arXiv:2602.16017v1 [math.QA] 17 Feb 2026

同伦李代数与相干无穷小 2-编织

Cameron Kemp

诺丁汉大学数学科学学院，英国诺丁汉大学公园，NG7 2RD。

电子邮件：cameron.kemp@nottingham.ac.uk

2026年2月19日

摘要

给定一个同伦李代数（即一个 L_∞-代数） $\mathfrak{g}$，我们具体说明 Lada-Markl $\mathfrak{g}$-模（即表示）如何组合成一个对称幺半 dg-范畴。考虑该 dg-范畴的同伦 2-范畴，我们从 2-移位泊松结构构造无穷小 2-编织，继而证明这些无穷小 2-编织符合 Cirio 和 Faria Martins 意义下的相容性。随后，我们明确确定与有限维同伦李代数相关联的 Chevalley-Eilenberg 代数的微分，并构造表示范畴与 Chevalley-Eilenberg 代数上的半自由 dg-模范畴之间的对称幺半 dg-等价。

关键词： L_∞-代数， L_∞-模，微分分次范畴，移位泊松结构，编织幺半 2-范畴，无穷小 2-编织，导出代数几何，变形量子化

MSC 2020： 17B10、17B37、18G35、18N10

目录

1 引言 **3**

2 预备知识 **6**

2.1 对称幺半 dg-范畴 .62.2 同伦李代数与移位泊松结构 .82.3 同伦 2-范畴与无穷小 2-编织 .11

3 同伦李代数的表示 **15**3.1 交织算子、其复合与幺半积 .153.2 由 2-移位泊松结构导出的无穷小 2-编织 .22

4 表示 表示论作为导出几何 2 **7**

4.1 Chevalley-Eilenberg 代数 .274.2 对称幺半 dg-等价 .30

约定与记号

- 所有向量空间、代数等均取自固定的特征零域 $\mathbb{K}$。
- 每个分次向量空间都将按整数 $\mathbb{Z}$分次。此类分次向量空间上的每个微分结构都会使次数增加1，即我们采用上链约定。~
- 对于 $i \in \mathbb{Z}$，我们定义 $i := i-1$。对于向量空间 $\mathfrak{g}$、 U和 V，我们将恒等映射记作例如id$_{\mathfrak{g}^{\otimes(i-1)}\otimes U\otimes V} =: 1_{i-1,UV}$并将交换映射记作例如$s_{\mathfrak{g}^{\otimes(i-1)}\,U} =: s_{i-1,U}$ 以节省篇幅。
- 对于映射/方程，输入元素均假定具有齐次次数。
- CDGA：交换微分分次代数，DGLA：微分分次李代数。
- 结构化集合的每个幺半范畴均假定为严格的[1] 在Schauenburg的精细严格化定理下 [Sch01，定理4。3]。
- 本文将涉及许多幺半范畴，因此在此列出：

  1. (Ch $\otimes, \mathbb{K}$)：上链复形、张量积，以及位于次数 0 且带平凡微分的基域。 2. (dgCat $\otimes$, K)：Ch- 范畴、局部张量积，以及只有一个对象且其态射同构于 $\mathbb{K}$ 的 Ch- 范畴。 3. (Ch$^{[-1,0]}, \boxtimes, \mathbb{K}$)：集中在次数$\{-1,0\}$ 的上链复形，以及截断张量积。 4. (dgCat$^{[-1,0]}, \boxtimes$, K)：Ch$^{[-1,0]}$-范畴，以及局部截断张量积。 5. (Rep($\mathfrak{g}$) $\odot, \mathbb{K}$)：同伦李代数 $\mathfrak{g}$的表示、odot 积，以及位于次数 0 且带平凡表示结构的基域。 6. ($_A$dgMod $\otimes_A, A$)：交换微分分次代数 A上的 dg-模、相对张量积，以及 A视为其自身上的 dg-模。

- 粗体用于突出周围文本所定义的术语，斜体则用于强调。例如，**上链 2-范畴** 是一个 Ch$^{[-1,0]}$-范畴，而无穷小 2-编织被定义为伪自然的，而非 2-自然的。

致谢

首先，我要感谢我的前辈 Alexander Schenkel 和 Robert Laugwitz。在本文形成的两年间，他们提供了许多富有成效的见解，并参与了启发性的讨论。若没有他们细致周到的关注，第 2 节的内容将大部分付之阙如；而第 3 节将令人束手无策，第 4 节则会以令人沮丧的隐晦方式出错。

我还要感谢 Jo˜ao Faria Martins，感谢他在过去一年中与我进行了许多交流，并提出了若干有趣的问题，尤其是关于 dg-category Rep($\mathfrak{g}$) 上对称幺半结构的变形量子化，与构造 Kontsevich 的 Vassiliev 不变量等拓扑不变量的高维类比之间可能存在的联系。

[1]如果读者对这一约定感到不安，请放心，无论如何，唯一会出现的结合子和单位子都是向量空间范畴中的典范结合子和单位子。这些数据不仅携带起来很麻烦，而且从我们整体论述的角度来看也无关紧要。

1 引言

L_∞-代数的历史及其起源十分错综复杂，Stasheff 在回顾性分析中对此作了详述 [Sta19, Section 4]。严格来说，这一概念最早见于 [SS85]，不过，后来才在 [Sta92, LS93] 中引入了其现代同调表述，即在分次向量空间上由一族括号构成的表述。同调表述清楚地表明，L_∞-代数是微分分次李代数的自然推广；鉴于微分分次李代数在变形理论中的声誉，以及这种表述的动机和抽象基础都来自 Witten 和 Zwiebach 在闭弦场论的 BRST量子化中所得到的例子，这一点并不令人意外 [WZ92, Zwi93]。为此，Stasheff [Sta97, Sta97']及其他人 [JMRSW19] 后来分析了 L_∞-代数与更一般的 BV形式主义之间的联系 [BV83, BF83]。

在同调表述发展不久之后，Lada 和 Markl [LM95, 定理 2.3] 认识到，有限维 L_∞-代数与带增广的有限生成半自由交换微分分次代数（Chevalley-Eilenberg 代数）一一对应。这种对应关系的一大益处是，它使我们能够通过沿用已确立且直观简单的 CDGA 同态定义，自然地定义 L_∞-代数之间的同态。进一步说，我们可以将 L_∞-代数 $\mathfrak{g}$ 在上链复形 V 上的表示定义为从 $\mathfrak{g}$ 到微分分次李代数 $\mathrm{End}(V)$ 的 L_∞- 代数同态。在经典李代数理论中，表示 $\rho\colon \mathfrak{g}\to \mathrm{End}(V)$ 等价地描述为一个作用 $\triangleright\colon \mathfrak{g}\otimes V\to V$，并满足这样一个条件：对易子的作用等于作用的对易子。因此，在这个 L_∞-代数语境下，我们预期表示等价地描述为一列无穷的、阶次不断升高的作用映射，并满足同伦相干条件。事实上，Lada 和 Markl 从后一种描述出发[LM95, 定义 5.1]，随后独立地引入了从 L_∞-代数到微分分次李代数的同态定义 [LM95, 定义 5.2]；他们的主要结果 [LM95, 定理 5.4]表明，这两种定义确实一致。

回顾如下经典结果：若 $\mathfrak{g}$ 是一个李代数且 V 是一个表示，则 $\mathfrak{g}\oplus V$ 继承一个典范的李代数结构；该结果在 Lada 的短文 [Lad04] 中被推广到 L_∞-代数及其表示。如引言所述，该短文“源于数学物理中的一个问题，该问题最初出现在 *[BBvD85]* 中，并在 *[FLS02]* 中得到处理。在经典规范场论中，人们以规范参数的李代数作用于该理论之场的李模这一形式，遇到李代数的表示。然而，正如 *[BBvD85],* 中那样，这些李结构有时仅在同伦意义下出现。”现在回顾另一个经典结果：给定一个李代数 $\mathfrak{g}$、两个表示 V、W 以及一个同态 $f\colon V\to W$，可以定义一个李代数同态 $\mathrm{id}_{\mathfrak{g}}\oplus f\colon \mathfrak{g}\oplus V\to \mathfrak{g}\oplus W$。为将这一简单结果推广到 L_∞-代数的情形，Allocca [All10, All14] 定义了 L_∞-代数表示的同态，并证明类似的结果确实成立。

据我们所知，文献中尚未定义 Allocca 同态的复合，也未定义它们的幺半积。事实上，真正需要的是：

(i) 任意两个表示之间的态射上链复形，使 Allocca 同态在 Hom 微分下为 0-余循环。(ii) 一种结合的复合，它是 Hom 复形之间的上链映射，并且具有作为 0-余循环的单位元。(iii) 在这个微分分次范畴 Rep($\mathfrak{g}$) 上具有相容的对称幺半结构。

这一目标深深植根于我们长期构建“高阶量子群”的抱负之中，相关探索见 [KLS25、KLS24、Kem25、Kem25']。现在，我们来回顾这项工作，以清楚揭示本文的必要性。

在 [KLS25] 中，研究者证明了，半自由交换微分分次代数 A 上的一个 2-移位泊松结构 π 会在半自由 A-dg- 模所构成的对称幺半 dg- 范畴的同伦 2- 范畴上诱导出一个无穷小 2- 编织 t^{π}，即 $\mathrm{Ho}_2({}_A\mathrm{dgMod}^{\mathrm{sf}})$。随后，研究者在[KLS25, 第 3 节第 3] 小节中，通过选取如下拟设编织 $\sigma := \gamma\, e^{\frac{\hbar}{2} t^{\pi}}$ 和如下拟设结合子 $\alpha := \Phi_{\mathrm{KZ}}(t^{\pi}_{12}, t^{\pi}_{23})$，将这一无穷小 2-编织 t^{π} 积分到变形参数 $\hbar$ 的二阶；其中，γ 是 ${}_A\mathrm{dgMod}^{\mathrm{sf}}$ 上的对称编织，而 Φ_{KZ} 是 Drinfeld 的 Knizhnik-Zamolodchikov级数 [Kas95, 推论 XIX.6.5]。研究表明，在该阶上，五边形公理严格成立，但六边形公理受到修正项的阻碍。随后，[Kem25, 第 5] 节进一步证明，如果无穷小 2-编织是相容且全对称的（按照 Cirio 和 Faria Martins 的定义 [CFM15, 定义 17 和 18]），这些修正项就满足编织幺半 2-范畴所要求的公理。

Cirio 和 Faria Martins 提出了围绕无穷小 2-编织的这类定义，以便据此构造具有良好几何性质的 KZ 2-联络，相关工作已在他们早期的研究中展开 [CFM12，CFM17]。近期有研究表明 [Kem25']，通过研究 Cirio 和 Faria Martins 的 KZ 2-联络的高范畴平行输运，可以将上述障碍提升到所有阶（即构造一对六边形子级数）。再次假设无穷小 2-编织相容且全对称后，研究证明，编织、结合子以及这对六边形子级数共同满足编织幺半 2-范畴中唯一一个不涉及五边形子的公理，即 Breen多胞体公理 [Kem25，（2.40）]。对于我们所考虑的具体无穷小 2-编织，全对称性很容易验证 t^{π}，而我们只能推测 [Kem25，注 5。28]，t^{π} 的相容性与移位泊松结构必须满足的 Maurer-Cartan 方程的三阶权分量有关 π KLS25，注 2。7]。下面我们将进一步阐述这一点，并揭示上述讨论中被略过的细微之处。

给定一个交换微分分次代数 $A = (A, \delta)$，导子 $\mathrm{Der}(A) \subset \mathrm{hom}(A, A)$ 自然带有微分分次李代数结构，其中李括号为分次交换子 $[\cdot,\cdot]$，微分为内 Hom 微分 $\partial := [\delta, \cdot]$。给定 $n \in \mathbb{Z}$，完备的 n-移位多向量场交换微分分次代数定义为 $\widehat{\mathrm{Pol}}(A, n) := \prod_{w\in\mathbb{N}} \mathrm{Sym}^w_A(\mathrm{Der}(A)[-n-1])$，其中 $w \in \mathbb{N}$ 称为权。$\mathrm{Pol}(A, n)$ 上有一个典范的泊松（$n+2$）代数结构，即 Schouten-Nijenhuis 括号 $\{\cdot,\cdot\}$；据此，将完备的 n-移位多向量场 $P \in \mathrm{Pol}(A, n)$ 的 Maurer-Cartan 方程定义为

$$\partial(P) + \tfrac{1}{2}\{P, P\} = 0 \quad . \tag{1.1}$$

沿用 [CPTVV17、Pri17、Pri18], 的做法，我们将交换微分分次代数A 上的 n-移位泊松结构定义为一个完备的 n-移位多向量场 π，其上同调度为 $n+2$、权为 $w \geq 2$，并满足 Maurer-Cartan 方程 (1.1)。将 n-移位泊松结构按权分量展开为 $\pi := \sum_{w=2}^{\infty} \pi_w \in \widehat{\mathrm{Pol}}(A, n)^{n+2}$，其中 $\pi_w \in \mathrm{Sym}^w_A(\mathrm{Der}(A)[-n-1])^{n+2}$，我们将 Maurer-Cartan 方程 (1.1) 按这些权分量分解如下：

$$\partial(\pi_2) = 0 \quad , \tag{1.2}$$
$$\partial(\pi_3) + \tfrac{1}{2}\{\pi_2, \pi_2\} = 0 \quad , \tag{1.3}$$
$$\vdots$$

给定半自由交换微分分次代数 A 以及2-移位泊松结构 $\pi \in \widehat{\mathrm{Pol}}(A, 2)^4$, ，无穷小2-编织 $t : \otimes_A \Rightarrow \otimes_A$ （ [KLS25，定理3.10] ）仅由双导子分量 $\pi_2 \in \mathrm{Sym}^2_A(\mathrm{Der}(A)[-3])^4 \cong \mathrm{Sym}^2_A(\mathrm{Der}(A)[-1])^0$ 构造而成，且该定理的证明仅使用了Maurer-Cartan方程（1.2）的权2分量。因此，若将该文命名为“由2-移位泊松结构的双导子分量导出的无穷小2-编织”，并将所诱导的无穷小2-编织记为 t^{π_2}，会更为清晰。将Maurer-Cartan的权3分量联系起来的直觉

方程（1.3）与 t^{π_2} 的相干性，可首先通过回顾经典语境中的嘉当公式而得以理解，亦即 [LPV13，命题3.6]。回忆该公式将多重导子在微分形式上的内乘作用 ι 与下列各项联系起来：经典的Schouten-Nijenhuis括号$[\cdot,\ \cdot]_{\mathrm{SN}}$、德拉姆微分 d_{dR} 以及分次交换子括号 $[\cdot,\ \cdot]$, 具体为

$$\left[\iota_P,[d_{\mathrm{dR}},\iota_Q]\right]=\iota_{[P,Q]_{\mathrm{SN}}}\quad . \tag{1.4}$$

若能将嘉当公式（1.4）推广至交换微分分次代数语境，那么 $t^{\pi_2}\sim\iota_{\pi_2}(\cdots)$ 的相干性条件便可归结为要求

$$t^{\pi_2}_{12}+t^{\pi_2}_{23}+t^{\pi_2}_{13}\sim\left[\iota_{\pi_2},[d_{\mathrm{dR}},\iota_{\pi_2}]\right](\cdots)=0\quad . \tag{1.5}$$

三重导子分量 $\pi_3\in\mathrm{Sym}^3_A(\mathrm{Der}(A)[-3])^4\cong\mathrm{Sym}^3_A(\mathrm{Der}(A)[-1])^{-2}$ 在 ${}_A\mathrm{dgMod}^{\mathrm{sf}}$ 中诱导出一个次数为 -2 的态射 $t^{\pi_3}\sim\iota_{\pi_3}(\cdots)$，因此

$$d_{\underline{\mathrm{hom}}}(t^{\pi_3})\sim\iota_{\partial(\pi_3)}(\cdots) \tag{1.6}$$

在同伦 2-范畴 $\mathrm{Ho}_2({}_A\mathrm{dgMod}^{\mathrm{sf}})$ 中消失，而相干性条件（1.5）确实成立，这是因为 Maurer-Cartan 方程（1.3）的权3分量，以及假定给定的嘉当公式（1.4）的交换微分分次代数推广。

本文不尝试证明嘉当公式（1.4）的交换微分分次代数推广成立，而是另辟蹊径：通过显式定义对称幺半 dg-范畴$\mathrm{Rep}(\mathfrak{g})$，从而由 2-移位泊松结构构造相容（且全对称）的无穷小 2-编织。该范畴的定义采用了 [KLS24]中发展的图形演算形式体系。该形式体系旨在通过一族附加于底层（曲）L_∞-代数上的同伦相干映射，刻画一般半自由交换微分分次代数上的移位泊松结构。其灵感源自 Safronov 的结果 [Saf21]：对于普通李代数 $\mathfrak{g}$，1-移位和 2-移位泊松结构分别由拟李双代数结构和不变对称张量 $\pi_2\in(\mathrm{Sym}^2\mathfrak{g})^{\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}}$给出；也就是说，它们是与 Drinfeld-Jimbo 量子群相关联的半经典数据。

简而言之，[KLS24] 的图形演算形式体系如下：给定一个有限生成的半自由交换微分分次代数 $A=(\mathrm{Sym}(\mathfrak{g}^*[-1]),\delta)$，权为 $w\in\mathbb{N}$ 的 n-移位多重向量可分解为若干元数为 $p\in\mathbb{N}$ 的分量，并可改写为 $P\colon\bigwedge^p\mathfrak{g}\to(\mathrm{Sym}^w_{\pm}\mathfrak{g})[|P|_{\mathrm{Pol}}-p-wn]$，其中当 n 为偶数/奇数时，$\mathrm{Sym}_{\pm}$ 分别为对称/交错的。Schouten-Nijenhuis 括号 $\{\cdot,\cdot\}$ 对应于圆点积复合运算 (2.22) 的交换子。特别地，微分 δ 本身是一个权为 1、上同调度为 $n+2$的 n-移位多重向量，并满足 Maurer-Cartan 方程 (1.1)，即 $\delta\circ\delta=0$。这又对应于一族满足曲雅可比恒等式的映射 $\{\ell^p:\bigwedge^p\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}[2-p]\}_{p\in\mathbb{N}}$，由此恢复了众所周知的一一对应关系。圆点积不仅使我们能够抽象地定义任意维度 $\mathfrak{g}$的 L_∞-代数中的 n-移位泊松结构，还使我们能够自然地定义 $\mathfrak{g}$ 的表示结构，以及 $\mathrm{Rep}(\mathfrak{g})$ 的 dg-范畴结构，见注 3.8。

2 预备知识

本预备知识旨在通过固定符号和基本术语，使本文内容完整自足。第 2.1 小节首先回顾描述上链复形的对称幺半范畴所需的一些同调代数基本概念，见 [CW94，第1]章。随后，我们将这些概念应用于富范畴论的语境（即讨论 dg-范畴论）；我们假设读者对此已有一定了解，全面论述见例如 [Kel82]，较为简明的介绍则见 [JY21，第 1 节。3] 以及 [Rie14，第 3]章。

第 2.2 小节回顾了 [KLS24] 中的 bullet 乘积，并据此确定定义 2.13 中同伦李代数的概念。随后，我们以 [KLS24，推论 3.10]中的刻画结果为起点，在定义 2.16 中引入同伦李代数中的移位泊松结构这一概念。第 2.3 小节回顾了 [KLS25，附录 A.2] 中关于集中于次数 $\{-1, 0\}$ 的上链复形及其截断张量积的思想；由此得到的范畴 链复形$^{[-1,0]}$ 被用作丰化的基。接着，我们回顾 [Kem25，第 2.1]小节中伪自然变换（介于链复形$^{[-1,0]}$-函子之间，而这些函子是链复形$^{[-1,0]}$-范畴之间的函子）及其各种复合。最后，我们回顾 [Kem25] 中无穷小 2-编织的定义，以及 Cirio 和 Faria Martin 的 [CFM15]相干性与全对称性概念的简化形式。

2.1 对称幺半 dg-范畴

如果一个向量空间 V 可分解为直和 $V^\sharp = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} V^m$，其中各子空间互不相交，并以整数 $m \in \mathbb{Z}$ 标记（称为**次数**），我们就称它为**分次向量空间**。给定另一个分次向量空间 W，线性映射 $f\colon V \to W$ 若保持次数，即对所有 $m \in \mathbb{Z}$都有 $\mathrm{Im}(f_{|V^m}) \subseteq W^m$，则称为**分次线性映射**。

定义 2.1. 给定 $n \in \mathbb{Z}$ 和一个分次向量空间 V， **n-移位分次向量空间** $V[n]$ 定义为 $V[n]^m := V^{m+n}$，对所有 $m \in \mathbb{Z}$成立。

上链复形 $V = (V, d)$是一个分次向量空间 V，配有一个分次线性映射$d\colon V \to V[1]$（称为**微分**），其平方为零，即 $d\circ d = 0$。对于 $m \in \mathbb{Z}$，**m-余循环** 子空间定义为 $Z^m(V) := \ker(d_{|V^m}) \subseteq V^m$；而 **$m$-余边界** 子空间定义为 $B^m(V) := \mathrm{Im}(d_{|V^{m-1}}) \subseteq V^m$。给定另一个上链复形 W，**上链映射**$f\colon V \to W$是一个与微分可交换的分次线性映射，即 $f\circ d = d\circ f$。

备注 2.2. 上链映射将余边界映射为余边界，将余循环映射为余循环。 △

上链复形及上链映射构成的范畴记作链复形，它具有以下闭对称幺半结构：

(i) 给定上链复形 V 和 W，它们的 **张量积** $V \otimes W$ 定义为

$$(V \otimes W)^m := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} (V^n \otimes W^{m-n}) \tag{2.1a}$$

其微分定义为

$$d(v \otimes w) := (dv) \otimes w + (-1)^{|v|} v \otimes (dw) \tag{2.1b}$$

其中 $|\cdot|$ 表示次数。

(ii) 幺半单位由基域 $\mathbb{K}$ 给出，并视为一个集中在次数 0 且具有平凡微分的上链复形。

(iii) 对称编织 $s : \otimes \Rightarrow \otimes^{\mathrm{op}}$ 由 **Koszul 符号规则**定义，

$$s_{V,W} : V \otimes W \to W \otimes V \quad , \quad v \otimes w \mapsto (-1)^{|v||w|} w \otimes v \quad . \tag{2.2}$$

