arXiv:2602.16103v1 [math.AG] 18 Feb 2026

Vakil–Zinger模空间的拓扑

Terry Dekun Song

摘要。我们导出由 Vakil–Zinger 构造的去奇异化亏格一映射空间 $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)$ 的有理同调的一组生成元，并定性描述这些生成元之间的关系。研究结果建立在对热带几何所产生的模空间分层的详细考察，以及分层的 Borel–Moore 同调群上的权滤过所施加的约束之上，并扩展了此前关于$\sim\mathcal{M}_{g,n}$· 的研究中所用的技巧。我们的结果表明，$\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)$ 的偶同调是挠性的，并由亏格零和约化亏格一Gromov–Witten理论所控制。我们验证了 $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)$ 的霍奇猜想和泰特猜想, 完全描述了其有理皮卡群，并重新得到关于奇上同调消失的已知结果。我们的方法也适用于亏格一稳定映射 $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)$ 的纯权同调群。

—

目录

1. 引言.1 2. 映射空间的分层 .8 3. 构件.13 4. 生成元 .24 5. 关系 .29 参考文献.39

1. 引言

设 $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)$ 为从带有 n 个标记点的光滑亏格一曲线到射影空间的次数为 d 的映射之模空间。稳定映射紧化

$$\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d) \subset \overline{\mathcal{M}}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)$$

按次数标记的对偶图分层，各层均为光滑局部闭分层。然而，最小亏格一子曲线（核心）被压缩的分层具有超额维数，因此 $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)$ 是可约的。主分支 $\mathcal{M}_{1\,n}^{\text{main}},(\mathbb{P}^r, d) \subset \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)$ 定义为 $\overline{\mathcal{M}_{1,n}}(\mathbb{P}^r, d)$ 在 $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)$。它是奇异的，而稳定映射的可光滑化性难以刻画和处理。

在 [VZ08], Vakil 和 Zinger 构造了一个优美的消奇异化

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d) \to \overline{\mathcal{M}}_{1,n}^{\text{main}}(\mathbb{P}^r, d).$$

堆栈$\mathcal{M}_{1,\,n}(\mathbb{P}^r,\ d)$ Ranganathan–Santos-Parker–Wise 为其给出了模解释[RSPW19]，将其视为来自中心对齐的亏格一曲线的映射的模空间：他们构造了一个加权分层爆破$\mathcal{M}_1^{\mathrm{cen}}{}_{,\,n} \to \mathcal{M}_{1,\,n}$它参数化亏格一稳定曲线，并附带收缩到椭圆奇点的映射，使得自然映射$\mathcal{M}_{1,\,n}(\mathbb{P}^r, d) \to \mathcal{M}_{1,\,n}$能够经由它分解。

本文通过生成元及其关系（定理 A、B），借助分层谱序列、低亏格曲线上线性系的拓扑，以及其基点如何控制同调类之间的关系，描述了$\mathcal{M}_{1,\,n}(\mathbb{P}^r,\ d)$

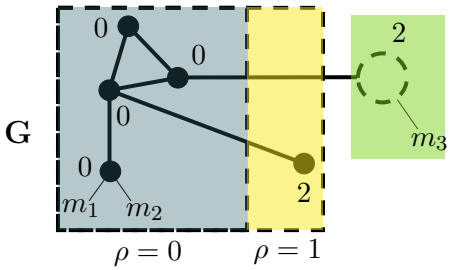
1.1. 中心对齐分层。$H_\star(\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d))$ 的表示中的生成元取自 $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)$ 按中心对齐的 $(1, n, d)$-图所作的分层：这一构造由 [RSPW19]提出，并在 [KS24a]中回顾。

当亏格一子图具有正次数时，中心对齐图与通常的稳定映射对偶图一致，我们称之为$(1,\ n, d)$-图，相应的分层也位于$\mathcal{M}_{1,\,n}(\mathbb{P}^r,\ d)$中。当核心的总次数为零时，$(1,\ n,\ d)$-图（通常记作$\mathbf{G}$）附带中心对齐的数据 ρ（定义 2.4），该数据将部分顶点划分到各个层级。

在本文中，我们将分层粗化为中心对齐的 $(1, n, d)$-图在有理尾的收缩和萌生下的等价类——即不接受中心对齐的亏格零子图（定义2.9）。与通常的稳定映射 [BM96,§3]，局部闭分层 $\mathcal{M}_{[\mathbf{G},\rho]}$ 属于 $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)$ 类似，它们是以下纤维积（引理 2.15）：

(1) $\mathcal{M}_{1\,n}^{\mathrm{cen}}{}_{,}$中的一个对偶图分层，它是,$_n$,中一个对偶图分层上的环面丛；(2) 一组带标记点的亏格零映射，并在粘接点上配备指定的切向量，使得这些映射将切向量之和映为零；(3) 亏格零稳定映射。

例 1.1. 一个分层 $[\mathbf{G}\ \rho]$ 属于 $\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{P}^r,4)$. 三个纤维积因子分别以灰色、黄色和绿色阴影标出。虚线圆圈表示亏格零稳定映射，数字表示次数。



1.2. **分层上的权滤过**。下文中，我们使用*Borel–Moore*同调，因为它接收来自 Chow 同调的循环类映射，并且关于分层具有函子性。对于光滑空间，Borel–Moore 同调群与奇异上同调在 Poincar´e 意义下对偶。中心

$\widetilde{\mathcal{M}}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)$的对齐分层诱导出一个Borel–Moore同调谱序列

$$E^1_{p,q} = \bigoplus_{\substack{[\mathbf{G},\rho] \\ \dim \widetilde{\mathcal{M}}_{[\mathbf{G},\rho]}=p}} H^{\mathrm{BM}}_{p+q}(\mathcal{M}_{[\mathbf{G},\rho]}) \Rightarrow H_{p+q}(\widetilde{\mathcal{M}}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)).$$

