对于固定的时间 t 以及畴壁位置之间的距离，跃迁振幅 ${}_s\langle f_1 f_2|e^{-iHt}|i_1 i_2\rangle_s$ 变得与 s 和

N。周期链实际上被“展开”为一条原点为 0 的无限直线。指标 i_1, i_2, f_1, f_2与原点的距离保持有限，而沿链绕行非零圈数的路径则受到 Lieb-Robinson 界 [83]的抑制。因此，引入态 $|l_1 l_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|l_1 l_2\rangle_+ + |l_1 l_2\rangle_-)$ 是有意义的；取热力学极限后，这些态满足

$$\sigma_j^z |l_1 l_2\rangle = \mathrm{sgn}(l_1 - j)\,\mathrm{sgn}(l_2 - j)\,|l_1 l_2\rangle\,. \tag{6}$$

这使我们可以将时间 t 的态写为

$$|\Psi_{d_0}(t)\rangle = \sum_{f_1<f_2\in\mathbb{Z}} \Psi^{d_0}_{f_1,f_2}(t)\,|f_1 f_2\rangle\,. \tag{7}$$

振幅 $\Psi^{d_0}_{f_1,\,f_2}(t)$ 的动力学由两类激发决定：散射态和束缚态。我们将总波函数分解为这两种贡献之和：$\Psi^{d_0}_{f_1,\,f_2}(t) = \psi^{d_0}_{f_1,\,f_2}(t) + \nu^{d_0}_{f_1,\,f_2}(t)$。

a. 第一项 $\psi^{d_0}_{f_1,\,f_2}(t)$ 对应于动量为实动量 k_1, $k_2 \in \mathbb{R}$ 的粒子对：

$$\psi^{d_0}_{f_1,f_2}(t) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} dk_1 dk_2\, \tilde{\psi}_{d_0}(k_1,k_2) e^{i[k_1(f_1-d_0/2)+k_2(f_2+d_0/2)]} e^{-i(\epsilon_{k_1}+\epsilon_{k_2})t}, \tag{8}$$

其中 $\epsilon_k = h - \cos k$ 是单粒子裸能量，$\tilde{\psi}_{d_0}(k_1, k_2) = e^{id_0(k_1-k_2)} + S(k_1, k_2)$，并且

$$S(k_1,k_2) = -\frac{1+e^{i(k_1+k_2)}-2\Delta e^{ik_1}}{1+e^{i(k_1+k_2)}-2\Delta e^{ik_2}} \tag{9}$$

是该模型的散射相位。这些激发代表散射态（类似于 XXZ 模型中的磁振子）。其振幅为 $\mathcal{O}(t^{-1})$，当 $|f_1|$, $|f_2| \le t$ 时，因此它描述了两个在大小为 $2t$ 的区域内扩展的铁磁畴。

请注意，对于 $\Delta < 1$，这个积分表达式没有明确定义，但仍可通过在傅里叶空间中表示散射相位 $S(k_1, k_2) = \sum_{n_1 n_2} S_{nm} e^{i(k_1 n_1 + k_2 n_2)}$ 来赋予其意义，参见附录 D。在这种表示下，我们可以将 $\psi^{d_0}_{f_1,\,f_2}(t)$ 写成贝塞尔函数 $J_n(t)$ 的求和形式：

$$\psi^{d_0}_{f_1,f_2}(t) = i^{f_1+f_2-l_1-l_2} J_{f_1-l_1}(t) J_{f_2-l_2}(t) + \sum_{mn} i^{m+n} S_{m-f_1+l_2,n-f_2+l_1} J_m(t) J_n(t). \tag{10}$$

随后，可以截断这个求和，以舍弃贝塞尔函数处于指数衰减区时所产生的贡献。

b. 另一项贡献 $\nu^{d_0}_{f_1,\,f_2}(t)$ 表示束缚态。它们对应于一对互为复共轭的动量 $\{K/2 - i\eta(K),\ K/2 + i\eta(K)\}$，其总动量为 K，其中 $e^{-\eta(K)} = \Delta^{-1}\cos(K/2)$ 是方程 $S(K/2 + i\eta(K),\ K/2 - i\eta(K)) = 0$ 的解。它们对振幅的贡献为：

$$\nu^{d_0}_{f_1,f_2}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dK\, \tilde{\nu}^{d_0}_{f_2-f_1}(K) e^{iK\frac{f_1+f_2}{2}} e^{-iE_K t}, \tag{11}$$

其中

$$\tilde{\nu}^{d_0}_{d_f}(K) = (e^{-\eta(K)(d_0+d_f-2)} - e^{-\eta(K)(d_0+d_f)})\theta(\eta(K)), \tag{12}$$

$E_K = \epsilon_{K/2-i\eta(K)} + \epsilon_{K/2+i\eta(K)} = 2h - \Delta - \Delta^{-1}\cos^2(K/2)$，其中 Heaviside 阶跃函数 $\theta(\eta(K))$ 将积分范围限制为满足 $|\cos K/2| \le \Delta$ 的态。该条件确保束缚态波函数可归一化，且其群速度 $E'_K = \frac{1}{2\Delta}\sin(K)$ 不超过散射态的群速度（即 1）。$\nu^{d_0}_{f_1,\ f_2}(t)$ 是 $\mathcal{O}(t^{-1/2})$，并随 $f_2 - f_1$ 指数衰减，因此它描述了一个尺寸为 $\mathcal{O}(1)$ 的局域化铁磁畴，沿着光锥（$-v_B^{\max}t,\ v_B^{\max}t$）在链中移动，其中最大束缚态速度为 $v_B^{\max} = \max(1,\ 1/(2\Delta))$。

利用波函数 (8) 和 (11)，我们引入（未归一化的）态 $|\psi_{d_0}(t)\rangle = \sum_{f_1<f_2\in\mathbb{Z}} \psi^{d_0}_{f_1 f_2}(t)\,|f_1 f_2\rangle$和 $|\nu_{d_0}(t)\rangle = \sum_{f_1<f_2\in\mathbb{Z}} \nu^{d_0}_{f_1 f_2}(t)\,|f_1 f_2\rangle$。这些态分别对应于将 $|\Psi_{d_0}(t)\rangle$ 投影到与实动量对和复动量对相关的扇区上。 H 在这两个扇区之间呈块对角结构，因此这些态的范数不随时间变化。它们为

$$p^S_{d_0} = \langle\psi_{d_0}(t)|\psi_{d_0}(t)\rangle = \frac{1}{8\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} dk_1 dk_2 |\tilde{\psi}_{d_0}(k_1,k_2)|^2, \tag{13}$$

以及 $p^B_{d_0} = 1 - p^S_{d_0}$。

IV. 横向磁化强度的标度极限

本节中，我们研究自旋翻转后横向磁化强度的一点和两点关联函数的标度极限（$d_0 = 1$）， $\mathcal{M}_t(\jmath) = \langle\Psi(t)|\,\sigma^z_\jmath\,|\Psi(t)\rangle$ 以及 $\mathcal{M}_t(\jmath,\ \jmath') = \langle\Psi(t)|\,\sigma^z_\jmath\sigma^z_{\jmath'}\,|\Psi(t)\rangle$。态的分解式 (7) 中出现的基 $|l_1 l_2\rangle$ 尤为方便，因为它是局域横向磁化算符的本征基，

$$\sigma^z_\jmath\,|l_1 l_2\rangle = \mathrm{sgn}(l_1-\jmath)\,\mathrm{sgn}(l_2-\jmath)\,|l_1 l_2\rangle\,. \tag{14}$$

换言之，在态 $|l_1 l_2\rangle$ 中，两堵畴壁之间的磁化强度为 -1，其他位置则为 $+1$。由于自旋位于整数位置，而畴壁位于半整数位置，因此上述表达式不存在歧义。利用 $\mathrm{sgn}\,x = 2\theta(x) - 1$，并将式 (14) 代入关联函数的表达式，我们可以用同一个算符表示这两个量：

$$\begin{cases} \mathcal{M}_t(\jmath) = 1 - 2\,\langle\Psi(t)|\,\Pi^{[\![\jmath+1/2,+\infty]\!]}_{[\![-\infty,\jmath-1/2]\!]}\,|\Psi(t)\rangle\,, \\ \mathcal{M}_t(\jmath,\jmath') = 1 - 2\,\langle\Psi(t)|\,\Pi^{[\![\jmath'+1/2,+\infty]\!]}_{[\![\jmath+1/2,\jmath'-1/2]\!]} + \Pi^{[\![\jmath+1/2,\jmath'-1/2]\!]}_{[\![-\infty,\jmath-1/2]\!]}\,|\Psi(t)\rangle\,, \end{cases} \tag{15}$$

其中

$$\Pi^Y_X = \sum_{\substack{l_1\in X, l_2\in Y \\ l_1<l_2}} |l_1 l_2\rangle\,\langle l_1 l_2|\,. \tag{16}$$

从物理上看，对于两组相邻半整数 $X = [\![x_l,\ x_r]\!]$ 和 $Y = [\![y_l,\ y_r]\!]$，投影算符 $p_{(X,Y)}(t) = \langle\Psi(t)|\,\Pi^Y_X\,|\Psi(t)\rangle$ 的期望值 X给出在时刻 t于 Y处找到一个畴壁的概率。现在我们来定义其标度极限：令 $|x_l|$, $|x_r|$, $|y_l|$, $|y_r| \to \infty$，同时保持比值 $x_{l,\ r}/t$ 和 $y_{l,\ r}/t$ （即射线）不变，并维持初始畴尺寸 $d_0 = 1$恒定：

$$\underline{p}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = \lim_{\substack{|x_{l,r}|,|y_{l,r}|,t\to\infty \\ (x_l/t,x_r/t)\to\mathcal{X} \\ (y_l/t,y_r/t)\to\mathcal{Y}}} p_{(X,Y)}(t). \tag{17}$$

在这个表达式中，离散区间 $X = [\![x_l,\ x_r]\!]$ 与连续射线区间 $\mathcal{X} = (x_l/t,\ x_r/t)$ 相对应。如附录B所示，我们可以将标度极限 (17) 分解为来自散射态 $\langle\psi(t)|\,\Pi_X^Y\,|\psi(t)\rangle$ 的贡献，以及来自束缚态 $\langle\nu(t)|\,\Pi_X^Y\,|\nu(t)\rangle$ 的贡献，即 $p_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = p^S_{(\mathcal{X},\ \mathcal{Y})} + p^B_{(\mathcal{X},\ \mathcal{Y})}$，其中

$$\begin{cases} \underline{p}^S_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = \dfrac{1}{4\pi^2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} dk_1 dk_2\, |\tilde{\psi}(k_1,k_2)|^2 \Theta[\epsilon'_{k_1} \in \mathcal{X}]\Theta[\epsilon'_{k_2} \in \mathcal{Y}]\theta(v_{k_2} - v_{k_1}),\ \text{and} \\ \underline{p}^B_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} dK\, (1 - e^{-2\eta(K)})\Theta[E'_K \in \mathcal{X}\cap\mathcal{Y}]\theta(\Delta - |\cos\frac{K}{2}|). \end{cases} \tag{18}$$

在此表达式中，我们使用示性函数 $\Theta[P]$；当 P 为真时，其取值为 1，否则取值为 0。这里，后者总是可以表示为 Heaviside 阶跃函数的乘积。

以下极限有一个非常简单的解释：散射态的位置概率密度对应于两条半经典轨迹 $x_k(t) = \epsilon'_k t$之间的干涉图样。事实上，回想一下，$|\psi(k_1,\ k_2)|^2 = |1+S(k_1,\ k_2)e^{-i(k_1-k_2)}|^2$。第一项对应于未发生交叉的轨迹，而第二项对应于两粒子发生交换（因而交叉）的轨迹。在第二种构型中，波函数会获得一个相位 $S(k_1,\ k_2)\ e^{-i(k_1-k_2)}$。

相比之下，束缚态在标度极限下会变为点状，并沿半经典轨迹$x_K(t) = E'_K t$运动。只有当 X 和 Y 有非零交集时，它们对投影算符 Π_X^Y 期望值的贡献在标度极限下才保持非零。

由此结果可直接计算横向磁化强度的一点函数和二点函数的标度极限，其形式为

$$\begin{cases} \underline{\mathcal{M}}(\xi) = p^B + \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_1 dk_2}{8\pi^2} |1 + S(k_1,k_2)e^{i(k_1-k_2)}|^2 \operatorname{sgn}(v_{k_1} - \xi)\operatorname{sgn}(v_{k_2} - \xi)\ \text{and} \\ \underline{\mathcal{M}}(\xi_1,\xi_2) = p^B + \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_1 dk_2}{8\pi^2} |1 + S(k_1,k_2)e^{i(k_1-k_2)}|^2 \operatorname{sgn}(v_{k_1} - \xi_1)\operatorname{sgn}(v_{k_2} - \xi_1)\operatorname{sgn}(v_{k_1} - \xi_2)\operatorname{sgn}(v_{k_2} - \xi_2). \end{cases} \tag{19}$$

从这些公式可以明显看出，局域微扰会导致磁化剖面发生宏观形变，因为整个大小为 $\sim 2t$ 的光锥范围内，磁化剖面都受到 $\mathcal{O}(1)$ 阶修正的影响。在这种情况下，相互作用的一个有趣之处在于，基本激发的非局域性会将量子干涉放大到弹道尺度。因此，散射相位几乎可以直接从磁化剖面中“读出”。我们还可以从二点函数的表达式看出，它不会分解为两个一点函数的乘积，尽管两个不同的射线变量 ξ_1 和 ξ_2 对应的物理距离 $(\xi_1 - \xi_2)t$ 会随时间线性发散。尽管初态是平凡的乘积态，微扰因而会导致聚类性质的破坏。相互作用对这一图景影响最大的方式，是产生不参与破坏聚类的束缚态。事实上，随着 $\Delta \to \infty$，形成束缚态的概率 p^B 会增大，而磁化强度的一点函数和二点函数标度极限都会趋近于基态的均匀磁化强度，$\mathcal{M}(\xi_1,\ \xi_2) = \mathcal{M}(\xi_1)\mathcal{M}(\xi_2) = 1$。

在图1中，我们将这一预测与精确数值数据进行了比较。除对应于束缚态光锥的区域（$-\min(1,\ 1/(2\Delta)),\ \min(1,\ 1/(2\Delta))$）外，早期时刻的吻合度已经非常高。在该区域，随着 Δ 增大，$\mathcal{O}(t^{-1})$修正变得十分显著。这种不一致是有限时间效应，因为随着 $t \to \infty$，束缚态的有限宽度变得可以忽略。

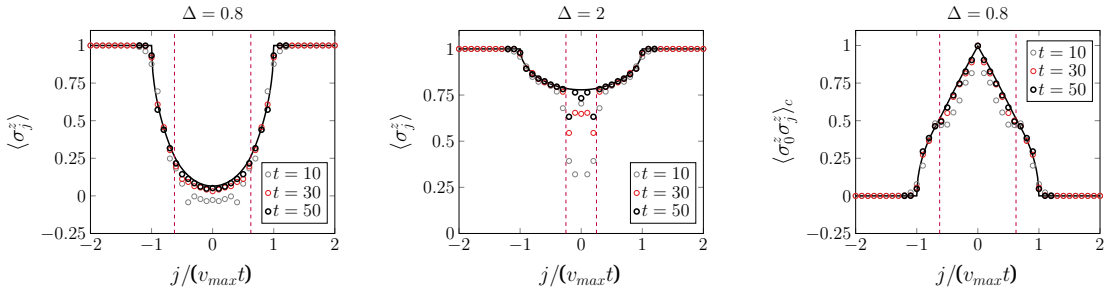


图 1. 在态 $|\Uparrow\rangle$ 上位点 $l = 0$ 发生自旋翻转后，不同 Δ值下的磁化剖面和连通关联。数据点对应磁化强度的精确值，实线表示式 (19) 的渐近极限。在最右侧的两幅图中，虚线表示最大束缚态速度 $v^B_{max} = \min(1,\ 1/(2\Delta))$。