(iv) 内在 Hom 链复形$[V,W]\in$链复形由下式给出

$$\mathsf{Ch}[V,W]^m := \prod_{n\in\mathbb{Z}} \mathsf{Vec}[V^n, W^{n+m}] \tag{2.3a}$$

其微分结构取为**内 Hom 微分**,

$$\partial h := d\circ h - (-1)^{|h|} h\circ d \quad . \tag{2.3b}$$

注意，上链映射 $f\colon V\to W$恰好是链复形 $\mathsf{Ch}[V,W]$中的 0-余循环，即满足 $\partial f = 0$ 的次数为 0 的元素 $f\in\mathsf{Ch}[V,W]^0$。给定两个上链映射 f，$g\colon V\to W$，同伦 $h\colon f\Rightarrow g$是链复形 $\mathsf{Ch}[V,W]^{-1}$中满足 $\partial h = f-g$的次数为 -1 的元素 $h\in$；此时，它们的差 $f-g$ 是一个 0-上余边界。

注记 2.3。 定义 2.1 中的次数平移使我们可以将齐次元素 $f\in$链复形$[V,W]$直接改写为分次线性映射 $f\colon V\to W[|f|]$。△

定义 2.4。 若范畴 C 具有 Hom 复形 $\mathsf{C}[V,V\prime]\in$链复形，使得单位元是 $\mathsf{C}[V,V])$ 中的 0-余循环 $1_V\in Z^0($，且复合是上链映射，则称 C 为**微分分次范畴**。给定另一个微分分次范畴 C′，若函子 $F\colon\mathsf{C}\to\mathsf{C}'$ 的态射映射是上链映射，则称其为**微分分次函子**。给定另一个微分分次函子 $F\prime\colon$ $\mathsf{C}\to\mathsf{C}'$，若自然变换 $\xi\colon F\Rightarrow F'\colon\mathsf{C}\to\mathsf{C}'$满足 $\xi_V\in Z^0(\mathsf{C}'[F(V)\ F'(V)])$，对所有 $V\in\mathsf{C}$ 均成立，则称其为**dg-自然变换**；若其每个分量ξ_V 都是同构，则称 ξ 为**dg-自然同构**。

例 2.5. 上链复形构成一个微分分次范畴，其 Hom 复形由内在 Hom（2.3）给出。我们也将这个微分分次范畴记作 Ch ，因为上下文总能清楚表明所指的是范畴还是更一般的微分分次范畴。▽

我们用 dgCat 表示由微分分次范畴、微分分次函子和微分分次自然变换构成的 2-范畴。正如富范畴论中一贯的做法 [Kel82，第 1 节。4], 2-范畴dgCat具有典范的对称幺半结构:

(i) 微分分次范畴 $\mathsf{C}\otimes\mathsf{D}$ 的对象为二元组 (V,W)，其中 $V\in\mathsf{C}$ 且 $W\in\mathsf{D}$，其 Hom 复形由张量积给出

$$(\mathsf{C}\otimes\mathsf{D})[(V,W),(V',W')] := \mathsf{C}[V,V']\otimes\mathsf{D}[W,W'] \quad . \tag{2.4}$$

$\mathsf{C}\otimes\mathsf{D}$ 的（上链）复合定义为

$$(f'\otimes g')(f\otimes g) := (-1)^{|g'||f|} f'f\otimes g'g \tag{2.5}$$

因此，单位元为 $1_{V,W}:=1_V\otimes 1_W$。

(ii) 微分分次函子 $F\otimes G\colon\mathsf{C}\otimes\mathsf{D}\to\mathsf{C}'\otimes\mathsf{D}'$ 的对象映射为 $(F\otimes G)(V,W):=(F(V)\ G(W))$，其态射映射为

$$f\otimes g\mapsto F(f)\otimes G(g) \quad . \tag{2.6}$$

(iii) dg-自然变换 $\xi\otimes\zeta\colon F\otimes G\Rightarrow F'\otimes G'\colon\mathsf{C}\otimes\mathsf{D}\to\mathsf{C}'\otimes\mathsf{D}'$仅由 $(\xi\otimes\zeta)_{V,\ W}:=\xi_V\otimes\zeta_W$给出。

(iv) 幺半单位 K 是一个单对象 dg-范畴，其 Hom-复形由基域 $\mathbb{K}$ 给出，而上链复合仅由乘法给出。

(v) 对称编织 S的分量为 $S_{\mathsf{C},\ \mathsf{D}}\colon\mathsf{C}\otimes\mathsf{D}\cong\mathsf{D}\otimes\mathsf{C}$，其定义如下:

$$(V,W)\mapsto(W,V) \quad , \tag{2.7a}$$

$$f\otimes g\mapsto(-1)^{|f||g|} g\otimes f. \tag{2.7b}$$

这个对称严格幺半 2-范畴 $(\mathsf{dgCat}_{\otimes}, \mathsf{K}, S)$ 使我们能够给出以下基本定义。

定义 2.6。 **对称严格幺半 dg-范畴** 是一个四元组 $(\mathsf{C}, \odot, I, \gamma)$，由以下部分组成：一个微分分次范畴 C，一个微分分次函子 $\odot : \mathsf{C} \otimes \mathsf{C} \to \mathsf{C}$，一个对象 $I \in \mathsf{C}$，以及一个 dg-自然同构 $\gamma : \odot \Rightarrow \odot^{\mathrm{op}}$，该同构是对合的，即

$$\gamma_{V,W} = \gamma_{W,V}^{-1} \quad . \tag{2.8}$$

这些数据须满足严格结合律、严格单位律和 六边形公理，

$$\gamma_{U\odot V,W} = (\gamma_{U,W} \odot 1_V)(1_U \odot \gamma_{V,W}) \quad . \tag{2.9}$$

例 2.7。 承接例 2.5，$(\text{链复形}\ \otimes, \mathbb{K}, s)$ 是一个对称严格幺半 dg-范畴；为后续讨论，我们将 s 的 dg-自然性表述如下，

$$s_{V',W'}(f \otimes g) = (-1)^{|f||g|}(g \otimes f)s_{V,W} \quad . \tag{2.10}$$

▽

定义 2.8。 给定对称严格幺半 dg-范畴 $(\mathsf{C}, \odot, I, \gamma)$ 和 $(\mathsf{C}', \odot', I', \gamma')$，一个**对称严格幺半微分分次等价** 是一个本质满且忠实满的微分分次函子 $F : \mathsf{C} \to \mathsf{C}'$，满足：

$$F(V \odot W) = F(V) \odot' F(W) \quad , \tag{2.11a}$$
$$F(f \odot g) = F(f) \odot' F(g) \quad , \tag{2.11b}$$
$$F(I) = I' \quad , \tag{2.11c}$$
$$F(\gamma_{V,W}) = \gamma'_{F(V),F(W)} \quad . \tag{2.11d}$$

我们通过引入以下定义来结束本小节，该定义弱化了 dg-自然变换的概念；我们将在后续的3.2小节中用到它。

定义 2.9. 给定微分分次函子 $F, G : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$，一个 **dg-伪自然变换** $\varrho : F \Rightarrow G : \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ 由以下两部分数据组成：

(i) 对每个对象 $U \in \mathsf{C}$，给出一个 0-余循环 $\varrho_U \in Z^0(\mathsf{D}[F(U)\ G(U)])$。

(ii) 对每一对对象 $U, V \in \mathsf{C}$，给出一个同伦 $\varrho_{(\cdot)} : \mathsf{C}[U,V] \to \mathsf{D}[F(U)\ G(V)][-1]$.

这两部分数据必须满足以下两条公理：

(i) 对每个态射 $f \in \mathsf{C}[U,V]$，

$$G(f)\varrho_U - \varrho_V F(f) = \partial(\varrho_f) + \varrho_{\partial f} \quad . \tag{2.12}$$

(i) 对于每一对态射 $f \in \mathsf{C}[U,V]$ 和 $g \in \mathsf{C}[V,W]$，

$$\varrho_{gf} = \varrho_g F(f) + (-1)^{|g|} G(g)\varrho_f \quad . \tag{2.13}$$

2.2 同伦李代数与移位泊松结构

S

定义 2.10。 对于 $j \in \mathbb{N}$ 和 $i_1, \dots, i_j \in \mathbb{N}$，$(i_1, \dots, i_j)$**-洗牌** 是 $(1, \dots, i_1+\dots+i_j)$ 的一个置换 $\sigma \in \mathsf{S}_{i_1+\dots+i_j}$，满足 $\sigma(i_1+\dots+i_k+1) < \sigma(i_1+\dots+i_k+2) < \cdots < \sigma(i_1+\dots+i_{k+1})$，其中 $0 \le k \le j-1$。我们将此类 $(i_1, \dots, i_j)$-洗牌的子集记为 $\mathsf{S}_{i_1,\dots,i_j} \subseteq \mathsf{S}_{i_1+\dots+i_j}$。置换 σ 的**符号** 定义为

$$\mathrm{sgn}(\sigma) := \begin{cases} 1\ , & \text{Even number of transpositions} \\ -1\ , & \text{Odd number of transpositions} \end{cases} \quad . \tag{2.14a}$$

给定一个分次向量空间 $\mathfrak{g}$，我们定义 $(i_1,\dots,i_j)$-**洗牌算子** 如下：

$$\Sigma_{i_1,\dots,i_j} := \sum_{\sigma\in \mathrm{S}_{i_1,\dots,i_j}} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma : \mathfrak{g}^{\otimes i_1}\otimes\dots\otimes\mathfrak{g}^{\otimes i_j}\to\mathfrak{g}^{\otimes(i_1+\dots+i_j)}\,, \tag{2.14b}$$
$$(x_1\otimes\cdots\otimes x_{i_1})\otimes\dots\otimes(x_{i_1+\dots+i_{\tilde{j}}+1}\otimes\cdots\otimes x_{i_1+\dots+i_j})\mapsto \sum_{\sigma\in \mathrm{S}_{i_1,\dots,i_j}} \varepsilon_\sigma\, x_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes x_{\sigma(i_1+\dots+i_j)}\,,$$

其中 $\varepsilon_\sigma := \chi_\sigma\mathrm{sgn}(\sigma)$，符号 χ_σ 是由分次向量空间元素的置换 2.2 所产生的 Koszul 符号 σ $x\in\mathfrak{g}_\circ$。我们还将 $(i_1,\dots,i_j)$ -**对称化算子** 定义为：

$$\Sigma^+_{i_1,\dots,i_j} := \sum_{\sigma\in \mathrm{S}_{i_1,\dots,i_j}} \sigma : \mathfrak{g}^{\otimes i_1}\otimes\dots\otimes\mathfrak{g}^{\otimes i_j}\to\mathfrak{g}^{\otimes(i_1+\dots+i_j)}\,, \tag{2.14c}$$
$$(x_1\otimes\cdots\otimes x_{i_1})\otimes\dots\otimes(x_{i_1+\dots+i_{\tilde{j}}+1}\otimes\cdots\otimes x_{i_1+\dots+i_j})\mapsto \sum_{\sigma\in \mathrm{S}_{i_1,\dots,i_j}} \chi_\sigma\, x_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes x_{\sigma(i_1+\dots+i_j)}\,,$$

我们定义 $\Sigma^-_{i_1,\dots,i_j} := \Sigma_{i_1,\dots,i_j}$，并规定若任意一个 i_k 是 -1，则将 $\Sigma^\pm_{i_1,\dots,i_j}$ 设为 0。

注 2.11. 将 $(i_1,\dots,i_j)$-洗牌算子（2.14b）限制在子空间 $(\bigwedge^{i_1}\mathfrak{g})\otimes\dots\otimes(\bigwedge^{i_j}\mathfrak{g})$ 上，会得到一个良定义映射 $\Sigma_{i_1,\dots,i_j}:(\bigwedge^{i_1}\mathfrak{g})\otimes\dots\otimes(\bigwedge^{i_j}\mathfrak{g})\to\bigwedge^{i_1+\dots+i_j}\mathfrak{g}_\circ$ 同样，将 $(i_1,\dots,i_j)$ -对称化算子（2.14c）限制在子空间 $(\mathrm{Sym}^{i_1}\mathfrak{g})\otimes\dots\otimes(\mathrm{Sym}^{i_j}\mathfrak{g})$ 上，会得到一个良定义映射 $\Sigma^+_{i_1,\dots,i_j}:(\mathrm{Sym}^{i_1}\mathfrak{g})\otimes\dots\otimes(\mathrm{Sym}^{i_j}\mathfrak{g})\to\mathrm{Sym}^{i_1+\dots+i_j}\mathfrak{g}_\circ$。在此背景下，我们陈述以下关系，这些关系可通过对输入求值轻易证明。给定 $i,j\in\mathbb{N}$，洗牌算子（2.14b）满足

$$\Sigma_{i,\tilde{j}}\otimes 1_\mathfrak{g} + (-1)^j(1_{\tilde{i}}\otimes s_{j,\mathfrak{g}})(\Sigma_{\tilde{i},j}\otimes 1_\mathfrak{g}) = \Sigma_{i,j} = 1_\mathfrak{g}\otimes\Sigma_{\tilde{i},j} + (-1)^i(s_{\mathfrak{g},i}\otimes 1_{\tilde{j}})(1_\mathfrak{g}\otimes\Sigma_{i,\tilde{j}}), \tag{2.15}$$

以及，对于 $i_1,\dots,i_j\in\mathbb{N}$ 和 $1\le k\le j-1$：

$$\Sigma_{i_1,\dots,i_j} = (1_{i_1+\dots+i_{k-1}}\otimes\Sigma_{i_k,i_{k+1}}\otimes 1_{i_{k+2}+\dots+i_j})\Sigma_{i_1,\dots,i_{k-1},i_k+i_{k+1},i_{k+2}\dots,i_j}\quad, \tag{2.16}$$
$$\Sigma_{i_1,\dots,i_j} = (-1)^{i_ki_{k+1}}(1_{i_1+\dots+i_{k-1}}\otimes s_{i_{k+1},i_k}\otimes 1_{i_{k+2}+\dots+i_j})\Sigma_{i_1,\dots,i_{k-1},i_{k+1},i_k,i_{k+2},\dots,i_j}\,. \tag{2.17}$$

△

令

$$\mathrm{Sym}^i_\pm\mathfrak{g} := \begin{cases}\mathrm{Sym}^i\mathfrak{g} & ,\quad \text{for } n \text{ even}\\ \bigwedge^i\mathfrak{g} & ,\quad \text{for } n \text{ odd}\end{cases} \tag{2.18}$$

and

$$\Sigma^\pm_{i,j} := \begin{cases}\Sigma^+_{i,j} & ,\quad \text{for } n \text{ even}\\ \Sigma_{i,j} & ,\quad \text{for } n \text{ odd}\end{cases}\quad, \tag{2.19}$$

我们回顾 [KLS24, (3.28)] 中 skew- /symmetric powers 上分次线性映射的 bullet 乘积 $\bullet$。给定 $p,q\in\mathbb{N}$, $P\colon\bigwedge^j\mathfrak{g}\to(\mathrm{Sym}^p_\pm\mathfrak{g})[|P|]$ 和 $Q\colon\bigwedge^k\mathfrak{g}\to(\mathrm{Sym}^q_\pm\mathfrak{g})[|Q|]$，我们将它们的 bullet 乘积 $P\bullet Q\colon(\bigwedge^{\tilde{j}}\mathfrak{g})\otimes(\bigwedge^k\mathfrak{g})\to(\mathrm{Sym}^p_\pm\mathfrak{g})\otimes(\mathrm{Sym}^{\tilde{q}}_\pm\mathfrak{g})[|P|+|Q|]$ 定义为

$$P\bullet Q := (-1)^{(|P|+\tilde{j})\tilde{q}n+|P|\tilde{k}}\Sigma^\pm_{p,\tilde{q}}(P\otimes 1_{\tilde{q}})(1_{\tilde{j}}\otimes Q)\Sigma_{\tilde{j},k} \tag{2.20}$$

并且，如备注 2.11所示，这给出了一个良定义映射

$$P\bullet Q : \textstyle\bigwedge^{\tilde{j}+k}\mathfrak{g}\to(\mathrm{Sym}^{p+\tilde{q}}_\pm\mathfrak{g})[|P|+|Q|]\quad. \tag{2.21}$$

该**Schouten-Nijenhuis** 括号构造为 bullet 乘积的交换子括号 [KLS24, （3.17）],

$$[\![P,Q]\!] := P\bullet Q - (-1)^{(|P|+\tilde{p}n+\tilde{j})(|Q|+\tilde{q}n+\tilde{k})}Q\bullet P\quad. \tag{2.22}$$

注记 2.12。 限制在 $P\colon \bigwedge^j \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}[|P|]$ 和 $Q\colon \bigwedge^k \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}[|Q|]$的情形，我们有 e

$$P \bullet Q \overset{(2.20)}{=} (-1)^{|P|\tilde{k}} P(1_{\tilde{j}} \otimes Q)\Sigma_{\tilde{j},k} \overset{(2.17),(2.10)}{=} (-1)^{(|P|+\tilde{j})\tilde{k}} P(Q \otimes 1_{\tilde{j}})\Sigma_{k,\tilde{j}} \quad . \tag{2.23}$$

△

如 [KLS24 中的推论 4 所示，1], 注记2.12 使我们能够自然地给出 L_∞-代数的标准定义，例如可参见 [JMRSW19(7a)] 或 [KS22，注记 36]。

定义 2.13。 给定一族分次线性映射

$$\pi_1 := \left\{\pi_1^i := (-1)^{\tilde{i}}\ell^i : \bigwedge^i \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}[2-i]\right\}_{i\geq 1} \quad , \tag{2.24a}$$

$\mathfrak{g}$ 是一个同伦 **李代数**，若 $[\![\pi_1, \pi_1]\!] = 0$，即满足**广义雅可比恒等式**。 d:

$$\forall i \geq 1\,, \qquad \sum_{\tilde{j}+k=i} (-1)^{\tilde{j}} \ell^j(\ell^k \otimes 1_{\tilde{j}})\Sigma_{k,\tilde{j}} = 0 \tag{2.24b}$$

用输入 x_1，……，$x_i \in \mathfrak{g}$ 表示时，可写为

$$\sum_{\tilde{j}+k=i} \sum_{\sigma\in \mathrm{S}_{k,\tilde{j}}} \varepsilon_\sigma (-1)^{\tilde{j}} \ell^j\big(\ell^k(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(k)}), x_{\sigma(k+1)},\dots,x_{\sigma(i)}\big) = 0 \quad . \tag{2.24c}$$

注记 2.14。 让我们考察低元数数据，以及广义雅可比恒等式（2.24b）施加的要求：

1. $\ell^1\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}[1]$ 是 $\mathfrak{g}$ 上的微分，因为 $\ell^1 \circ \ell^1 = 0$。 2. ℓ^2 是一个上链映射，因为 $\ell^1 \circ \ell^2 = \ell^2 \circ \ell^1$。 3. 括号 ℓ^2 满足雅可比恒等式，差一个雅可比子 ℓ^3 的内 Hom 微分：$\bigwedge^3 \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}[-1]$，即 $\ell^2 \circ (\ell^2 \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}) \circ \Sigma_{2,1} = \ell^1 \circ \ell^3 + \ell^3 \circ \ell^1$。

△

例 2.15。 微分分次李代数是一个同伦李代数，其中 $\ell^i = 0$ 对应 $i \geq 3$；而李代数是一个同伦李代数，其中 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0$。 ▽

以刻画结果 [KLS24，推论3。10]为出发点，我们引入以下定义。

定义 2.16. 对于 $n \in \mathbb{Z}$，同伦李代数$\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}, \pi_1)$中的 n-**移位泊松结构**是一个映射族

$$\pi_{\geq 2} := \left\{\pi_w^i : \bigwedge^i \mathfrak{g} \to (\mathrm{Sym}^w_{\pm}\mathfrak{g})[(1-w)n + 2 - i]\right\}_{w\geq 2,\, i\in\mathbb{N}} \tag{2.25}$$

它满足**Maurer-Cartan 方程**

$$[\![\pi, \pi]\!] = 0 \quad , \tag{2.26}$$

其中 $\pi := \pi_1 + \pi_{\geq 2}$。

使用 bullet 乘积公式（2.20），并将 Maurer-Cartan 方程（2.26）展开为权和输入分量，我们必须有： $\forall w \geq 2$ 以及 $\forall i \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{\substack{\tilde{p}+q=w\\ \tilde{j}+k=i}} (-1)^{(\tilde{p}n+j)(\tilde{q}n+\tilde{k})+\tilde{j}\tilde{q}n} \Sigma^{\pm}_{p,\tilde{q}}[\pi_p^j \otimes 1_{\tilde{q}}][1_{\tilde{j}} \otimes \pi_q^k]\Sigma_{\tilde{j},k} = 0 \quad . \tag{2.27}$$

Rema参见 2.17。 本文特别关注 2-移位泊松结构，即 .

$$\left\{\pi_w^i : \bigwedge^i \mathfrak{g} \to (\mathrm{Sym}^w \mathfrak{g})[4-2w-i]\right\}_{w\geq 2, i\in\mathbb{N}} \tag{2.28a}$$

使得： $\forall w \geq 2$ 和 $\forall i \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{\substack{\tilde{p}+q=w \\ \tilde{j}+k=i}} (-1)^{j\tilde{k}} \Sigma^+_{p,\tilde{q}}[\pi_p^j \otimes 1_{\tilde{q}}][1_{\tilde{j}} \otimes \pi_q^k]\Sigma_{\tilde{j},k} = 0 \quad . \tag{2.28b}$$

小节 3.2 将用到权重项 $w \in \{2,3\}$，即:

$$\left\{\pi_2^i : \bigwedge^i \mathfrak{g} \to (\mathrm{Sym}^2 \mathfrak{g})[-i]\right\}_{i\in\mathbb{N}} \quad , \tag{2.29}$$

$$\left\{\pi_3^i : \bigwedge^i \mathfrak{g} \to (\mathrm{Sym}^3 \mathfrak{g})[-2-i]\right\}_{i\in\mathbb{N}}, \tag{2.30}$$