第一页的微分由边界映射诱导，是熟知的切除长正合列的推广，并且与混合霍奇结构相容 [Ara05，引理 3.8]. 由于 $\widetilde{\mathcal{M}}_{1,\ n}(\mathbb{P}^r,\ d)$ 是光滑、适当的 Deligne–Mumford叠， $H_{p+q}(\mathcal{M}_{1,\ n}(\mathbb{P}^r,\ d))$ 是纯权 $-(p+q)$。 将谱序列 $E^k_{p,\ q} \to E^k_{p-k,\ q+k-1}$ 的微分截断至权$-(p+q)$， 我们观察到，只有纯权商 $\mathrm{gr}^W_{-(p+q)}E^1_{p,\ q}$ 延续至 $E^\infty_{p\ ,\ q}$， 并且存在一系列满射

$$\mathrm{gr}^W_{-(p+q)}E^1_{p,q} \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow \mathrm{gr}^W_{-(p+q)}E^k_{p,q} \twoheadrightarrow \mathrm{gr}^W_{-(p+q)}E^{k+1}_{p,q} \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow E^\infty_{p,q}$$

with

$$\mathrm{gr}^W_{-(p+q)}E^{k+1}_{p,q} = \mathrm{gr}^W_{-(p+q)}E^k_{p,q} / \left(\mathrm{im} : \mathrm{gr}^W_{-(p+q)}E^k_{p+1,q} \to \mathrm{gr}^W_{-(p+q)}E^k_{p,q}\right).$$

注 1.2。 对偶地，我们也可以对紧支撑上同调的分层谱序列进行截断

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{\substack{[\mathbf{G},\rho] \\ \dim \mathcal{M}_{[\mathbf{G},\rho]}=p}} H^{p+q}_c(\mathcal{M}_{[\mathbf{G},\rho]}) \Rightarrow H^{p+q}(\widetilde{\mathcal{M}}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d))$$

并且存在一系列单射

$$E^{p,q}_\infty \subset \cdots \subset \mathrm{gr}^W_{p+q}E^{p,q}_{k+1} \subset \mathrm{gr}^W_{p+q}E^{p,q}_k \subset \cdots \subset \mathrm{gr}^W_{p+q}E^{p,q}_1$$

由.....给出

$$\mathrm{gr}^W_{p+q}E^{p,q}_{k+1} = \ker\left(\mathrm{gr}^W_{p+q}E^{p,q}_k \to \mathrm{gr}^W_{p+q}E^{p+k,q-k+1}_k\right) \subset \mathrm{gr}^W_{p+q}E^{p,q}_k.$$

满射性（分别地，单射性）由 H^{BM}_k 和 H^k_c. 上的权界推出

因此，纯权Borel–Moore同调群

$$\mathrm{gr}^W_{-\star}H^{\mathrm{BM}}_\star(\mathcal{M}_{[\mathbf{G},\rho]}) = \bigoplus_k \mathrm{gr}^W_{-k}H^{\mathrm{BM}}_k(\mathcal{M}_{[\mathbf{G},\rho]})$$

$\widetilde{\mathcal{M}}_{1,\ n}(\mathbb{P}^r,\ d))$，生成元之间的关系是“差一”Borel–Moore同调群$\mathrm{gr}^W_{-\star+1}H^{\mathrm{BM}}_\star($ $\mathcal{M}_{[\mathbf{G},\rho]})$的子商。这些$\widetilde{\mathcal{M}}$分层 $\mathcal{M}_{[\mathbf{G},\rho]}$ 的纤维积描述导出其 Borel–Moore 同调群的 K¨unneth 公式（引理 2.15），因此，纯权和差一权重分次部分由各纤维积因子上的纯权类决定，下面我们将讨论这些类。

1.3. 生成元与关系。我们通过线性系对 $\mathcal{M}_{1,\ n}(\mathbb{P}^r,\ d)$ 作部分紧化，从而研究其权重分量。令

$$\mathrm{Pic}^d_{1,n} \to \mathcal{M}_{1,n}$$

是 $\mathcal{M}_1$ 上的相对次数为 d 的（刚化）皮卡叠。它具有相对极化

$$\Theta \in A^1(\mathrm{Pic}^d_{1,n})$$

以及定义在 Pic^d_{1} 上的普遍庞加莱线丛 $\mathcal{P}_d$。令 $\pi : \mathrm{Pic}^d_{1n} \times_{\mathcal{M}_{1n}} \mathcal{C}_1\mathrm{Pic}^d_{1n}$ 为投影映射，我们定义

$$\hat{\mathcal{Q}}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d) := \mathbb{P}_{\mathrm{Pic}^d_{1,n}}(R\pi_*\mathcal{P}_d^{\oplus r+1}).$$

它是 Pic^d_{1n} 上的射影丛，使得其在 $(E\ L)$ 上方的纤维为

$$\mathbb{P}(H^0(E, L)^{\oplus r+1}).$$

它具有超平面类

$$H_{\hat{\mathcal{Q}}} \in A^1(\hat{\mathcal{Q}}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)).$$

存在一个开浸入

$$\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d) \subset \hat{\mathcal{Q}}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)$$

由没有公共基点的截面组构成。

这些类 Θ，H 经由循环类映射产生 Borel–Moore同调类。结合从 $W_{-\star}H^{\mathrm{BM}}_\star(\mathcal{M}_{1,\ n})$的平坦拉回，它们生成 $W_{-\star}H^{\mathrm{BM}}_\star(\mathcal{M}_{1,\ n}(\mathbb{P}^r,\ d))$；其偏一权重上同调也有类似的描述（引理3.26、3.26）。同样的讨论也适用于来自节点椭圆曲线的映射（引理3.33）。

接下来讨论纤维积的第二个因子，它由亏格零映射及其切向量构成。令 $\mathsf{M}_{0,1}$ 和 $\mathsf{M}_{0,2}$ 分别表示具有一个和两个标记点的光滑有理曲线的 Artin 栈。它们可识别为 $\mathbb{P}^1$ 的自同构群分类栈，其中的自同构保持标记点集合不变。特别地，存在同构

$$H^\star(\mathsf{M}_{0,i}) \cong \mathbb{Q}[\psi]$$

对于 $i = 1$、2，其中

$$\psi \in H^2(\mathsf{M}_{0,i})$$

是 ψ-类，对应于任意一个标记点，且其定义仅差一个符号。这些 ψ-类拉回后，是由满足分解性质的一价或二价亏格零顶点所支撑的类；它们也是纯权 Borel–Moore 同调中唯一的贡献（引理3.19）。为说明这一点，我们首先确定满足分解性质的参数化零亏格映射的上同调：