V. 约化密度矩阵的标度极限

A. 精确约化密度矩阵

在本文其余部分，我们旨在计算一些需要了解相邻自旋子系统约化密度矩阵的量。我们考虑子系统 $A = [\![l,\ r]\!]$，并引入对应于畴壁位置的"对偶子系统" $\tilde{A} = [\![l - \frac{1}{2},\ r + \frac{1}{2}]\!]$。$|l_1 l_2\rangle\langle m_1 m_2|$ 的偏迹非零，当且仅当 A^c 中的畴壁构型在 bra 和 ket 中完全相同：

$$\mathrm{Tr}_{A^c}(|l_1 l_2\rangle\langle m_1 m_2|) = |l_1 l_2\rangle_A \langle m_1 m_2|_A\, t^A_{l_1 m_1} t^A_{l_2 m_2}. \tag{20}$$

这里，$|l_1 l_2\rangle_A$ 表示在位置 l_1 和 l_2存在两个畴壁时，子系统 A 中的态：

$$|l_1 l_2\rangle_A = \bigotimes_{j\in A} \left(\Theta[j \in (l_1, l_2)]\,|\downarrow\rangle + \Theta[j \notin (l_1, l_2)]\,|\uparrow\rangle\right), \tag{21}$$

而矩阵 t^A_{ij} 则强制要求 A之外的畴壁相匹配：

$$t^A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i, j \in \tilde{A}, \\ \delta_{ij} & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{22}$$

利用这一形式体系，我们可以明确写出约化密度矩阵 $\rho_A(t) = \mathrm{Tr}_{A^c}(|\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|)$。省略波函数和密度矩阵对时间的显式依赖，

$$\rho_A = \mathrm{Tr}_{A^c}(|\Psi\rangle\langle\Psi|) = \sum_{ij,kl\in\tilde{A}} \rho^A_{ij,kl}\,|ij\rangle_A\langle kl|_A + \left(1 - \sum_{i,j\in\tilde{A}} \rho^A_{ij,ij}\right)|\Uparrow\rangle_A\langle\Uparrow|_A\,, \tag{23}$$

其中 $\tilde{e}$第一项刻画了可表示为 A中两条畴壁的贡献：

$$\rho^A_{ij,kl} = \sum_{l_1 l_2 m_1 m_2} \Psi_{l_1 l_2}\Psi_{m_1 m_2} t^A_{l_1 m_1} t^A_{l_2 m_2}\,\langle l_1 l_2|ij\rangle_A\langle kl|m_1 m_2\rangle_A\,, \tag{24}$$

其余各项则归入真空项 $|\Uparrow\rangle\langle\Uparrow|$，对应于两条畴壁均位于子系统之外且处于同一侧的构型。

B. 标度极限

在标度极限 $|l|,|r|,t\to\infty$ 下，当 l/t 和 r/t 固定时，约化密度矩阵具有简化的结构：其本征值以及奇算符乘积在其本征向量之间的矩阵元都存在标度极限。

为说明这一点，我们将畴壁位置划分到三个区域：$\tilde{A}=[\![l-\frac{1}{2},r+\frac{1}{2}]\!]$、左侧补区域 $\tilde{L}=[\![-\infty,l-\frac{3}{2}]\!]$ 和右侧补区域 $\tilde{R}=[\![r+\frac{3}{2},+\infty]\!]$。由于控制偏迹的 t_{ij}^{A} 在这三个区域之间呈块对角形式，约化密度矩阵自然分解为若干项 (X,Y)，分别表示两个畴壁的位置：

$$\rho_A=\sum_{X,Y\in\{\tilde{L},\tilde{A},\tilde{R}\}}p_{(X,Y)}\rho_{A(X,Y)}, \tag{25}$$

其中 $p_{(X,Y)}$ 表示在 X 中找到一个畴壁、在 Y中找到另一个畴壁的概率，见式（18）；与这一构型对应的密度矩阵定义如下：

$$p_{(X,Y)}\rho_{A(X,Y)}=\mathrm{Tr}_{A^c}(\Pi_X^Y|\Psi\rangle\langle\Psi|\Pi_X^Y). \tag{26}$$

严格来说，$\rho_{A(\tilde{L},\tilde{R})}$ $\rho_{A(\tilde{L},\tilde{A})}$ $\rho_{A(\tilde{A},\tilde{R})}$ 和 $\rho_{A(\tilde{A},\tilde{A})}$ 共享边界态 $\left|l-\frac{1}{2},r+\frac{1}{2}\right\rangle_A$，但在标度极限下，这种重叠变得无关紧要。因此，我们忽略这一细微之处，并将 $\rho_{A(\tilde{L},\tilde{R})}+\rho_{A(\tilde{L},\tilde{R})}+\rho_{A(\bar{L},\bar{R})}$ 称为 0–粒子扇区，将 $\rho_{A(\tilde{L},\tilde{A})}+\rho_{A(\tilde{A},\tilde{R})}$ 称为 1–粒子扇区，将 $\rho_{A(\tilde{A},\tilde{A})}$ 称为 2–粒子扇区。

1. *Pure and trivial sectors*

有几个扇区可以立即简化：0–粒子扇区简单来说就是两个自发对称性破缺真空态的统计混合态。如果两个畴壁都属于同一个补区域，A 就与微扰前的初态处于同一个真空态中。反之，如果它们分处 A两侧，后者实际上就被“翻转”了：

$$\rho_{A(\tilde{L},\tilde{L})}=\rho_{A(\tilde{R},\tilde{R})}=|\Uparrow\rangle_A\langle\Uparrow|_A \text{ and } \rho_{A(\tilde{L},\tilde{R})}=|\Downarrow\rangle_A\langle\Downarrow|_A. \tag{27}$$

此外，2– 粒子扇区在进行偏迹后仍为纯态：

$$\rho_{A(\tilde{A},\tilde{A})}=p_{(\tilde{A},\tilde{A})}|\Psi_A\rangle\langle\Psi_A|, \quad \text{with } |\Psi_A\rangle=\frac{1}{\sqrt{p_{(\tilde{A},\tilde{A})}}}\sum_{l_1<l_2\in\tilde{A}}\Psi_{l_1,l_2}|l_1l_2\rangle_A. \tag{28}$$

对于任意内部区域 X，$Y\subset A$, $\langle\Psi_A|\Pi_X^Y|\Psi_A\rangle$ 由以下概率比给出

$$\langle\Psi_A|\Pi_X^Y|\Psi_A\rangle=\frac{p_{(X,Y)}}{p_{(A,A)}}, \tag{29}$$

这保证了 $|\Psi_A\rangle$ 中任意局域奇算符乘积的期望值都存在标度极限。

2. Diagonalisation of the 1− particle sector

项 $\rho_{A(\tilde{L},\tilde{A})}$ 和 $\rho_{A(\tilde{A},\tilde{R})}$结构更为复杂，因此会带来一些复杂情况：

$$\rho_{A(\tilde{L},\tilde{A})} \simeq \sum_{\substack{l_1\in\tilde{L}\\ l_2,m_2\in\tilde{A}}} \psi_{l_1,l_2}\psi^*_{l_1 m_2} \left|l_2\right\rangle_A \left\langle m_2\right|_A \text{ and} \tag{30}$$

$$\rho_{A(\tilde{A},\tilde{R})} \simeq \sum_{\substack{l_1,m_1\in\tilde{A}\\ l_2\in\tilde{R}}} \psi_{l_1 l_2}\psi^*_{m_1 l_2} P_A \left|l_1\right\rangle_A \left\langle m_1\right|_A P_A, \tag{31}$$

其中我们定义$\left|m\right\rangle_A = \left|l-\frac{1}{2},m\right\rangle_A$, $P_A\left|m\right\rangle_A = \left|m,r+\frac{1}{2}\right\rangle_A$。在该表达式中，$\psi_{l_1,l_2}$是散射态波函数，见式(8)。我们舍去了在标度极限下消失的束缚态贡献（见式(18)），因为 L、A 与 R 没有重叠。随着光锥扩展，对 L （相应地， R）求和中的有效项数随时间线性发散。另一方面，每一单项都以$1/t$的方式趋于零，使得标度行为并不显然。为解决这一问题，我们回顾 $\psi_{l_1 l_2}$的积分表示：

$$\psi_{f_1,f_2} = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} dk_1 dk_2\, \tilde{\psi}(k_1,k_2) e^{i[k_1(f_1-1/2)+k_2(f_2+1/2)]} e^{-i(\epsilon_{k_1}+\epsilon_{k_2})t}. \tag{32}$$

两个畴壁之间的耦合完全包含在函数 $\tilde{\psi}(k_1,k_2) = e^{i(k_1-k_2)} + S(k_1,k_2)$之中。由于散射相位满足 $S(k_1,k_2) = S(k_2,k_1)^*$，它可视为作用于紧支撑$(-\pi,\pi)$上的厄米算子的核。根据希尔伯特–施密特定理，它可以分解为

$$S(k_1,k_2) = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j \phi_j(k_1)\phi_j^*(k_2), \tag{33}$$

其中，特征值集合 λ_j 是离散的，且仅在 0 附近聚集；特征函数 ϕ_j 构成正交归一组：$\int_{-\pi}^{\pi} dk\, \phi_j(k)\phi^*_{j'}(k) = 2\pi\delta_{jj'}$。将附录D中给出的 $S(k_1,k_2)$ 的傅里叶系数截断矩阵对角化，可以非常准确地数值近似方程 (33) 的主导项。散射相位的性质，

$$S(k,k) = -1 \text{ and } S(k_1,k_2)S(k_2,k_1) = 1, \tag{34}$$

要求特征值满足

$$\sum_{j=1}^{+\infty}\lambda_j = -1 \text{ and } \sum_{j=1}^{+\infty}\lambda_j^2 = 1. \tag{35}$$

这些恒等式为数值对角化提供了可靠的一致性检验。为恢复 $\tilde{\psi}(k_1,k_2)$ 的完整表达式，我们定义 $\lambda_0 = 1$ 和 $\phi_0(k) = e^{ik}$，使得 $\tilde{\psi}(k_1,k_2) = \sum_{j=0}^{+\infty}\lambda_j\phi_j(k_1)\phi_j^*(k_2)$。此外，我们引入模态 ϕ_j 的 X-受限格拉姆矩阵：

$$G_{jj'}(\tilde{X}) = \sum_{l\in\tilde{X}}\left(\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} dk\, dp\, \phi_j(k)\phi^*_{j'}(p) e^{i(k-p)(l-1/2)} e^{-i(\epsilon_k-\epsilon_p)t}\right) \tag{36}$$

$$G^c_{jj'}(\tilde{X}) = \sum_{l\in\tilde{X}}\left(\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} dk\, dp\, \phi^*_{j'}(k)\phi_j(p) e^{i(k-p)(l+1/2)} e^{-i(\epsilon_k-\epsilon_p)t}\right). \tag{37}$$

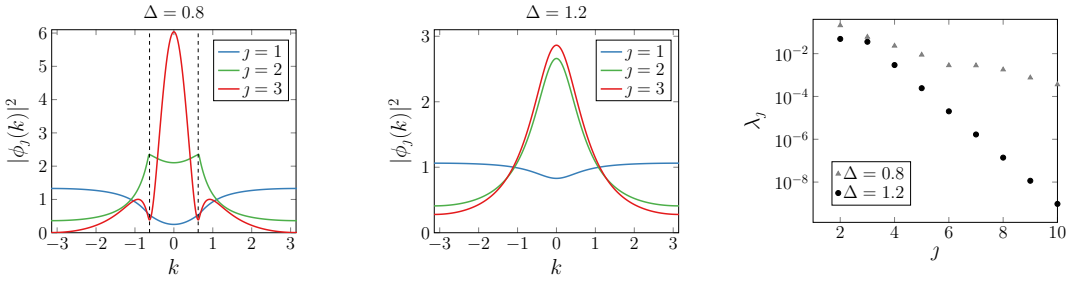


图 2. 使用截断傅里叶表示对散射相位进行数值对角化 S_{nm}，其中$|n|$, $|m| \leq 250$。对于 $\Delta = 0.8$、$\sum_j \lambda_j \approx 0.996611$ 和 $\sum_j \lambda_j^2 \approx 0.999991$，而对于 $\Delta = 1.2$ $\sum_j \lambda_j \approx 1$ 和 $\sum_j \lambda_j^2 \approx 0.1$，精度至少达到 10^{-8}。左图和中图：散射相位的前几个模态的表示。虚线表示散射相位变得非解析时的动量 $\pm\cos^{-1}\Delta$。右图：散射相位的截断傅里叶表示的本征值。

这些定义使我们可以将式 (30) 改写为关于本征值 λ_j的离散求和，这些本征值通常呈指数衰减，见图 2。若聚焦于 $\rho_{A(\tilde{L},\tilde{A})}$，则有

$$\rho_{A(\tilde{L},\tilde{A})} = \sum_{j,j'=0}^{+\infty} \lambda_j \lambda_{j'} G_{jj'}(\tilde{L}) \left|\phi_{j'}\right\rangle_A \left\langle\phi_j\right|_A . \tag{38}$$

态 $\left|\phi_j\right\rangle_A$ 是子系统 A 上特征函数 $\phi_j(k)$ 的晶格表示:

$$\left|\phi_j\right\rangle_A = \sum_{l\in\tilde{A}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \phi_j^*(k) e^{ik(l-1/2)} e^{-i\epsilon_k t} \left|l_1\right\rangle_A , \quad \left\langle\phi_j|\phi_{j'}\right\rangle_A = G^c_{jj'}(\tilde{A}). \tag{39}$$

该框架将求 ρ_A 的本征向量和本征值的问题归结为对角化矩阵 $M^{(\tilde{L},\tilde{A})} = \Lambda G(\tilde{L})\Lambda(G^c(\tilde{A}))$，其中 $\Lambda = \mathrm{diag}(\{\lambda_j\})$。在标度极限下，格拉姆矩阵 $G(X)$和 $G^c(X)$收敛于限制在射线区间 $\mathcal{X}$上的特征函数 $\phi_j(k)$的重叠:

$$\underline{G}_{jj'}(\mathcal{X}) = (\underline{G^c_{j'j}}(\mathcal{X}))^* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk\, \phi_j(k) \phi^*_{j'}(k) \Theta[\epsilon'_k \in \mathcal{X}]. \tag{40}$$

这一的存在 极限确保$\rho_{A(\tilde{L},\tilde{A})}$ 的谱具有定义良好的标度极限，即 :

$$\{\underline{\mu}_j^{\mathcal{A}(\mathcal{L},\mathcal{A})}\} = \mathrm{Spec}[\Lambda \underline{G}(\mathcal{L}) \Lambda \underline{G}^\dagger(\mathcal{A})]. \tag{41}$$

此外 ，$\rho_{A(\tilde{L},\tilde{A})}$ 的本征向量由态 $\left|\phi_{j'}\right\rangle_A$的线性组合给出,

$$\left|\varphi_n^{A(\tilde{L},\tilde{A})}\right\rangle = \sum_j W_{nj}^{(\tilde{L},\tilde{A})} \left|\phi_j\right\rangle_A , \tag{42}$$