一起 与 Maurer-Cartan 方程的前两个权重关系（2.28b）： $\forall i \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{\tilde{j}+k=i} (-1)^{j\tilde{k}} \left(\Sigma^+_{1,1}[\pi_1^j \otimes 1_{\mathfrak{g}}][1_{\tilde{j}} \otimes \pi_2^k] + \pi_2^j[1_{\tilde{j}} \otimes \pi_1^k]\right) \Sigma_{\tilde{j},k} = 0\,, \tag{2.31}$$

$$\sum_{\tilde{j}+k=i} (-1)^{j\tilde{k}} \left(\Sigma^+_{1,2}[\pi_1^j \otimes 1_{\mathfrak{g}^{\otimes 2}}][1_{\tilde{j}} \otimes \pi_3^k] + \pi_3^j[1_{\tilde{j}} \otimes \pi_1^k] + \Sigma^+_{2,1}[\pi_2^j \otimes 1_{\mathfrak{g}}][1_{\tilde{j}} \otimes \pi_2^k]\right) \Sigma_{\tilde{j},k} = 0\,. \tag{2.32}$$

△

例 2.18。 沿用例 2.15，若 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0$ 是一个普通李代数，那么很容易验证，2-移位泊松结构不过是一个对称张量 $\pi_2^0 : \mathbb{K} \to \mathrm{Sym}^2\mathfrak{g}$ 使得 $\Sigma^+_{1,1}[\pi_1^2 \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}][\mathrm{id}_{\mathfrak{g}} \otimes \pi_2^0] = 0$，即一个对称 ad-不变张量 $\pi_2^0 \in (\mathrm{Sym}^2\mathfrak{g})^{\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}}$。▽

2.3 同伦 2-范畴与无穷小 2-编织

我们记为

$$\mathsf{Ch}^{[-1,0]} \subseteq \mathsf{Ch} \tag{2.33}$$

由上链复形构成的全子范畴 $V \in \mathsf{Ch}$，其对象集中于次数$\{-1,0\}$。我们常将这类对象记为

$$V = \left(V^{-1} \xrightarrow{d} V^0 \right) \in \mathsf{Ch}^{[-1,0]} \quad . \tag{2.34}$$

注意，Ch 上的张量积 $\otimes$ 并不能直接限制到子范畴 $\mathsf{Ch}^{[-1,0]} \subseteq \mathsf{Ch}$，因为对于 $V, W \in \mathsf{Ch}^{[-1,0]}$, $V \otimes W \in \mathsf{Ch}$ 一般集中于次数$\{-2,-1,0\}$。这个问题可以通过将张量积 $\otimes$ 与**良截断函子**$\tau^{[-1,0]} : \mathsf{Ch} \to \mathsf{Ch}^{[-1,0]}$ 复合来解决。回顾一下，该函子在对象 $U \in \mathsf{Ch}$ 上的定义为

$$\tau^{[-1,0]}(U) := \left(\frac{U^{-1}}{B^{-1}(U)} \xrightarrow{d} Z^0(U) \right) \quad . \tag{2.35}$$

注2.2 告诉我们， $\tau^{[-1,0]} : \mathsf{Ch} \to \mathsf{Ch}^{[-1,0]}$ 的态射映射只是一个限制。以下是**截断张量积**这一函子复合:

$$\boxtimes : \mathsf{Ch}^{[-1,0]} \times \mathsf{Ch}^{[-1,0]} \xrightarrow{\subseteq} \mathsf{Ch} \times \mathsf{Ch} \xrightarrow{\otimes} \mathsf{Ch} \xrightarrow{\tau^{[-1,0]}} \mathsf{Ch}^{[-1,0]} \quad , \tag{2.36a}$$

在对象上明确写作 $V, W \in$ 链复形$^{[-1,0]}$ 如下

$$V \boxtimes W := \left(\frac{(V^{-1}\otimes W^0)\oplus(V^0\otimes W^{-1})}{d(V^{-1}\otimes W^{-1})} \xrightarrow{d} V^0 \otimes W^0 \right) \quad . \tag{2.36b}$$

直接可验证，链复形$^{[-1,0]}$ 关于截断张量积 $\boxtimes$、幺半单位 $\mathbb{K}\in$链复形$^{[-1,0]}$ 以及对称编织构成一个对称幺半范畴

$$s_{V,W}:V\boxtimes W\to W\boxtimes V\qquad,\qquad v\otimes w\mapsto w\otimes v\quad, \tag{2.37}$$

其中所有 Koszul 符号都平凡，因为在截断张量积中不存在奇次数与奇次数的组合（2.36）。我们注意到，对称幺半范畴（链复形 $\otimes$，$\mathbb{K}$，s）和（链复形$^{[-1,0]}$，$\boxtimes$，$\mathbb{K}$，s）之间由一个松对称幺半函子联系起来。

引理 2.19。 截断函子 $\tau^{[-1,0]}$：链复形 $\to$ 链复形$^{[-1,0]}$ 具有规范的松对称幺半结构。

证明。 函子 $\tau^{[-1,0]}$严格保持幺半单位，即 $\tau^{[-1,0]}(\mathbb{K})=\mathbb{K}$，而张量积的松结构 $\tau^{[-1,0]}(V)\boxtimes\tau^{[-1,0]}(W)\to\tau^{[-1,0]}(V\otimes W)$ 针对 V，$W\in$链复形，由显然的上链映射给出（竖直绘制）

$$\begin{array}{ccc}\dfrac{\left(\frac{V^{-1}}{d(V^{-2})}\otimes Z^0(W)\right)\oplus\left(Z^0(V)\otimes\frac{W^{-1}}{d(W^{-2})}\right)}{d\left(V^{-1}\otimes W^{-1}\right)} & \xrightarrow{\ d\ } & Z^0(V)\otimes Z^0(W)\\ \downarrow & & \downarrow\\ \dfrac{(V\otimes W)^{-1}}{d\left(V\otimes W\right)^{-2}} & \xrightarrow[\ d\ ]{} & Z^0(V\otimes W)\end{array}\quad. \tag{2.38}$$

□

与小节 2.1 完全类似，存在一个对称严格幺半 2-范畴 $(\mathsf{dgCat}^{[-1,0]},\boxtimes,\mathsf{K},S)$，借此可以定义对称严格幺半 链复形$^{[-1,0]}$-范畴的概念。松弛对称幺半截断函子 $\tau^{[-1,0]}$：链复形 $\to$ 链复形$^{[-1,0]}$ 诱导出一个基变换 2-函子

$$\mathsf{Ho}_2:\mathsf{dgCat}\to\mathsf{dgCat}^{[-1,0]} \tag{2.39}$$

它将一个 dg-范畴 $\mathsf{C}\in\mathsf{dgCat}$（其对象为 C_0，Hom-复形为 $\mathsf{C}[V,W]\in$链复形）映射到其**同伦 2-范畴** $\mathsf{Ho}_2(\mathsf{C})\in\mathsf{dgCat}^{[-1,0]}$。该范畴具有相同的对象 C_0，其 Hom-复形由截断后的上链复形 $\tau^{[-1,0]}(\mathsf{C}[V,W])\in$链复形$^{[-1,0]}$给出。给定一个 dg-函子 $F:\mathsf{C}\to\mathsf{D}$，链复形$^{[-1,0]}$-函子 $\mathsf{Ho}_2(F):\mathsf{Ho}_2(\mathsf{C})\to\mathsf{Ho}_2(\mathsf{D})$ 具有与F相同的对象映射，而其态射映射只是对 F的限制。给定一个 dg-自然变换$\xi:F\Rightarrow G:\mathsf{C}\to\mathsf{D}$，链复形$^{[-1,0]}$-自然变换 $\mathsf{Ho}_2(\xi):\mathsf{Ho}_2(F)\Rightarrow\mathsf{Ho}_2(G)$ 定义为 $\mathsf{Ho}_2(\xi):=\xi$。

赋予同伦 2-范畴的 2-函子（2.39）是一个具有松弛结构的松弛对称幺半函子，该结构 $\mathsf{Ho}_2(\mathsf{C})\boxtimes\mathsf{Ho}_2(\mathsf{D})\to\mathsf{Ho}_2(\mathsf{C}\otimes\mathsf{D}$由引理 2.19中良截断函子的松弛结构诱导而来，对所有 C、$\mathsf{D}\in\mathsf{dgCat}$均成立。为后续使用，我们记录这一结果的直接推论如下。

推论 2.20. 设 $(\mathsf{C}\odot,I,\gamma)$ 为一个对称严格幺半微分分次范畴，则其同伦 2-范畴 $\mathsf{Ho}_2(\mathsf{C})\in\mathsf{dgCat}^{[-1,0]}$ 是一个典范的对称严格幺半链复形范畴。

现在我们回顾 $\mathsf{Ch}^{[-1,0]}$-自然变换的一种重要弱化变体；参见[Kem25'，定义 2。1]，其定义如下。

定义 2.21. 给定 $\mathsf{Ch}^{[-1,0]}$-范畴 $\mathcal{C}$、$\mathcal{C}'$ 以及 $\mathsf{Ch}^{[-1,0]}$-函子 F、$F':\mathcal{C}\to\mathcal{C}'$，一个**伪自然变换** $\xi:F\Rightarrow F':\mathcal{C}\to\mathcal{C}'$ 由以下两部分数据构成：

(i) 对于每个对象 $U\in\mathcal{C}$，一个零次态射 $\xi_U\in\mathcal{C}'[F(U)\ F\prime(U)]^0$。

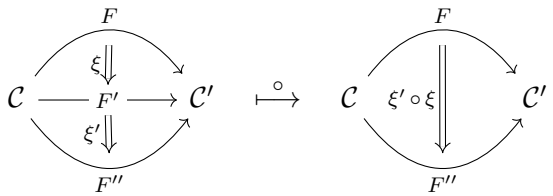
(ii) 对于每对对象 $U,\ U'\in\mathcal{C}$，一个同伦 $\xi_{(\cdot)}\colon \mathcal{C}[U,U\prime]\to\mathcal{C}'\,[F(U)\ F\prime(U\prime)]\,[-1]$。
这两项数据必须满足以下两条公理：对于所有 $f\in\mathcal{C}[U,U']$和 $f'\in\mathcal{C}[U'U'']$，

$$F'(f)\,\xi_U-\xi_{U'}\,F(f)\ =\partial\xi_f+\xi_{\partial f}\qquad,\tag{2.40a}$$
$$\xi_{f'f}\ =\ \xi_{f'}\,F(f)+F'(f')\,\xi_f\quad.\tag{2.40b}$$

请注意，$\mathsf{Ch}^{[-1,0]}$-自然变换只是同伦分量平凡的伪自然变换 $\xi_f\ =\ 0$，例如**恒等伪自然变换** $\mathrm{Id}_F\colon\ F\Rightarrow F$由 $(\mathrm{Id}_F)_U:=1_{F(U)}$和 $(\mathrm{Id}_F)f:=0$定义。

注 2.22. 给定一个 dg-伪自然变换 $\varrho\colon\ F\Rightarrow G\colon \mathsf{C}\ \to\mathsf{D}$，如定义2.9所述，我们得到一个伪自然变换 $\varrho\colon\ F\Rightarrow G:\mathsf{Ho}_2(\mathsf{C})\ \to\mathsf{Ho}_2(\mathsf{D})$。 △

给定两个伪自然变换 $F\overset{\xi}{\Rightarrow}F\prime\overset{\xi'}{\Longrightarrow}F''\colon\mathcal{C}\to\mathcal{C}'$，其**垂直复合**

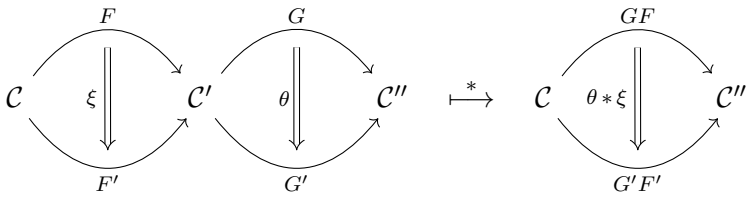


(2.41a)

定义如下：

$$(\xi'\circ\xi)_U\ :=\ \xi'_U\,\xi_U\qquad,\tag{2.41b}$$
$$(\xi'\circ\xi)_f\ :=\ \xi'_f\,\xi_U+\xi'_{U'}\,\xi_f.\tag{2.41c}$$

给定拟自然变换 $F\overset{\xi}{\Rightarrow}F':\mathcal{C}\ \to\mathcal{C}'$ 和 $G\overset{\theta}{\Rightarrow}G':\mathcal{C}'\to\mathcal{C}''$，**水平复合**

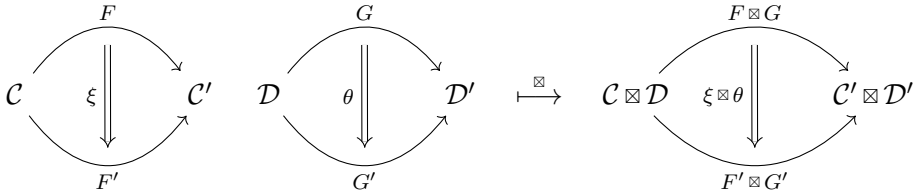


(2.42a)

定义如下：

$$(\theta*\xi)_U\ :=\ \theta_{F'(U)}\,G(\xi_U)\qquad,\tag{2.42b}$$
$$(\theta*\xi)_f\ :=\ \theta_{F'(f)}\,G(\xi_U)+\theta_{F'(U')}\,G(\xi_f).\tag{2.42c}$$

给定拟自然变换 $F\overset{\xi}{\Rightarrow}F':\boldsymbol{D}\ \to\mathcal{D}'$，**幺半复合**



(2.43a)

定义如下：

$$(\xi\boxtimes\theta)_{U,V}\ :=\ \xi_U\boxtimes\theta_V\qquad,\tag{2.43b}$$
$$(\xi\boxtimes\theta)_{f,g}\ :=\ \xi_f\boxtimes G'(g)\theta_V+\xi_{U'}F(f)\boxtimes\theta_g.\tag{2.43c}$$

注意，伪自然性（2.40a）连同截断使我们能够等价地写成

$$(\xi\boxtimes\theta)_{f,g}\ =\ F'(f)\xi_U\boxtimes\theta_g+\xi_f\boxtimes\theta_{V'}G(g)\quad.\tag{2.44}$$

定义 2.23。 给定一个对称严格幺半链复形$^{[-1,0]}$-范畴（$\mathcal{C}$ $\odot$， I， γ），我们称伪自然变换 $t\colon$ $\odot$ $\Rightarrow$ $\odot\colon \mathcal{C}\boxtimes\mathcal{C}$ $\to\mathcal{C}$ 为**无穷小 2-编织**，如果它满足**左无穷小六边形关系**：

$$t_{U,V\odot W} = t_{U,V}\odot 1_W + (1_U\odot\gamma_{W,V})(t_{U,W}\odot 1_V)(1_U\odot\gamma_{V,W}) \quad , \tag{2.45a}$$
$$t_{f,g\odot h} = t_{f,g}\odot h + (1_{U'}\odot\gamma_{W',V'})(t_{f,h}\odot g)(1_U\odot\gamma_{V,W}) \quad , \tag{2.45b}$$

以及**右无穷小六边形关系**：

$$t_{U\odot V,W} = 1_U\odot t_{V,W} + (\gamma_{V,U}\odot 1_W)(1_V\odot t_{U,W})(\gamma_{U,V}\odot 1_W) \quad , \tag{2.46a}$$
$$t_{f\odot g,h} = f\odot t_{g,h} + (\gamma_{V',U'}\odot 1_{W'})(g\odot t_{f,h})(\gamma_{U,V}\odot 1_W) \quad . \tag{2.46b}$$

定义 2.24。 若一个伪自然变换 $t\colon$ $\odot$ $\Rightarrow$ $\odot\colon \mathcal{C}\boxtimes\mathcal{C}$ $\to\mathcal{C}$ 满足与对称编织 γ相交织，则称其为 γ**- 等变**。

$$\gamma_{U,V}\, t_{U,V} = t_{V,U}\,\gamma_{U,V} \quad , \tag{2.47a}$$
$$\gamma_{U',V'}\, t_{f,g} = t_{g,f}\,\gamma_{U,V} \quad . \tag{2.47b}$$

引理 2.25。 若 $t\colon$ $\odot\Rightarrow\odot\colon$ $\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{C}$ $\to\mathcal{C}$ 是 γ-等变的，则 (2.45) $\Longleftrightarrow$ (2.46)。

我们回顾 [CFM15中的定义 17，以及 18], Cirio 和 Faria Martins 的[2] 相干性和全 γ-等变性的重要概念。实际上，我们具体采用了 [Kem25第 5 小节中提供的简化2]。

定义 2.26。 A γ-等变无穷小 2-编织若满足以下条件，则称为**相容**

$$t_{t_{U,V},1_W} + t_{1_U,t_{V,W}} + (1_U\odot\gamma_{W,V})t_{t_{U,W},1_V}(1_U\odot\gamma_{V,W}) = 0 \quad . \tag{2.48}$$

A γ等变无穷小 2-编织若满足以下条件，则称为**完全 γ等变**

$$t_{\gamma_{U,V},1_W} = 0 \quad . \tag{2.49}$$

[2]Not值得注意的是，在他们共同发表的论文中，态射的复合都按从左到右的顺序书写 t.

3 同伦李代数的表示

在本节中，我们固定一个同伦李代数 $\mathfrak{g}$ ，如定义2.13所述。本节旨在说明，存在一个对称幺半 dg-范畴（见定义2.6），其表示范畴记作$\mathsf{Rep}(\mathfrak{g})$；并且，给定备注2.17中所述的 2-移位泊松结构，可以在同伦 2-范畴$\mathsf{Ho}_2[\mathsf{Rep}(\mathfrak{g})]$上构造一个完全 γ等变相容的无穷小 2-编织（见定义2.26）。

小节 3.1 首先定义分次向量空间之间的交织算子，随后给出五种常用的交织算子构造。例如，我们将证明交织算子的并置（3.6）满足结合律且具有单位元，见引理 3.3。命题3.11 定义了微分分次范畴 $\mathsf{Rep}(\mathfrak{g})$，而命题 3.15 构造了与之相容的对称幺半群结构。小节 3.2 给出了表示论版本的构造，该构造对应于 KLS25 中从 2-移位泊松结构构造无穷小 2-编织： [KLS25，第 3 小节2]；本文的主要结果是定理 *3.24*，我们证明这类无穷小 2-编织尤其是相容的。

3.1 交织算子、其复合与幺半积

定义 3.1. 给定分次向量空间 U 和 V 以及整数 $n \in \mathbb{Z}$，一个**交织算子** $f\colon U \rightsquigarrow V[n]$ 是由以下全斜对称分次线性映射构成的族：

$$\left\{f^i : \mathfrak{g}^{\otimes \tilde{i}} \otimes U \to V\left[n-\tilde{i}\right]\right\}_{i\geq 1} \quad . \tag{3.1}$$

为清楚起见，我们强调完全 斜对称性（3.1）是指对所有 变量均成立，例如

$$\begin{aligned} f^i(x_1,x_2,x_3,\dots,x_{\tilde{i}-1},x_{\tilde{i}},u) &= -(-1)^{|x_1||x_2|} f^i(x_2,x_1,x_3,\dots,x_{\tilde{i}-1},x_{\tilde{i}},u) \\ &= -(-1)^{|x_{\tilde{i}}||u|} f^i(x_1,x_2,x_3,\dots,x_{\tilde{i}-1},u,x_{\tilde{i}}) \quad . \end{aligned} \tag{3.2}$$

与注 2.3类似，我们将 $f\colon U \rightsquigarrow V[n]$ 改写为 $f\colon U \rightsquigarrow V[|f|]$；当 $|f|=0$时，我们直接写作 $f\colon U \rightsquigarrow V$。

例 3.2. 定义 2.13 中的同伦李代数是特殊情形 $U=V=\mathfrak{g}$ 且$f=\pi_1:\ \mathfrak{g}\rightsquigarrow\mathfrak{g}[1]$因此 $|\pi_1|=1$，而广义雅可比恒等式要求$[\![\pi_1,\pi_1]\!]=0:\ \mathfrak{g}\rightsquigarrow\mathfrak{g}[2]$。 ▽

现在 列出一些交织算子的构造，它们将贯穿全文并发挥基础作用 t:

(i) 给定一个分次向量空间 U，我们将**恒等缠结算子** 定义为

$$\mathbb{1}_U := \{1_U : U \to U\} : U \rightsquigarrow U \quad . \tag{3.3}$$

(ii) 给定一个分次向量空间 U，对于每个 $i\geq 1$，我们唯一地扩张

$$\ell^{\tilde{i}} \otimes 1_U : \mathfrak{g}^{\otimes \tilde{i}} \otimes U \to (\mathfrak{g}\otimes U)[2-\tilde{i}] \tag{3.4}$$

to b完全反对称，并将所得的交织算子记为 $\ell_U\colon U \rightsquigarrow (\mathfrak{g}\otimes U)[2]$.

(iii) 给定 $f\colon U \rightsquigarrow V[|f|]$，我们将 $\varrho_f\colon \mathfrak{g}\otimes U \rightsquigarrow V[|f|-1]$ 定义为

$$\varrho_f^i := (-1)^i f^{i+1} : \mathfrak{g}^{\otimes i} \otimes U \to V[|f|-i] \quad . \tag{3.5}$$

(iv) 给定 $f\colon\ U \rightsquigarrow V[|f|]$ 与 $g\colon\ V \rightsquigarrow W[|g|]$，我们定义它们的**并置**

$$gf : U \rightsquigarrow W[|g|+|f|] \tag{3.6a}$$

将其分量设为

$$(gf)^i := \sum_{\tilde{j}+k=i} (-1)^{(|g|-\tilde{j})\tilde{k}} g^j[1_{\tilde{j}}\otimes f^k][\Sigma_{\tilde{j},\tilde{k}}\otimes 1_U] : \mathfrak{g}^{\otimes\tilde{i}}\otimes U \to W[|g|+|f|-\tilde{i}] \quad . \tag{3.6b}$$

(v) 给定 $f\colon U \rightsquigarrow U'[|f|]$ 和 $g\colon V \rightsquigarrow V'[|g|]$，我们定义它们的**odot 积**

$$f \odot g : U \otimes V \rightsquigarrow (U' \otimes V')[|f| + |g|] \tag{3.7a}$$

将其分量设为

$$(f \odot g)^i := \sum_{\tilde{j}+k=i} (-1)^{(|f|-\tilde{j})\tilde{k}} [f^j \otimes g^k][1_{\tilde{j}} \otimes s_{\tilde{k},U} \otimes 1_V][\Sigma_{\tilde{j},\tilde{k}} \otimes 1_{U\otimes V}] \quad . \tag{3.7b}$$

引理 3.3。 并置（3.6）关于恒等映射（3.3）是结合且满足单位律的 .