（1）给定特选点处的一个切向量 $p \in \mathbb{P}^r$，记为 $v \in T_p\mathbb{P}^r$，我们定义导数为 v 的带标记映射空间，并在第 3.1.1 节确定其上同调。与 [FW16] 中关于模空间 $\mathrm{Map}^*_d(\mathbb{P}^1,\ \mathbb{P}^r)$ 的结果类似，这些结果涉及从 $\mathbb{P}^1$ 到 $\mathbb{P}^r$ 的带标记参数化映射，在很大程度上与映射的次数无关；在这种情况下，其上同调与 $\mathbb{A}^r \setminus$点的上同调同构。

（2）我们描述可容许切向量空间：它们是由 $T_p\mathbb{P}^r$ 中的切向量组成、满足适当线性依赖关系的元组。

结合底空间和纤维方向的信息，推论 3.16指出，具有分解性质的参数化映射空间的纯权上同调仅由 $H^0 \cong \mathbb{Q}$. 因此，模空间中纯权类的唯一来源是通过取自同构群的商得到的 ψ-类。

最后，亏格零稳定映射及其带标记点的类似对象

$$\overline{\mathcal{M}}^*_{0,n}(\mathbb{P}^r, d) := \mathrm{ev}_{n+1}^{-1}(p) \subset \overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}(\mathbb{P}^r, d)$$

是光滑且适当的。已知它们的同调群由本性循环生成 [Opr06a], , 并且通过墙穿越推导出了一组完整的关系 [MM08a, MM07, MM08b], , 其贝蒂数也已被确定 [GP06]。

定理 A （推论 4.2）。令 $[\mathbf{G}\ \rho]$ 标记一个边界分层闭包 $\mathcal{M}_{[\mathbf{G},\rho]} \xhookrightarrow{\iota_{[\mathbf{G},\rho]}} \widetilde{\mathcal{M}}_{1,\ n}(\mathbb{P}^r,\ d)$ 其内部为 $\mathcal{M}_{[\mathbf{G},\rho]}$, 令 $F \in H^{\mathrm{BM}}_\star(\mathcal{M}_{[\mathbf{G},\rho]})$ 为以下各类的一个多项式：

(1) 从 $W_{-\star}H^{\mathrm{BM}}_\star(\mathcal{M}_{1,m})$ 拉回得到的 $m \le n+d$，(2) 上文定义的 $\Theta \in A^1$(皮卡$_1^{d'}$, $_m$) 和 H ˆ$_{\mathcal{Q}} \in A^1(\mathcal{M}_{1,n'}(\mathbb{P}^r, d'))$，(3) 从 $H^\star(\mathrm{M}_{0,1})$ 和 $H^\star(\mathrm{M}_{0,2})$ 拉回得到的类，它们分别由其 ψ-类生成，(4) 从有理尾拉回得到的类，它们同构于 $\mathcal{M}_{0,n'}(\mathbb{P}^r, d')$,

并令 $\tilde{F} \in H^{\mathrm{BM}}_\star(\mathcal{M}_{[\mathbf{G},\rho]})$ 为类 F. 的一个提升[1] 。同调群 $H_\star(\widetilde{\mathcal{M}}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d))$ 在加法意义下由形如 $(\iota_{[\mathbf{G},\rho]})_* F$. 的类生成

注 1.3。同样的技巧表明，该方法可应用于 Kontsevich稳定映射的纯权同调 $\mathrm{gr}^W_{-\star}H_\star(\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d))$, 其由上文列出的项目 (1)、(2)、(3) 生成。

生成元的精确描述比上述陈述更为精细：详见推论 4.2 。将生成元表示为中心对齐的对偶图，并在顶点或层级上以 Borel–Moore同调类作装饰，会很有帮助。

生成元之间的关系由分层的差一权分次部分控制。下面对这些关系作定性概述。

定理 B. 生成元之间的关系由以下关系乘法生成：

从 $\mathcal{M}^{\mathrm{cen}}_{1\,n}$ 拉回的关系，由 WDVV 和 Getzler 关系，以及来自中心对齐的 ψ-类关系生成[2],基点关系，我们将在 §5.1 和 5.4 中定义并计算。

参见定理5.19以及该节中的定义，以了解更精确的陈述。“生成”一词意指从每个层闭包拉回关系并推前

[1]给定开嵌入 $U \subset X$，其中 U, X 二者均光滑，则纯权 Borel–Moore 同调上的限制映射 $\mathrm{gr}^W_{-\star}H^{\mathrm{BM}}_\star(X) \to \mathrm{gr}^W_{-\star}H^{\mathrm{BM}}_\star(U)$ 是满射。我们将在 §4.1讨论提升的选取。[2]相关 3.1.3节给出了相关 ψ-类及关系的定义。

到 $\mathcal{M}_{1,\ n}(\mathbb{P}^r,\ d)$。因此，所有此类关系的线性张成取决于 $\mathcal{M}_{1,\ n}(\mathbb{P}^r,\ d)$的对偶图分层的复杂性。

基点关系涉及分层的正次数核心上的纯权类，它们对应于定理A中生成元的第(1)项和第(2)项。这些关系是通过考虑对的映射而导出的[3]

$$(\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)\cup\widetilde{\mathcal{M}}_{[\mathbb{G},\rho]},\widetilde{\mathcal{M}}_{[\mathbb{G},\rho]})\to(\hat{\mathcal{Q}}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d),\hat{\mathcal{Q}}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)\setminus\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)),$$

这些映射将有理尾（亏格零稳定映射）“坍缩”到基点。这使我们能够把左侧的 E^1-页微分与右侧的边界映射联系起来。这类似于对的映射$(\mathrm{Bl}_Z X,E)\ \to(X,Z)$，其中 $E\ \subset\mathrm{Bl}_Z X$是例外除子：边界映射$\mathrm{gr}^W_{-k}H^{\mathrm{BM}}_{k-1}(X\setminus Z)\ \to\mathrm{gr}^W_{-k}H^{\mathrm{BM}}_k(E)$完全由映射$\mathrm{gr}^W_{-k}H^{\mathrm{BM}}_{k-1}(X\setminus Z)\ \to\mathrm{gr}^W_{-k}H^{\mathrm{BM}}_k(Z)$决定。

由于基点拟映射的余维数为 r，基点关系的同调余维数不小于 $2r.$ 。这意味着在低余维数下，所有关系在下述意义下都是“挠性”的。

推论 C. $k<2r$ 中 $H^{\mathrm{BM}}_k(\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d))$ 的生成元之间的关系，在乘法意义下由 $H_\star(\mathcal{M}^{\mathrm{cen}}_{1\ n\ ,})$ 中的关系生成。