其中，系数 $W_{(L,A)nj}$是 $M^{(\tilde{L},\tilde{A})}$的本征向量。这些系数在标度极限中收敛到稳定值$W_{(\mathcal{L},\mathcal{A})nj}$，即 $M^{(\mathcal{L},\mathcal{A})} = \Lambda G(\mathcal{L}) \Lambda G^\dagger(\mathcal{A})$的本征向量。

VI. 纠缠不对称性

有了约化密度矩阵 ρ_A，我们现在可以研究子系统内横向磁化强度 $Z_A = \sum_{j\in A} \sigma_j^z$ 涨落相关的量子相干性。为此，我们首先考察 ρ_A 相对于 Z_A的纠缠不对称性：

$$\Delta S(\rho_A, Z_A) = S(\mathcal{G}_{Z_A}(\rho_A)) - S(\rho_A). \tag{43}$$

该量　　定义为态 ρ_A 与其“旋转平均”版本之间的相对熵，

$$\mathcal{G}_{Z_A}(\rho_A) = \sum_{z\in \mathrm{Spec}\, Z_A} \Pi_z\, \rho_A\, \Pi_z. \tag{44}$$

它可用投影算符 Π_z 表示，该投影算符作用于 Z_A 的特征空间，其特征值为 z。旋转平均态$\mathcal{G}_{Z_A}(\rho_A)$表示对 A 进行 Z_A的非选择性测量后得到的态：从物理上说，这一操作会消除电荷扇区之间所有对应于相干性的非对角元素。因此，尽管 ρ_A 中 Z_A 的涨落与 $\mathcal{G}_{Z_A}(\rho_A)$中的相同，旋转平均态中的涨落却可被解释为完全源于经典不确定性。

$\Delta S(\rho_A,\ Z_A)$是关于由 Z_A生成的 $U(1)$ 群的不对称性度量。虽然后者不是哈密顿量的对称性，却是自发对称性破缺基态的对称性，该基态具有固定磁化强度。纠缠不对称性（EA）满足两个重要性质：(i) 它是正的 [84],$\Delta S(\rho_A,\ Z_A) \geq 0$；(ii) 当且仅当态关于电荷 [37],对称时，它才为零，也就是说，电荷扇区之间不存在相干性，

$$\Delta S(\rho_A, Z_A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad [\rho_A, Z_A] = 0.$$

对自发对称性破缺基态进行局部淬火后，随着激发传播，可以预期对称性会在中间时刻被破坏；而在晚期，随着系统局部弛豫至零粒子扇区，对称性将恢复。

精确计算 ΔS_{Z_A} 的值通常是一项艰巨的任务。不过，在我们的设定中，可以利用双粒子扇区的低维性，在时间复杂度随子系统大小呈多项式增长的情况下数值计算其精确值。

为了深入理解 $\Delta S(\rho_A,\ Z_A)$的物理含义，我们注意到，其主要行为对约化密度矩阵的结构相对不敏感。实际上，我们可以推导出两个简单的界来近似它。令 B 为区域 A的补区域，并定义全系统 $|\Psi\rangle$ 相对于Z_A的旋转平均态：

$$\sigma^{(A)} = \mathcal{G}_{Z_A}(|\Psi\rangle\langle\Psi|). \tag{45}$$

由于旋转平均算符 $\mathcal{G}_{Z_A}$ 仅在子系统 A上产生非平凡作用，因此它满足

$$\mathrm{Tr}_B(\sigma^{(A)}) = \mathcal{G}_{Z_A}(\mathrm{Tr}_B(|\Psi\rangle\langle\Psi|)) = \mathcal{G}_{Z_A}(\rho_A), \tag{46}$$

$$\mathrm{Tr}_A(\sigma^{(A)}) = \mathrm{Tr}_A\left(\sum_{z\in \mathrm{Spec}\, Z_A} \Pi_z\, |\Psi\rangle\langle\Psi|\, \Pi_z\right) = \mathrm{Tr}_A(|\Psi\rangle\langle\Psi|) = \rho_B. \tag{47}$$

纠缠熵的三角不等式 $S_{AB} \geq |S_A - S_B|$ 应用于 $\sigma^{(A)}$，得到

$$S(\sigma^{(A)}) \geq |S(\mathcal{G}_{Z_A}(\rho_A)) - S(\rho_B)|. \tag{48}$$

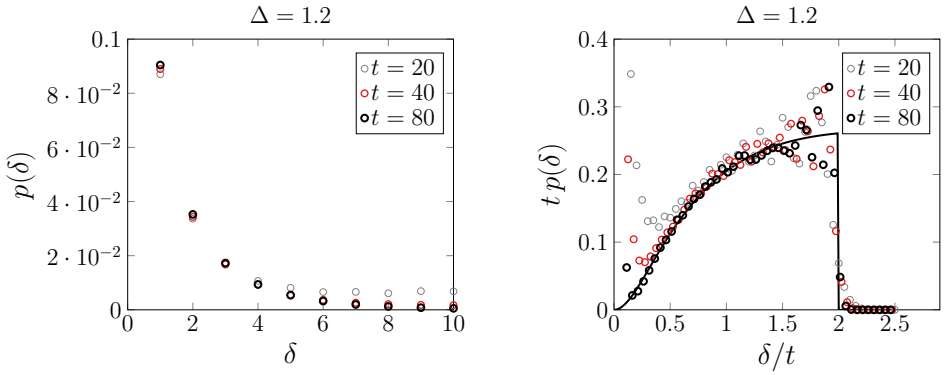


图 3. 两个相距 δ 的畴壁出现的概率 $p(\delta)$。左：概率分布中的时间无关贡献（束缚态）。右：分布中随时间变化部分的标度极限（散射态）。数值数据与底层的连续分布（经粗粒化后）进行了比较。

注意到 $|\Psi\rangle\langle\Psi|$ 为纯态，故 $S(\rho_A) = S(\rho_B)$。因此，该不等式变为：

$$S(\sigma^{(A)}) \geq \Delta S(\rho_A, Z_A). \tag{49}$$

注意，$\sigma^{(A)}$ 的熵恰好等于完整态相对于 Z_A 的不对称性，因为 $S(|\Psi\rangle\langle\Psi|) = 0$。另一方面，将冯·诺依曼熵的次可加性 $S(\rho_{AB}) \leq S(\rho_A)+S(\rho_B)$ 应用于 $\sigma^{(A)}$，可得一个下界：

$$S(\sigma^{(A)}) \leq S(\mathcal{G}_{Z_A}(\rho_A)) + S(\rho_B). \tag{50}$$

重新整理并代入 $S(\rho_A) = S(\rho_B)$ 后，最终可得，子系统不对称性受电荷涨落的熵所界定：

$$S(\sigma^{(A)}) - 2S(\rho_A) \leq \Delta S(\rho_A, Z_A) \leq S(\sigma^{(A)}). \tag{51}$$

我们在第五节中的分析表明，纠缠熵 $S(\rho_A)$ 存在良定义的标度极限，该极限由约化密度矩阵本征值 $\mu_j^{\mathcal{A}}$ 的香农熵给出：

$$S(\rho_A) \to -\sum_j \mu_j^{\mathcal{A}} \log \mu_j^{\mathcal{A}}. \tag{52}$$

本征值 $\mu_j^{\mathcal{A}}$ 衰减迅速（这是希尔伯特-施密特系数 λ_j衰减的结果），因此该极限是有限的。因此，纠缠熵 $S(\rho_A)$ 对总不对称性仅贡献一个 $\mathcal{O}(1)$ 项。在标度极限下，我们因此可以用完整态 $|\Psi\rangle$相对于子系统电荷 Z_A 的不对称性 $S(\sigma^{(A)})$ 来近似纠缠不对称性：

$$\Delta S(\rho_A, Z_A) = S(\sigma^{(A)}) + \mathcal{O}(1). \tag{53}$$

这种近似特别有用，因为 $S(\sigma^{(A)})$ 仅取决于 A中不同可能磁化强度的概率分布$p_{Z_A}(z)$：

$$S(\sigma^{(A)}) = -\sum_{z\in \mathrm{Spec}(Z_A)} p_{Z_A}(z)\log p_{Z_A}(z), \tag{54}$$

这比计算 ρ_A 的精确纠缠不对称性容易得多。磁化强度为 $Z_A = |A| - 2d$ （对应于 d 个自旋翻转）的概率为

$$p_{Z_A}(|A|-2d) = \delta_{d,0}(p_{(\tilde{L},\tilde{L})} + p_{(\tilde{R},\tilde{R})}) + \delta_{d,|A|}p_{(\tilde{L},\tilde{R})} + \sum_{\jmath\le l-\frac{1}{2}} |\Psi_{\jmath,l-\frac{1}{2}+d}|^2 + \sum_{\jmath'\ge r+\frac{1}{2}} |\Psi_{r+\frac{1}{2}-d,\jmath'}|^2 + \sum_{\jmath=l+\frac{1}{2}}^{r-\frac{1}{2}-d} |\Psi_{\jmath,\jmath+d}|^2. \tag{55}$$

磁化强度的极值 $Z_A = \pm|A|$ 具有 $\mathcal{O}(1)$ 的权重，对应于两个畴壁都位于子系统之外的构型。同样，束缚态对接近最大值的磁化强度 $Z_A = |A| - 2d$ 贡献 $\mathcal{O}(1)$，且该贡献随 d 指数衰减。

相比之下，当至少一个畴壁位于子系统内时，散射态会产生 $\mathcal{O}(1/t)$ 的贡献，其分布范围大小为 $\sim 2t$（即光锥的大小）。这种区别会显著影响不同 Rényi 指数 α 下不对称性的行为。对于 $\alpha > 1$，求和由 $\mathcal{O}(1)$ 权重（真空和束缚态）主导；而冯·诺伊曼（$\alpha = 1$）不对称性则由 $\mathcal{O}(1/t)$ 贡献主导。因此，标准的复制技巧 [85, 86] 方法并不适用于计算 $n \to 1$ 时 $\mathrm{Tr}(\rho_A^n)$ 和 $\mathrm{Tr}(\mathcal{G}_{Z_A}(\rho_A)^n)$ 的极限。仅保留主导的 $\mathcal{O}(1/t)$ 项后，我们发现不对称性应呈现如下行为

$$\Delta S(\rho_A, Z_A) = (p^S - p_0^S(t))\log(2t) + \mathcal{O}(1), \tag{56}$$

其中，$p_0^S(t) = p^{S_{(\tilde{L},\tilde{L})}}(t) + p^{S_{(\tilde{R},\tilde{R})}}(t) + p^{S_{(\tilde{L},\tilde{R})}}(t)$ 表示散射态中两个畴壁均位于子系统之外的时变概率。该公式意味着，在标度极限下，量$\Delta S(\rho_A, Z_A)/\log(2t)$ 有良好定义：

$$\lim_{\substack{|A|,t\to\infty \\ t/|A|=\tau}} \frac{\Delta S(\rho_A, Z_A)}{\log(2t)} = p^S - \underline{p_0^S}(\tau). \tag{57}$$

对数增长是畴壁弹道扩散的结果，使得该态相干地跨越的磁化扇区数目随时间不断增大。晚期时刻 $t \gg |A|$，概率 $p_0^S(t)$ 趋近于 p^S as $1/t$ as 最慢的准粒子逃离子系统。因而，随着对称性在局部恢复，不对称性消失并趋于其真空值。不对称性的主导行为具有相当普适性，相互作用仅通过舍弃束缚态的项 $p^S - p_0^S(t)$ 对其产生影响。

虽然式 (57) 描述了不对称性的主导项行为，但实际上，对于我们进行数值研究的时间和子系统大小，$\mathcal{O}(1)$ 修正与对数项相当。在中间时间段 $t \le |A|/2$，由于初始微扰产生的准粒子尚未到达子系统边界，子系统实际上处于纯态。在此范围内，$\mathcal{O}(1)$ 修正可以很好地近似为常数项 ΔS_0，该项考虑了束缚态的贡献（见图 3 左图），以及与磁化强度概率分布中非振荡部分相关的微分熵（见图 3 右图）。考虑这一修正后，可以很好地拟合

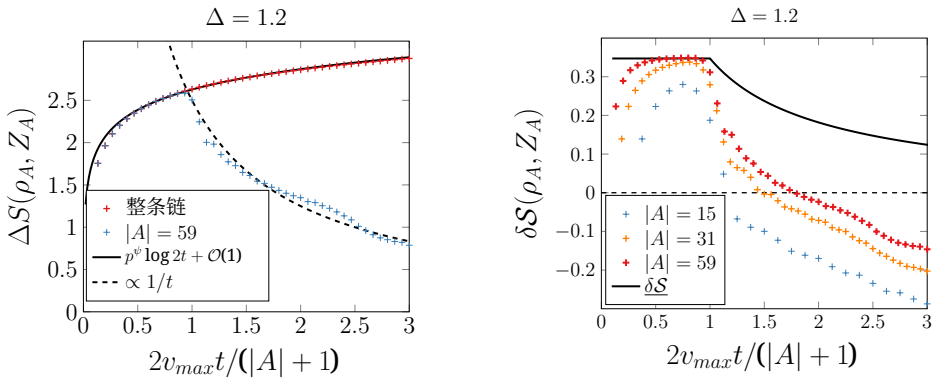


图 4. 左：自旋翻转后的不对称性随时间演化。右：不同子系统大小下 $\delta S(\rho_A,\ Z_A) = (\Delta S(\rho_A,\ Z_A) - \Delta S_0)/\log\ t$ 的渐近预测与数值结果的比较。

数值数据，见图 4。相反，束缚态和散射态对约化密度矩阵非真空部分的贡献，在晚期可展开为相对于无限时间（真空）极限的修正。 A 中发现畴壁或束缚态的概率按 $1/t$衰减，这保留了不对称性预言的$1/t$ 幂律衰减。

VII. 量子费 Fisher 信息

上一节讨论的纠缠不对称性，为不同磁化扇区之间的相干性提供了一种严格的度量。然而，它实际上只是“计数”这些扇区的数量，而不考虑各扇区对应的磁化强度。为了进一步刻画不同磁化扇区之间相干性所关联的量子涨落，自然需要将这项研究扩展到量子费 Fisher 信息（QFI）的计算，因为它对磁化扇区之间涨落的幅度很敏感。实际上，我们将使用重标度的量子费 Fisher 信息（rQFI） [24], , 其针对密度矩阵 $\rho = \sum_i \mu_i \left|i\right\rangle \left\langle i\right|$ 和可观测量 O 定义如下

$$\chi(\rho, O) = \frac{1}{4||O||^2} \sum_{k,l=1}^{+\infty} \frac{(\mu_i - \mu_j)^2}{\mu_i + \mu_j} |\left\langle i\right| O \left|j\right\rangle|^2. \tag{58}$$