证明。 设给定 $f\colon U \rightsquigarrow V[|f|]$, $g\colon V \rightsquigarrow W[|g|]$ 和 $h\colon W \rightsquigarrow X[|h|]$，则

$$\begin{aligned}
[h(gf)]^i &\overset{(3.6)}{=} \sum_{\tilde{j}+k=i} \sum_{\tilde{l}+m=k} (-1)^{(|h|-\tilde{j})\tilde{k}+(|g|-\tilde{l})\tilde{m}} h^j [1_{\tilde{j}} \otimes g^l (1_{\tilde{l}} \otimes f^m)(\Sigma_{\tilde{l},\tilde{m}} \otimes 1_U)][\Sigma_{\tilde{j},\tilde{k}} \otimes 1_U] \\
&\overset{(2.16)}{=} \sum_{\tilde{j}+\tilde{l}+m=i} (-1)^{(|h|-\tilde{j})(l+m)+(|g|-\tilde{l})\tilde{m}} h^j [1_{\tilde{j}} \otimes g^l (1_{\tilde{l}} \otimes f^m)][\Sigma_{\tilde{j},\tilde{l},\tilde{m}} \otimes 1_U] \\
&\overset{(2.16)}{=} \sum_{\tilde{k}+m=i} \sum_{\tilde{j}+l=k} (-1)^{(|h|+|g|-\tilde{k})\tilde{m}+(|h|-\tilde{j})\tilde{l}} h^j [1_{\tilde{j}} \otimes g^l][\Sigma_{\tilde{j},\tilde{l}} \otimes 1_V][1_{\tilde{k}} \otimes f^m][\Sigma_{\tilde{k},\tilde{m}} \otimes 1_U] \\
&\overset{(3.6)}{=} [(hg)f]^i \quad .
\end{aligned} \tag{3.8}$$

单位律显然成立。 □

引理 3.4。 每个交织算子 $f\colon U \rightsquigarrow V[|f|]$ 都与 ell 映射（3.4）交织，即

$$\ell_V f = (\mathbb{1}_{\mathfrak{g}} \odot f)\ell_U \quad . \tag{3.9}$$

证明。 首先注意到

$$(\mathbb{1}_{\mathfrak{g}} \odot f)^i \overset{(3.7),(3.3)}{=} (1_{\mathfrak{g}} \otimes f^i)(s_{\tilde{i},\mathfrak{g}} \otimes 1_U) \tag{3.10}$$

thus

$$\begin{aligned}
[(\mathbb{1}_{\mathfrak{g}} \odot f)\ell_U]^i &\overset{(3.6)}{=} \sum_{\tilde{j}+k=i} (-1)^{(|f|-\tilde{j})\tilde{k}} [1_{\mathfrak{g}} \otimes f^j][s_{\tilde{j},\mathfrak{g}} \otimes 1_U][1_{\tilde{j}} \otimes \ell^{\tilde{k}} \otimes 1_U][\Sigma_{\tilde{j},\tilde{k}} \otimes 1_U] \\
&\overset{(2.10),(2.17),(2.5)}{=} \sum_{j+\tilde{k}=i} (-1)^{\tilde{j}\tilde{k}} [\ell^{\tilde{k}} \otimes f^j][\Sigma_{\tilde{k},\tilde{j}} \otimes 1_U] \\
&\overset{(3.6)}{=} (\ell_V f)^i \quad .
\end{aligned} \tag{3.11}$$

□

引理 3.5。 给定 $f\colon U \rightsquigarrow V[|f|]$ 和 $g\colon V \rightsquigarrow W[|g|]$，varrho 映射 (3.5) 满足

$$\varrho_{gf} = \varrho_g(\mathbb{1}_{\mathfrak{g}} \odot f) + (-1)^{|g|} g\varrho_f \quad . \tag{3.12}$$

证明。 回顾 3.10 中的分量（ $\mathbb{1}_{\mathfrak{g}} \odot f$，我们有

$$\begin{aligned}
\varrho^i_{gf} &\overset{(3.6)}{=} (-1)^i \sum_{\tilde{j}+\tilde{k}=i} (-1)^{(|g|-\tilde{j})\tilde{k}} g^j [1_{\tilde{j}} \otimes f^k][\Sigma_{\tilde{j},\tilde{k}} \otimes 1_U] \\
&\overset{(2.15)}{=} \sum_{\tilde{j}+\tilde{k}=i} (-1)^{\tilde{j}+(|g|-\tilde{j})\tilde{k}} g^j [1_{\tilde{j}} \otimes f^k][1_{\tilde{j}-1} \otimes s_{\tilde{k},\mathfrak{g}} \otimes 1_U][\Sigma_{\tilde{j}-1,\tilde{k}} \otimes 1_{\mathfrak{g}U}] \\
&\qquad + (-1)^{\tilde{j}+(|g|-j)\tilde{k}} g^j [1_{\tilde{j}} \otimes f^k][\Sigma_{\tilde{j},\tilde{k}-1} \otimes 1_{\mathfrak{g}U}] \\
&\overset{(3.6)}{=} [\varrho_g(\mathbb{1}_{\mathfrak{g}} \odot f) + (-1)^{|g|} g\varrho_f]^i \quad .
\end{aligned} \tag{3.13}$$

□

Co论 3.6。 给定 $f\colon U \rightsquigarrow V[|f|]$, $\rho_U\colon U \rightsquigarrow U[1]$和 $\rho_V\colon V \rightsquigarrow V[1]$, 如果我们定义 e

$$[\![\rho, f]\!] := \rho_V f - (-1)^{|f|} f\rho_U - \varrho_f \ell_U : U \rightsquigarrow V[|f|+1] \tag{3.14}$$

那么映射 $[\![\rho, \cdot\,]\!]$是并置（3.6）的导子，即，若还有 $g\colon V \rightsquigarrow W[|g|]$ 以及$\rho_W\colon W \rightsquigarrow W[1]$,

$$[\![\rho, gf]\!] = [\![\rho, g]\!] f + (-1)^{|g|} g[\![\rho, f]\!] \quad . \tag{3.15}$$

证明。 我们展开（3.15）的右端,

$$\begin{aligned}
[\![\rho, g]\!] f + (-1)^{|g|} g[\![\rho, f]\!] &\overset{(3.14)}{=} (\rho_W g - (-1)^{|g|} g\rho_V - \varrho_g \ell_V) f + (-1)^{|g|} g(\rho_V f - (-1)^{|f|} f\rho_U - \varrho_f \ell_U) \\
&\overset{(3.8),(3.9)}{=} \rho_W gf - (-1)^{|gf|} gf\rho_U - \varrho_g(\mathbb{1}_{\mathfrak{g}} \odot f)\ell_U - (-1)^{|g|} g\varrho_f \ell_U \\
&\overset{(3.12)}{=} \rho_W gf - (-1)^{|gf|} gf\rho_U - \varrho_{gf}\ell_U \\
&\overset{(3.14)}{=} [\![\rho, gf]\!] \quad .
\end{aligned} \tag{3.16}$$

□

定义 3.7。 在推论 3.6的背景下:

(i) 若 $|f| = 0$, 则称交织算子 $f\colon U \rightsquigarrow V$是一个**等变映射**，如果

$$[\![\rho, f]\!] = 0 \quad , \tag{3.17}$$

i.e.

$$f\rho_U + \varrho_f \ell_U = \rho_V f \quad . \tag{3.18}$$

(ii) 若 $\rho_V\colon V \rightsquigarrow V[1]$ 满足以下条件，则称 $V = (V, \rho_V)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的**表示**

$$[\![\rho, \rho_V]\!] = \rho_V \rho_V \quad , \tag{3.19}$$

i.e.

$$\rho_V \rho_V = \varrho_{\rho_V} \ell_V \quad . \tag{3.20}$$

下面的注记表明，定义 3.7 等价于 [All14、定义 2.2 和 3.3]。注记 3.8。 根据定义 3.1，交织算子 $\rho_V\colon V \rightsquigarrow V[1]$ 是由全斜对称分次线性映射构成的族

$$\left\{\rho_V^i : \mathfrak{g}^{\otimes \tilde{i}} \otimes V \to V[2-i]\right\}_{i\geq 1} \tag{3.21a}$$

然而， V是一个表示（3.20），这意味着我们必须有： $\forall i \geq 1$,

$$\sum_{\tilde{j}+k=i} (-1)^{\tilde{j}\tilde{k}} \rho_V^j (1_{\tilde{j}-1} \otimes \pi_1^k \otimes 1_V)(\Sigma_{\tilde{j}-1,k} \otimes 1_V) + (-1)^{j\tilde{k}} \rho_V^j (1_{\tilde{j}} \otimes \rho_V^k)(\Sigma_{\tilde{j},\tilde{k}} \otimes 1_V) = 0 \quad . \tag{3.21b}$$

给定 x_1，……， $x_k \in \mathfrak{g}$，我们可以设 ρ_V^k（x_1，……， x_k）：$= \pi_1^k$（x_1，……， x_k，从而利用（2.15）将（3.21b）改写为

$$\forall i \geq 1\,, \qquad \sum_{\tilde{j}+k=i} (-1)^{j\tilde{k}} \rho_V^j (1_{\tilde{j}} \otimes \rho_V^k)\Sigma_{\tilde{j},k} = 0 \quad . \tag{3.22}$$

事实上，我们还可以进一步将（3.22）简写为 $[\![\rho_V, \rho_V]\!] = 0$ 此时，括号确实是 Schouten-Nijenhuis 括号（2.22）。类似地，对于 $\rho_U \neq f \neq \rho_V$，我们可以定义$f^k$（$x_1$，……， x_k）：$= 0$ 从而，并置（3.6）可以改写为

$$(gf)^i = \sum_{\tilde{j}+k=i} (-1)^{(|g|-\tilde{j})\tilde{k}} g^j [1_{\tilde{j}} \otimes f^k]\Sigma_{\tilde{j},k} \overset{(2.23)}{=} \sum_{\tilde{j}+k=i} g^j \bullet f^k \quad , \tag{3.23}$$

也就是说，实际上我们有 $gf = g \bullet f$。结合这两个思路，我们可以将其改写为

$$\begin{aligned}\llbracket \rho, f \rrbracket^i &\overset{(3.14)}{=} \sum_{\tilde{j}+k=i} (-1)^{j\tilde{k}} \rho_V^j [1_{\tilde{j}} \otimes f^k][\Sigma_{\tilde{j},\tilde{k}} \otimes 1_U] - (-1)^{|f|}(-1)^{(|f|-\tilde{j})\tilde{k}} f^j (1_{\tilde{j}} \otimes \rho_U^k)(\Sigma_{\tilde{j},\tilde{k}} \otimes 1_U) \\ &\qquad - (-1)^{|f|}(-1)^{(|f|-j)\tilde{k}} f^j (1_{\tilde{j}-1} \otimes \pi_1^k \otimes 1_U)(\Sigma_{\tilde{j}-1,k} \otimes 1_U) \qquad (3.24) \\ &\overset{(2.15)}{=} \sum_{\tilde{j}+k=i} (-1)^{j\tilde{k}} \rho_V^j [1_{\tilde{j}} \otimes f^k]\Sigma_{\tilde{j},k} - (-1)^{|f|}(-1)^{(|f|-\tilde{j})\tilde{k}} f^j (1_{\tilde{j}} \otimes \rho_U^k)\Sigma_{\tilde{j},k}\end{aligned}$$

as

$$\llbracket \rho, f \rrbracket \overset{(2.23)}{=} \rho_V \bullet f - (-1)^{|f|} f \bullet \rho_U \qquad (3.25)$$

这里再次说明，括号确实是 Schouten-Nijenhuis 括号（2.22）。最后，我们称

$$f = \left\{ f^i : \mathfrak{g}^{\otimes \tilde{i}} \otimes U \to V[1-i] \right\}_{i \geq 1} : U \rightsquigarrow V \qquad (3.26)$$

是一个等变映射（3.18），如果 $\rho_V \bullet f = f \bullet \rho_U$。 △

例 3.9。 (3.22) 显然表明，任何同伦李代数 $(\mathfrak{g}, \pi_1)$ 都构成自身的一个表示，其作用映射由 $\rho_{\mathfrak{g}}^i = \pi_1^i$给出，即**伴随表示**。 ▽

定义

$$\rho_V^i := (-1)^i \varrho_V^{\tilde{i}} \qquad (3.27)$$

那么，类似于备注 2.14， $\varrho_V^0 : V \to V[1]$ 是 V 上的微分结构，而上链映射 $\varrho_V^1 : \mathfrak{g} \otimes V \to V$ 满足通常的作用性质，但需考虑 **Jacobiactor** ϱ_V^2 的内 Hom 微分： $\mathfrak{g}^{\otimes 2} \otimes V \to V[-1]$。

引理 3.10。 在推论 3.6的背景下，若 $U = (U, \rho_U)$ 和 $V = (V, \rho_V)$ 是定义 3.7中所述的表示，则

$$\llbracket \rho, \llbracket \rho, f \rrbracket \rrbracket = 0 \quad . \qquad (3.28)$$

证明。 我们将用到引理3.3、3.4 和3.5，

$$\begin{aligned}\llbracket \rho, \llbracket \rho, f \rrbracket \rrbracket &\overset{(3.14)}{=} \llbracket \rho, \rho_V f \rrbracket - (-1)^{|f|} \llbracket \rho, f\rho_U \rrbracket - \llbracket \rho, \varrho_f \ell_U \rrbracket \\ &\overset{(3.14)}{=} \rho_V \rho_V f + (-1)^{|f|} \rho_V f \rho_U - \varrho_{\rho_V f} \ell_U - (-1)^{|f|} \rho_V f \rho_U - f \rho_U \rho_U + (-1)^{|f|} \varrho_{f\rho_U} \ell_U \\ &\qquad - \rho_V \varrho_f \ell_U - (-1)^{|f|} \varrho_f \ell_U \rho_U + \varrho_{\varrho_f \ell_U} \ell_U \\ &\overset{(3.12)}{=} \rho_V \rho_V f - \varrho_{\rho_V}(\mathbb{1}_{\mathfrak{g}} \odot f)\ell_U + \rho_V \varrho_f \ell_U - f\rho_U \rho_U + (-1)^{|f|} \varrho_f (\mathbb{1}_{\mathfrak{g}} \odot \rho_U)\ell_U + f \varrho_{\rho_U} \ell_U \\ &\qquad - \rho_V \varrho_f \ell_U - (-1)^{|f|} \varrho_f \ell_U \rho_U + \varrho_{\varrho_f}(\mathbb{1}_{\mathfrak{g}} \odot \ell_U)\ell_U - (-1)^{|f|} \varrho_f \varrho_{\ell_U} \ell_U \\ &\overset{(3.20)}{=} \varrho_{\rho_V} \ell_V f - \varrho_{\rho_V}(\mathbb{1}_{\mathfrak{g}} \odot f)\ell_U + (-1)^{|f|} \varrho_f (\mathbb{1}_{\mathfrak{g}} \odot \rho_U)\ell_U - (-1)^{|f|} \varrho_f \ell_U \rho_U \\ &\qquad + \varrho_{\varrho_f}(\mathbb{1}_{\mathfrak{g}} \odot \ell_U)\ell_U - (-1)^{|f|} \varrho_f \varrho_{\ell_U} \ell_U \\ &\overset{(3.9)}{=} \varrho_{\varrho_f}(\mathbb{1}_{\mathfrak{g}} \odot \ell_U)\ell_U - (-1)^{|f|} \varrho_f \varrho_{\ell_U} \ell_U \qquad (3.29)\end{aligned}$$

不过，我们已经有了 $(\mathbb{1}_{\mathfrak{g}} \odot \ell_U)\ell_U = 0$ 以及 $\varrho_{\ell_U}\ell_U = 0$，因为这些只是广义雅可比恒等式（2.24b）的不同改写方式。 □

命题 3.11。 存在一个微分分次范畴 Rep(𝔤)，满足：

(i) 对象由表示给出 $V = (V, \rho_V)$，如（3.21）所示。

（ii）由交织算子给出的态射，如定义 3.1。

（iii）复合由并置给出（3.6），Hom 微分由（3.14 ）.

(iv) 由恒等交织算子给出的单位元（3.3）。

证明。复合的结合律和单位律已在引理 3.3 中证明，映射 $[\![\rho,\cdot]\!]$已在引理 3.10 中证明满足平方为零条件，而推论 3.6 则表明复合是一个上链映射。最后，恒等交织算子（3.3）显然是（3.18）中的等变映射，因为显然有

$$\varrho_{\mathbb{1}_V}=0 \quad . \tag{3.30}$$

□

引理 3.12。 给定分次向量空间 U 和 V，若定义交织算子

$$\gamma_{U,V}:=\{s_{U,V}:U\otimes V\to V\otimes U\}:U\otimes V\rightsquigarrow V\otimes U \tag{3.31}$$

则以下性质成立：

(i) 这类交织算子构成的族是自然的，即给定 $f\colon U\rightsquigarrow U'[|f|]$ 和 $g\colon V\rightsquigarrow V'[|g|]$，

$$\gamma_{U',V'}(f\odot g)=(-1)^{|f||g|}(g\odot f)\gamma_{U,V} \quad . \tag{3.32}$$

(ii) 每个 $\gamma_{U,V}$ 都是对合的，即

$$\gamma_{V,U}\gamma_{U,V}=\mathbb{1}_{U\otimes V} \quad . \tag{3.33}$$

证明。 (i) 我们有

$$\begin{aligned}
[\gamma_{U',V'}(f\odot g)]^i &\overset{(3.6)}{=} s_{U',V'}(f\odot g)^i\\
&\overset{(3.7)}{=}\sum_{\tilde{j}+k=i}(-1)^{(|f|-\tilde{j})\tilde{k}}s_{U',V'}[f^j\otimes g^k][1_{\tilde{j}}\otimes s_{\tilde{k},U}\otimes 1_V][\Sigma_{\tilde{j},\tilde{k}}\otimes 1_{U\otimes V}]\\
&\overset{(2.10),(2.17)}{=}\sum_{\tilde{j}+k=i}(-1)^{(|f|-\tilde{j})|g|+\tilde{j}\tilde{k}}[g^k\otimes f^j]s_{\tilde{j}U,\tilde{k}V}[1_{\tilde{j}}\otimes s_{\tilde{k},U}\otimes 1_V][s_{\tilde{k},\tilde{j}}\Sigma_{\tilde{k},\tilde{j}}\otimes 1_{U\otimes V}]\\
&\overset{(2.9)}{=}(-1)^{|f||g|}\sum_{\tilde{j}+k=i}(-1)^{(|g|-\tilde{k})\tilde{j}}[g^k\otimes f^j][1_{\tilde{k}}\otimes s_{\tilde{j},V}\otimes 1_U][\Sigma_{\tilde{k},\tilde{j}}\otimes s_{U,V}]\\
&\overset{(3.7)}{=}(-1)^{|f||g|}(g\odot f)^i[1_{\tilde{i}}\otimes s_{U,V}]\\
&\overset{(3.6)}{=}(-1)^{|f||g|}[(g\odot f)\gamma_{U,V}]^i
\end{aligned} \tag{3.34}$$

(ii) 对合性（3.33）显然成立。

□

推论 3.13。 odot 积（3.7）满足以下两个性质：

(i) 中间四项交换律，即给定另有 $f'\colon U'\rightsquigarrow U''[|f'|]$ 和 $g'\colon V'\rightsquigarrow V''[|g'|]$，

$$(f'\odot g')(f\odot g)=(-1)^{|g'||f|}f'f\odot g'g \quad . \tag{3.35}$$

(ii) 结合律，即如果我们还给定 $h:\ W\rightsquigarrow W'[|h|]$，那么有

$$(f\odot g)\odot h=f\odot(g\odot h) \quad . \tag{3.36}$$

证明。 (i) 显然有：

$$(f \odot \mathbb{1}_{V'})(\mathbb{1}_U \odot g) = f \odot g \quad , \tag{3.37a}$$
$$(f' \odot \mathbb{1}_V)(f \odot \mathbb{1}_V) = f'f \odot \mathbb{1}_V . \tag{3.37b}$$

这就得到

$$\begin{aligned}(f' \odot \mathbb{1}_{V'})(f \odot g) &\overset{(3.37a)}{=} (f' \odot \mathbb{1}_{V'})(f \odot \mathbb{1}_{V'})(\mathbb{1}_U \odot g) \\ &\overset{(3.37b)}{=} (f'f \odot \mathbb{1}_{V'})(\mathbb{1}_U \odot g) \\ &\overset{(3.37a)}{=} f'f \odot g \quad .\end{aligned} \tag{3.38}$$

我们利用 γ 的自然性和可逆性，由（3.38）推出关系

$$(\mathbb{1}_{U'} \odot g')(f \odot g) = (-1)^{|g'||f|} f \odot g'g \tag{3.39}$$

现在我们可以说

$$\begin{aligned}(f' \odot g')(f \odot g) &\overset{(3.37a)}{=} (f' \odot \mathbb{1}_{V''})(\mathbb{1}_{U'} \odot g')(f \odot g) \\ &\overset{(3.39)}{=} (-1)^{|g'||f|}(f' \odot \mathbb{1}_{V''})(f \odot g'g) \\ &\overset{(3.38)}{=} (-1)^{|g'||f|} f'f \odot g'g \quad .\end{aligned} \tag{3.40}$$

（ii）显然有：

$$(f \odot \mathbb{1}_V) \odot \mathbb{1}_W = f \odot (\mathbb{1}_V \odot \mathbb{1}_W) \quad , \tag{3.41a}$$
$$(\mathbb{1}_U \odot g) \odot \mathbb{1}_W = \mathbb{1}_U \odot (g \odot \mathbb{1}_W) \quad , \tag{3.41b}$$
$$(\mathbb{1}_U \odot \mathbb{1}_V) \odot h = \mathbb{1}_U \odot (\mathbb{1}_V \odot h) \tag{3.41c}$$

thus

$$\begin{aligned}(f \odot g) \odot h &\overset{(3.35)}{=} ([f \odot \mathbb{1}_{V'}] \odot \mathbb{1}_{W'})([\mathbb{1}_U \odot g] \odot \mathbb{1}_{W'})([\mathbb{1}_U \odot \mathbb{1}_V] \odot h) \\ &\overset{(3.41)}{=} (f \odot [\mathbb{1}_{V'} \odot \mathbb{1}_{W'}])(\mathbb{1}_U \odot [g \odot \mathbb{1}_{W'}])(\mathbb{1}_U \odot [\mathbb{1}_V \odot h]) \\ &\overset{(3.35)}{=} f \odot (g \odot h) \quad .\end{aligned} \tag{3.42}$$