注 1.4. 设 $\mathfrak{M}^{\mathrm{cen}}_{1\ ,n}$ 是预稳定中心对齐曲线的模叠，并设 $\mathfrak{Pic}^d_{\mathfrak{M}^{\mathrm{cen}}_{1\ ,n}}\to\mathfrak{M}^{\mathrm{cen}}_{1\ ,n}$ 是其上的相对次数-d 皮卡叠。可以考虑自然映射

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)\to\mathfrak{Pic}^d_{\mathfrak{M}^{\mathrm{cen}}_{1,n}},$$

将态射 $\mathfrak{Pic}^{d,\mathfrak{M}^{\mathrm{cen}}_{1\ ,n}}_{\mathrm{VZ}}\subset\mathfrak{Pic}^d_{\mathfrak{M}^{\mathrm{cen}}_{1\ ,n}}$ 的像分层，以确定 $H^{\mathrm{BM}}_\star(\mathfrak{Pic}^{d,\mathfrak{M}^{\mathrm{cen}}_{1\ n\ ,}}_{\mathrm{VZ}})$ 的权分次部分；然后将 $\widetilde{\mathcal{M}}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)$ 表示为拟映射模空间中的无基点轨迹，它是 $\mathfrak{Pic}^{d,\mathfrak{M}^{\mathrm{cen}}_{1\ ,n}}_{\mathrm{VZ}}$ 上的一个射影丛。这为推导上述 $H_\star(\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d))$ 的生成元与关系提供了另一种方法。

1.4. **应用。** .....的偶同调 $\mathcal{M}_{1,\ n}$ 由边界类张成 [Pet14]。结合上文给出的生成元描述，$\mathcal{M}_{1,\ n}(\mathbb{P}^r,d)$ 的偶同调由挠性类和边界分层生成。这使我们能够推导出

推论 D （推论 4.4）。 $\mathcal{M}_{1,\ n}(\mathbb{P}^r,\ d)$的霍奇猜想和泰特猜想成立。

从另一个角度看，定理A 意味着，$\mathcal{M}_{1,\ n}(\mathbb{P}^r,\ d)$ 的偶同调群完全由本性循环的相交数控制，也就是说，由 $\mathbb{P}^r$.的约化亏格一格罗莫夫–维滕理论控制

通过庞加莱对偶，定理 A 也描述了 $H^\star(\mathcal{M}_{1,\ n}(\mathbb{P}^r,\ d))$ 中的霍奇结构。按照 [CLP24]，，我们记

$$\mathsf{L}:=H^2(\mathbb{P}^1),\mathsf{S}_{k+1}:=W_kH^k(\mathcal{M}_{1,k}).$$

[3]这里，$[\mathbb{G},\rho]$ 是一个（中心对齐的）$(1,n,d)$-图，由一个亏格一顶点以及一条有理尾或一个水平组成。

Eichler–Shimura 同构表明，S_{k+1} 对应于权$\sim$的 $SL_2(\mathbb{Z})$-尖点形式$k+1$. 它们对于奇数 $k \geq 11$. 可能非零。出现在 $H^\star(\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d))$中的霍奇结构对于 $k \geq n + d$. 是 L 与 S_{k+1} 的乘积。特别地，$\sim H^\star(\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d))$中的奇权霍奇结构的权至少为 11。由于$\mathcal{M}_{1,\ n}(\mathbb{P}^r, d)$具有纯权上同调，我们重新得到 Fontanari [Fon07]的如下结果。

推论 E（推论 4.6）。 **</style}对于奇数 以及所有，** $H^k(\mathcal{M}_{1,\ n}(\mathbb{P}^r,\ d))$ 均为零。

霍奇结构 $L^j \prod_k S_{k+1}^{\ell_k}$ 的存在与 $\widetilde{\mathcal{M}}_{1,\ n}(\mathbb{P}^r,\ d)$ 的图形分层有关。这使我们能够更精确地描述每个霍奇结构的贡献。

例 1.5（§4.3）。 对于 $r \geq 11$, 使 $H^\star(\mathcal{M}_{1,\ 0}(\mathbb{P}^r,\ d))$ 具有非零奇数上同调的最小 d 是 $d = 11$. 在此情形下， $H^{123}(\mathcal{M}_{1,\ 0}(\mathbb{P}^r,\ 11)) \neq 0$ 是第一个非零奇上同调次数。使 $H^k(\mathcal{M}_{1,\ 0}(\mathbb{P}^r,\ d))$ 非零的最小奇数上同调次数 k 由 $k = 13$ 在 $d \geq 66$. 时实现

利用 $\mathrm{gr}_2^W H^1(\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d))$ 消失这一事实，我们如下确定 $\sim\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)$ 的有理皮卡群。

推论 F（命题 4.9）。 第二上同调群 $H^2(\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d))$ 具有由 Θ, H, ψ, 以及边界除子给出的基。循环类映射

$$A^1(\widetilde{\mathcal{M}}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d))_{\mathbb{Q}} \to H^2(\widetilde{\mathcal{M}}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d))$$

是一个同构。

自然可以期望，偶同调次数中的基点关系在 $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)$ 的$\sim$周群中容许提升。 在这种情况下，循环类映射 $A_i(\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d))_{\mathbb{Q}} \to H^{2i}(\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d))$ 对所有 $i > 0$. 都是同构

1.5. 相关工作。在分层空间中理解权滤过的策略远非新颖。这些想法可以追溯到 Arbarello–Cornalba[AC98] 关于 $\mathcal{M}_{g,n}$ 的早期工作，并被 Petersen [Pet14] 在 $\mathcal{M}_{1,n}$ 上借助其对偶图分层卓有成效地加以运用。它们也构成了 Bergstr¨om–Faber–Payne [BFP24],、Canning–Larson [CL24],、Canning–Larson–Payne[CLP24, CLP23], 以及 Canning–Larson–Payne–Willwacher [CLPW24a, CLPW24b, CLPW25] 关于 $\mathcal{M}_{g,n}$ 与 $\mathcal{M}_{g,n}$ 的上同调的近期突破的基础。