我们特别关注 rQFI，是因为它能够探测量子关联的物理尺度，尤其是量子叠加导致的聚类破缺。为对此进行形式化描述，我们依据 rQFI 的以下性质：

a. *Link* 方差为： 对于纯态，量子费舍尔信息简化为方差的 4 倍，也就是说

$$\chi(\left|\psi\right\rangle \left\langle\psi\right|, O) = \frac{\mathrm{Var}(\left|\psi\right\rangle \left\langle\psi\right|, O)}{||O||^2}. \tag{59}$$

b. 对纯相干性的敏感性：与方差不同，（约化）量子费舍尔信息是凸的：

$$\chi(\sum_i p_i \rho_i) \leq \sum_i p_i \chi(\rho_i), \tag{60}$$

事实上，（约化）量子费舍尔信息可以被视为方差凸屋顶（相差一个常数因子） [87]。这一性质确保了：方差对 O的经典和量子涨落都敏感，而（约化）量子费舍尔信息仅对量子涨落敏感。

c. 归一化：rQFI满足界

$$0 \leq \chi(\rho, O) \leq 1. \tag{61}$$

虽然 $\chi(\rho,\ O) = 0$适用于对称态（$[\rho, O] = 0$），但只有在猫态（即由两个分别具有最小（$-||O||$）和最大（$||O||$） O值的态构成的等权叠加）下，才会达到其最大值 1。

因此，rQFI 能够检测由量子叠加导致的聚类性质破坏。在具有聚类性质的态中，连通关联函数 $\langle o_i o_j \rangle_c = \langle o_i o_j \rangle - \langle o_i \rangle \langle o_j \rangle$ 会随着距离 $|i-j|$ 的增加而趋于 0。在这种情况下，即使存在代数衰减关联，广延算符的方差 $\mathrm{Var}(\rho_A,\ O_A)$ 仍按体积的某个幂次 $|A|^{\alpha}$缩放，其中 $\alpha < 2$。这意味着

$$\chi(\rho_A, O_A) \leq \frac{\mathrm{Var}(\rho_A, O_A)}{||O_A||^2} \underset{|A|\to\infty}{\to} 0. \tag{62}$$

因此，在标度极限下， χ的值非零表明弹道尺度上的聚类遭到破坏：该态必定是磁化扇区的相干叠加，且这些扇区的总荷相差与系统尺寸成正比。在伊辛模型铁磁相的自发对称性破缺基态上进行局域淬火后， [24], 或在生长界面中将自发对称性破缺基态与热态连接起来后， [22, 23]都曾显著观察到这一效应。本节旨在将文献 [24] 的结果推广至相互作用情形，并介绍一种用于计算局域淬火后相对量子费舍尔信息的贝特拟设方法。

令 $\underline{\chi}_{\mathcal{A}}$ 为重标度量子费舍尔信息在极限 $|A|, t \to \infty$ 下的值，其中比值 $\tau = 2t/|A|$ 保持不变（我们将看到这样的极限确实存在）。利用约化密度矩阵的分解式 (25)：$\rho_A = \sum_{(X,Y)} p_{(X,Y)} \rho_{A(X,Y)}$，并注意到磁化算符 Z_A 在标度极限下不会混合不同的~ ~扇区（X, Y），相对量子费舍尔信息可分解为约化密度矩阵各扇区贡献之和：

$$\underline{\chi}_{\mathcal{A}} = \sum_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \underline{p}_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} \underline{\chi}_{\mathcal{A}(\mathcal{X},\mathcal{Y})}. \tag{63}$$

这里，$\underline{\chi}_{\mathcal{A}(\mathcal{X},\mathcal{Y})}$ 表示密度矩阵 $\rho_{A(X,Y)}$的相对量子费舍尔信息的标度极限。由于扇区 $(\mathcal{L},\mathcal{L})$、$(\mathcal{R},\mathcal{R})$ 和 $(\mathcal{L},\mathcal{R})$ 对应真空态，它们对量子费舍尔信息的贡献恒为 0 （ Z_A 的方差为零）。扇区 $(\mathcal{A},\mathcal{A})$ 中，两个畴壁都位于子系统内；该扇区为纯态，因此其对量子费舍尔信息的贡献仅由一个方差给出。只需对式 (29) 给出的 $\langle \Psi_A | \sigma_i^z \sigma_j^z | \Psi_A \rangle_c$的标度极限积分，即可轻松完成计算。结果可简洁地写为：

$$\underline{\chi}_{\mathcal{A}(\mathcal{A},\mathcal{A})} = \frac{4\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_1 dk_2}{8\pi^2} |\tilde{\psi}(k_1,k_2)|^2 (\epsilon'_{k_1} - \epsilon'_{k_2})^2 \Theta[\epsilon'_{k_1} \in \mathcal{A}] \Theta[\epsilon'_{k_2} \in \mathcal{A}]}{\underline{p}_{(\mathcal{A},\mathcal{A})}} - \left(\frac{2\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_1 dk_2}{8\pi^2} |\tilde{\psi}(k_1,k_2)|^2 |\epsilon'_{k_1} - \epsilon'_{k_2}| \Theta[\epsilon'_{k_1} \in \mathcal{A}] \Theta[\epsilon'_{k_2} \in \mathcal{A}]}{\underline{p}_{(\mathcal{A},\mathcal{A})}} \right)^2. \tag{64}$$

扇区（$\mathcal{L},\ \mathcal{A}$）和（$\mathcal{A},\ \mathcal{R}$）中有一个畴壁被迹出，由于它们是混合态，因此构成了主要难点。然而，数值观察表明，这些扇区几乎是纯态。因此，

rQFI 得到了很好的近似 可由这些态中 Z_A 的方差估计，并可通过纯度给出严格界限 ：

$$\frac{\mathrm{Var}(\rho,\mathcal{O})}{||O||^2} - 4\left(1-\sqrt{2\,\mathrm{Tr}\,\rho^2-1}\right) \le \chi(\rho,\mathcal{O}) \le \frac{\mathrm{Var}(\rho,\mathcal{O})}{||\mathcal{O}||^2}, \tag{65}$$

我们在附录 C 中推导了该结果。在这种“纯态近似”下，rQFI 中的（$\mathcal{L}$，$\mathcal{A}$）项可简化为

$$\underline{\chi}^{(\mathrm{pure})}_{\mathcal{A}(\mathcal{L},\mathcal{A})} = \frac{4\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dk_1dk_2}{4\pi^2}|\tilde{\psi}(k_1,k_2)|^2(\epsilon'_{k_2})^2\Theta[\epsilon'_{k_1}\in\mathcal{L}]\Theta[\epsilon'_{k_2}\in\mathcal{A}]}{\underline{p}_{(\mathcal{L},\mathcal{A})}} - \left(\frac{2\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dk_1dk_2}{4\pi^2}|\tilde{\psi}(k_1,k_2)|^2\epsilon'_{k_2}\Theta[\epsilon'_{k_1}\in\mathcal{L}]\Theta[\epsilon'_{k_2}\in\mathcal{A}]}{\underline{p}_{(\mathcal{L},\mathcal{A})}}\right)^2. \tag{66}$$

Higher-order corrections to the rQFI

为超越这一近似，我们假设 $\rho_{A(\tilde{L},\tilde{A})}$ 的本征值 $\mu_j^{A(L,A)}$ 按某种方式编序，使其随 j递减。随后，我们引入截断约化密度矩阵

$$\rho^{(n)}_{A(\tilde{L},\tilde{A})} = \sum_{j=1}^{n}\mu_j^{A(\tilde{L},\tilde{A})}\left|\varphi_j^{A(\tilde{L},\tilde{A})}\right\rangle\left\langle\varphi_j^{A(\tilde{L},\tilde{A})}\right|, \tag{67}$$

该矩阵仅保留 RDM 的 n 个主导特征向量。使用截断 RDM 的优点在于，借助第五节介绍的技术，其在标度极限下的 rQFI $\chi^{(n)}_{\mathcal{A}\,\tilde{L}(,\,\tilde{A})}$ 可表示为一个有限和，该有限和涉及 RDM 最大的 n 个本征值对应的矩阵元 $\mathcal{Z}^{[1]}$ 和 $\mathcal{Z}^{[2]}$（即速度的一阶矩和二阶矩）：

$$\underline{\chi}^{(n)}_{\mathcal{A}(\mathcal{L},\mathcal{A})} = \sum_{j=1}^{n}\underline{\mu}_j^{A(\mathcal{L},\mathcal{A})}|\underline{\mathcal{Z}}^{[2]\mathcal{A}(\mathcal{L},\mathcal{A})}_{jj}|^2 - 2\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\underline{\mu}_i^{A(\mathcal{L},\mathcal{A})}\underline{\mu}_j^{A(\mathcal{L},\mathcal{A})}}{\underline{\mu}_i^{A(\mathcal{L},\mathcal{A})}+\underline{\mu}_j^{A(\mathcal{L},\mathcal{A})}}|\underline{\mathcal{Z}}^{[1]\mathcal{A}(\mathcal{L},\mathcal{A})}_{ij}|^2, \tag{68}$$

其中（见式（42））

$$\underline{\mathcal{Z}}^{[\alpha]\mathcal{A}(\mathcal{L},\mathcal{A})}_{mn} = \sum_{i,j}(\underline{W}^{(\mathcal{L},\mathcal{A})}_{ni})^*\underline{W}^{(\mathcal{L},\mathcal{A})}_{mj}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dk}{2\pi}\,\phi_i^*(k)\phi_j(k)(2\epsilon'_k)^\alpha\Theta[\epsilon'_k\in\mathcal{A}]. \tag{69}$$

在附录 C 中，我们还推导了截断 RDM 的 rQFI 的以下界，这些界保证只需增大 n，就能以任意精度逼近精确量子费舍尔信息：

$$\underline{\chi}^{(n)}_{\mathcal{A}(\tilde{L},\tilde{A})} - 4n\underline{\epsilon}_n \le \underline{\chi}_{A(\tilde{L},\tilde{A})} \le \underline{\chi}^{(n)}_{\mathcal{A}(\tilde{L},\tilde{A})} + \underline{\epsilon}_n, \tag{70}$$

其中$\epsilon_n = \sum_{j=n+1}^{+\infty}\mu_j^{A(\mathcal{L},\mathcal{A})}$ 是截断约化密度矩阵中的缺失权重。

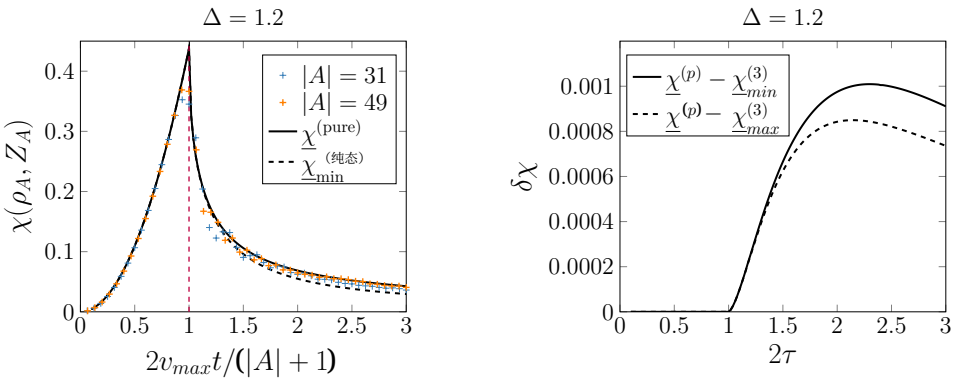


图 5。左：长度为 $|A| = 31$ 和 $|A| = 49$ 、以初始自旋翻转为中心的两个子系统的相对量子费舍尔信息的时间演化，并与标度极限下相对量子费舍尔信息的解析界进行比较，见公式 (65)。右：相对量子费舍尔信息的高阶修正，见公式 (68)、(69) 和 (70)。

在图 5 的左图中，我们将“纯态近似”的预测与精确数值数据进行比较，并同时给出由$\rho_{A(\tilde{L},\tilde{A})}$的本征值利用第五节的技术直接得到的预测下界。在右图中，我们通过计算带$n = 3$的截断约化密度矩阵的相对量子费舍尔信息，展示了由于$(\mathcal{L}, \mathcal{A})$与$(\mathcal{A}, \mathcal{R})$扇区的混合性质而对这一近似所作的修正。除束缚态的产生外，相对量子费舍尔信息的行为在定性上与文献 [24]所研究的非相互作用情形相同：若定义重标度时间 $\tau = 2t/|A|$, 则相对量子费舍尔信息在 $\tau \leq 1$时按τ^2 增长，随后在晚期随粒子逸出子系统而按 $1/\tau$ 衰减。关键在于，在标度极限下，相对量子费舍尔信息在所有中间时刻都保持为 $\mathcal{O}(1)$。这证实局域淬火产生了态的宏观量子叠加态，其磁化之差随时间线性发散。

VIII. 讨论：纠缠不对称性与量子费舍尔信息之间的联系

在本文中，我们分别介绍了量子费舍尔信息和 $U(1)$ 纠缠不对称性作为不对称性度量，能够量化电荷扇区之间的相干性。然而，它们并不等价；我们认为，它们之间的关系类似于可观测量的方差 $\mathrm{Var}(\rho,\ O)$ 与其香农熵 $H(\rho,\ O) = -\sum_i p_\rho(O_i) \log p_\rho(O_i)$ 之间的关系，其中 $p_\rho(O_i)$ 是态 ρ 中测量结果“$O = O_i$”的概率。对于由局域对合算符 $o_i^2 = I$ 组成的广延可观测量 $O = \sum_i o_i$，众所周知，[88, 89]

$$H(\rho, O) \leq \frac{1}{2} \log \left[2\pi e \left(\frac{1}{4} \mathrm{Var}(\rho, O) + \frac{1}{12} \right) \right]. \tag{71}$$

当态 ρ 为纯态时，文献 [90] 指出，$H(\rho, O)$恰好对应于纠缠不对称性$\Delta S(\rho, O)$。对于混合态 $\rho = \sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i|$, 我们可以利用Holevo界推广这一不等式，即分解 $\{\lambda_i, |i\rangle \langle i|\}$ 在完全正迹保持群平均操作 $\mathcal{G}_O$ [91]下Holevo量的非增性质：

$$S\big(\sum_i \lambda_i \mathcal{G}_O(|i\rangle \langle i|)\big) - \sum_i \lambda_i S\big(\mathcal{G}_O(|i\rangle \langle i|)\big) \leq S\big(\sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i|\big) - \sum_i \lambda_i S\big(|i\rangle \langle i|\big), \tag{72}$$

其可改写为

$$S(\mathcal{G}_O(\rho)) - S(\rho) \leq \sum_i \lambda_i S(\mathcal{G}_O(|i\rangle\langle i|)). \tag{73}$$

不等式左边的项恰好是由 O 生成的 $U(1)$ 群所对应的纠缠不对称性。在右边的项中，由于 $|i\rangle$ 是纯态，$\mathcal{G}_O(|i\rangle\langle i|)$ 的冯·诺伊曼熵就是态 $|i\rangle$ 下与 O 相关的香农熵，或者等价地说，是不对称性 $\Delta S(|i\rangle\langle i|, O)$。因此，可以应用式（71），得到

$$\Delta S(\rho, O) \leq \sum_i \lambda_i \frac{1}{2} \log \left[2\pi e (\mathrm{Var}(|i\rangle\langle i|, O^2) + \frac{1}{12}) \right]. \tag{74}$$

利用对数函数的凹性，我们得到

$$\Delta S(\rho, X) \leq \frac{1}{2} \log \left[\sum_i \lambda_i \left(2\pi e (\mathrm{Var}(|i\rangle\langle i|, O^2) + \frac{1}{12}) \right) \right]. \tag{75}$$