□

推论 3.14。 给定交织算子 $\rho_U \colon U \rightsquigarrow U[1]$ 和 $\rho_V \colon V \rightsquigarrow V[1]$，若设

$$\rho_{U,V} := \rho_U \odot \mathbb{1}_V + \mathbb{1}_U \odot \rho_V : U \otimes V \rightsquigarrow (U \otimes V)[1] \tag{3.43}$$

则有以下事实：

（i）引理 3.12 中的交织算子 $\gamma_{U,\,V}$ 是如（3.18）所示的等变映射。

（ii）推论 3.6 中的映射 $[\![\rho,\cdot]\!]$ 是 odot 积（3.7）的导子，即再给定$\rho_{U'} \colon \ U' \rightsquigarrow U[1]$和 $\rho_{V'} \colon \ V' \rightsquigarrow V[1]$,

$$[\![\rho, f \odot g]\!] = [\![\rho, f]\!] \odot g + (-1)^{|f|} f \odot [\![\rho, g]\!] \quad . \tag{3.44}$$

（iii）如果 ρ_U 和 ρ_V 是（3.19）中的表示，那么（3.43）也是表示。

证明。 (i) 显然

$$\varrho_{\gamma_{U,V}} = 0 \tag{3.45}$$

因此，该断言归结为 $\gamma_{U,\,V}\rho_{U,\,V} = \rho_{V,\,U}\gamma_{U,\,V}$但这由 γ的自然性（3.32）可得。

(ii) 显然有

$$\varrho_{f\odot\mathbb{1}_V} = \varrho_f \odot \mathbb{1}_V \tag{3.46a}$$

and

$$\ell_{U\otimes V} = \ell_U \odot \mathbb{1}_V \tag{3.46b}$$

thus

$$\begin{aligned}
[\![\rho, f\odot\mathbb{1}_V]\!] &\overset{(3.14)}{=} \rho_{U',V}(f\odot\mathbb{1}_V) - (-1)^{|f|}(f\odot\mathbb{1}_V)\rho_{U,V} - \varrho_{f\odot\mathbb{1}_V}\ell_{U\otimes V} \\
&\overset{(3.46)}{=} (\rho_{U'}\odot\mathbb{1}_V + \mathbb{1}_{U'}\odot\rho_V)(f\odot\mathbb{1}_V) - (-1)^{|f|}(f\odot\mathbb{1}_V)(\rho_U\odot\mathbb{1}_V + \mathbb{1}_U\odot\rho_V) \\
&\qquad - (\varrho_f\odot\mathbb{1}_V)(\ell_U\odot\mathbb{1}_V) \\
&\overset{(3.35)}{=} [\![\rho, f]\!]\odot\mathbb{1}_V
\end{aligned} \tag{3.47a}$$

但我们也可以利用以下事实： γ 是一个自然同构，其分量是等变的，从而立即得到

$$[\![\rho, \mathbb{1}_U\odot g]\!] = \mathbb{1}_U\odot[\![\rho, g]\!] \tag{3.47b}$$

因此

$$\begin{aligned}
[\![\rho, f\odot g]\!] &\overset{(3.35)}{=} [\![\rho, (f\odot\mathbb{1}_{V'})(\mathbb{1}_U\odot g)]\!] \\
&\overset{(3.15)}{=} [\![\rho, f\odot\mathbb{1}_{V'}]\!](\mathbb{1}_U\odot g) + (-1)^{|f|}(f\odot\mathbb{1}_{V'})[\![\rho, \mathbb{1}_U\odot g]\!] \\
&\overset{(3.47)}{=} ([\![\rho, f]\!]\odot\mathbb{1}_{V'})(\mathbb{1}_U\odot g) + (-1)^{|f|}(f\odot\mathbb{1}_{V'})(\mathbb{1}_U\odot[\![\rho, g]\!]) \\
&\overset{(3.35)}{=} [\![\rho, f]\!]\odot g + (-1)^{|f|}f\odot[\![\rho, g]\!] \quad .
\end{aligned} \tag{3.48}$$

（iii）我们直接计算

$$\begin{aligned}
[\![\rho, \rho_U\odot\mathbb{1}_V + \mathbb{1}_U\odot\rho_V]\!] &\overset{(3.44)}{=} [\![\rho, \rho_U]\!]\odot\mathbb{1}_V + \mathbb{1}_U\odot[\![\rho, \rho_V]\!] \\
&\overset{(3.19)}{=} \rho_U\rho_U\odot\mathbb{1}_V + \mathbb{1}_U\odot\rho_V\rho_V \\
&\overset{(3.35)}{=} (\rho_U\odot\mathbb{1}_V + \mathbb{1}_U\odot\rho_V)(\rho_U\odot\mathbb{1}_V + \mathbb{1}_U\odot\rho_V) \quad .
\end{aligned} \tag{3.49}$$

□

命题 3.15。 微分分次范畴Rep($\mathfrak{g}$)（命题 3.11 ）是定义2.6中的对称严格幺半 dg-范畴：

(i) 给定表示 $U = (U,\ \rho_U)$ 和 $V = (V,\ \rho_V)$，它们的幺半积 $U\odot V$由张量积 $U\otimes V$ 给出，其表示结构由（3.43）给出。

(ii) 交织算子的幺半积由 odot 积（3.7）给出。

(iii) 幺半单位是赋有平凡表示 $\rho_{\mathbb{K}} =$ 的基域 $\mathbb{K}$ 0.

(iv) 对称编织 $\gamma : \odot \Rightarrow \odot^{\mathrm{op}}$ 由（3.31）直接给出。

证明。 我们逆向推理：

(iv) 引理 3.12 证明了交织算子 $\gamma_{U,\,V}$ 的自然性与对合性，而推论 3.14 的第 (i) 项证明了 $\gamma_{U,\,V}$ 是关于 $(\rho_{U,\,V})$ 中 3.43所选取对象的等变映射。此外，显然六边形公理成立，即

$$\gamma_{U\odot V,W}=(\gamma_{U,W}\odot\mathbb{1}_V)(\mathbb{1}_U\odot\gamma_{V,W})\quad . \tag{3.50}$$

(iii) 显然有 $f\odot\mathbb{1}_{\Bbbk}=f=\mathbb{1}_{\Bbbk}\odot f$因此 $\rho_{U,\,\Bbbk}=\rho_U=\rho_{\Bbbk,\,U}$从而 $U\odot\Bbbk=U=\Bbbk\odot U$。

(ii) 推论 3.13 的条目 (i) 表明，odot 积满足中四交换律，但我们显然还有单位元保持性 $\mathbb{1}_U\odot\mathbb{1}_V=\mathbb{1}_{U\odot V}$。推论 3.13 的条目 (ii) 表明，odot 积是结合的，因此有 $\rho_{U\odot V,\,W}=\rho_{U,\,V\odot W}$从而 $(U\odot V)\odot W=U\odot(V\odot W)$。推论 3.14 的条目 (ii) 表明，odot 积是 Hom-复形之间的上链映射。

(i) 最后，推论3.14 的条目 (iii) 表明，$\rho_{U,\,V}$ 是一个表示。

□

3.2 中 由 2-移位泊松结构得到的无穷小 2-编织 S

在本小节中，我们始终使用例3.9中的伴随表示，记作 $\mathfrak{g}$。所谓 $L_{\mathfrak{g}}\colon\ \mathsf{Rep}(\mathfrak{g})\to\mathsf{Rep}(\mathfrak{g})$，指的是以下微分分次函子：

$$L_{\mathfrak{g}}(U):=\mathfrak{g}\odot U\quad , \tag{3.51a}$$
$$L_{\mathfrak{g}}(f):=\mathbb{1}_{\mathfrak{g}}\odot f\quad . \tag{3.51b}$$

我们希望定义一个 dg-伪自然变换 $\varrho\colon\ L_{\mathfrak{g}}\Rightarrow\mathrm{id}^{\mathsf{Rep}(\mathfrak{g})}\colon\ \mathsf{Rep}(\mathfrak{g})\to\mathsf{Rep}(\mathfrak{g})$，如定义2.9所述；事实上，引理3.5已经证明了（2.13）成立。

引理3.16。对于每个表示 U，我们都可以定义一个等变映射 $\varrho_U\colon\ \mathfrak{g}\odot U\rightsquigarrow U$如下

$$\left\{\varrho_U^i\overset{(3.27)}{=}(-1)^{\tilde{i}}\rho_U^{i+1}:\mathfrak{g}^{\otimes\tilde{i}}\otimes\mathfrak{g}\otimes U\to U\big[-\tilde{i}\big]\right\}_{i\geq 1} \tag{3.52}$$

并且，给定另一个表示 V以及一个交织算子 $f\colon\ U\rightsquigarrow V[|f|]$，我们有

$$f\varrho_U-\varrho_V(\mathbb{1}_{\mathfrak{g}}\odot f)=[\![\rho,\varrho_f]\!]+\varrho_{[\![\rho,f]\!]}\quad . \tag{3.53}$$

证明。 我们首先证明伪自然性关系（3.53）成立，

$$\begin{aligned}[\![\rho,\varrho_f]\!]+\varrho_{[\![\rho,f]\!]}&\overset{(3.14)}{=}\rho_V\varrho_f+(-1)^{|f|}\varrho_f\rho_{\mathfrak{g},U}-\varrho_{\varrho_f}\ell_{\mathfrak{g}\otimes U}+\varrho_{\rho_V f-(-1)^{|f|}f\rho_U-\varrho_f\ell_U}\\&\overset{(3.43),(3.46b),(3.12)}{=}\rho_V\varrho_f+(-1)^{|f|}\varrho_f(\rho_{\mathfrak{g}}\odot\mathbb{1}_U+\mathbb{1}_{\mathfrak{g}}\odot\rho_U)-\varrho_{\varrho_f}(\ell_{\mathfrak{g}}\odot\mathbb{1}_U)+\varrho_{\rho_V}(\mathbb{1}_{\mathfrak{g}}\odot f)\\&\quad-\rho_V\varrho_f-(-1)^{|f|}\varrho_f(\mathbb{1}_{\mathfrak{g}}\odot\rho_U)-f\varrho_{\rho_U}-\varrho_{\varrho_f}(\mathbb{1}_{\mathfrak{g}}\odot\ell_U)+(-1)^{|f|}\varrho_f\varrho_{\ell_U}\end{aligned} \tag{3.54}$$

不过，验证这一点直接而显然。

$$\varrho_f(\rho_{\mathfrak{g}}\odot\mathbb{1}_U+\varrho_{\ell_U})=0=\varrho_{\varrho_f}(\ell_{\mathfrak{g}}\odot\mathbb{1}_U+\mathbb{1}_{\mathfrak{g}}\odot\ell_U)\quad , \tag{3.55}$$

于是我们得到

$$[\![\rho,\varrho_f]\!]+\varrho_{[\![\rho,f]\!]}=\varrho_{\rho_V}(\mathbb{1}_{\mathfrak{g}}\odot f)-f\varrho_{\rho_U} \tag{3.56}$$

但显然我们有

$$\varrho_U=-\varrho_{\rho_U}\quad . \tag{3.57}$$

现在我们证明，分量（3.52）构成一个等变映射，

$$[\![\rho,\varrho_U]\!]\overset{(3.57)}{=}-[\![\rho,\varrho_{\rho_U}]\!]\overset{(3.56),(3.19)}{=}\varrho_{\rho_U\rho_U}-\varrho_{\rho_U}(\mathbb{1}_{\mathfrak{g}}\odot\rho_U)+\rho_U\varrho_{\rho_U}\overset{(3.12)}{=}0\,. \tag{3.58}$$

□

引理 3.17。给定交织算子 $f\colon V \rightsquigarrow V'[|f|]$ 和交织算子 $g\colon V \rightsquigarrow V'[|g|]$，我们有

$$\begin{aligned}\varrho_{f\odot g} &= \varrho_f \odot g + (-1)^{|f|}(f \odot \varrho_g)(\gamma_{\mathfrak{g},U} \odot \mathbb{1}_V) \\ &= \varrho_f \odot g + (-1)^{|f||g|}\gamma_{V',U'}(\varrho_g \odot f)(\mathbb{1}_{\mathfrak{g}} \odot \gamma_{U,V}) \quad .\end{aligned} \tag{3.59}$$

证明。 首先，我们注意到

$$\varrho_{\mathbb{1}_U\odot g} \overset{(3.32)}{=} \varrho_{\gamma_{V',U}(g\odot\mathbb{1}_U)\gamma_{U,V}} \overset{(3.12)}{=} \gamma_{V',U}\varrho_{g\odot\mathbb{1}_U}(\mathbb{1}_{\mathfrak{g}}\odot\gamma_{U,V}) \overset{(3.46a)}{=} \gamma_{V',U}(\varrho_g\odot\mathbb{1}_U)(\mathbb{1}_{\mathfrak{g}}\odot\gamma_{U,V}) \tag{3.60}$$

因此

$$\begin{aligned}\varrho_{f\odot g} &\overset{(3.35)}{=} \varrho_{(f\odot\mathbb{1}_{V'})(\mathbb{1}_U\odot g)} \\ &\overset{(3.12)}{=} \varrho_{f\odot\mathbb{1}_{V'}}(\mathbb{1}_{\mathfrak{g}}\odot[\mathbb{1}_U\odot g]) + (-1)^{|f|}(f\odot\mathbb{1}_{V'})\varrho_{\mathbb{1}_U\odot g} \\ &\overset{(3.46a),(3.60)}{=} (\varrho_f\odot\mathbb{1}_{V'})(\mathbb{1}_{\mathfrak{g}}\odot[\mathbb{1}_U\odot g]) + (-1)^{|f|}(f\odot\mathbb{1}_{V'})\gamma_{V',U}(\varrho_g\odot\mathbb{1}_U)(\mathbb{1}_{\mathfrak{g}}\odot\gamma_{U,V}) \\ &\overset{(3.36),(3.32)}{=} \varrho_f\odot g + (-1)^{|f|}(f\odot\varrho_g)(\gamma_{\mathfrak{g},U}\odot\mathbb{1}_V)\end{aligned}$$

而（3.59）中的第二个等式是利用以下事实得到的： γ 是对称编织。 □

推论 3.18。 给定表示 U 和 V，我们有

$$\varrho_{U\odot V} = \varrho_U\odot\mathbb{1}_V + \gamma_{V,U}(\varrho_V\odot\mathbb{1}_U)(\mathbb{1}_{\mathfrak{g}}\odot\gamma_{U,V}) \quad . \tag{3.61}$$

证明。 我们计算

$$\varrho_{U\odot V} \overset{(3.57),(3.43)}{=} -\varrho_{\rho_U\odot\mathbb{1}_V+\mathbb{1}_U\odot\rho_V} \overset{(3.59),(3.57)}{=} \varrho_U\odot\mathbb{1}_V + \gamma_{V,U}(\varrho_V\odot\mathbb{1}_U)(\mathbb{1}_{\mathfrak{g}}\odot\gamma_{U,V})\,. \tag{3.62}$$

□

我们同样可以定义一个由 $\mathfrak{g}$ 右乘的微分分次函子 $R_{\mathfrak{g}}\colon \mathsf{Rep}(\mathfrak{g}) \to \mathsf{Rep}(\mathfrak{g})$，并定义一个 dg-伪自然变换 $\lambda\colon R_{\mathfrak{g}} \Rightarrow \mathsf{id}_{\mathsf{Rep}(\mathfrak{g})}\colon \mathsf{Rep}(\mathfrak{g}) \to \mathsf{Rep}(\mathfrak{g})$ 如下：对于每个表示 U，我们定义一个等变映射

$$\lambda_U := \varrho_U\gamma_{U,\mathfrak{g}} : U\odot\mathfrak{g} \rightsquigarrow U \tag{3.63a}$$

并且对于每个交织算子 $f\colon U \rightsquigarrow U'[|f|]$，我们令

$$\lambda_f := \varrho_f\gamma_{U,\mathfrak{g}} : U\odot\mathfrak{g} \rightsquigarrow U'[|f|-1] \quad . \tag{3.63b}$$

不难证明，这些数据满足与 ϱ 类似的关系，但我们只会用到以下两条：

$$\lambda_{gf} = \lambda_g(f\odot\mathbb{1}_{\mathfrak{g}}) + (-1)^{|g|}g\lambda_f \quad , \tag{3.64}$$

$$\lambda_{f\odot g} = (\lambda_f\odot g)(\mathbb{1}_U\odot\gamma_{V,\mathfrak{g}}) + (-1)^{|f|}f\odot\lambda_g. \tag{3.65}$$

我们还将在证明无穷小 2-编织是相容的过程中使用以下引理及其推论。

引理 3.19. 对于每个表示 U，

$$\varrho_{\varrho_U} + \varrho_{\varrho_U}(\gamma_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}}\odot\mathbb{1}_U) = 0 \quad . \tag{3.66}$$

证明。 只需回顾结构映射 ρ^i_U 如定义3.1中所述是完全斜对称的。

□

推论 3.20。 对于每个表示 U，

$$\varrho_{\lambda_U} + \lambda_{\varrho_U} = 0 \quad , \tag{3.67a}$$
$$\lambda_{\lambda_U} + \lambda_{\lambda_U}(\mathbb{1}_U \odot \gamma_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}}) = 0 \quad . \tag{3.67b}$$

证明。 只需结合 λ 在（3.63）中的定义，以及 ϱ 是一个导子（3.12）且如（ γ 所述将其湮灭3.45）。 □

现在，我们将迄今为止构建的形式体系付诸实践，把注记 2.17中的 2-移位泊松结构引入讨论。

引理 3.21。 给定一个 2-移位泊松结构（2.28），考虑权2项（2.29）并令

$$\left\{\varpi_2^i := (-1)^i \pi_2^{\tilde{i}} : \textstyle\bigwedge^{\tilde{i}} \mathfrak{g} \to (\mathrm{Sym}^2 \mathfrak{g})[-\tilde{i}]\right\}_{i\in\mathbb{N}} \quad , \tag{3.68}$$

这定 义了一个等变映射 $\varpi_2 :\ \mathbb{K} \rightsquigarrow \mathrm{Sym}^2\mathfrak{g}$。考虑权3项（2.30）并且 et

$$\left\{\varpi_3^i := (-1)^i \pi_3^{\tilde{i}} : \textstyle\bigwedge^{\tilde{i}} \mathfrak{g} \to (\mathrm{Sym}^3 \mathfrak{g})[-2-\tilde{i}]\right\}_{i\in\mathbb{N}} \quad , \tag{3.69}$$

这定义了一个交织算子 $\varpi_3 :\ \mathbb{K} \rightsquigarrow (\mathrm{Sym}^3\mathfrak{g})[-2]$，使得

$$[\![\rho, \varpi_3]\!] = \Sigma_{2,1}^+(\varrho_{\varpi_2} \odot \mathbb{1}_{\mathfrak{g}})\varpi_2 \quad , \tag{3.70}$$

其中 $\Sigma_{2,\ 1}^+ := \{\Sigma_{2,\ 1}^+ :\ (\mathrm{Sym}^2\mathfrak{g}) \otimes \mathfrak{g} \to \mathrm{Sym}^3\mathfrak{g}\} :\ (\mathrm{Sym}^2\mathfrak{g}) \odot \mathfrak{g} \rightsquigarrow \mathrm{Sym}^3\mathfrak{g}$ 是一个等变映射。证明。 首先，我们证明（3.68）按照定义3.7定义了一个等变映射；我们有

$$\begin{aligned}
[\![\rho, \varpi_2]\!]^{i+1} &\overset{(3.24)}{=} \sum_{\tilde{j}+k+1=i+1} (-1)^{jk} \rho^j_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}}[1_{\tilde{j}} \otimes \varpi_2^{k+1}]\Sigma_{\tilde{j},k} - \sum_{j+k=i+1} (-1)^{\tilde{j}\tilde{k}} \varpi_2^{j+1}(1_{\tilde{j}} \otimes \pi_1^k)\Sigma_{\tilde{j},k} \\
&\overset{(3.68)}{=} (-1)^i \sum_{\tilde{j}+k=i} (-1)^{j\tilde{k}} \left([\pi_1^j \otimes 1_{\mathfrak{g}} + (1_{\mathfrak{g}} \otimes \pi_1^j)(s_{\tilde{j},\mathfrak{g}} \otimes 1_{\mathfrak{g}})][1_{\tilde{j}} \otimes \pi_2^k] + \pi_2^j[1_{\tilde{j}} \otimes \pi_1^k]\right)\Sigma_{\tilde{j},k} \\
&\overset{(2.31)}{=} 0 \quad .
\end{aligned} \tag{3.71}$$

我们先简要指出，利用（3.24），显然 $\Sigma_{2,\ 1}^+$ 实际上是一个等变映射；现在我们证明关系（3.70）成立，

$$\begin{aligned}
[\Sigma_{2,1}^+(\varrho_{\varpi_2} \odot \mathbb{1}_{\mathfrak{g}})\varpi_2]^i &\overset{(3.5)}{=} \sum_{\tilde{j}+\tilde{k}=i} (-1)^{\tilde{j}k} \Sigma_{2,1}^+[\varpi_2^j \otimes 1_{\mathfrak{g}}][1_{\tilde{j}-1} \otimes \varpi_2^k]\Sigma_{\tilde{j}-1,\tilde{k}} \\
&\overset{(2.30)}{=} (-1)^{\tilde{i}} \sum_{\tilde{j}+k=i} (-1)^{\tilde{j}k} (\Sigma_{1,2}^+[\pi_1^j \otimes 1_{\mathfrak{g}^{\otimes 2}}][1_{\tilde{j}} \otimes \varpi_3^k]\Sigma_{\tilde{j},\tilde{k}} - \varpi_3^j[1_{\tilde{j}-1} \otimes \pi_1^k]\Sigma_{\tilde{j}-1,\tilde{k}}) \\
&\overset{(3.24)}{=} [\rho, \varpi_3]^i \quad .
\end{aligned} \tag{3.72}$$