不同于稳定曲线模空间，映射空间中的分层通常是非平凡的纤维积。在亏格零稳定映射到旗簇的情形下，Oprea 对此进行了研究 [Opr06b]。

本工作将上述观点和技术与近期关于一属映射空间组合学的研究结合起来：其中包括涉及稳定映射的复合结构 [KS24b]，以及满足分解性质的有理函数所体现的显式零属几何 [KS24a]；后者受到 Farb–Wolfson [FW16]先前关于带参数标记点的零属映射的研究启发。

另一类重要的紧化映射空间是亏格一稳定商的模空间 [MOP11] $\mathcal{Q}_{1,\ n}(\mathbb{P}^r,\ d)$。特别是，由于 $\mathcal{Q}_{1,\ 0}(\mathbb{P}^r,\ d)$ 是光滑且适当的，我们预计本工作的技术和计算适用于此情形。它们将补充 Y. Cooper [Coo14] 关于其几何与拓扑性质的先前研究。

1.6. **未来方向**。作者正在进行的工作 [Son26] 重新研究了 $H^*(\mathcal{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r,d))$ 的生成元和关系，并运用对偶图分层。这项工作取得的结果将补充 Mustata–Mustata [MM08a,MM07,MM08b] 运用墙穿越技术得到的结果；比较这两者并非显而易见，值得进一步研究。

关于内部 $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)$，贝蒂数以及完整的权滤过仍然未知：本文研究纯部分和偏一部分，而根据 [KS24a] 运用边界复形技术已知，最高权上同调为零。另一方面，本文关于 $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)$ 的上同调及其分层闭包的结果，或可为计算其他权分次部分 $\mathrm{gr}_k^W H_c^\star(\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d))$ 的图复形带来启发。近期的 Serre示性数计算在 [KS26]，中确定了 $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)$ 的权分次欧拉示性数，这为一定范围内上同调次数的次数稳定性提供了证据。

尽管当前结果尚不能直接给出$\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)$的Poincar´é多项式的闭式公式，但与S. Kannan合作开展的研究正致力于计算其 S_n-等变格罗滕迪克环类，这些环类特化后即为Poincar´é多项式。

Battistella–Carocci [BC23] 通过结合$\mathcal{M}_{2,n}(\mathbb{P}^r,d)$ 的视角 [RSPW19] 以及亏格二戈伦斯坦奇点和容许覆盖理论，构造了一个正规交叉紧化。结合Petersen先前关于$\mathcal{M}_{2,n}$ [Pet15,Pet16], 的上同调研究，本工作的技术应能对他们构造的空间的上同调作出描述。

致谢。作者感谢导师Dhruv Ranganathan进行了启发性的讨论，并感谢Samir Canning和Siddarth Kannan对先前稿件提出宝贵意见。同时，也感谢Alexis Aumonier、Sam Payne、Michele Pernice、Oscar Randal-Williams和Ravi Vakil的热心交流与鼓励。

本研究由剑桥信托国际奖学金资助。

约定。除非另有说明，所有（余）同调群均取系数于 $\mathbb{Q}$局部系统，并带有混合霍奇结构。“光滑”指作为 Deligne–Mumford 叠是光滑的，其粗模空间则可能出现奇异性。对于维数为 m的 M 光滑 DM 叠，我们用 $[M]\in H_{2m}^{\mathrm{BM}}(M)$表示其基本类。

2. 映射空间的分层

2.1. **对偶图**。我们回顾 $\mathcal{M}_{g,n}(\mathbb{P}^r,d)$ 上的装饰对偶图分层。

定义 2.1。 [KS24a，定义 1。1] 令 $g, n, d \geq 0$.

一个（g， n， d）-图是一个元组 $\mathbf{G} = (G, w, \delta, m)$，其中：

（1） G 是一个连通图；（2） $w\colon V(\mathbf{G}) \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 称为亏格函数；（3） $\delta\colon V(\mathbf{G}) \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 称为次数函数；
（4） $m\colon \{1, \ldots, n\} \to V(\mathbf{G})$称为标记函数。

它们须满足：
（1）$\dim_{\mathbb{Q}} H_1(G, \mathbb{Q}) + \sum_{v \in V(\mathbf{G})} w(v)$
$= g$；（2）$\sum_{v \in V(\mathbf{G})} \delta(v) = d$。

如果对所有满足 $\delta(v) = 0$ 的顶点 $v \in V(\mathbf{G})$，都有.....，则称（g， n， d）-图为稳定的。

$$2w(v) - 2 + \mathrm{val}(v) + |m^{-1}(v)| > 0,$$

其中，$\mathrm{val}(v)$ 表示 v 的图的度。

(g, n, d)-图的自同构群是一个与亏格、次数和标记装饰函数相交换的图自同构。

给定一个 (g, n, d)-图 $\mathbf{G}$ 和一条边 $e \in E(\mathbf{G})$，我们定义 $\mathbf{G}/e$ 为一个 (g, n, d)-图，其底层图为商图$\mathbf{G}/e$，且其装饰定义如下：

(1) 若 e 不是环，则与 e 关联的两个顶点 v_1 和 v_2 合并为一个新顶点v'。于是

$$\delta(v') = \delta(v_1) + \delta(v_2), w(v') = w(v_1) + w(v_2),$$

以及 $m^{-1}(v') = m^{-1}(v_1) \cup m^{-1}(v_2)$。
(2) 若 e 是环，则将支撑 e 的顶点上的 w 增加 1。次数函数和标记函数保持不变。

所得的（g， n， d）图$\mathbf{G}/e$ 称为$\mathbf{G}$ 沿边 e. 的边收缩

（g， n， d）图的集合构成一个范畴，其态射由同构和边收缩生成。

定义 2.2. 设$\mathbf{G}$ 为一个（g， n， d）图。给定$\mathbf{G}'$ 是$\mathbf{G}$的一个（朴素）子图，其增强$\mathbf{G}'$是一个对偶图，其亏格和标记装饰取自$\mathbf{G}$，并加上与连接$\mathbf{G}'$ 中的顶点和$\mathbf{G}'$. 外部顶点的边一一对应的额外腿。我们将额外腿的集合记作 $L'(\mathbf{G}')$。

在下文中，“子图”一词始终指其增强。

定义 2.3. 设$\mathbf{G}$ 是一个 $(1, n, d)$-图。$\mathbf{G}$ 的核心 记作$\mathbf{G}^c$，是$\mathbf{G}$ 中亏格为一的最小子图。