对于约化密度矩阵的任意分解 $\{\lambda_i, |i\rangle\langle i|\}$，该不等式均成立，尤其是使平均方差 $\sum_i \lambda_i \mathrm{Var}(|i\rangle\langle i|, O^2)$ 最小的分解。现在利用量子费舍尔信息给出方差的凸屋顶这一性质 [87, 92]，$\frac{1}{4}F_Q(\rho, O) = \inf_{\{\lambda_i, |i\rangle\}} \sum_i \lambda_i \mathrm{Var}(|i\rangle\langle i|, O^2)$，最终得到

$$\Delta S(\rho, O) \leq \frac{1}{2} \log \left[2\pi e \left(\frac{1}{4} F_Q(\rho, O) + \frac{1}{12} \right) \right]. \tag{76}$$

这个不等式可用作量子费舍尔信息的下界。事实上，对于子系统 A，我们可以将其改写为

$$\frac{1}{4} F_Q(\rho_A, O_A) \geq \frac{1}{2\pi e} ||O_A||^{2\Delta S(\rho_A, O_A)} \quad \left(-\frac{1}{12||O_A||^2} \right), \tag{77}$$

这自动意味着，在 $\Delta S(\rho_A, ||O_A||) \sim \alpha \log ||O_A||$ 且 $\alpha > \frac{1}{2}$ 的情形下，量子费舍尔信息呈超线性标度；例如参见文献 [90]。

在我们的情形中，只有当纠缠不对称性接近最大值 $\Delta S = \log ||O_A|| + \mathcal{O}(1)$ 时，该界才仅对检测二次量子费舍尔信息有用，即非零的重标度量子费舍尔信息 $\chi(\rho_A, O_A) = F_Q(\rho_A, O_A)/4||O_A||^2$。在自由情形（$\Delta = 0$）中，形成束缚态的概率严格为 0，因此界（77）可以应用于一个近似纯态的子系统，该子系统大致对应于光锥 $A \approx (-t, t)$；根据式（57），$\Delta S(\rho_A, Z_A) \sim \log ||Z_A|| + \mathcal{O}(1)$。然而，在这一非平衡情形下，一旦子系统变为混态，或形成束缚态的概率非零，该界在标度极限下便无法预测相对量子费舍尔信息。这一失效是概率分布形式的直接结果：磁化强度的概率分布在大小为 $\sim ||O_A||$ 的支集上同时包含 $\mathcal{O}(1)$ 项和 $\mathcal{O}(1/||O_A||)$ 项，见第六节。

IX. 结论

本文研究了相互作用对自发对称性破缺基态上局域淬火丰富唯象学的影响。我们通过考虑对偶 XXZ 哈密顿量来研究这一情形，该哈密顿量可由坐标贝特 ansatz 精确求解，并且在局域淬火后仍可进行解析处理。我们首先表明，激发的畴壁特性会放大量子干涉，使散射

相位在横向磁化强度的宏观分布及其关联中留下清晰的印记。随后，我们从不对称性度量的角度研究这些关联的量子性质，从而有效量化磁化强度电荷扇区之间的相干性。在大子系统极限下，可以计算纠缠不对称性和量子费舍尔信息（QFI）的主导行为；结果表明，光锥附近的子系统处于多个磁化扇区的量子叠加态中，这些扇区的数量随时间线性增长，且对应着宏观上不同的磁化强度。最后，我们推导了关于纠缠不对称性（EA）和量子费舍尔信息（QFI）的若干界；借助与之等价的量，我们可以大幅降低获取这些量所需的解析和数值计算成本。由于分析基于双粒子 Bethe Ansatz，这一框架具有很强的普适性，事实上也可应用于具有类 kink 激发的非可积模型。因此，一个自然的后续研究方向是，在这一框架下考察可积性破缺的影响；尤其值得探究的是，该框架能否用于研究更一般的局域淬火之后的纠缠不对称性和量子费舍尔信息，这类淬火会产生数量更多的准粒子激发。

X. 致谢

感谢 Maurizio Fagotti 在项目初期与我合作，也感谢 Luca Capizzi 和 Sara Murciano 提供的宝贵讨论。

附录 A：跃迁振幅的热力学极限

这里展示在热力学极限下计算跃迁振幅 ${}_s\langle f_1 f_2|e^{-iHt}|l_1 l_2\rangle_{s'}$ 的主要步骤。由于 $[H,P]=0$，该振幅仅在两个宇称扇区相匹配时才非零，即 $s=s'$。在每个宇称扇区中，振幅的坐标 Bethe Ansatz 计算与 XXZ 模型相同——全面综述见 [82]——但有两点不同：i）基本激发是畴壁，而非自旋翻转；ii） $P=-1$ 扇区中的 Bethe方程因反周期性边界条件而有所改变。

我们首先确定 $Q=2$ 扇区中 H 的本征基。对于一个大小为 N、具有周期性边界条件的自旋链，我们可以通过考虑以下形式的波函数来构造本征态

$$|k_1k_2\rangle_s = Z^{(L)}(k_1,k_2)\sum_{l_1<l_2=1/2}^{N-1/2} C^{k_1k_2}_{l_1l_2}|l_1l_2\rangle_s\,,\ \text{with } C^{k_1k_2}_{l_1l_2}=S(k_1,k_2)e^{i(k_1l_1+k_2l_2)}+e^{i(k_2l_1+k_1l_2)}. \tag{A1}$$

求解本征值方程 $H|k_1,\ k_2\rangle=(\epsilon_{k_1}+\epsilon_{k_2})|k_1,\ k_2\rangle$ 可得裸能量$\epsilon_k=h-\cos k$ 以及散射相位的表达式，

$$S(k_1,k_2)=-\frac{1+e^{i(k_1+k_2)}-2\Delta e^{ik_1}}{1+e^{i(k_1+k_2)}-2\Delta e^{ik_2}}. \tag{A2}$$

如第三节所述，边界条件取决于宇称扇区 $\left|l_1L+\frac{1}{2}\right\rangle_\pm=\pm\left|\frac{1}{2}l_1\right\rangle$。因此，规定动量量子化的 Bethe方程也取决于它：

$$e^{ik_1N}=sS(k_1,k_2)\text{ and }e^{-ik_2N}=sS(k_1,k_2), \tag{A3}$$

其中，$s=1$（相应地，-1）适用于具有（反）周期边界条件的扇区。

现在，我们利用式 (A1) 中的态，在两粒子扇区写出单位分解。可以看出，对于 Bethe方程的每个解 (k_1,k_2)，$S(k_1,k_2)=1/S(k_2,k_1)$，因此 $|k_1k_2\rangle_s$ 与

$|k_2k_1\rangle_s$ 共线。因此，将 Bethe方程 (A3) 的解集记为 $\mathcal{B}_s^{(N)}$，跃迁振幅可写为

$$ {}_s\langle f_1f_2|e^{-iHt}\,|l_1l_2\rangle_s = \frac{1}{2}\sum_{(k_1,k_2)\in\mathcal{B}_s^{(N)}} |Z^{(N)}(k_1,k_2)|^2 C_{f_1f_2}^{k_1k_2}(C_{j_1j_2}^{k_1k_2})^* e^{-i(\epsilon_{k_1}+\epsilon_{k_2})t}. \tag{A4}$$

1. 实动量

我们首先关注解 $(k_1,k_2)\in\mathbb{R}^2$。对于这些解，散射相位具有单位模，$|S(k_1,k_2)|=1$，并且满足 $S(k_1,k_2)^{-1}=S(k_1,k_2)^*=S(k_2,k_1)$。因此，我们可以将式 (A4) 中的项写为

$$\begin{aligned} C_{f_1f_2}^{k_1k_2}(C_{j_1j_2}^{k_1k_2})^* &\underset{(k_1,k_2)\in\mathbb{R}^2}{=} \Big(S(k_1,k_2)e^{i(k_1f_1+k_2f_2)}+e^{i(k_2f_1+k_1f_2)}\Big)\times\Big(S^*(k_1,k_2)e^{-i(k_1j_1+k_2j_2)}+e^{-i(k_2j_1+k_1j_2)}\Big) \\ &= \Big[e^{ik_1(f_1-j_1)}e^{ik_2(f_2-j_2)}+e^{ik_2(f_1-j_1)}e^{ik_1(f_2-j_2)} \\ &\quad +S(k_1,k_2)e^{ik_1(f_1-j_2)}e^{ik_2(f_2-j_1)}+S(k_2,k_1)e^{ik_2(f_1-j_2)}e^{ik_1(f_2-j_1)}\Big]. \end{aligned} \tag{A5}$$

然而，这些项在交换 $k_1\leftrightarrow k_2$ 下两两对称，因此

$$\frac{1}{2}\sum_{(k_1,k_2)\in\mathcal{B}_s^{(N)}\cap\mathbb{R}^2} |Z^{(N)}(k_1,k_2)|^2 C_{f_1f_2}^{k_1k_2}(C_{j_1j_2}^{k_1k_2})^* e^{-i(\epsilon_{k_1}+\epsilon_{k_2})t} = \sum_{(k_1,k_2)\in\mathcal{B}_s^{(N)}\cap\mathbb{R}^2} |Z^{(N)}(k_1,k_2)|^2 \mathcal{A}^S_{l_1,l_2\to f_1,f_2}(k_1,k_2,t), \tag{A6}$$

其中

$$\mathcal{A}^S_{l_1,l_2\to f_1,f_2}(k_1,k_2,t) = (e^{ik_1(f_1-j_1)}e^{ik_2(f_2-j_2)}+S(k_1,k_2)e^{ik_1(f_1-j_2)}e^{ik_2(f_2-j_1)})e^{-i(\epsilon_{k_1}+\epsilon_{k_2})t}. \tag{A7}$$

归一化因子由下式给出

$$\begin{aligned} |Z^{(N)}(k_1,k_2)|^{-2} &= \sum_{l_1<l_2=1/2}^{N-1/2} |C_{l_1l_2}^{k_1k_2}(C_{l_1l_2}^{k_1k_2})^*|^2 \\ &= N^2\left[1+\frac{1}{N}\frac{1-\cos(k_1-k_2)-\cos(k_2-k_1-\theta_{k_1k_2})-\cos\theta_{k_1k_2}}{\cos(k_1-k_2)-1}+\frac{1}{N^2}\frac{\cos(k_1N-k_2N+\theta_{k_1k_2})+\cos\theta_{k_1k_2}}{\cos(k_1-k_2)-1}\right] \\ &= N^2\left[1+\frac{1}{N}\frac{1-\cos(k_1-k_2)-\cos(k_2-k_1-\theta_{k_1k_2})-\cos\theta_{k_1k_2}}{\cos(k_1-k_2)-1}+\frac{1}{N^2}\frac{\cos(3\theta_{k_1k_2})+\cos\theta_{k_1k_2}}{\cos(k_1-k_2)-1}\right], \end{aligned} \tag{A8}$$

其中 $e^{i\theta_{k_1k_2}}=S(k_1,k_2)$，并且我们施加了Bethe方程 (A3) 以得到最后一行。我们将后者作为 $Z^{(N)}(k_1,k_2)$ 的定义。利用总动量守恒这一事实，求和 (A6) 可以显式进行。事实上，作如下变量替换：$\kappa=\frac{1}{2}(k_1+k_2)$ 和 $\delta=\frac{1}{2}(k_1-k_2)$，Bethe方程可以改写为

$$(e^{i\kappa N}=s \text{ and } e^{i\delta N}=S_\kappa(\delta)) \text{ or } (e^{i\kappa N}=-s \text{ and } e^{i\delta N}=-S_\kappa(\delta)), \tag{A9}$$

其中 $S_\kappa(\delta)=S(\kappa+\delta,\kappa-\delta)$。由这组新的Bethe方程可以清楚地看出，$\kappa$ 与具有周期性或反周期性边界条件的自由模型具有相同的量子化。的定义域

积分 $k_1, k_2 \in (-\pi, \pi)$对应于 $\kappa \in (-\pi, \pi)$和 $\delta \in (-\pi + |\kappa|, \pi - |\kappa|)$。全部困难在于在该区域内选取式(A9)的 δ 个解，这可以利用留数定理来完成。事实上，

$$\begin{aligned}
&\sum_{(k_1,k_2)\in\mathcal{B}_s^{(N)}\cap\mathbb{R}^2} |Z^{(N)}(k_1,k_2)|^2 \mathcal{A}^S_{l_1,l_2\to f_1,f_2}(k_1,k_2,t) \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\epsilon(\kappa_n^+)} |Z^{(N)}(\kappa_n^+ + \delta, \kappa_n^+ - \delta)|^2 \frac{siNe^{i\delta N} - \partial_\delta S_{\kappa_n^+}(\delta)}{se^{i\delta N} - S_{\kappa_n^+}(\delta)} \mathcal{A}^S_{l_1,l_2\to f_1,f_2}(\kappa_n^+ + \delta, \kappa_n^+ - \delta, t) d\delta \\
&+ \lim_{\epsilon\to 0}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_\epsilon(\kappa_n^-)} |Z^{(N)}(\kappa_n^- + \delta, \kappa_n^- - \delta)|^2 \frac{siNe^{i\delta N} + \partial_\delta S_{\kappa_n^-}(\delta)}{se^{i\delta N} + S_{\kappa_n^-}(\delta)} \mathcal{A}^S_{l_1,l_2\to f_1,f_2}(\kappa_n^- + \delta, \kappa_n^- - \delta, t) d\delta, \quad \text{(A10)}
\end{aligned}$$

其中 $\kappa_n^+ = \frac{2\pi n}{L}$, $\kappa_n^- = \frac{2\pi\ (n+1/2)}{L}$，围道由下式给出

$$\gamma_\epsilon(\kappa) : -\pi + |\kappa| - i\epsilon \to \pi - |\kappa| - i\epsilon \to \pi - |\kappa| + i\epsilon \to -\pi + |\kappa| + i\epsilon \to \pi - |\kappa| + i\epsilon. \quad \text{(A11)}$$

取热力学极限 $N \to \infty$ 后，区间 $-\pi + |\kappa| + i\epsilon \to \pi - |\kappa| + i\epsilon$ 上的被积函数随 $N \to \infty$ 按 $1/N^2$衰减至零，而在区间 $-\pi + |\kappa| - i\epsilon \to \pi - |\kappa| - i\epsilon$上则化简为 $|Z^{(N)}_{\kappa_n^+}(\delta)|^2(siNe^{i\delta N} - \partial_\delta S_{\kappa_n^+}(\delta))/(se^{i\delta N} - S_{\kappa_n^+}(\delta)) \to i/N$。随后在求和中取极限 $N \to \infty$ $\epsilon \to 0$，得到

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty}\sum_{(k_1,k_2)\in\mathcal{B}_s^{(N)}\cap\mathbb{R}^2} |Z^{(N)}(k_1,k_2)|^2 \mathcal{A}^S_{l_1,l_2\to f_1,f_2}(k_1,k_2,t) &= \lim_{\epsilon\to 0}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2\pi N}\int_{-\pi+|\kappa|+i\epsilon}^{\pi-|\kappa|+i\epsilon} d\delta \mathcal{A}^S_{l_1,l_2\to f_1,f_2}(\kappa_n^+ + \delta, \kappa_n^+ - \delta, t) \\
&+ \lim_{\epsilon\to 0}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2\pi N}\int_{-\pi+|\kappa|+i\epsilon}^{\pi-|\kappa|+i\epsilon} d\delta \mathcal{A}^S_{l_1,l_2\to f_1,f_2}(\kappa_n^- + \delta, \kappa_n^- - \delta, t), \quad \text{(A12)}
\end{aligned}$$