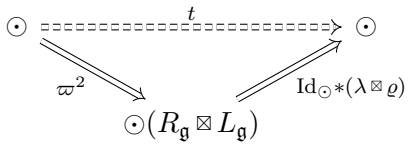
□

推论 3.22。 给定表示 U 和 V，若令

$$\varpi^2_{U,V} := \mathbb{1}_U \odot \varpi_2 \odot \mathbb{1}_V : U \odot V \rightsquigarrow U \odot \mathfrak{g} \odot \mathfrak{g} \odot V \tag{3.73}$$

于是，这定义了一个 dg-自然变换 $\varpi^2 :\ \odot \Rightarrow \odot(R_{\mathfrak{g}} \otimes L_{\mathfrak{g}})$。

构造 3.23. 记 $\mathcal{C} := \mathrm{Ho}_2[\mathrm{Rep}(\mathfrak{g})]$, , 我们将 $t\colon \odot \Rightarrow \odot : \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 定义为如下垂直复合,



, (3.74)

也就是说，我们定义

$$t := (\mathrm{Id}_\odot * [\lambda \boxtimes \varrho]) \circ \varpi^2 \quad . \tag{3.75}$$

给定表示 U 和 V，我们使用 (2.41b)、(2.42b) 和 (2.43b) 推导出

$$t_{U,V} := (\lambda_U \odot \varrho_V)(\mathbb{1}_U \odot \varpi_2 \odot \mathbb{1}_V) : U \odot V \rightsquigarrow U \odot V \quad . \tag{3.76}$$

给定等变映射 $f\colon U \rightsquigarrow U'$ 和 $g\colon V \rightsquigarrow V'$，我们使用 (2.41c)、(2.42c) 和 (2.43c) 推导出

$$t_{f,g} := (\lambda_f \odot g\varrho_V + \lambda_{U'}[f \odot \mathbb{1}_\mathfrak{g}] \odot \varrho_g)\,(\mathbb{1}_U \odot \varpi_2 \odot \mathbb{1}_V) : U \odot V \rightsquigarrow U' \odot V'[-1] \quad . \tag{3.77}$$

▷

定理 3.24。 构造 $t : \odot \Rightarrow \odot$ 中给出的伪自然变换 3.23 定义了一个完全 γ-等变的相干无穷小 2-编织，如定义2.26所述。

证明。 我们先证明 γ-等变性，如定义 2.24所述；注意到

$$\gamma_{U,V}(\lambda_U \odot \varrho_V) \overset{(3.63a)}{=} \gamma_{U,V}(\varrho_U \odot \lambda_V)(\gamma_{U,\mathfrak{g}} \odot \gamma_{\mathfrak{g},V}) \overset{(3.32)}{=} (\lambda_V \odot \varrho_U)\gamma_{\mathfrak{g}U,V\mathfrak{g}}(\gamma_{U,\mathfrak{g}} \odot \gamma_{\mathfrak{g},V}) \tag{3.78a}$$

and

$$(\mathbb{1}_U \odot \varpi_2 \odot \mathbb{1}_V)\gamma_{V,U} = \gamma_{\mathfrak{g}\mathfrak{g}V,U}(\varpi_2 \odot \mathbb{1}_{UV}) = \gamma_{\mathfrak{g}\mathfrak{g}V,U}(\gamma_{V,\mathfrak{g}\mathfrak{g}} \odot \mathbb{1}_U)(\mathbb{1}_V \odot \varpi_2 \odot \mathbb{1}_U) \tag{3.78b}$$

thus

$$\gamma_{U,V}t_{U,V}\gamma_{V,U} \overset{(3.78)}{=} (\lambda_V \odot \varrho_U)(\mathbb{1}_V \odot \gamma_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}} \odot \mathbb{1}_U)(\mathbb{1}_V \odot \varpi_2 \odot \mathbb{1}_U) = t_{V,U} \quad . \tag{3.79}$$

为证明第二个关系式 (2.47b)，我们只需注意到

$$[\mathrm{Id}_\odot * (\lambda \boxtimes \varrho)]_{f,g} \overset{(2.44)}{=} f\lambda_U \odot \varrho_g + \lambda_f \odot \varrho_{V'}[\mathbb{1}_\mathfrak{g} \odot g] = (f\varrho_U \odot \lambda_g + \varrho_f \odot \lambda_{V'}[g \odot \mathbb{1}_\mathfrak{g}])(\gamma_{U,\mathfrak{g}} \odot \gamma_{\mathfrak{g},V})\,. \tag{3.80}$$

现在我们来证明左无穷小六边形关系 (2.45) 成立；我们有

$$\begin{aligned} t_{U,V\odot W} &\overset{(3.61)}{=} (\lambda_U \odot \varrho_V \odot \mathbb{1}_W + \lambda_U \odot \gamma_{W,V}[\varrho_W \odot \mathbb{1}_V][\mathbb{1}_\mathfrak{g} \odot \gamma_{V,W}])(\mathbb{1}_U \odot \varpi_2 \odot \mathbb{1}_{V\odot W}) \\ &\overset{(2.10)}{=} [\lambda_U \odot \varrho_V][\mathbb{1}_U \odot \varpi_2 \odot \mathbb{1}_V] \odot \mathbb{1}_W \\ &\quad + [\mathbb{1}_U \odot \gamma_{W,V}][(\lambda_U \odot \varrho_W)(\mathbb{1}_U \odot \varpi_2 \odot \mathbb{1}_W) \odot \mathbb{1}_V][\mathbb{1}_U \odot \gamma_{V,W}] \end{aligned} \tag{3.81}$$

and

$$\begin{aligned} t_{f,g\odot h} &\overset{(3.59)}{=} \Big(\lambda_f \odot (g \odot h)(\varrho_V \odot \mathbb{1}_W + \gamma_{W,V}[\varrho_W \odot \mathbb{1}_V][\mathbb{1}_\mathfrak{g} \odot \gamma_{V,W}]) \\ &\quad + \lambda_{U'}(f \odot \mathbb{1}_\mathfrak{g}) \odot (\varrho_g \odot h + \gamma_{W',V'}[\varrho_h \odot g][\mathbb{1}_\mathfrak{g} \odot \gamma_{V,W}])\Big)(\mathbb{1}_U \odot \varpi_2 \odot \mathbb{1}_{VW}) \\ &\overset{(2.10)}{=} (\lambda_f \odot g\varrho_V + \lambda_{U'}[f \odot \mathbb{1}_\mathfrak{g}] \odot \varrho_g)(\mathbb{1}_U \odot \varpi_2 \odot \mathbb{1}_V) \odot h \\ &\quad + (\mathbb{1}_{U'} \odot \gamma_{W',V'})\Big((\lambda_f \odot h\varrho_W + \lambda_{U'}[f \odot \mathbb{1}_\mathfrak{g}] \odot \varrho_h)(\mathbb{1}_U \odot \varpi_2 \odot \mathbb{1}_W) \odot g\Big)(\mathbb{1}_U \odot \gamma_{V,W})\,. \end{aligned} \tag{3.82}$$

利用 (3.30) 和 (3.45)，我们有 $t_{\gamma_{U,\ V,\ \mathbb{1}_W}} = 0$ 因此，无穷小 2-编织确实是全γ-等变的。现在我们证明 t 是相容的，我们有

$$t_{t_{U,V},\mathbb{1}_W} \overset{(3.30)}{=} (\lambda_{t_{U,V}} \odot \varrho_W)(\mathbb{1}_{UV} \odot \varpi_2 \odot \mathbb{1}_W) \tag{3.83}$$

并且我们可以将$\lambda_{t_{U,V}}$展开如下

$$\begin{aligned}\lambda_{t_{U,V}} &\overset{(3.64)}{=} \lambda_{\lambda_U \odot \varrho_V}(\mathbb{1}_U \odot \varpi_2 \odot \mathbb{1}_{V\mathfrak{g}}) + (\lambda_U \odot \varrho_V)\lambda_{\mathbb{1}_U \odot \varpi_2 \odot \mathbb{1}_V} \\ &\overset{(3.65)}{=} ([\lambda_{\lambda_U} \odot \varrho_V][\mathbb{1}_{U\mathfrak{g}} \odot \gamma_{\mathfrak{g}V,\mathfrak{g}}] + \lambda_U \odot \lambda_{\varrho_V})(\mathbb{1}_U \odot \varpi_2 \odot \mathbb{1}_{V\mathfrak{g}}) \\ &\quad + (\lambda_U \odot \varrho_V)(\mathbb{1}_U \odot [\lambda_{\varpi_2} \odot \mathbb{1}_V]\gamma_{V,\mathfrak{g}})\end{aligned} \tag{3.84}$$

但我们显然有 $\lambda_{\varpi_2} = \varrho_{\varpi_2}$，因此

$$\begin{aligned}t_{t_{U,V},\mathbb{1}_W} =& (\lambda_U \odot \lambda_{\varrho_V} \odot \varrho_W + [\lambda_{\lambda_U} \odot \varrho_V][\mathbb{1}_{U\mathfrak{g}} \odot \gamma_{\mathfrak{g}V,\mathfrak{g}}] \odot \varrho_W)(\mathbb{1}_U \odot \varpi_2 \odot \mathbb{1}_V \odot \varpi_2 \odot \mathbb{1}_W) \\ &+ (\lambda_U \odot \varrho_V \odot \varrho_W)(\mathbb{1}_U \odot \gamma_{V,\mathfrak{g}\mathfrak{g}} \odot \mathbb{1}_{\mathfrak{g}W})(\mathbb{1}_{UV} \odot [\varrho_{\varpi_2} \odot \mathbb{1}_{\mathfrak{g}}]\varpi_2 \odot \mathbb{1}_W) \quad .\end{aligned} \tag{3.85}$$

同样地，

$$t_{\mathbb{1}_U,t_{V,W}} \overset{(3.30)}{=} (\lambda_U \odot \varrho_{t_{V,W}})(\mathbb{1}_U \odot \varpi_2 \odot \mathbb{1}_{VW}) \tag{3.86}$$

and

$$\begin{aligned}\varrho_{t_{V,W}} &\overset{(3.12)}{=} \varrho_{\lambda_V \odot \varrho_W}(\mathbb{1}_{\mathfrak{g}V} \odot \varpi_2 \odot \mathbb{1}_W) + (\lambda_V \odot \varrho_W)\varrho_{\mathbb{1}_V \odot \varpi_2 \odot \mathbb{1}_W} \\ &\overset{(3.59)}{=} (\varrho_{\lambda_V} \odot \varrho_W + [\lambda_V \odot \varrho_{\varrho_W}][\gamma_{\mathfrak{g},V\mathfrak{g}} \odot \mathbb{1}_{\mathfrak{g}W}])(\mathbb{1}_{\mathfrak{g}V} \odot \varpi_2 \odot \mathbb{1}_W) \\ &\quad + (\lambda_V \odot \varrho_W)([\mathbb{1}_V \odot \varrho_{\varpi_2}]\gamma_{\mathfrak{g},V} \odot \mathbb{1}_W)\end{aligned} \tag{3.87}$$

so

$$\begin{aligned}t_{\mathbb{1}_U,t_{V,W}} =& (\lambda_U \odot \varrho_{\lambda_V} \odot \varrho_W + \lambda_U \odot [\lambda_V \odot \varrho_{\varrho_W}][\gamma_{\mathfrak{g},V\mathfrak{g}} \odot \mathbb{1}_{\mathfrak{g}W}])(\mathbb{1}_U \odot \varpi_2 \odot \mathbb{1}_V \odot \varpi_2 \odot \mathbb{1}_W) \\ &+ (\lambda_U \odot \lambda_V \odot \varrho_W)(\mathbb{1}_{U\mathfrak{g}} \odot \gamma_{\mathfrak{g}\mathfrak{g},V} \odot \mathbb{1}_W)(\mathbb{1}_U \odot [\mathbb{1}_{\mathfrak{g}} \odot \varrho_{\varpi_2}]\varpi_2 \odot \mathbb{1}_{VW}) \quad .\end{aligned} \tag{3.88}$$

为了稍后使用（3.70），我们将（3.88）的最后一项改写为

$$\begin{aligned}&(\lambda_U \odot \varrho_V \odot \varrho_W)(\mathbb{1}_{U\mathfrak{g}} \odot [\gamma_{V,\mathfrak{g}} \odot \mathbb{1}_{\mathfrak{g}}]\gamma_{\mathfrak{g}\mathfrak{g},V} \odot \mathbb{1}_W)(\mathbb{1}_U \odot \gamma_{V,\mathfrak{g}\mathfrak{g}\mathfrak{g}} \odot \mathbb{1}_W)(\mathbb{1}_{UV} \odot [\mathbb{1}_{\mathfrak{g}} \odot \varrho_{\varpi_2}]\varpi_2 \odot \mathbb{1}_W) \\ &= (\lambda_U \odot \varrho_V \odot \varrho_W)(\mathbb{1}_U \odot \gamma_{V,\mathfrak{g}\mathfrak{g}} \odot \mathbb{1}_{\mathfrak{g}W})(\mathbb{1}_{UV} \odot [\mathbb{1}_{\mathfrak{g}} \odot \varrho_{\varpi_2}]\varpi_2 \odot \mathbb{1}_W) \quad .\end{aligned} \tag{3.89}$$

利用 γ 的相干性进行一次直接（但繁琐）的演算表明，对于$(\mathbb{1}_U \odot \gamma_{W,V})t_{t_{U,W},\mathbb{1}_V}(\mathbb{1}_U \odot \gamma_{V,W})$，我们有如下表达式，

$$\begin{aligned}&(\lambda_U \odot [\lambda_V \odot \varrho_{\varrho_W}][\gamma_{\mathfrak{g},V\mathfrak{g}} \odot \mathbb{1}_W] + [\lambda_{\lambda_U} \odot \varrho_V][\mathbb{1}_U \odot \gamma_{\mathfrak{g}\mathfrak{g}V,\mathfrak{g}}] \odot \varrho_W)(\mathbb{1}_U \odot \varpi_2 \odot \mathbb{1}_V \odot \varpi_2 \odot \mathbb{1}_W) \\ &\quad + (\lambda_U \odot \varrho_V \odot \varrho_W)(\mathbb{1}_U \odot \gamma_{V,\mathfrak{g}\mathfrak{g}} \odot \mathbb{1}_{\mathfrak{g}W})(\mathbb{1}_{UV} \odot [\mathbb{1}_{\mathfrak{g}} \odot \gamma_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}}][\varrho_{\varpi_2} \odot \mathbb{1}_{\mathfrak{g}}]\varpi_2 \odot \mathbb{1}_W) \quad .\end{aligned} \tag{3.90}$$

最后，将（3.70）与（3.66）和（3.67）一起使用，可得

$$t_{t_{U,V},\mathbb{1}_W} + t_{\mathbb{1}_U,t_{V,W}} + (\mathbb{1}_U \odot \gamma_{W,V})t_{t_{U,W},\mathbb{1}_V}(\mathbb{1}_U \odot \gamma_{V,W}) = [\![\rho, t_{U,V,W}]\!] \quad , \tag{3.91}$$

其中

$$t_{U,V,W} := ([\lambda_U \odot \varrho_V][\mathbb{1}_U \odot \gamma_{V,\mathfrak{g}\mathfrak{g}}] \odot \varrho_W)(\mathbb{1}_{UV} \odot \varpi_3 \odot \mathbb{1}_W) \tag{3.92}$$

是一个 2 次同伦 $t_{U,V,W}\colon\ U \odot V \odot W \rightsquigarrow U \odot V \odot W[-2]$ 因此被截断消去。 □

4 表示论作为导出几何

在本节中，我们只讨论有限维同伦李代数 $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}, \ell)$。本节旨在证明，命题 $\mathsf{Rep}(\mathfrak{g})$ 中的对称幺半 dg-范畴 3.15 与某个由 dg-模构成的对称幺半 dg-范畴 dg-等价（如定义 2.8所述）。第 4.1小节首先回顾 KLS25 中有限生成半自由 CDGA 的定义 A，见 [KLS25，定义 2.1]。备注4.3指出，这类 CDGA 不足以对应有限维同伦李代数 $\mathfrak{g}$，因此定义 4.4 引入了完备半自由交换微分分次代数的概念。命题 4.6 证明，有限维同伦李代数与带增广的有限生成完备半自由 CDGA 一一对应。

第 4.2 小节首先回顾 [KLS24 第 2 小节2] 中的对称幺半 dg-范畴 ${}_A\mathsf{dgMod}^{\mathrm{sf}}$，即定义在交换微分分次代数 A上的半自由 dg-模范畴。与上文提到的类似，注4.10 提醒我们，半自由 dg-模同样“不够大”，无法与表示对应，因此定义4.11 引入了完备交换微分分次代数上的完备半自由 dg-模的概念。命题4.12 表明，表示与 Chevalley-Eilenberg 代数上的完备半自由 dg-模一一对应。最后，命题4.13明确构造了对称幺半 dg-等价 $\mathrm{CE}_{\mathfrak{g}} : \mathsf{Rep}(\mathfrak{g}) \simeq {}_{\mathrm{CE}_{\mathfrak{g}}}\mathsf{dgMod}^{\mathrm{sf}}$。

4.1 Chevalley-Eilenberg 代数

一个**交换微分分次代数**是链复形 Ch 中的交换幺半群对象。更明确地说，交换微分分次代数是一个三元组 $A = (A, \mu, \eta)$，由一个上链复形 $A = (A^\sharp, \delta) \in \mathsf{Ch}$ 和两个上链映射组成：

$$\mu : A \otimes A \to A \quad , \quad a \otimes a' \mapsto a\,a' \,, \tag{4.1a}$$

（称为**乘法**）和

$$\eta : \mathbb{K} \to A \quad , \quad 1 \mapsto \eta \,, \tag{4.1b}$$

（称为 **单位**），它们满足通常的结合律公理、

$$a(a'a'') = (a\,a')a'' \quad , \tag{4.2a}$$

单位律，

$$\eta a = a = a\eta \quad , \tag{4.2b}$$

以及交换律，

$$a\,a' = (-1)^{|a||a'|}a'a \quad . \tag{4.2c}$$

乘法是上链映射，这意味着满足**莱布尼茨律**，

$$\delta(a\,a') = \delta(a)a' + (-1)^{|a|}a\delta(a'), \tag{4.3a}$$

而单位是上链映射，则意味着它被微分湮灭，

$$\delta(\eta) = 0 \quad . \tag{4.3b}$$

交换微分分次代数 A 被称为**带增广的**，如果存在微分分次代数同态 $\varepsilon\colon A \to \mathbb{K}$，即一个代数同态${}^{\varepsilon|_{A^0}} : A^0 \to \mathbb{K}$，它零化0-余循环 $B^0(A)$。

定义4.1。 交换微分分次代数 $A=(A,\mu,\eta)$被称为**半自由**，如果其底分次交换代数 $A^\sharp=(A^\sharp,\mu,\eta)$ 是自由的，即存在某个分次向量空间 U，使得下列同构成立于分次交换代数之间，

$$A^\sharp\cong \mathrm{Sym}(U)\quad . \tag{4.4}$$

如果生成元空间 U 是有限维的，则半自由交换微分分次代数 A 称为**有限生成**。

注 4.2. 莱布尼茨律 (4.3a) 蕴含，半自由交换微分分次代数$A^\sharp\cong \mathrm{Sym}(U)$ 的微分 δ 完全由其在生成元上的限制 $\delta(u)$ 确定。因此，可以通过指定微分在生成元上的取值 $\delta(u)$ 来定义该微分，使得 $|\delta(u)|=|u|+1$ 且$\delta^2(u)=0$。因此，一般半自由交换微分分次代数带有一个典范投影（将生成元映至 0），当且仅当对每个次数为 -1 的生成元 u，其微分 $\delta(u)$ 都没有标量分量。
△

注 4.3。 给定一个有限维同伦李代数 $\mathfrak{g}=(\mathfrak{g},\ell)$，我们将 $\mathfrak{g}$ 的基记为$\{x_\alpha\}^{1\leq\alpha\leq\dim(\mathfrak{g})}$，并将 $\ell^i\colon \bigwedge^i\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}[2-i]$ 的**结构常数**记为

$$\ell^i(x_{\alpha_1},\dots,x_{\alpha_i})=\ell^\alpha_{\alpha_1,\dots,\alpha_i}x_\alpha\quad , \tag{4.5}$$

其中，爱因斯坦求和约定仅对满足下述条件的 $1\leq\alpha\leq\dim(\mathfrak{g})$ 求和

$$|x_\alpha|=2-i+\sum_{l=1}^i|x_{\alpha_l}|\quad . \tag{4.6}$$

记对偶基为 $\{x^\alpha\}^{1\leq\alpha\leq\dim(\mathfrak{g})}$，并将 $\mathrm{Sym}(\mathfrak{g}^*[-1])$ 的生成元记为

$$\theta^\alpha:=\varsigma x^\alpha:\mathfrak{g}\to\mathbb{K}[1-|x_\alpha|]\quad , \tag{4.7}$$

我们希望将 Chevalley-Eilenberg 代数构造为一个有限生成半自由交换微分分次代数，其底层分次交换代数为 $\mathrm{Sym}(\mathfrak{g}^*[-1])$，微分由对结构映射 $\{\ell^i\colon \bigwedge^i\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}[2-i]\}_{i\geq1}$ 取对偶给出。问题在于，(4.6) 蕴含

$$|\theta^{\alpha_1}\cdots\theta^{\alpha_i}|=|\theta^\alpha|+1 \tag{4.8}$$

因此，生成元上的微分 δ 在示意意义下由下式给出 θ^α

$$\delta(\theta^\alpha)\sim\sum_{i=1}^\infty\ell^\alpha_{\alpha_1,\dots,\alpha_i}\theta^{\alpha_1}\cdots\theta^{\alpha_i}\quad . \tag{4.9}$$

△

解决办法是作如下定义。

定义 4.4。 我们称一个交换微分分次代数 A 为**完备半自由交换微分分次代数**，若存在一个分次向量空间 U 以及一个同构 $A^\sharp\cong\widehat{\mathrm{Sym}}(U):=\prod_{i\in\mathbb{N}}\mathrm{Sym}^i(U)$，使得它们是分次交换代数之间的同构。