在 $V(\mathbf{G}) \setminus V(\mathbf{G}^c)$ 上存在偏序集结构：若 $f_1 \leq f_2$ 从[4] 到 f_2 的唯一道路$\mathbf{G}^c$经过 f_1。我们将偏序集结构扩展到 $V(\mathbf{G})$，并规定 $V(\mathbf{G}^c)$中的所有元素并列为唯一的最小元。

中心对齐对偶图是在其~顶点上具有部分定义的序的 $(1, n, d)$-图。正规交边界 $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d) \setminus \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)$ 的局部闭分层由中心对齐的 $(1, n, d)$-图标记。以下定义遵循 [RSPW19]，并改编自 [KS24a], 中的阐述，后者主要关注密切相关且更精细的径向对齐 $(1, n, d)$-图的分层。

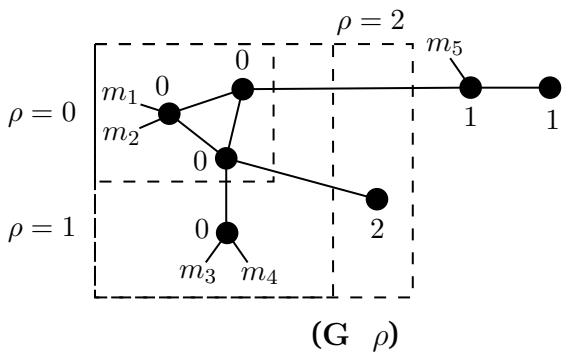
定义 2.4. 中心对齐的 $(1, n, d)$-图是具有正总次数核心的 $(1, n, d)$-图，或者是核心总次数为零的 $(1, n, d)$-图 $\mathbf{G}$，并带有连通子图 $\mathbf{G}_\rho$（属于 $\mathbf{G}$）以及层级映射 $\rho\colon V(\mathbf{G}_\rho) \to \{0, \ldots, |\rho|\}$ 的数据。二元组 $(\mathbf{G}_\rho, \rho)$ 须满足以下条件：

(1) 子图$\mathbf{G}_\rho$ 包含核心，(2) 原像 $\rho^{-1}(0)$ 等于核心，(3) 在 $V(\mathbf{G}_\rho)$, 只有 $\rho^{-1}(|\rho|)$ 具有正次数顶点，且它们的次数之和大于一，(4) 映射 ρ 是偏序集之间的映射，其中 $V(\mathbf{G}_\rho)$ 上的偏序集结构是从 $V(\mathbf{G})$ 上的偏序集结构限制得到的.

中心对齐的 $(1, n, d)$-图之间的同构，是指底层 $(1, n, d)$-图之间与对齐函数相交换的同构。

注 2.5. 上文定义的中心对齐与 [RSPW19,§4.6] 中的定义相同，其中 δ 等于 $(1, n, d)$-对偶图的收缩半径。

例 2.6. 下图展示了一个中心对齐的 $(1, n, d)$-图，带有 $n = 5$和 $d = 4$。核心的总次数为零，且唯一的收缩半径顶点被赋予对齐函数 ρ。



$(\mathbf{G} \quad \rho)$

我们要求中心对齐的 $(1, n, d)$-图之间的边收缩与其层级相容。

[4]注意，将$\mathbf{G}$ 的核心收缩后会得到一棵有根树，因此这条路径确实是唯一的。

定义 2.7. 设 $(\mathbf{G}\ \rho)$ 是一个中心对齐的 $(1,n,d)$-图。给定一个整数 $i\in\{1,\dots,|\rho|\}$，我们将沿 i 对 $(\mathbf{G}\ \rho)$ 作径向合并，记作 $(\mathbf{G}\backslash i,\rho\backslash i)$，定义如下：

(1) 将 ρ 与满射 $\{0,\dots,k\}\to\{0,\dots,k-1\}$ 复合，该满射将所有 $j\geq i$ 减 1；(2) 每当 $v,w\in V(\mathbf{G})$ 中有 $v\in f^{-1}(i-1)$ 和 $w\in f^{-1}(i)$，且两者之间存在一条边 e，就像处理 $(1,n,d)$-图那样，对 e 进行边收缩。

中心对齐的 $(1,n,d)$-图构成一个范畴，其态射由同构、径向合并，以及 $(\mathbf{G}\ \rho)$ 中位于 $\mathbf{G}_\rho$ 之外的边的收缩和连接 $\rho^{-1}(0)$. 中顶点的边的收缩生成。

定义 2.8. 中心对齐的 $(1,n,d)$-图 $(\mathbf{G}\ \rho)$ 的有理尾子图，是 $\mathbf{G}$ 中不包含 $\mathbf{G}_\rho$· 中任何顶点的极大连通子图。$(\mathbf{G}\ \rho)$ 的粗代表是将每个有理尾子图收缩为单个顶点后得到的中心对齐的 $(1,n,d)$-图。

定义 2.9. 若两个中心对齐的 $(1,n,d)$-图具有同构的粗代表，则称它们粗等价，并据此在该集合上定义一个等价关系。我们用 $[\mathbf{G}\ \rho]$ 表示 $(\mathbf{G}\ \rho)$的等价类。中心对齐的 $(1,n,d)$-图之间的态射会在其粗等价类上诱导出态射。特别地，粗等价类的自同构与其作为中心对齐图的粗代表的自同构一致。

$\sim$ $\widetilde{\ }$2.2. $,_n(\mathbb{P}^r,d)$的图分层。现在我们描述与中心对齐对偶图的粗等价类相关联的 $\mathcal{M}_{(\mathbf{G},\rho)}$ 粗分层。每个分层都是以下对象的纤维积：

(1) 中心对齐的亏格一曲线模空间中的一个分层 $\mathcal{M}_1^{\mathrm{cen}}{}_{,n}$ [RSPW19, §3],(2)一组满足分解性质的亏格零映射 [RSPW19，定义 4。1],(3) 带标记点的亏格零稳定映射。

分解性质在相关文献中是用椭圆奇点来定义的，并在后续工作 [BNR21, §2.4], [KS24a, Lemma 3.10] 中表述为关于亏格零映射某些导数的线性相关条件，我们将在下文解释。