这与宇称扇区无关。最后，我们可以利用 Euler–Maclaurin公式化简这些求和：

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{(k_1,k_2)\in\mathcal{B}_s^{(N)}\cap\mathbb{R}^2} |Z^{(N)}(k_1,k_2)|^2 \mathcal{A}^S_{l_1,l_2\to f_1,f_2}(k_1,k_2,t) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\kappa \int_{-\pi+|\kappa|+i\epsilon}^{\pi-|\kappa|+i\epsilon} d\delta \mathcal{A}^S_{l_1,l_2\to f_1,f_2}(\kappa+\delta, \kappa-\delta, t). \quad \text{(A13)}$$

将 b 改 回原始变量，并将 $+i\epsilon$ 正则化保持为隐式形式，我们便得到 e

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{(k_1,k_2)\in\mathcal{B}_s^{(N)}\cap\mathbb{R}^2} |Z^{(N)}(k_1,k_2)|^2 \mathcal{A}^S_{l_1,l_2\to f_1,f_2}(k_1,k_2,t) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} dk_1 dk_2\, \mathcal{A}^S_{l_1,l_2\to f_1,f_2}(k_1,k_2,t). \quad \text{(A14)}$$

2. 复动量

现在考虑复数解（k_1, k_2） $\notin \mathbb{R}^2$。如果动量的虚部非零，Bethe方程意味着 $S(k_1, k_2)$或 $S(k_2, k_1)$会随 N 指数级变小。因此，解必定具有以下形式

$$(k_1, k_2) = (\frac{K}{2} + i\eta, \frac{K}{2} - i\eta) + \mathcal{O}(e^{-N}), \quad \text{(A15)}$$

其中 $K,\eta\in\mathbb{R}$。对于这种形式的动量，项 $C^{k_1k_2}_{f_1f_2}(C^{k_1k_2}_{j_1j_2})^*$ 具有以下形式

$$\begin{aligned}C^{k_1k_2}_{f_1f_2}(C^{k_1k_2}_{j_1j_2})^* &\underset{(k_1,k_2)=(\frac{K}{2}+i\eta,\frac{K}{2}-i\eta)}{=}\left(S(k_1,k_2)e^{i(k_1f_1+k_2f_2)}+e^{i(k_2f_1+k_1f_2)}\right)\times\left(S(k_1,k_2)e^{i(k_1j_1+k_2j_2)}+e^{i(k_2j_1+k_1j_2)}\right)^*\\ &=e^{iK(\frac{f_1+f_2}{2}-\frac{j_1+j_2}{2})}\left[S\left(\frac{K}{2}+i\eta,\frac{K}{2}-i\eta\right)e^{\eta(f_2-f_1)}+e^{-\eta(f_2-f_1)}\right]\left[S\left(\frac{K}{2}+i\eta,\frac{K}{2}-i\eta\right)e^{\eta(j_2-j_1)}+e^{-\eta(j_2-j_1)}\right].\end{aligned}\tag{A16}$$

在热力学极限下，物理解应保持可归一化。因此，为避免 $f_2-f_1\to\infty$ 时发散，它们应对应于 $S(K/2+i\eta,\ K/2-i\eta)=0$（固定 $\eta>0$），这将 η 的值限定为关于 K的函数:

$$e^{-\eta(K)}=\frac{\cos(K/2)}{\Delta},\ \text{and}\ \cos K/2\le\Delta.\tag{A17}$$

因此，束缚态贡献为

$$C^{k_1k_2}_{f_1f_2}(C^{k_1k_2}_{j_1j_2})^*\underset{(k_1,k_2)=(\frac{K}{2}+i\eta,\frac{K}{2}-i\eta)}{=}e^{iK(\frac{f_1+f_2}{2}-\frac{j_1+j_2}{2})}e^{-\eta(f_2-f_1+j_2-j_1)},\tag{A18}$$

归一化因子为

$$\begin{aligned}|Z(K/2+i\eta,K/2-i\eta)|^{-2}&=\sum_{f_1<f_2=1/2}^{N-1/2}|C^{k_1k_2}_{f_1f_2}|^2\\ &=\sum_{f_1<f_2=1/2}^{N-1/2}e^{-2\eta(f_2-f_1)}=\sum_{f_1=1}^{N}e^{-2\eta}\frac{1-e^{-2\eta(N-f_1)}}{1-e^{-2\eta}}=\frac{N}{e^{2\eta}-1}+\mathcal{O}(1).\end{aligned}\tag{A19}$$

最后，利用Euler–Maclaurin公式，我们得到

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\sum_{(k_1,k_2)\in\mathcal{B}_s^{(N)}\setminus\mathbb{R}^2}&|Z^{(N)}(k_1,k_2)|^2C^{k_1k_2}_{f_1f_2}(C^{k_1k_2}_{j_1j_2})^*\\ &=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi dK\,(e^{2\eta(K)}-1)e^{iK(\frac{f_1+f_2}{2}-\frac{j_1+j_2}{2})}e^{-\eta(K)(f_2-f_1+j_2-j_1)}e^{-iE_Kt}.\end{aligned}\tag{A20}$$

附录B：标度极限

在本附录中，我们展示如何求得 $p_{(X,Y)}(t)$ 的标度极限

1. 散射态贡献

散射态的贡献可以表示为

$$p^S_{(X,Y)}(t) = \langle\psi(t)|\,\Pi^Y_X\,|\psi(t)\rangle = \sum_{\substack{f_1\in X\\ f_2\in Y\\ f_1<f_2}} |\psi_{f_1f_2}(t)|^2$$
$$= \sum_{\substack{f_1\in X\\ f_2\in Y\\ f_1<f_2}} \frac{1}{(2\pi)^4}\left(\int_{-\pi}^{\pi} dk_1dk_2dp_1dp_2\tilde\psi(k_1,k_2)\tilde\psi^*(p_1,p_2)e^{i[f_1(k_1-p_1)+f_2(k_2-p_2)-(\epsilon_{k_1}+\epsilon_{k_2}-\epsilon_{p_1}-\epsilon_{p_2})t]}\right). \quad \text{(B1)}$$

该和式的各项在交换 $f_1 < f_2$ 时具有对称性。因此，我们可以将其拆分为交集 $X\cap Y$ 与不相交并集 $X\backslash Y$ 和 $Y\backslash X$，得到

$$\langle\psi(t)|\,\Pi^Y_X\,|\psi(t)\rangle = \sum_{\substack{f_1\in X\backslash Y\\ f_2\in Y\backslash X}} |\psi_{f_1f_2}(t)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{f_1,f_2\in X\cap Y}|\psi_{f_1f_2}(t)|^2 - \frac{1}{2}\sum_{f\in X\cap Y}|\psi_{ff}(t)|^2. \quad \text{(B2)}$$

根据 Lieb-Robinson 界和驻相法，最后一项是由 $\mathcal{O}(t)$ 个 $\mathcal{O}(t^{-2})$ 阶项构成的和，因此在标度极限下趋于零。因此，两个相关项可表示为$\sum_{f_1\in A,\ f_2\in B}|\psi_{f_1f_2}(t)|^2$。若记 $A=[\![a_l,\ a_r]\!]$ 和 $B=[\![b_l,\ b_r]\!]$，便可明确地求出几何级数：

$$\sum_{\substack{f_1\in A\\ f_2\in B}} |\psi_{f_1f_2}(t)|^2 = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{dk_1dk_2dp_1dp_2}{(2\pi)^4}\Big(\tilde\psi(k_1,k_2)\tilde\psi^*(p_1,p_2)$$
$$\frac{e^{ia_l(p_1-k_1)}-e^{ia_r(p_1-k_1)}}{1-e^{i(k_1-p_1)}}\frac{e^{ib_l(k_2-p_2)}-e^{ib_r(k_2-p_2)}}{1-e^{i(k_2-p_2)}}e^{-i(\epsilon_{k_1}+\epsilon_{k_2}-\epsilon_{p_1}-\epsilon_{p_2})t}\Big). \quad \text{(B3)}$$

被积函数在 $k_1=p_1$ 和 $k_2=p_2$ 处有限，但在标度极限下当 $|A|,\ |B|\to\infty$ 时发散。因此，若定义新变量组 $\kappa_{1,\ 2}=(k_{1,\ 2}+p_{1,\ 2})/2$ 和 $\delta_{1,\ 2}=(k_{1,\ 2}-p_{1,\ 2})/2$，便可在 $\delta_1,\ \delta_2\sim 0$ 附近展开被积函数：

$$\sum_{\substack{f_1\in A\\ f_2\in B}} |\psi_{f_1f_2}(t)|^2 = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}d\kappa_1d\kappa_2|\tilde\psi(\kappa_1,\kappa_2)|^2$$
$$\times\int_{-\pi+|\kappa_1|}^{\pi-|\kappa_1|}d\delta_1\frac{e^{it\delta_1[a_l/t-\epsilon'_{\kappa_1}]}-e^{it\delta_1[a_r/t-\epsilon'_{\kappa_1}]}}{-i\delta_1}\int_{-\pi+|\kappa_2|}^{\pi-|\kappa_2|}d\delta_2\frac{e^{it\delta_2[b_l/t-\epsilon'_{\kappa_2}]}-e^{it\delta_2[b_r/t-\epsilon'_{\kappa_2}]}}{-i\delta_2}+\mathcal{O}(t^{-1}), \quad \text{(B4)}$$

其中，在标度极限下，我们将导数 $\partial_{k_1}S(k_1,k_2)\ll t$ 作为 $\mathcal{O}(t^{-1})$ 阶修正而舍去。被积函数在 $\delta_1,\delta_2\to 0$ 处不会发散。因此，我们可以对各项的主值求和：

$$\mathcal{P}\int_{-\pi+|\kappa|}^{\pi-|\kappa|}d\delta\frac{e^{it\delta x}}{-i\delta} = -\int_{-\pi+|\kappa|}^{\pi-|\kappa|}d\delta\frac{\sin(t\delta x)}{\delta}. \quad \text{(B5)}$$

现在使用变量替换 $\Lambda = t\delta$，可得

$$-\int_{-\pi+|\kappa|}^{\pi-|\kappa|} d\delta \frac{\sin(t\delta x)}{\delta} \underset{t\to\infty}{=} -\int_{-\infty}^{+\infty} d\Lambda \, \frac{\sin(\Lambda x)}{\Lambda} = -\pi \operatorname{sgn}(x). \tag{B6}$$

将式 (B6) 代入式 (B4) 得到

$$\sum_{\substack{f_1\in A\\ f_2\in B}} |\psi_{f_1 f_2}(t)|^2 = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} d\kappa_1 d\kappa_2 |\tilde{\psi}(\kappa_1,\kappa_2)|^2 \theta(f_1/t - a_l)\theta(a_r - f_1/t)\theta(f_2/t - b_l)\theta(b_r - f_2/t). \tag{B7}$$

2. 束缚态贡献

束缚态的贡献，其波函数为

$$\nu_{f_1,f_2}(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} dK \, \tilde{\nu}_{f_2-f_1}(K) e^{iK\frac{f_1+f_2}{2}} e^{-iE_K t}, \tag{B8}$$

阅读了

$$\begin{aligned} p^B_{(X,Y)}(t) &= \langle \nu(t)| \, \Pi_X^Y \, |\nu(t)\rangle = \sum_{\substack{f_1\in X\\ f_2\in Y\\ f_1<f_2}} |\nu_{f_1 f_2}(t)|^2 \\ &= \sum_{\substack{f_1\in X\\ f_2\in Y\\ f_1<f_2}} \frac{1}{(2\pi)^4}\left(\int_{-\pi}^{\pi} dK dP \, \tilde{\nu}_{f_2-f_1}(K)\tilde{\nu}_{f_2-f_1}(P) e^{i[f_1(k_1-p_1)+f_2(k_2-p_2)-(\epsilon_{k_1}+\epsilon_{k_2}-\epsilon_{p_1}-\epsilon_{p_2})t]}\right). \end{aligned} \tag{B9}$$

我们可以再次将求和拆分为 $X\backslash Y$、 $Y\backslash X$ 和 $X\cap Y$。由于 $\tilde{\nu}_{f_2-f_1}(K)$ 随 f_2-f_1 指数衰减，当 $f_1\in X\backslash Y$ 且 $f_2\in Y\backslash X$ 时，该贡献在标度极限下趋于零。唯一非零的贡献为

$$p^B_{(X,Y)}(t) \approx \sum_{\substack{f_1,f_2\in X\cap Y\\ f_1<f_2}} \frac{1}{(2\pi)^2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} dK dP \, \tilde{\nu}_{f_2-f_1}(K)\tilde{\nu}_{f_2-f_1}(P) e^{i[(K-P)(f_1+f_2)/2-(E_K-E_P)t]}\right). \tag{B10}$$

忽略时间上呈指数级小的修正，我们可以写为

$$\begin{aligned} p^B_{(X,Y)}(t) &\approx \sum_{f_1\in X\cap Y}\sum_{r=1}^{+\infty} \frac{1}{(2\pi)^2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} dK dP \, \tilde{\nu}_r(K)\tilde{\nu}_r(P) e^{i[(K-P)(f_1+r/2)-(E_K-E_P)t]}\right) \\ &= \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{1}{(2\pi)^2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} dK dP \, \tilde{\nu}_r(K)\tilde{\nu}_r(P) \frac{e^{il(K-P)} - e^{ir(K-P)}}{1-e^{i(K-P)}} e^{i[(K-P)r/2-(E_K-E_P)t]}\right) \end{aligned} \tag{B11}$$

~ ~作变量代换 $K = K+\delta$, $P = K-\delta$ 后，我们围绕 $\delta\sim 0$ 处的主要贡献展开:

$$p^B_{(X,Y)}(t) \approx \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{1}{(2\pi)^2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} d\tilde{K} \int d\delta \, |\nu_r(\tilde{K})|^2 \frac{e^{it\delta[l/t-E'_{\tilde{K}}]} - e^{it\delta[r/t-E'_{\tilde{K}}]}}{-i\delta}\right). \tag{B12}$$

现在利用

$$\sum_{r=1}^{+\infty}|\nu_r(\tilde{K})|^2 = 1 - e^{-2\eta(K)}, \tag{B13}$$

我们最终得到

$$\underline{p}^B_{(\mathcal{X},\mathcal{Y})} = \frac{1}{(2\pi)}\left(\int_{-\pi}^{\pi} d\tilde{K}\,(1-e^{-2\eta(\tilde{K})})\Theta[E'_{\tilde{K}} \in \mathcal{X}\cap\mathcal{Y}]\right). \tag{B14}$$

附录 C：量子费舍尔信息的界

1. 从截断约化密度矩阵出发

考虑一个作用于维数为 D （D 可以是无限维）$\rho = \sum_{j=1}^{D}\lambda_j |j\rangle\langle j|$ 的希尔伯特空间上的（归一化）密度矩阵，其特征值按降序排列为 $\forall j\ \lambda_j \geq \lambda_{j+1}$。若 ρ 的秩为 R，且满足 $R < D$，则它可以表示为这样的形式，其中 $\lambda_i = 0$ 对 $i > R$成立。 ρ 关于可观测量 $\mathcal{O}$ 的量子费舍尔信息定义为

$$\frac{1}{4}F_Q(\rho,\mathcal{O}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{D}\frac{(\lambda_i-\lambda_j)^2}{\lambda_i+\lambda_j}|\langle i|\mathcal{O}|j\rangle|^2. \tag{C1}$$