我们回顾广义雅可比恒等式（2.24b），其形式如下

$$\forall k\geq1\,,\qquad \sum_{\tilde{i}+j=k}(-1)^{\tilde{i}j}\ell^i(1_{\tilde{i}}\otimes\ell^j)\Sigma_{\tilde{i},j}=0\quad , \tag{4.10a}$$

由此得到结构常数之间的以下关系： $\forall k\geq1$ 并且对所有$1\leq\alpha_1,\dots,\alpha_k\leq$维数$(\mathfrak{g})$,

$$\sum_{\tilde{i}+j=k}\sum_{\sigma\in\mathrm{S}_{\tilde{i},j}}\varepsilon_\sigma(-1)^{j\left(\tilde{i}+|x_{\alpha_{\sigma(1)}}\cdots x_{\alpha_{\sigma(\tilde{i})}}|\right)}\ell^\alpha_{\alpha_{\sigma(1)},\dots,\alpha_{\sigma(\tilde{i})},\beta}\ell^\beta_{\alpha_{\sigma(i)},\dots,\alpha_{\sigma(k)}}=0\quad . \tag{4.10b}$$

构造 4.5. 权为 1 的 Maurer-Cartan 元素 $\pi_1 \in \mathrm{Pol}(\mathrm{CE}_{\mathfrak{g}}[n)^{n+2}$ 将 $\mathrm{Sym}(\mathfrak{g}^*[-1])$ 的$\widehat{\ }$零微分变形为

$$\delta\theta^\alpha = [\![\pi_1, \theta^\alpha]\!] = (-1)^{|x_\alpha|+n}\theta^\alpha \bullet \pi_1 = \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{|x_\alpha|+n+(1-|x_\alpha|)\tilde{i}}\theta^\alpha \pi_1^i = \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{n+|x_\alpha|i}\theta^\alpha \ell^i \,. \tag{4.11}$$

▷

命题 4.6. 给定有限维分次向量空间 $\mathfrak{g}$，以及一族分次线性映射 $\ell := \left\{\ell^i : \bigwedge^i \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}[2-i]\right\}_{i\geq 1}$，定义有限生成完备自由$\widehat{\ }$CGA $\mathrm{CE}_{\mathfrak{g}} := \mathrm{Sym}(\mathfrak{g}^*[-1])$，以及分次线性映射 $\delta : \mathrm{CE}_{\mathfrak{g}} \to \mathrm{CE}_{\mathfrak{g}}[1]$，其在生成元 θ^α 上的定义为

$$\delta\theta^\alpha := \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i!}(-1)^{\sum_{l=1}^{i}|x_{\alpha_l}|(l+|x_{\alpha_{l+1}}\cdots x_{\alpha_i}|)}\ell^\alpha_{\alpha_1,\ldots,\alpha_i}\theta^{\alpha_1}\cdots\theta^{\alpha_i} \quad , \tag{4.12}$$

那么 δ 是微分结构，当且仅当 ℓ满足广义雅可比恒等式（4.10b）。

证明。 首先我们证明良定义性，反转次数

$$|x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_i}|_{\mathrm{rev}} := \sum_{l=1}^{i}|x_{\alpha_l}||x_{\alpha_{l+1}}\cdots x_{\alpha_i}| \tag{4.13}$$

是对称的 $|x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_l}x_{\alpha_{l+1}}\cdots x_{\alpha_i}|_{\mathrm{rev}} = |x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_{l+1}}x_{\alpha_l}\cdots x_{\alpha_i}|_{\mathrm{rev}}$ 并且

$$\ell^\alpha_{\alpha_1,\ldots,\alpha_i}\theta^{\alpha_1}\cdots\theta^{\alpha_i} = -(-1)^{|x_{\alpha_l}||x_{\alpha_{l+1}}|}\ell^\alpha_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{l+1},\alpha_l,\ldots,\alpha_i}(-1)^{|\theta^{\alpha_l}||\theta^{\alpha_{l+1}}|}\theta^{\alpha_1}\cdots\theta^{\alpha_{l+1}}\theta^{\alpha_l}\cdots\theta^{\alpha_i} \tag{4.14}$$

但这些 符号 显然给出 $(-1)^{|x_{\alpha_l}|+|x_{\alpha_{l+1}}|}$ 因此（4.12）确实是 $\mathrm{CE}^\sharp(\mathfrak{g})$ 中的一个元素。

现在我们通过表达[3] $\delta^2(\theta^\alpha)$来证明平方为零条件成立，

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i!}(-1)^{|x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_i}|_{\mathrm{rev}}+\sum_{l=1}^{i}|x_{\alpha_l}|l}\ell^\alpha_{\alpha_1,\ldots,\alpha_i}\delta(\theta^{\alpha_1}\cdots\theta^{\alpha_i}) \qquad (4.15)\\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{i}\frac{(-1)^{|x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_i}|_{\mathrm{rev}}+\sum_{l=1}^{i}|x_{\alpha_l}|l+|\theta^{\alpha_1}..\theta^{\alpha_{m-1}}|+|\delta\theta^{\alpha_m}||\theta^{\alpha_{m+1}}..\theta^{\alpha_i}|}}{i!}\ell^\alpha_{\alpha_1,..,\alpha_i}\theta^{\alpha_1}..\check{\theta}^{\alpha_m}..\theta^{\alpha_i}\delta(\theta^{\alpha_m})\\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{i}\frac{(-1)^{|x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_i}|_{\mathrm{rev}}+\sum_{l=1}^{i}|x_{\alpha_l}|l+|\theta^{\alpha_1}..\theta^{\alpha_{\tilde{m}}}|+\widetilde{|x_{\alpha_m}|}(i-m)}}{i!}\ell^\alpha_{\alpha_1,..,\check{\alpha}_m,..,\alpha_i,\alpha_m}\theta^{\alpha_1}..\check{\theta}^{\alpha_m}..\theta^{\alpha_i}\delta(\theta^{\alpha_m}).
\end{aligned}$$

对于 $m = i$，符号由下式给出

$$(-1)^{\sum_{l=1}^{i}|x_{\alpha_l}|l+|\theta^{\alpha_1}..\theta^{\alpha_{\tilde{i}}}|} \quad . \tag{4.16}$$

对于 $1 \leq m \leq i-1$，通过循环重新编号，我们得到（4.16）：

$$\alpha_m \mapsto \alpha_i \quad , \quad \alpha_{m+1} \mapsto \alpha_m \quad , \quad \alpha_{m+2} \mapsto \alpha_{m+1} \quad , \quad \ldots \quad , \quad \alpha_i \mapsto \alpha_{\tilde{i}} \quad , \tag{4.17}$$

因此

$$\begin{aligned}
\delta^2(\theta^\alpha) &= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(i-1)!}(-1)^{|x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_i}|_{\mathrm{rev}}+\sum_{l=1}^{i}|x_{\alpha_l}|l+|\theta^{\alpha_1}\cdots\theta^{\alpha_{\tilde{i}}}|}\ell^\alpha_{\alpha_1,\ldots,\alpha_i}\theta^{\alpha_1}\cdots\theta^{\alpha_{\tilde{i}}}\delta(\theta^{\alpha_i})\\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{|x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_{\tilde{i}}}|_{\mathrm{rev}}+|x_\beta|(i+|x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_{\tilde{i}}}|)+\sum_{l=1}^{\tilde{i}}|x_{\alpha_l}|\tilde{l}+\tilde{i}}}{(i-1)!}\ell^\alpha_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{\tilde{i}},\beta}\theta^{\alpha_1}\cdots\theta^{\alpha_{\tilde{i}}}\delta(\theta^\beta) \quad . \qquad (4.18)
\end{aligned}$$

[3]请注意，在下文的记号中，$\check{}\theta^{\alpha_m}$ 表示省略该项。

我们记作

$$\delta(\theta^\beta) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!}(-1)^{|x_{\alpha_i}\cdots x_{\alpha_{\tilde{i}+j}}|_{\mathrm{rev}}+\sum_{l=i}^{\tilde{i}+j}|x_{\alpha_l}|(\tilde{l}+i)} \ell^\beta_{\alpha_i,\ldots,\alpha_{\tilde{i}+j}} \theta^{\alpha_i}\cdots\theta^{\alpha_{\tilde{i}+j}} \tag{4.19}$$

因此（4.18）可写为

$$\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty} \frac{(-1)^{\tilde{i}+j+|x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_{\tilde{i}+j}}|_{\mathrm{rev}}+j(\tilde{i}+|x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_{\tilde{i}}}|)+\sum_{l=1}^{\tilde{i}+j}|x_{\alpha_l}|\tilde{l}}}{(i-1)!j!} \ell^\alpha_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{\tilde{i}},\beta}\ell^\beta_{\alpha_i,\ldots,\alpha_{\tilde{i}+j}}\theta^{\alpha_1}\cdots\theta^{\alpha_{\tilde{i}+j}} \quad . \tag{4.20}$$

回顾 $\theta^\alpha := \varsigma x^\alpha$ 并将所有移位因子 ς 移至右侧，（4.20）变为

$$\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty} \frac{(-1)^{\tilde{i}+j+|x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_{\tilde{i}+j}}|_{\mathrm{rev}}+|x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_{\tilde{i}+j}}|+j(\tilde{i}+|x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_{\tilde{i}}}|)}}{(i-1)!j!} \ell^\alpha_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{\tilde{i}},\beta}\ell^\beta_{\alpha_i,\ldots,\alpha_{\tilde{i}+j}}x^{\alpha_1}\cdots x^{\alpha_{\tilde{i}+j}}\varsigma^{\tilde{i}+j} \tag{4.21}$$

当且仅当满足（4.10b）时，该式为零。 □

4.2 对称幺半 dg-等价

每个交换微分分次代数 A 都关联着一个由 A-**dg-模**组成的微分分次范畴 ${}_A\mathsf{dgMod}$。更明确地说，该范畴中的一个对象 $M = (M,\ \triangleright)$ 是一个上链复形 $M = (M^\sharp,\ d) \in$ 链复形，并赋有一个上链映射

$$\triangleright : A\otimes M \to M \qquad , \qquad a\otimes m \mapsto a\triangleright m =: am \quad , \tag{4.22}$$

（称为**作用**），它满足通常的结合律等模公理，

$$(a\,a')m = a(a'm) \quad , \tag{4.23a}$$

以及单位律，

$$\eta m = m \quad . \tag{4.23b}$$

左作用（4.22）是一个上链映射，这意味着我们有

$$d(am) = (\delta a)m + (-1)^{|a|}a(dm) \quad . \tag{4.24}$$

两个对象 $M, N \in {}_A\mathsf{dgMod}$ 之间的态射的 dg-模是子复形

$${}_A\mathsf{dgMod}(M,N) \subseteq \mathsf{Ch}(M,N) \tag{4.25a}$$

它是 Ch 中内在 Hom 的子复形，包含 A-**线性**映射 $f \in \mathsf{Ch}(M,N)$，即

$$f(am) = (-1)^{|f||a|}af(m) \tag{4.25b}$$

其作用定义为

$$(af)(m) := af(m) \quad . \tag{4.25c}$$

微分分次范畴 ${}_A\mathsf{dgMod}$ 具有相容的对称幺半结构：

(i) 由相对张量积给出的幺半积，

$$M\otimes_A N := \mathrm{colim}\Big(M\otimes N \underset{\mathrm{id}_M\otimes\triangleright}{\overset{(\triangleright\otimes\mathrm{id}_N)\,(s_{M,A}\otimes\mathrm{id}_N)}{\leftleftarrows}} M\otimes A\otimes N \Big) \in {}_A\mathsf{dgMod}\ . \tag{4.26}$$

(ii) 由基底交换微分分次代数给出的幺半单位， $A=(A,\mu)\in {}_A$微分分次模。

(iii) 由 Koszul 符号规则给出的对称编织（2.2），

$$s_{M,N}: M\otimes_A N\to N\otimes_A M \quad , \qquad m\otimes_A n\mapsto (-1)^{|m||n|}n\otimes_A m \quad . \tag{4.27}$$

定义 4.7. A-微分分次模 $M=(M,\triangleright)$若其底层的 $A^\sharp$-分次模 $M^\sharp=(M^\sharp,\triangleright)$是自由的，则称为**半自由**，也就是说，存在一个分次向量空间 V，使得以下同构在 $A^\sharp$-分次模之间成立，

$$M^\sharp\cong A^\sharp\otimes V \tag{4.28a}$$

其中左作用简单地定义为

$$a(a'\otimes v)=(a\,a')\otimes v=:a\,a'v \quad . \tag{4.28b}$$

注记 4.8. 与注记 4.2类似，作用是上链的（4.24）这一事实意味着，半自由 d 微分分次模 A的微分 $M^\sharp\cong A^\sharp\otimes V$由其在生成元上的限制 $d(v)$ 决定。因此，可以通过指定生成元上的取值 $d(v)$，来规定这样的微分，使得 $|d(v)|=|v|+1$ 且 $d^2(v)=0$。 △

注4.9。 ${}_A$dgMod 上的幺半群结构限制为全子范畴 ${}_A\mathsf{dgMod}^{\mathrm{sf}}\subseteq {}_A$dgMod 上的幺半群结构。事实上，幺半单位 $A\in {}_A\mathsf{dgMod}$ 是半自由的（原因很简单： $A^\sharp\cong A^\sharp\otimes\mathbb{K}$），并且给定任意两个半自由的 A-dg-模 M， $N\in {}_A\mathsf{dgMod}^{\mathrm{sf}}$，满足 $M^\sharp\cong A^\sharp\otimes V$ 和 $N^\sharp\cong A^\sharp\otimes W$，我们在分次 $A^\sharp$-模之间有同构，

$$(M\otimes_A N)^\sharp \;\cong\; A^\sharp\otimes(V\otimes W) \tag{4.29}$$

这意味着 $M\otimes_A N\in {}_A\mathsf{dgMod}^{\mathrm{sf}}$ 是半自由的。 △

注4.10。 给定一个有限维同伦李代数 $\mathfrak{g}$，考虑命题 4.6中的切瓦利-埃伦伯格代数 $\mathrm{CE}_\mathfrak{g}$。给定一个表示 $\left\{\rho_V^i\colon\ \mathfrak{g}^{\otimes\tilde{\imath}}\otimes V\to V[2-i]\right\}_{i\geq 1}$ 如同（3.21）中所述，我们设

$$\rho_V^i(x_{\alpha_1},\dots,x_{\alpha_{\tilde{\imath}}},v):=\rho^i_{\alpha_1,\dots,\alpha_{\tilde{\imath}}}(v) \quad . \tag{4.30}$$

我们希望将 Chevalley-Eilenberg 微分分次模构造为一个半自由 $\mathrm{CE}_\mathfrak{g}$-微分分次模，其底层 $\mathrm{CE}_\mathfrak{g}^\sharp$-分次模如下：

$$\left(\prod_{i\in\mathbb{N}}\mathrm{Sym}^i(\mathfrak{g}^*[-1])\right)\otimes V \quad . \tag{4.31}$$

类似于注4.3，问题在于，生成元上的微分 $d\quad v\in V$ 将以示意形式给出为

$$dv\sim\sum_{i=1}^\infty\theta^{\alpha_1}\cdots\theta^{\alpha_{\tilde{\imath}}}\rho^i_{\alpha_1,\dots,\alpha_{\tilde{\imath}}}(v) \quad . \tag{4.32}$$

△

定义 4.11。给定一个完备半自由交换微分分次代数，其生成元为，如果存在一个分次向量空间，使得以下同构在 -分次模之间成立，则称其为一个**完备半自由 A-微分分次模** M。

$$M^\sharp\cong\prod_{i\in\mathbb{N}}\left(\mathrm{Sym}^i(U)\otimes V\right) \quad . \tag{4.33}$$

我们回顾 $\pi_1^k=(-1)^k\ell^k$ 以及（3.21b），因此

$$\sum_{\tilde{i}+j=k}(-1)^{i\tilde{j}}\rho_V^i\left[(1_{\tilde{i}-1}\otimes\ell^j\otimes 1_V)(\Sigma_{\tilde{i}-1,j}\otimes 1_V)+(1_{\tilde{j}}\otimes\rho_V^j)(\Sigma_{\tilde{i},\tilde{j}}\otimes 1_V)\right]=0 \quad . \tag{4.34}$$

命题 4.12。 给定一个有限维同伦李代数 $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}, \ell)$ 及其表示 $V = (V, \rho_V)$, Chevalley-Eilenberg 微分分次模的微分 d 在 $(\mathrm{CE}_{\mathfrak{g}}^V)^\sharp$ 的生成元 $v \in V$ 上定义为

$$dv := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\tilde{i}!}(-1)^{|x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_{\tilde{i}}}|_{\mathrm{rev}}+\sum_{l=1}^{\tilde{i}}|x_{\alpha_l}|\tilde{l}}\theta^{\alpha_1}\cdots\theta^{\alpha_{\tilde{i}}}\rho^i_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{\tilde{i}}}(v) \quad . \tag{4.35}$$

证明。 我们将生成元 $v \in V$ 上微分 d 的平方表示为,

$$\begin{aligned} d^2(v) = &\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{\tilde{i}!}(-1)^{|x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_{\tilde{i}-1}}|_{\mathrm{rev}}+|x_\alpha|(i+|x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_{\tilde{i}-1}}|)+\sum_{l=1}^{\tilde{i}-1}|x_{\alpha_l}|\tilde{l}}\delta(\theta^{\alpha_1}\cdots\theta^{\alpha_{\tilde{i}-1}}\theta^{\alpha})\rho^i_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{\tilde{i}-1},\alpha}(v) \\ &+\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\tilde{j}!}(-1)^{|x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_{\tilde{j}}}|_{\mathrm{rev}}+\sum_{l=1}^{\tilde{j}}|x_{\alpha_l}|l+\tilde{j}}\theta^{\alpha_1}\cdots\theta^{\alpha_{\tilde{j}}}d(\rho^j_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{\tilde{j}}}(v)) \quad . \end{aligned} \tag{4.36}$$

(4.36) 的第一项可通过使用步骤 (4.15)-(4.20) 处理，因此 (4.36) 可写为

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{i=2\\j=1}}^{\infty} \frac{1}{(\tilde{i}-1)!\tilde{j}!}(-1)^{|x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_{\tilde{i}+\tilde{j}}}|_{\mathrm{rev}}+j|x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_{\tilde{i}-1}}|+i\tilde{j}+\sum_{l=1}^{\tilde{i}+\tilde{j}}|x_{\alpha_l}|l}\theta^{\alpha_1}\cdots\theta^{\alpha_{\tilde{i}+\tilde{j}}}\rho^i_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{\tilde{i}-1},\beta}(v)\ell^\beta_{\alpha_{\tilde{i}},\ldots,\alpha_{\tilde{i}+\tilde{j}}} \\ &+\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{\infty} \frac{(-1)^{|x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_{\tilde{i}+\tilde{j}}}|_{\mathrm{rev}}+i(\tilde{j}+|x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_{\tilde{j}}}|)+\sum_{l=1}^{\tilde{i}+\tilde{j}}|x_{\alpha_l}|\tilde{l}}}{\tilde{i}!\tilde{j}!}\theta^{\alpha_j}\cdots\theta^{\alpha_{\tilde{i}+\tilde{j}}}\theta^{\alpha_1}\cdots\theta^{\alpha_{\tilde{j}}}\rho^i_{\alpha_j\ldots\alpha_{\tilde{i}+\tilde{j}}}[\rho^j_{\alpha_1\ldots\alpha_{\tilde{j}}}(v)] \end{aligned} \tag{4.37}$$

但我们只需重新排列第二个求和，然后像 (4.21) 中那样将所有移位因子移到右侧,

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{i=2\\j=1}}^{\infty} \frac{(-1)^{|x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_{\tilde{i}+\tilde{j}}}|_{\mathrm{rev}}+j|x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_{\tilde{i}-1}}|+i\tilde{j}}}{(\tilde{i}-1)!\tilde{j}!}x^{\alpha_1}\cdots x^{\alpha_{\tilde{i}+\tilde{j}}}\varsigma^{\tilde{i}+\tilde{j}}\rho^i_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{\tilde{i}-1},\beta}(v)\ell^\beta_{\alpha_{\tilde{i}},\ldots,\alpha_{\tilde{i}+\tilde{j}}} \\ &+\sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{|x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_{\tilde{i}+\tilde{j}}}|_{\mathrm{rev}}+j|x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_{\tilde{i}}}|+i\tilde{j}}}{\tilde{i}!\tilde{j}!}x^{\alpha_1}\cdots x^{\alpha_{\tilde{i}+\tilde{j}}}\varsigma^{\tilde{i}+\tilde{j}}\rho^i_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{\tilde{i}}}(\rho^j_{\alpha_i,\ldots,\alpha_{\tilde{i}+\tilde{j}}}(v)) \,. \end{aligned} \tag{4.38}$$

(4.38) 消失当且仅当满足 (4.34)。 □

命题 4.13. 给定 $f = \left\{f^i\colon \mathfrak{g}^{\otimes\tilde{i}}\otimes U \to V[|f|-\tilde{i}]\right\}_{i\geq 1}\colon U \rightsquigarrow V[|f|]$，我们定义 $\mathrm{CE}_{\mathfrak{g}}$-线性映射

$$\mathrm{CE}^f_{\mathfrak{g}} : \mathrm{CE}^U_{\mathfrak{g}} \to \mathrm{CE}^V_{\mathfrak{g}}[|f|] \tag{4.39a}$$

在模生成元 $u \in U$ 上

$$\mathrm{CE}^f_{\mathfrak{g}}(u) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\tilde{i}!}(-1)^{|x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_{\tilde{i}}}|_{\mathrm{rev}}+\sum_{l=1}^{\tilde{i}}|x_{\alpha_l}|(l+|f|)}\theta^{\alpha_1}\cdots\theta^{\alpha_{\tilde{i}}}f^i_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{\tilde{i}}}(u) \tag{4.39b}$$

T这定义了一个对称严格幺半微分分次等价 $\mathrm{CE}_{\mathfrak{g}} : \mathrm{Rep}(\mathfrak{g}) \simeq {}_{\mathrm{CE}_{\mathfrak{g}}}\mathrm{dgMod}^{\mathrm{sf}}_{\Pi}$。