定义 2.10. 令

$$\overline{\mathcal{M}}^*_{0,n}(\mathbb{P}^r,d)\subset\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}(\mathbb{P}^r,d),\mathcal{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r,d)\subset\mathcal{M}_{0,n+1}(\mathbb{P}^r,d)$$

为求值映射在 $p\in\mathbb{P}^r$ 上的纤维

$$\mathrm{ev}_{n+1}:\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}(\mathbb{P}^r,d)\to\mathbb{P}^r,\mathcal{M}_{0,n+1}(\mathbb{P}^r,d)\to\mathbb{P}^r$$

它们是扎里斯基局部平凡纤维化。

定义 2.11。 令 $\boldsymbol{\delta}\in\mathbb{Z}^\ell_{\geq 0},\boldsymbol{m}\in\mathbb{Z}^\ell_{\geq 0}$ 为次数与标记点（数量）的元组。定义 $\mathbb{P}^\circ\mathcal{V}_{(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{m})}$ 为 $\prod_{i=1}^\ell\mathcal{M}^*_{0,m_i}(\mathbb{P}^r,\delta_i)$ 上的 $\mathbb{G}_m^{\ell-1}$-扭子，用以记录冻结标记点（即 p_{n+1}）处的一组切向量 $[v_1,\dots,v_\ell]$，并视重新缩放等价。

我们将因式分解映射空间定义为

$$\mathcal{M}^{\mathbf{F}}_{(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{m})} := \{((f_1,\dots,f_\ell),[v_1,\dots,v_\ell]) \in \mathbb{P}^\circ\mathcal{V}_{(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{m})} \mid \sum_{i=1}^{\ell} \partial f_i(v_i) = 0 \in T_p\mathbb{P}^r\}.$$

这是一个闭子概形 $\mathcal{M}^{\mathbf{F}}_{(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{m})}$.

定义 2.12. 设 $(\mathbf{G}\ \rho)$ 是一个中心对齐的 $(\mathbf{1},n,d)$-图，其核心的总次数为零。其收缩核记为 $\mathbf{G}^{cc}$，是顶点位于 $V_\rho(\mathbf{G})\backslash\rho^{-1}(|\rho|)$且这些顶点的次数均为零的最大子图。将 ρ 限制到 $\mathbf{G}^{cc}$，便赋予数对 $(\mathbf{G}^{cc},\rho|_{\mathbf{G}^{cc}})$ 一个中心对齐的亏格一热带曲线结构 [RSPW19, §3.3]。设

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{(\mathbf{G}^{cc},\rho|_{\mathbf{G}^{cc}})} \subset \overline{\mathcal{M}}^{\mathrm{cen}}_{1,|L'(\mathbf{G}^{cc})|}$$

$\widetilde{\ }$是与该数对关联的局部闭分层。为简洁起见，在不致混淆时，我们可以使用记号 $\mathcal{M}_{\mathbf{G}^{cc}}$。

注 2.13. 该$\mathcal{M}_1^{\mathrm{cen}}$、$_n \longrightarrow \mathcal{M}_{1,\ n}$是沿边界分层进行的一系列加权爆破$\widetilde{\ }$的闭包$\mathcal{M}_{1,\ n}$ [RSPW19, 命题 3.3。4]。分层 $\mathcal{M}_{\mathbf{G}^{cc}}$ 是稳定曲线分层 $\mathcal{M}_{\mathbf{G}^{cc}} \subset \mathcal{M}_{1}$之上的一个环面纤维丛的全空间，$_n$.

令 $[\mathbf{G}\ \rho]$ 为一个中心对齐的 $(\mathbf{1},n,d)$-图的粗等价类，其核心的$\widetilde{\ }$总次数为零，并将其对应的分层记为 $\mathcal{M}_{[\mathbf{G},\rho]}$.

定义 2.14. 令

$$\widetilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{ord}}_{[\mathbf{G},\rho]} \to \widetilde{\mathcal{M}}_{[\mathbf{G},\rho]}$$

为有限覆盖，它标记 $\rho^{-1}(|\rho|)$ 上的顶点以及 $[\mathbf{G}\ \rho]$. 的有理尾子图。我们有 $\widetilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{ord}}_{[\mathbf{G},\rho]}/\mathrm{Aut}([\mathbf{G}\ \rho])$ $\cong \widetilde{\mathcal{M}}_{[\mathbf{G},\rho]}$. 令 $(\boldsymbol{\delta}^{(r)}_{[\ \mathbf{G}\ \rho]}, \boldsymbol{m}^{(r)}_{[\ \mathbf{G}\ \rho]})$ 为收缩半径 $\rho^{-1}(|\rho|)$. 上顶点的次数与标记组成的元组。令 $(\boldsymbol{\delta}_{[\mathbf{G},\rho]}, \boldsymbol{m}_{[\mathbf{G},\rho]})$ 为有理尾子图的次数与标记组成的元组。

$\widetilde{\ }$**引理 2.15.** $\mathcal{M}^{\mathrm{ord}}_{[\mathbf{G},\rho]}$ 的 Borel–Moore 同调具有 K¨unneth 公式

$$H^{\mathrm{BM}}_\star(\widetilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{ord}}_{[\mathbf{G},\rho]}) \cong H_\star(\mathbb{P}^r) \otimes H^{\mathrm{BM}}_\star(\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbf{G}^{cc}}) \otimes H^{\mathrm{BM}}_\star(\mathcal{M}^{\mathbf{F}}_{(\boldsymbol{\delta}^{(r)},\boldsymbol{m}^{(r)})}) \otimes H_\star\left(\prod_{j=1}^{N_{[\mathbf{G},\rho]}} \overline{\mathcal{M}}^*_{0,m_i}(\mathbb{P}^r,\delta_i)\right).$$

取有限群商，

$$H^{\mathrm{BM}}_\star(\widetilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{ord}}_{[\mathbf{G},\rho]})_{\mathrm{Aut}[\mathbf{G},\rho]} = H^{\mathrm{BM}}_\star(\widetilde{\mathcal{M}}_{[\mathbf{G},\rho]}).$$