当 λ_i<u>{style id='7'></u>，$\lambda_j \to 0$ 时，项 $\frac{(\lambda_i-\lambda_j)^2}{\lambda_i+\lambda_j}$趋于 0；但仅将其中一个特征值设为零时，该项不会趋于 0，因此双重求和遍及整个希尔伯特空间。将零特征值与非零特征值分开，并插入单位分解后，我们可以将式 (C1) 重新表示为对密度矩阵非零特征值的求和：

$$\frac{1}{4}F_Q(\rho,\mathcal{O}) = \sum_{i=1}^{R}\lambda_i\langle i|\mathcal{O}^2|i\rangle - 2\sum_{i,j=1}^{R}\frac{\lambda_i\lambda_j}{\lambda_i+\lambda_j}|\langle i|\mathcal{O}|j\rangle|^2. \tag{C2}$$

现在，我们将 ρ 截断，仅保留其最大的 n 个特征值，并记作 $\rho = (1-\epsilon_n)\rho^{(n)} + \epsilon_n\delta\rho^{(n)}$，其中 $(1-\epsilon_n)\rho^{(n)} = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i|i\rangle\langle i|$ 且 $\epsilon_n\delta\rho^{(n)} = \sum_{i=n+1}^{D}\lambda_i|i\rangle\langle i|$。根据量子费舍尔信息的凸性，

$$\frac{1}{4}F_Q(\rho,\mathcal{O}) \leq \frac{1}{4}(1-\epsilon_n)F_Q(\rho^{(n)},\mathcal{O}) + \epsilon_n||\mathcal{O}||^2, \tag{C3}$$

这里我们用到了这样一个事实：对于任意密度矩阵 σ，$\frac{1}{4}F_Q(\sigma,\mathcal{O})$ 以 $\mathcal{O}$ 的范数平方为上界，$||\mathcal{O}||^2$。现在，让我们根据 $F_Q(\rho^{(n)},\mathcal{O})$ 为 $F_Q(\rho,\mathcal{O})$ 构造一个下界。从式 (C2) 可以看出，

$$\frac{1}{4}F_Q(\rho,\mathcal{O}) = \frac{1}{4}(1-\epsilon_n)F_Q(\rho^{(n)},\mathcal{O}) + \frac{1}{4}\epsilon_n F_Q(\delta\rho^{(n)},\mathcal{O}) - 4\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=n+1}^{R}\frac{\lambda_i\lambda_j}{\lambda_i+\lambda_j}|\langle i|\mathcal{O}|j\rangle|^2. \tag{C4}$$

使用无 w that $F_Q(\sigma,\mathcal{O}) \geq 0$，$\lambda_i\lambda_j/(\lambda_i+\lambda_j) \leq \lambda_j$和 $|\langle i|\mathcal{O}|j\rangle|^2 \leq ||\mathcal{O}||^2$，我们最终发现

$$\frac{1}{4}F_Q(\rho,\mathcal{O}) \geq \frac{1}{4}(1-\epsilon_n)F_Q(\rho^{(n)},\mathcal{O}) - 4n\,\epsilon_n||\mathcal{O}||^2. \tag{C5}$$

2. 由方差

当密度矩阵几乎为纯态时，类似地用该态的方差来界定量子费舍尔信息是有用的。为此，我们将量子费舍尔信息重新表示为

$$\frac{1}{4}F_Q(\rho,\mathcal{O}) = \mathrm{Var}(\rho,\mathcal{O}) + \sum_{i,j=1}^{R}\lambda_i\lambda_j \langle i|\mathcal{O}|i\rangle \langle j|\mathcal{O}|j\rangle - 2\sum_{i,j=1}^{R}\frac{\lambda_i\lambda_j}{\lambda_i+\lambda_j}|\langle i|\mathcal{O}|j\rangle|^2. \tag{C6}$$

采用与上一小节相同的步骤，并使用 $n=1$ （我们只保留最大特征值），我们发现

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}F_Q(\rho,\mathcal{O}) = \mathrm{Var}(\rho,\mathcal{O}) &+ \lambda_1^2\langle 1|\mathcal{O}|1\rangle^2 - \lambda_1\langle 1|\mathcal{O}|1\rangle^2 + 2\lambda_1\langle 1|\mathcal{O}|1\rangle\sum_{j=2}^{R}\lambda_j\langle j|\mathcal{O}|j\rangle \\ &- 4\sum_{j=2}^{R}\frac{\lambda_1\lambda_j}{\lambda_1+\lambda_j}|\langle 1|\mathcal{O}|j\rangle|^2 + \sum_{i,j=2}^{R}\lambda_i\lambda_j\langle i|\mathcal{O}|i\rangle\langle j|\mathcal{O}|j\rangle - 2\sum_{i,j=2}^{R}\frac{\lambda_i\lambda_j}{\lambda_i+\lambda_j}|\langle i|\mathcal{O}|j\rangle|^2. \end{aligned}\tag{C7}$$

现在再次使用不等式 $\lambda_1\lambda_j/(\lambda_1+\lambda_j) \le \lambda_j$，以及$2\sum_{i,j=2}^{R}\frac{\lambda_i\lambda_j}{\lambda_i+\lambda_j}|\langle i|\mathcal{O}|j\rangle|^2 \le \mathrm{Tr}\big(\delta\rho^{(1)}\mathcal{O}^2\big) \le \epsilon_1||O||^2$，我们得到

$$\frac{1}{4}F_Q(\rho,\mathcal{O}) \ge \mathrm{Var}(\rho,\mathcal{O}) + (\epsilon_1^2 - \epsilon_1 - 2(1-\epsilon_1)\epsilon_1 - 4\epsilon_1 - \epsilon_1)||O||^2, \tag{C8}$$

或更简单的界

$$\frac{1}{4}F_Q(\rho,\mathcal{O}) \ge \mathrm{Var}(\rho,\mathcal{O}) - 8\epsilon_1||\mathcal{O}||^2. \tag{C9}$$

该界的优点在于不需要对密度矩阵进行任何谱分析，因为ϵ_1 也可以由密度矩阵的纯度界定：当$\mathrm{Tr}\,\rho^2 \ge 1/2$ 时，$\epsilon_1 \le 1/2(1-\sqrt{2\mathrm{Tr}\,\rho^2-1})$。因此，我们最终得到

$$\frac{1}{4}F_Q(\rho,\mathcal{O}) \ge \mathrm{Var}(\rho,\mathcal{O}) - 4\left(1-\sqrt{2\,\mathrm{Tr}\,\rho^2-1}\right)||\mathcal{O}||^2. \tag{C10}$$

附录D：XXZ 模型中散射相位的傅里叶系数

由于 $S(k_1,\ k_2)$ 是一个有界函数，且仅作为紧致域上的核出现（即 $[-\pi,\pi]^2$），因此可以用傅里叶基表示：

$$S(k_1,k_2) \equiv \sum_{nm\in\mathbb{Z}} S_{nm}e^{ik_1n}e^{ik_2m} \tag{D1}$$

让我们回顾散射相位的显式表达式，并将其改写为

$$S(k_1,k_2) = -e^{i(k_1-k_2)}\frac{e^{-ik_1}+e^{ik_2}-2\Delta}{e^{ik_1}+e^{-ik_2}-2\Delta} \tag{D2}$$

1. $\Delta > 1$:

当 $\Delta > 1$, $|e^{ik_1} + e^{-ik_2}| < 2\Delta$，通过展开即可轻松求得傅里叶系数

$$S(k_1, k_2) = -e^{i(k_1-k_2)} \frac{e^{-ik_1} + e^{ik_2} - 2\Delta}{e^{ik_1} + e^{-ik_2} - 2\Delta} = \frac{e^{i(k_1-k_2)}}{2\Delta}(e^{-ik_1} + e^{ik_2} - 2\Delta) \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{ik_1} + e^{-ik_2}}{2\Delta} \right)^j, \tag{D3}$$

这给出

$$S_{jp} = \begin{cases} \frac{(j^2-j+p+(4\Delta^2-2)jp+p^2)}{(j^2-j-p-2jp+p^2)} (2\Delta)^{p-j} \binom{j-p}{j} \text{ if } j > 0 \text{ and } p < 0 \\ -1 \text{ if } (j = 0 \text{ and } p < 0) \text{ or } (p = 0 \text{ and } j > 0) \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases} \tag{D4}$$

2. $\Delta < 1$

当 $\Delta < 1$ 时，求出散射相位的傅里叶系数最方便的方法是计算积分

$$S_{nm} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} dk_1 dk_2 S(k_1, k_2) e^{-i(k_1 n + k_2 m)} \tag{D5}$$

利用留数定理。首先注意到，当 k_1、$k_2 \in \mathbb{R}$ 时，被积函数的虚部是奇函数。因此，傅里叶系数为实数。现在令变量 $\kappa = \frac{k_1+k_2}{2}$ 和 $\delta = \frac{k_2-k_1}{2}$。我们得到

$$S_{nm} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} d\kappa \int_{-\pi+\kappa}^{\pi-\kappa} d\delta \ \mathrm{Re}\left(S_\kappa(\delta) e^{-i\kappa(n+m)} e^{-i\delta(n-m)} \right), \tag{D6}$$

其中

$$S_\kappa(\delta) = S(\kappa + \delta, \kappa - \delta) = -\frac{\cos\kappa - \Delta e^{i\delta}}{\cos\kappa - \Delta e^{-i\delta}}. \tag{D7}$$

现在，我们可以利用留数定理，通过变形 δ 的积分路径来计算 (D6)。散射相位满足

$$S_\kappa(\pi - \kappa + i\eta) e^{-i(\pi-\kappa+i\eta)(n-m)} = (S_\kappa(-\pi + \kappa + i\eta) e^{-i(-\pi+\kappa+i\eta)(n-m)})^* \tag{D8}$$

因此，对于 $\Lambda \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Re}\left(\int_{-\pi+\kappa}^{-\pi+\kappa+i\Lambda} d\delta \, S_\kappa(\delta) e^{-i\kappa(n+m)} e^{-i\delta(n-m)} + \int_{\pi-\kappa+i\Lambda}^{\pi-\kappa} d\delta \, S_\kappa(\delta) e^{-i\kappa(n+m)} e^{-i\delta(n-m)} \right) = 0. \tag{D9}$$

这样便可将 (D6) 重写为

$$S_{nm} = -\frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} d\kappa \, e^{-i\kappa(n+m)} \left[\int_{-\pi+\kappa+i\Lambda}^{\pi-\kappa+i\Lambda} d\delta \ \mathrm{Re}\left(S_\kappa(\delta) e^{-i\delta(n-m)} \right) + 2\pi i \, \mathrm{sgn}\,\Lambda \, R_\Lambda(\kappa) \right], \tag{D10}$$

其中， $R_\Lambda(\kappa)$ 是 $S_\kappa(\delta)e^{-i\delta(n-m)}$ 在围道 $-\pi+\kappa\to\pi-\kappa\to\pi-\kappa+i\Lambda\to-\pi+\kappa+i\Lambda\to-\pi+\kappa$ 上留数之和的实部。极点位于 $\delta_\kappa = i\ln(|\cos\kappa/\Delta|)+\theta(-\cos\kappa/\Delta)\pi$ （模2π）。因此，

$$R_\Lambda(\kappa) = -i\,\theta(\frac{\cos\kappa}{\Delta})\theta(|\Lambda|-|\operatorname{Im}\delta_\kappa|)\theta[\operatorname{sgn}(\Lambda)\operatorname{sgn}(\operatorname{Im}\delta_\kappa)]\left[\left(\frac{\cos\kappa}{\Delta}\right)^{n-m-2}-\left(\frac{\cos\kappa}{\Delta}\right)^{n-m}\right]. \tag{D11}$$

现在，当 $|\Lambda|\to\infty$, $S_\kappa(\eta+i\Lambda) = \mathcal{O}(e^{-|\Lambda|})$。因此，当 $n-m<1$ 时取 $\Lambda=+\infty$，或当 $n-m>-1$ 时取 $\Lambda=-\infty$，即可消去双重积分项。无论哪种情况，我们都可以对 $R_\Lambda(\kappa)$ 积分，最终将散射相位表示为

$$S(k_1,k_2) = \sum_{l_1 l_2}(\lambda^{l_2-l_1+2}_{l_1+l_2}-\lambda^{l_2-l_1}_{l_1+l_2}-\delta_{l_1 0}\delta_{l_2 0})e^{ik_1 l_1}e^{ik_2 l_2}, \tag{D12}$$

其中

$$\lambda^n_m = \frac{2\operatorname{sgn}(m)}{\pi}\int_0^{\pi/2}d\kappa\left(\frac{\Delta}{\cos\kappa}\right)^m\cos(n\kappa)\theta[\operatorname{sgn}(m)(\cos\kappa-\Delta)]. \tag{D13}$$

[1] D. M. Greenberger、M. A. Horne 和 A. Zeilinger，《超越贝尔定理》，载于 *Bell's Theorem Quantum Theory and Conceptions of the Universe*，由 M. Kafatos 编（ Springer Netherlands，多德雷赫特，），第 69–72 页。1989 [2] E. Schr¨odinger，《量子力学的当前状况》，《自然科学》23，844（1935）。[3] J. D. Trimmer，《量子力学的当前状况：Schr¨odinger“猫悖论”论文译文》，《美国哲学学会会刊》，323（1980）。[4] W.-B. Gao、C.-Y. Lu、X.-C. Yao、P. Xu、O. G¨uhne、A. Goebel、Y.-A. Chen、C.-Z. Peng、Z.-B. Chen 和 J.- W. Pan，《超纠缠十量子比特 Schr¨odinger 猫态的实验演示》，《自然·物理》– （）。[5] A. Omran、H. Levine、A. Keesling、G. Semeghini、T. T. Wang、S. Ebadi、H. Bernien、A. S. Zibrov、H. Pichler、S. Choi、 *et al.*，《里德堡原子阵列中 Schr¨odinger 猫态的生成与操控》，《科学》365，570（2019）。[6] C. Song、K. Xu、H. Li、Y.-R. Zhang、X. Zhang、W. Liu、Q. Guo、Z. Wang、W. Ren、J. Hao、 *et al.*，《生成多达 20 个量子比特的多组分原子 Schr¨odinger 猫态》，《科学》365，574（2019）。[7] G. D. Fresco、B. Spagnolo、D. Valenti 和 A. Carollo，《多参数量子临界计量》，《SciPost物理》13，077（2022）。[8] G. Di Fresco、B. Spagnolo、D. Valenti 和 A. Carollo，《测量诱导相变中的计量学与多体纠缠》，《Quantum》8，1326（2024）。[9] Y. Chen、S. Murciano、P. Sala 和 J. Alicea，《临界系统中的量子传感：对称性、缺陷与退相干的影响》（2026），arXiv:2601.04364 [quant-ph]。[10] V. Zauner、M. Ganahl、H. G. Evertz 和 T. Nishino，《共动窗口内的时间演化：量子自旋链中局域淬火后的信号前沿与磁化平台的标度行为》，《物理学杂志：凝聚态》27，425602（2015）。[11] V. Eisler 和 F. Maislinger，《局域激发后的 XY链前沿动力学》，《SciPost物理》8，037（2020）。[12] G. Delfino 和 M. Sorba，《非平衡量子动力学中的初始条件空间与普适性》，《核物理 B》983，115910（2022）。[13] S. Bocini 和 M. Fagotti，《通过对乘积态进行局域幺正时间演化生成薛定谔猫态》，《物理评论研究》6，10.1103/physrevresearch.6.033108（2024）。[14] T. Antal、Z. R´acz、A. R´akos 和 G. M. Sch¨utz，《零温下 XX链中的输运：平坦磁化剖面的涌现》，《物理评论 E》59，4912–4918（1999）。