证明。 我们首先证明函子性；我们显然有$\mathrm{CE}^{\mathbb{1}_U}_{\mathfrak{g}} = \mathrm{id}^{\mathrm{CE}^U_{\mathfrak{g}}}$，并且，如果我们还给定$g : V \rightsquigarrow W[|g|]$，我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{CE}^{gf}_{\mathfrak{g}}(u) \overset{(3.6)}{=} &\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\tilde{i}!}(-1)^{|x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_{\tilde{i}}}|_{\mathrm{rev}}+\sum_{l=1}^{\tilde{i}}|x_{\alpha_l}|(l+|g|+|f|)}\theta^{\alpha_1}\cdots\theta^{\alpha_{\tilde{i}}}\sum_{\tilde{j}+\tilde{k}=i}\sum_{\sigma\in \mathrm{S}_{\tilde{j},\tilde{k}}}\varepsilon_\sigma \\ &(-1)^{(|g|-\tilde{j})\tilde{k}+(|f|-\tilde{k})|x_{\alpha_{\sigma(1)}}\cdots x_{\alpha_{\sigma(\tilde{j})}}|}g^j_{\alpha_{\sigma(1)},\ldots,\alpha_{\sigma(\tilde{j})}}\left(f^k_{\alpha_{\sigma(j)},\ldots,\alpha_{\sigma(\tilde{i})}}(u)\right) \end{aligned} \tag{4.40}$$

并将其与

$$\begin{aligned}\mathrm{CE}^g_{\mathfrak{g}}\mathrm{CE}^f_{\mathfrak{g}}(u) &\overset{(4.25b)}{=} \sum_{j,k=1}^{\infty}\frac{1}{\tilde{j}!\tilde{k}!}(-1)^{|g|(|x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_{\tilde{k}}}|+\tilde{k})+|x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_{\tilde{k}}}|_{\mathrm{rev}}+\sum_{l=k}^{\tilde{j}+\tilde{k}}|x_{\alpha_l}|(l+\tilde{k}+|g|)+|x_{\alpha_k}\cdots x_{\alpha_{\tilde{j}+\tilde{k}}}|_{\mathrm{rev}}}\\ &\qquad (-1)^{\sum_{l=1}^{\tilde{k}}|x_{\alpha_l}|(l+|f|)}\theta^{\alpha_1}\dots\theta^{\alpha_{\tilde{j}+\tilde{k}}}g^j_{\alpha_k,\dots,\alpha_{\tilde{j}+\tilde{k}}}\left(f^k_{\alpha_1,\dots,\alpha_{\tilde{k}}}(u)\right)\\ &\overset{(4.2c)}{=} \sum_{j,k=1}^{\infty}\frac{1}{\tilde{j}!\tilde{k}!}(-1)^{|x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_{\tilde{j}+\tilde{k}}}|_{\mathrm{rev}}+\sum_{l=1}^{\tilde{j}+\tilde{k}}|x_{\alpha_l}|(l+|g|+|f|)}\theta^{\alpha_1}\dots\theta^{\alpha_{\tilde{j}+\tilde{k}}}\\ &\qquad (-1)^{(|g|-\tilde{j})\tilde{k}+(|f|-\tilde{k})|x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_{\tilde{j}}}|}g^j_{\alpha_1,\dots,\alpha_{\tilde{j}}}\left(f^k_{\alpha_j,\dots,\alpha_{\tilde{i}}}(u)\right)\end{aligned}\tag{4.41}$$

它恢复了（4.40）。现在我们证明dg-函子性；我们考虑 $\mathrm{CE}^{[\![\rho,f]\!]}_{\mathfrak{g}}(u)$（经由（3.24））,

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\tilde{i}!}(-1)^{|x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_{\tilde{i}}}|_{\mathrm{rev}}+\sum_{l=1}^{\tilde{i}}|x_{\alpha_l}|(\tilde{l}+|f|)}\theta^{\alpha_1}\dots\theta^{\alpha_{\tilde{i}}}\sum_{\tilde{j}+k=i}\Bigg(\sum_{\sigma\in\mathrm{S}_{\tilde{j},\tilde{k}}}\varepsilon_\sigma(-1)^{j\tilde{k}+(|f|-\tilde{k})|x_{\alpha_{\sigma(1)}}\cdots x_{\alpha_{\sigma(\tilde{j})}}|}\\ &\rho^j_{\alpha_{\sigma(1)},\dots,\alpha_{\sigma(\tilde{j})}}\left(f^k_{\alpha_{\sigma(j)},\dots,\alpha_{\sigma(\tilde{i})}}(u)\right)+\sum_{\sigma\in\mathrm{S}_{j,\tilde{k}-1}}\varepsilon_\sigma(-1)^{|\widetilde{f}|j}\ell^{\alpha}_{\alpha_{\sigma(1)},\dots,\alpha_{\sigma(j)}}f^k_{\alpha,\alpha_{\sigma(j+1)},\dots,\alpha_{\sigma(\tilde{i})}}(u)\\ &-\sum_{\sigma\in\mathrm{S}_{\tilde{k},\tilde{j}}}\varepsilon_\sigma(-1)^{\tilde{j}\tilde{k}+j(|f|+|x_{\alpha_{\sigma(1)}}\cdots x_{\alpha_{\sigma(\tilde{k})}}|)}f^k_{\alpha_{\sigma(1)},\dots,\alpha_{\sigma(\tilde{k})}}\left(\rho^j_{\alpha_{\sigma(k)},\dots,\alpha_{\sigma(\tilde{i})}}(u)\right)\Bigg)\end{aligned}\tag{4.42}$$

并将其与 $d\left(\mathrm{CE}^f_{\mathfrak{g}}(u)\right)-(-1)^{|f|}\mathrm{CE}^f_{\mathfrak{g}}(du)$进行比较,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(\tilde{k}-1)!}(-1)^{|x_\alpha x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_{\tilde{k}-1}}|_{\mathrm{rev}}+|x_\alpha||\widetilde{f}|+\sum_{l=1}^{\tilde{k}-1}|x_{\alpha_l}|(\tilde{l}+|f|)}\delta(\theta^\alpha)\theta^{\alpha_1}\dots\theta^{\alpha_{\tilde{k}-1}}f^k_{\alpha,\alpha_1,\dots,\alpha_{\tilde{k}-1}}(u)\\ &+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\tilde{k}!}(-1)^{|x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_{\tilde{k}}}|_{\mathrm{rev}}+\sum_{l=1}^{\tilde{k}}|x_{\alpha_l}|(l+|f|)+|\theta^{\alpha_1}\cdots\theta^{\alpha_{\tilde{k}}}|}\theta^{\alpha_1}\dots\theta^{\alpha_{\tilde{k}}}d\left(f^k_{\alpha_1,\dots,\alpha_{\tilde{k}}}(u)\right)\\ &-(-1)^{|f|}\mathrm{CE}^f_{\mathfrak{g}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\tilde{j}!}(-1)^{|x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_{\tilde{j}}}|_{\mathrm{rev}}+\sum_{l=1}^{\tilde{j}}|x_{\alpha_l}|\tilde{l}}\theta^{\alpha_1}\dots\theta^{\alpha_{\tilde{j}}}\rho^j_{\alpha_1,\dots,\alpha_{\tilde{j}}}(u)\right)\end{aligned}\tag{4.43}$$

在使用（4.12）、（4.35）和（4.39b）后，该式变为,

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{k=2\\j=1}}^{\infty}\frac{1}{\tilde{j}!(\tilde{k}-1)!}(-1)^{(|x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_{\tilde{k}-1}}|+|\widetilde{f}|)(|x_{\alpha_{\tilde{k}}}\cdots x_{\alpha_{\tilde{j}+\tilde{k}}}|+j)+|x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_{\tilde{k}-1}}|_{\mathrm{rev}}+\sum_{l=1}^{\tilde{k}-1}|x_{\alpha_l}|(\tilde{l}+|f|)}\\ &\qquad (-1)^{|x_{\alpha_{\tilde{k}}}\cdots x_{\alpha_{\tilde{j}+\tilde{k}}}|_{\mathrm{rev}}+\sum_{l=\tilde{k}}^{\tilde{j}+\tilde{k}}|x_{\alpha_l}|(l+k)}\ell^{\alpha}_{\alpha_{\tilde{k}},\dots,\alpha_{\tilde{j}+\tilde{k}}}\theta^{\alpha_{\tilde{k}}}\dots\theta^{\alpha_{\tilde{j}+\tilde{k}}}\theta^{\alpha_1}\dots\theta^{\alpha_{\tilde{k}-1}}f^k_{\alpha,\alpha_1,\dots,\alpha_{\tilde{k}-1}}(u)\\ &+\sum_{\substack{k=1\\j=1}}^{\infty}\frac{1}{\tilde{j}!\tilde{k}!}(-1)^{|x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_{\tilde{k}}}|_{\mathrm{rev}}+\sum_{l=1}^{\tilde{k}}|x_{\alpha_l}|(l+|f|)+|x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_{\tilde{k}}}|+\tilde{k}+|x_{\alpha_k}\cdots x_{\alpha_{\tilde{j}+\tilde{k}}}|_{\mathrm{rev}}+\sum_{l=k}^{\tilde{j}+\tilde{k}}|x_{\alpha_l}|(l+k)}\\ &\qquad \theta^{\alpha_1}\dots\theta^{\alpha_{\tilde{k}}}\theta^{\alpha_k}\dots\theta^{\alpha_{\tilde{j}+\tilde{k}}}\rho^j_{\alpha_k,\dots,\alpha_{\tilde{j}+\tilde{k}}}\left(f^k_{\alpha_1,\dots,\alpha_{\tilde{k}}}(u)\right)\\ &-\sum_{\substack{j=1\\k=1}}^{\infty}\frac{1}{\tilde{j}!\tilde{k}!}(-1)^{|x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_{\tilde{j}}}|_{\mathrm{rev}}+\sum_{l=1}^{\tilde{j}}|x_{\alpha_l}|\tilde{l}+|f|(1+|\theta^{\alpha_1}\cdots\theta^{\alpha_{\tilde{j}}}|)+|x_{\alpha_j}\cdots x_{\alpha_{\tilde{j}+\tilde{k}}}|_{\mathrm{rev}}+\sum_{l=j}^{\tilde{j}+\tilde{k}}|x_{\alpha_l}|(\tilde{l}+j+|f|)}\\ &\qquad \theta^{\alpha_1}\dots\theta^{\alpha_{\tilde{j}}}\theta^{\alpha_j}\dots\theta^{\alpha_{\tilde{j}+\tilde{k}}}f^k_{\alpha_j,\dots,\alpha_{\tilde{j}+\tilde{k}}}\left(\rho^j_{\alpha_1,\dots,\alpha_{\tilde{j}}}(u)\right)\end{aligned}\tag{4.44}$$

但我们恢复（4.42），通过重新编号（4.44）并照常重排各项。本质满射性由命题4.12证明，忠实性是显然的，满性由上述内容得出。设

us n现在证明严格幺半结构被严格保持，在对象上我们有

$$\begin{aligned}
d(u\otimes_{\mathrm{CE}_{\mathfrak{g}}} v) &= (du)\otimes_{\mathrm{CE}_{\mathfrak{g}}} v + (-1)^{|u|} u\otimes_{\mathrm{CE}_{\mathfrak{g}}} dv \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\tilde{i}!}(-1)^{|x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_{\tilde{i}}}|_{\mathrm{rev}}+\sum_{l=1}^{\tilde{i}}|x_{\alpha_l}|\tilde{l}}\theta^{\alpha_1}\cdots\theta^{\alpha_{\tilde{i}}} \\
&\qquad \left[\rho^{i}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{\tilde{i}}}(u)\otimes_{\mathrm{CE}_{\mathfrak{g}}} v + (-1)^{|u|(1+|\theta^{\alpha_1}\ldots\theta^{\alpha_{\tilde{i}}}|)} u\otimes_{\mathrm{CE}_{\mathfrak{g}}} \rho^{i}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{\tilde{i}}}(v)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\tilde{i}!}(-1)^{|x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_{\tilde{i}}}|_{\mathrm{rev}}+\sum_{l=1}^{\tilde{i}}|x_{\alpha_l}|\tilde{l}}\theta^{\alpha_1}\cdots\theta^{\alpha_{\tilde{i}}}\rho^{i}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{\tilde{i}}}(u\otimes v) \\
&= d(u\otimes v)
\end{aligned} \tag{4.45}$$

因此 $\mathrm{CE}^{U}_{\mathfrak{g}}\otimes_{\mathrm{CE}_{\mathfrak{g}}}\mathrm{CE}^{V}_{\mathfrak{g}} = \mathrm{CE}^{U\odot V}_{\mathfrak{g}}$。对于态射 $f\colon U\rightsquigarrow U[|f|]$ 和 $g\colon V\rightsquigarrow V[|g|]$，我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{CE}^{f\odot g}_{\mathfrak{g}}(u\otimes v) = &\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\tilde{i}!}(-1)^{|x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_{\tilde{i}}}|_{\mathrm{rev}}+\sum_{l=1}^{\tilde{i}}|x_{\alpha_l}|(l+|f|+|g|)}\theta^{\alpha_1}\cdots\theta^{\alpha_{\tilde{i}}}\sum_{\tilde{j}+k=i}\sum_{\sigma\in \mathrm{S}_{\tilde{j},\tilde{k}}}\varepsilon_{\sigma}(-1)^{(|f|-\tilde{j})\tilde{k}} \\
&(-1)^{|u||x_{\alpha_{\sigma(j)}}\cdots x_{\alpha_{\sigma(\tilde{i})}}|+(|g|-\tilde{k})|x_{\alpha_{\sigma(1)}}\cdots x_{\alpha_{\sigma(\tilde{j})}}u|} f^{j}_{\alpha_{\sigma(1)},\ldots,\alpha_{\sigma(\tilde{j})}}(u)\otimes g^{k}_{\alpha_{\sigma(j)},\ldots,\alpha_{\sigma(\tilde{i})}}(v)
\end{aligned} \tag{4.46}$$

并将其与 $\mathrm{CE}^{f}_{\mathfrak{g}}(u)\otimes_{\mathrm{CE}_{\mathfrak{g}}}(-1)^{|g||u|}\mathrm{CE}^{g}_{\mathfrak{g}}(v)$ 的以下表达式进行比较，

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{j=1\\k=1}}^{\infty}\frac{1}{\tilde{j}!\tilde{k}!}(-1)^{|x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_{\tilde{j}}}|_{\mathrm{rev}}+\sum_{l=1}^{\tilde{j}}|x_{\alpha_l}|(l+|f|)+|x_{\alpha_j}\cdots x_{\alpha_{\tilde{j}+\tilde{k}}}|_{\mathrm{rev}}+\sum_{l=j}^{\tilde{j}+\tilde{k}}|x_{\alpha_l}|(l+\tilde{j}+|g|)+|g||u|} \\
&\qquad \theta^{\alpha_1}\cdots\theta^{\alpha_{\tilde{j}}} f^{j}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{\tilde{j}}}(u)\otimes_{\mathrm{CE}_{\mathfrak{g}}}\theta^{\alpha_j}\cdots\theta^{\alpha_{\tilde{j}+\tilde{k}}} g^{k}_{\alpha_j,\ldots,\alpha_{\tilde{j}+\tilde{k}}}(v)
\end{aligned} \tag{4.47}$$

由此可恢复（4.46），经重排各项之后。最后，我们显然有幺半单位的保持$\mathrm{CE}^{\mathbb{K}}_{\mathfrak{g}} = \mathrm{CE}_{\mathfrak{g}}$ 以及对称编织的保持$\mathrm{CE}^{\gamma^{U\,V}}_{\mathfrak{g}} = s_{\mathrm{CE}^{U,}_{\mathfrak{g}},\ \mathrm{CE}^{V}_{\mathfrak{g}}}$。 □

参考文献

[All10] M. P. Allocca， L_∞ 代数表示论，博士论文，北卡罗来纳州立大学（2010）。 https://www.proquest.com/docview/897930696[All14]M. P. Allocca，“ L_∞-模的同态”，J. Homotopy Relat. Struct. 9, 285–298 (2014)。[BV83] I. A. Batalin与G. A. Vilkovisky，“可约规范理论的费曼规则”，Phys. Lett. B 120, 166–170 (1983)。[BF83] I. A. Batalin与E. S. Fradkin，“可约规范理论的广义正则形式主义与量子化”，Phys. Lett. B 122, 157–164 (1983)。[BBvD85] F. A. Berends、G. J. H. Burgers与H. van Dam，“关于构造涉及高自旋无质量粒子的相互作用的理论问题”，Nucl. Phys. B 260, 295—322 (1985)。[CPTVV17] D. Calaque、T. Pantev、B. To¨en、M. Vaqui´e与G. Vezzosi，“移位泊松结构与变形量子化”，J. Topol. 10, no. 2, 483–584 (2017) [arXiv:1506.03699[math.AG]]。[CFM12] L. S. Cirio与J. Faria Martins，“Knizhnik-Zamolodchikov连接的范畴化”，Differential Geom. Appl. 30, no. 3, 238–261 (2012) [arXiv:1106.0042 [hep-th]]。[CFM15] L. S. Cirio与J. Faria Martins，“无穷小 2-编织与微分交叉模”，Adv. Math. 277, 426–491 (2015) [arXiv:1309.4070 [math.CT]]。[CFM17] L. S. Cirio与J. Faria Martins，“通过弦Lie-2-代数中的无穷小 2-Yang-Baxter算子对 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ Knizhnik-Zamolodchikov连接进行范畴化”，Adv. Theor. Math. Phys. 21, 147–229 (2017) [arXiv:1207.1132 [hep-th]]。[FLS02] R. Fulp、T. Lada与J. Stasheff，“由规范变换诱导的Sh-Lie代数”，Comm. Math. Phys. 231, 25—43 (2002)。[JY21] N. Johnson与D. Yau，二维范畴，Oxford University Press, Oxford (2021) [arXiv:2002. 06055 [math.CT]]。[JMRSW19] B. Jurco、T. Macrelli、L. Raspollini、C. Saemann与M. Wolf，“L_∞-代数、BV形式主义与经典场”，LMS/EPSRC Durham Symposium on Higher Structures in M-Theory, Wiley 67, no. 8-9, Fortschritte der Physik (2019) [arXiv:1903.02887[hep-th]]。[Kas95] C. Kassel，量子群，Grad. Texts in Math. 155, Springer-Verlag (1995)。[Kel82] G. M. Kelly，富范畴论的基本概念，London Math. Soc. Lecture Note Ser. 64, Cambridge University Press, Cambridge-New York (1982)。 [Reprints in Theory and Applications of Categories 10, 1–136 (2005)。[KLS24]C. Kemp、R. Laugwitz与A. Schenkel，“高阶Chevalley-Eilenberg代数上的移位泊松结构”，即将发表于《数学物理通讯》[arXiv:2412.12804 [math.QA]]。[KLS25] C. Kemp、R. Laugwitz与A. Schenkel，“由2-移位泊松结构得到的无穷小 2-编织”，J. Geom. Phys. 212, 105456 (2025) [arXiv:2408.00391 [math.QA]]。[Kem25] C. J. D. Kemp，“由3-移位泊松结构得到的Syllepses以及对无穷小 2-编织的二阶积分”，arXiv:2505.01949 [math.QA]。

[Kem25'] C. J. D. Kemp，《通过 CMKZ 2-联络的 2-全纯对无穷小 2-编织进行 Cartier 积分，I：六边形算子与 Breen多胞体》，arXiv:2508.01944[math.QA]。[KS22]A. Kraft 和 J. Schnitzer，《面向实践数学家的 L_∞-代数及其同伦论导论》，Rev. Math. Phys. 36，第 01 期，2330006 (2024)[arXiv:2207.01861 [math.QA]]。[LM95] T. Lada 和 M. Markl，《强同伦李代数》，Commun Algebra，23，第 6 期，2147—2161 (1995) [arXiv:hep-th/9406095]。[LS93] T. Lada 和 J. Stasheff，《面向物理学家的 sh 李代数导论》，Int. J. Theor. Phys. 32，1087–1103 (1993) [arXiv:hep-th/9209099]。[Lad04] T. Lada，《L_∞ 代数表示》，Appl. Categorical Struct. 12，29–34 (2004)。[LPV13] C. Laurent-Gengoux、A. Pichereau 和 P. Vanhaecke，《泊松结构》，Grundlehren Math. Wiss.，Springer，Heidelberg (2013)。[Pri17] J. P. Pridham，《导出 N-栈上的移位泊松结构与辛结构》，J. Topol. 10，第 1 期，178–210 (2017) [arXiv:1504.01940 [math.AG]]。[Pri18] J. P. Pridham，《导出微分几何中的移位泊松结构与变形量子化概要》，arXiv:1804.07622 [math.DG]。[Rie14] E. Riehl，《范畴同伦论》，New Math. Monogr. 24，Cambridge University Press，Cambridge (2014)。[Saf21] P. Safronov，《作为移位泊松结构的泊松-李结构》，Adv. Math. 381，论文编号 107633 (2021) [arXiv:1706.02623 [math.AG]]。[Sch01] P. Schauenburg，《将幺半范畴变为严格范畴》，New York J. Math 7，257–265 (2001)。[SS85] M. Schlessinger 和 J. Stasheff，《切上同调与变形理论的李代数结构》，J. Pure Appl. Algebra 38，313–322 (1985)。[Sta92] J. Stasheff，《微分分次李代数、拟霍普夫代数与高阶同伦代数》，载于：P. P. Kulish（编），《量子群》，Lecture Notes in Mathematics，1510，Springer，Berlin，Heidelberg (1992)。[Sta97] J. Stasheff，《约束泊松代数的同调约化》，J. Differential Geom. 45，第 1 期，221–240 (1997) [arXiv:q-alg/9603021]。[Sta97'] J. Stasheff，《Batalin–Vilkovisky方法的（隐秘？）同调代数》，arXiv:hep-th/9712157。[Sta19] J. Stasheff，《L-infinity 与 A-infinity 结构：过去与现在》，Higher Struct. 3，第 1 期，292–326 (2019) [arXiv:1809.02526 [math.QA]]。[CW94] C. A. Weibel，《同调代数导论》，Cambridge Studies in Advanced Mathematics，Cambridge University Press，Cambridge (1994)。[WZ92] E. Witten 和 B. Zwiebach，《二维弦论中的代数结构与微分几何》，Nucl. Phys. B 377，55—112 (1992)。[Zwi93] B. Zwiebach，《闭弦场论：量子作用量与 Batalin–Vilkovisky主方程》，Nucl. Phys. B 390，33—152 (1993)。