[15] S. Scopa 和 D. Karevski, 《畴壁熔化过程中的前沿标度与纠缠扩展》, 《欧洲物理学杂志专题》232, 1763–1781（2023）。[16] V. Eisler, 《具有能带结构的自由费米子链中的畴壁熔化与纠缠》, SciPost Physics Core 8, 10.21468/scipostphyscore.8.4.069（2025）。[17] K. Bidzhiev、M. Fagotti 和 L. Zadnik, 《量子自旋链阻塞态中局域测量的宏观效应》, 《物理评论快报》128, 10.1103/physrevlett.128.130603（2022）。[18] M. Fagotti, 《量子阻塞将量子力学带入宏观尺度》, 《物理评论 X》14, 10 1103 14 021015 2024 . /physrevx. . ( )。[19] V. Hunyadi、Z. R´acz 和 L. Sasv´ari, 《量子 XX 链中前沿的动态标度》, 《物理评论 E》69, 10.1103/physreve.69.066103（2004）。[20] M. Collura、A. De Luca 和 J. Viti, 《畴壁非平衡定态的解析解》, 《物理评论 B》97, 10.1103/physrevb.97.081111（2018）。[21] V. Eisler 和 Z. R´acz, 《传播量子前沿中的全计数统计与随机矩阵谱》, 《物理评论快报》110, 10.1103/physrevlett.110.060602（2013）。[22] V. Mari´c、F. Ferro 和 M. Fagotti, 《横场伊辛链铁磁基态上传播的无序-有序界面》, 《物理评论 B》111, 205118（2025）。[23] V. Mari´c、F. Ferro 和 M. Fagotti, 《宏观量子态与传播于一维基态上的无序-有序界面中的普适关联》, 《物理评论快报》134, 236302（2025）。[24] F. Ferro 和 M. Fagotti, 《让量子费 Fisher 信息摆脱平衡态（ 2025 2503 21905 ）》, [ ] arXiv: . quant-ph . [25] S. Sachdev 和 A. P. Young, 《横场伊辛链的低温弛豫动力学》, 《物理评论快报》78, 2220（1997）。[26] H. Rieger 和 F. Igl´oi, 《有限横场伊辛链中量子淬火的半经典理论》, 《物理评论 B》84, 10.1103/physrevb.84.165117（2011）。[27] W. D¨ur、G. Vidal 和 J. I. Cirac, 《三个量子比特可以以两种不等价方式纠缠》, 《物理评论 A》62, 10.1103/physreva.62.062314（2000）。[28] H. H¨affner、W. H¨ansel、C. F. Roos、J. Benhelm、D. Chek-al kar、M. Chwalla、T. K¨orber、U. D. Rapol、M. Riebe、P. O. Schmidt、C. Becher、O. G¨uhne、W. D¨ur 和 R. Blatt, 《囚禁离子的可扩展多粒子纠缠》, 《自然》438, 643–646（2005）。[29] A. G. Catalano、C. Da˘g、G. Torre、S. M. Giampaolo 和 F. Franchini, 《通过量子模拟器上的多体物理实验制备 W 态》（2025）, arXiv:2510.17974 [quant-ph]。[30] K. Korzekwa, *Resource theory of asymmetry*, 博士论文, 伦敦帝国学院（2013）。[31] I. Marvian 和 R. W. Spekkens, 《如何量化相干性：区分可言说与不可言说概念》, 《物理评论 A》94, 10.1103/physreva.94.052324（2016）。[32] I. Marvian、R. W. Spekkens 和 P. Zanardi, 《量子速度极限、相干性与不对称性》, 《物理评论 A》93, 10.1103/physreva.93.052331（2016）。[33] K. Yamaguchi 和 H. Tajima, 《超越独立同分布：量子费 Fisher 信息的不对称性资源理论信息谱方法》, 《物理评论快报》131, 10.1103/physrevlett.131.200203（2023）。[34] C. Zhang、B. Yadin、Z.-B. Hou、H. Cao、B.-H. Liu、Y.-F. Huang、R. Maity、V. Vedral、C.-F. Li、G.-C. Guo 和 D. Girolami, 《通过少量局域测量检测计量学上有用的非对称性与纠缠》, 《物理评论 A》96, 10.1103/physreva.96.042327（2017）。[35] G. Gour, 《量子世界的资源》（2024）, arXiv:2402.05474 [quant-ph]。[36] J. Aberg, 《量化叠加》（2006）, arXiv:quant-ph/0612146 [quant-ph]。[37] F. Ares、S. Murciano 和 P. Calabrese, 《作为对称性破缺探针的纠缠不对称性》, 《自然通讯》14, 10.1038/s41467-023-37747-8（2023）。[38] F. Ares、P. Calabrese 和 S. Murciano, 《量子姆潘巴效应》（2025）, arXiv:2502.08087 [cond-mat.stat- mech]。[39] S. Murciano、F. Ares、I. Klich 和 P. Calabrese, 《XY 自旋链中的纠缠不对称性与量子姆潘巴效应》, 《统计力学杂志：理论与实验》2024, 013103（2024）。[40] K. Chalas、F. Ares、C. Rylands 和 P. Calabrese, 《动力学对称性恢复过程中的多重交叉及其对量子姆潘巴效应的意义》, 《统计力学杂志：理论与实验》2024, 103101。

[41] S. Yamashika、F. Ares 和 P. Calabrese，《二维自由费米子系统中的纠缠不对称性与量子姆潘巴效应》，《物理评论B》110，085126（2024年）。[42] H. Yu、S. Liu 和 S.-X. Zhang，《对称性视角下的量子姆潘巴效应》，《亚太物理学会通报》35，10 1007 43673 025 00157 7 2025年。/s - - - ( )。[43] G. Teza、J. Bechhoefer、A. Lasanta、O. Raz 和 M. Vucelja，《非平衡热弛豫的加速：姆潘巴效应及相关效应》，《物理学报告》1164，1–97（2026年）。[44] Y.-H. Yu、T.-R. Jin、L. Zhang、K. Xu 和 H. Fan，《通过初态工程调控孤立系统中的量子姆潘巴效应》，《物理评论 B》112，10.1103/yzjd-pk8h（2025年）。[45] S. Liu、H.-K. Zhang、S. Yin、S.-X. Zhang 和 H. Yao，《多体局域化系统中的对称性恢复与量子姆潘巴效应》，《科学通报》70，3991–3996（2025年）。[46] X. Turkeshi、P. Calabrese 和 A. D. Luca，《随机线路中的量子姆潘巴效应》（2024年），arXiv:2405.14514 [quant-ph]。[47] T. Banerjee、S. Das 和 K. Sengupta，《周期驱动量子系统中的纠缠不对称性》（2025年），arXiv:2412.03654 [quant-ph]。[48] F. Ares、V. Vitale 和 S. Murciano，《自由费米子混合态中的量子姆潘巴效应》，《物理评论 B》111，10.1103/physrevb.111.104312（2025年）。[49] F. Caceffo、S. Murciano 和 V. Alba，《耗散系统中的纠缠多重态、不对称性与量子姆潘巴效应》，《统计力学杂志：理论与实验》2024，063103（2024年）。[50] C. Rylands、E. Vernier 和 P. Calabrese，《海森堡自旋链中的动力学对称性恢复》，《统计力学杂志：理论与实验》2024，123102。[51] K. Klobas，《规则54*中对称性分辨纠缠与纠缠不对称性的非平衡动力学：精确渐近行为》，《物理学杂志A：数学与理论》57，505001。[52] B. J. J. Khor、D. M. K¨urk.c¨uoglu、T. J. Hobbs、G. N. Perdue 和 I. Klich，《量子伊辛链中的禁闭与畴壁纠缠不对称性》，《Quantum》8，1462（2024年）。[53] B. Bertini、K. Klobas、M. Collura、P. Calabrese 和 C. Rylands，《非对称初态下的电荷涨落动力学》，《物理评论B》109，10.1103/physrevb.109.184312（2024年）。[54] F. Ferro、F. Ares 和 P. Calabrese，《离散群的非平衡纠缠不对称性：以 XY 自旋链为例》，《统计力学杂志：理论与实验》2024，023101（2024年）。[55] A. Russotto、F. Ares 和 P. Calabrese，《随机态中的非阿贝尔纠缠不对称性》，《高能物理学杂志》2025，1（2025年）。[56] F. Benini、V. Godet 和 A. H. Singh，《共形场论与全息中的纠缠不对称性》，《理论与实验物理进展》2025，10.1093/ptep/ptaf080（2025年）。[57] H.-H. Chen 和 Z.-J. Tang，《海登-普雷斯基尔协议中的纠缠不对称性（ 2025 2411 17695 ）》，[ ] arXiv: . hep-th .[58] Y. Kusuki、S. Murciano、H. Ooguri 和 S. Pal，《边界共形场论中的纠缠不对称性与对称性缺陷》，《高能物理学杂志》2025，10.1007/jhep01(2025)057（2025年）。[59] M. Fossati、F. Ares、J. Dubail 和 P. Calabrese，《共形场论中的纠缠不对称性及其与非拓扑缺陷的关系》，《高能物理学杂志》2024，10.1007/jhep05(2024)059（2024年）。[60] L. Capizzi 和 M. Mazzoni，《多体系统有序相中的纠缠不对称性：伊辛场论》（2023年），arXiv:2307.12127 [cond-mat.stat-mech]。[61] F. Ares、S. Murciano、P. Calabrese 和 L. Piroli，《随机量子线路中的纠缠不对称性动力学》，《物理评论研究》7，10.1103/m3np-p5xj（2025年）。[62] L. K. Joshi、J. Franke、A. Rath、F. Ares、S. Murciano、F. Kranzl、R. Blatt、P. Zoller、B. Vermersch、P. Calabrese、C. F. Roos 和 M. K. Joshi，《在量子模拟中观测量子姆潘巴效应》，《物理评论快报》133，010402（2024年）。[63] Y. Xu、C.-P. Fang、B.-J. Chen、M.-C. Wang、Z.-Y. Ge、Y.-H. Shi、Y. Liu、C.-L. Deng、K. Zhao、Z.-H. Liu、T.-M. Li、H. Li、Z. Wang、G.-H. Liang、D. Feng、X. Guo、X.-Y. Gu、Y. He、H.-T. Liu、Z.-Y. Mei、Y. Xiao、Y. Yan、Y.-H. Yu、W.-P. Yuan、J.-C. Zhang、Z.-A. Wang、G. Liu、X. Song、Y. Tian、Y.-R. Zhang、S.-X. Zhang、K. Huang、Z. Xiang、D. Zheng、K. Xu 和 H. Fan，《超导量子处理器上量子姆潘巴效应的观测与调控》（2025年），arXiv:2508.07707 [quant-ph]。[64] R. Takagi，《通过不对称性资源理论从操作视角理解偏斜信息》，《科学报告》9，14562（2019年）。

[65] Y. Kusuki、S. Pal 和 H. Tajima，《弱对称性破缺与强对称性破缺的资源理论量化指标：强纠缠不对称性及其他》（2026年），arXiv:2601.20924 [hep-th]。[66] S. Yamashika、S. Endo 和 H. Tajima，《量子多体系统中作为对称性破缺度量的量子费 Fisher 信息》（2025年），arXiv:2509.07468 [cond-mat.stat-mech]。[67] K. C. Tan、V. Narasimhachar 和 B. Regula，《费 Fisher 信息普适地识别量子资源》，《物理评论快报》127，200402（2021年）。[68] L. Pezz´e 和 A. Smerzi，《纠缠、非线性动力学与海森堡极限》，《物理评论快报》102，100401 2009( )。[69] P. Hyllus、W. Laskowski、R. Krischek、C. Schwemmer、W. Wieczorek、H. Weinfurter、L. Pezz´e 和 A. Smerzi，《费 Fisher 信息与多粒子纠缠》，《物理评论 A》85，022321（2012年）。[70] G. T´oth，《多体纠缠与高精度计量》，《物理评论 A》85，022322（2012年）。[71] F. Fr¨owis 和 W. D¨ur，《量子自旋系统的宏观性度量》，《新物理学杂志》14，093039（2012年）。[72] I. Fr´erot 和 T. Roscilde，《量子方差：多体系统量子相干性与量子关联的度量》，《物理评论B》94，075121（2016年）。[73] J. Lambert 和 E. S. Sørensen，《反铁磁海森堡自旋链中单轴各向异性条件下量子费 Fisher 信息的估计》，《物理评论 B》99，10.1103/physrevb.99.045117（2019年）。[74] W. Zhong、J. Liu、J. Ma 和 X.-G. Wang，《单轴扭转模型中的量子费 Fisher 信息与自旋压缩》，《中国物理 B》23，060302（2014年）。[75] Z. Jiang，《指数形式态的量子费 Fisher 信息》，《物理评论 A》89，10.1103/phys-reva.89.032128（2014年）。[76] Y. Gao 和 H. Lee，《高斯态量子多参数估计的界》，《欧洲物理学杂志 D》68，10.1140/epjd/e2014-50560-1（2014年）。[77] D. ˇSafr´anek、A. R. Lee 和 I. Fuentes，《利用多模高斯态进行量子参数估计》（2015年），arXiv:1502.07924 [quant-ph]。[78] E. P. Wigner 和 M. M. Yanase，《分布的信息含量》，《美国国家科学院院刊》49，910（1963年），https://www.pnas.org/doi/pdf/10.1073/pnas.49.6.910。[79] A. Rath、C. Branciard、A. Minguzzi 和 B. Vermersch，《通过随机化测量获取量子费 Fisher 信息》，《物理评论快报》127，260501（2021年）。[80] P. Hauke、M. Heyl、L. Tagliacozzo 和 P. Zoller，《通过动力学易感率测量多体纠缠》，《自然·物理》12，778–782（2016年）。[81] L. Zadnik、K. Bidzhiev 和 M. Fagotti，《折叠自旋 1/2 XXZ 模型：II. 采用最小荷集合的热力学与流体力学》，《SciPost 物理学》10，10.21468/scipostphys.10.5.099（2021年）。[82] F. Franchini，*An Introduction to Integrable Techniques for One-Dimensional Quantum Systems*（Springer 国际出版公司，2017年）。[83] E. H. Lieb 和 D. W. Robinson，《量子自旋系统的有限群速度》，《数学物理通讯》28，251 1972( )。[84] M. A. Nielsen 和 I. L. Chuang，*Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*（剑桥大学出版社，2010年）。[85] C. Holzhey、F. Larsen 和 F. Wilczek，《共形场论中的几何熵与重整化熵》，《核物理 B》424，443–467（1994年）。[86] P. Calabrese 和 J. Cardy，《纠缠熵与量子场论》，《统计力学杂志：理论与实验》2004，P06002（2004年）。[87] S. Yu，《作为方差凸屋顶的量子费 Fisher 信息》（2013年），arXiv:1302.5311 [quant-ph]。[88] J. L. Massey，载于*Information Theory: Proceedings of the 1988 Beijing International Workshop on Information Theory (BIWIT'88)* 1989 4 7, 1988

（培格曼出版社，）july - 。[89] T. M. Cover，*Elements of information theory*（约翰·威立父子出版公司，1999年）。[90] M. Mazzoni、L. Capizzi 和 L. Piroli，《利用局域性保持操作破坏全局对称性》（2025年），arXiv:2508.15892 [quant-ph]。[91] M. A. Nielsen，《量子信息论》（2000年），arXiv:quant-ph/0011036 [quant-ph]。[92] G. T´oth 和 D. Petz，《方差与量子费 Fisher 信息的极值性质》，《物理评论 A》87，10.1103/physreva.87.032324（2013年）。