$\widetilde{\ }$证明。 将由 $\mathcal{M}^{\mathrm{ord}}_{[\mathbf{G},\rho]}$ 参数化的映射限制到收缩核、收缩$\widetilde{\ }$半径 $|\rho|$ 上的顶点以及有理尾子图，表明 $\mathcal{M}^{\mathrm{ord}}_{[\mathbf{G},\rho]}$ 是一个迭代的Zariski局部平凡纤维化的全空间，其纤维为上文所示的张量积直和项。这些纤维化是Zariski局部平凡的，因为它们是ev_{n+1} : $\mathcal{M}_{0,n+1}(\mathbb{P}^r,d) \to \mathbb{P}^r$ 与$\mathcal{M}_{0,n+1}(\mathbb{P}^r,d) \to \mathbb{P}^r$. □的基变换。

注记2.16。当核心具有正的总次数时，分层 $\mathcal{M}_{[\mathbf{G},\rho]}$ 与$\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)$中的相应分层一致. 设 $\mathcal{M}_{\mathbf{G}^c}\subset\mathcal{M}_{1,n'_{\mathbf{G}^c}}(\mathbb{P}^r,\overline{\delta_{\mathbf{G}^c}})$为由子图$\mathbf{G}^c$, 所确定的亏格一稳定映射层，并设$(\boldsymbol{\delta}_{[\mathbf{G},\rho]},\boldsymbol{m}_{[\mathbf{G},\rho]})$为有理尾子图的次数与标记的元组。

在这种情况下，我们有类似的公式

$$H^{\mathrm{BM}}_\star(\widetilde{\mathcal{M}}_{[\mathbf{G},\rho]})\cong\left(H^\star(\mathcal{M}_{\mathbf{G}^c})\otimes H^\star(\prod_{j=1}^{N_{[\mathbf{G},\rho]}}\overline{\mathcal{M}}^*_{0,m_i}(\mathbb{P}^r,\delta_i))\right)_{\mathrm{Aut}[\mathbf{G},\rho]}.$$

K¨unneth公式与权滤过相容。这将 $H^{\mathrm{BM}}_\star(\mathcal{M}_{[\mathbf{G},\rho]})$的纯权分量和偏一权分量归结为其张量积分项的相应分量。

3. 构件

本节中，我们确定来自中心对齐的 $(\mathbf{1},n,d)$-图的各个顶点或水平的映射空间的 Borel–Moore 同调群的纯权分次部分和偏一权分次部分。由于我们遇到的所有映射空间都是光滑的，因此通常先确定它们的奇异上同调，再应用庞加莱对偶会更方便。

3.1. 亏格零映射的因子分解。

$H^{\mathrm{BM}}_\star(\mathcal{M}^{\mathbf{F}}_{(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{m})})$的权分次部分与 $H^\star(\mathcal{M}^{\mathbf{F}}_{(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{m})})$的权分次部分在庞加莱对偶下对应,我们通过参数化 映射空间的具体几何来描述这些空间。

定义 3.1. 令 $\mathrm{Map}^*_d(\mathbb{P}^1,\ \mathbb{P}^r)=\{f\colon\ \mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^r\mid f(\infty)=[1:1:\cdots:1]=:p\in\mathbb{P}^r\}$ 表示从 $\mathbb{P}^1$ 到 $\mathbb{P}^r$. 的次数为 d 的带参数的带标记映射空间。它可识别为无基点多项式空间的一个开子集： $\mathbb{A}^{(r+1)d}$

$$\{(f_0(t),\cdots,f_r(t))\in\mathbb{A}^{(r+1)d}\mid f_i(t)\in\mathbb{C}[t]\text{ monic of degree }d,\bigcap_{i=0}^r f_i^{-1}(0)=\varnothing\}.$$

定义 3.2. 令 $\boldsymbol{\delta}\in\mathbb{Z}^k_{\geq 0}$ 为一个次数向量。定义

$$\mathrm{Map}^{*,\mathsf{F}}_{\boldsymbol{\delta}}(\mathbb{P}^1,\mathbb{P}^r)\subset\prod_{i=1}^k\mathrm{Map}^*_{\boldsymbol{\delta}_i}(\mathbb{P}^1,\mathbb{P}^r)$$

为由带参数的带标记映射元组构成的子空间，满足切线 $d^{(i)}_\infty f_i\colon\ T_\infty\mathbb{P}^1\to T_p\mathbb{P}^r$ 的像具有某种非消失线性相关：对于任意一组基向量 $v^{(i)}\in T_\infty\mathbb{P}^1$，存在 $(\alpha_1,\ \ldots\ldots,\ \alpha_k)\in(\mathbb{C}^\star)^k$ 使得 $\sum_{i=1}^k\alpha_i d^{(i)}_\infty f_i(v^{(i)})=0$.

Let

$$\widetilde{\mathrm{Map}}^{*,\mathsf{F}}_{\boldsymbol{\delta}}(\mathbb{P}^1,\mathbb{P}^r)\to\mathrm{Map}^{*,\mathsf{F}}_{\boldsymbol{\delta}}(\mathbb{P}^1,\mathbb{P}^r)$$

此外，还需将非消失线性相关本身的数据视为在公共重缩放下等价。对于一组映射 $(f_0$、……、 $f_r)\in$ 映射 ${}^{*}_{\boldsymbol{\delta}}{}^{\mathsf{F}}$, $(\mathbb{P}^1,\ \mathbb{P}^r)$，纤维为

$$\{[\alpha_1:\cdots:\alpha_k]\in(\mathbb{C}^\star)^k/(\mathbb{C}^\star\cdot\mathrm{Id})\mid\sum_{i=1}^k\alpha_i d^{(i)}_\infty f_i(v^{(i)})=0\}.$$

注 3.3。 在对各项进行置换后，映射空间 $\mathcal{M}^{\mathbf{F}}{}_{(\boldsymbol{\delta}^{(r)},\ \boldsymbol{m}^{(r)})}$ 与其对应的参数化映射空间之间存在如下标准关系：

(1) 对于 $\boldsymbol{m}_i^{(r)} = 0,1$, $\mathcal{M}^{\mathbf{F}}{}_{(\boldsymbol{\delta}^{(r)},\boldsymbol{m}^{(r)})}$，它是参数化映射空间除以自同构群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1,*)$（$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ 的一个博雷尔子群）或 $\mathbb{C}^\star$ 所得的商，后者分别作用于来自相应一价或二价分量的参数化映射；(2) 对于 $\boldsymbol{m}_i^{(r)} \geq 2$, $\mathcal{M}^{\mathbf{F}}{}_{(\boldsymbol{\delta}^{(r)},\boldsymbol{m}^{(r)})}$，它与参数化映射空间和有序构形空间[5] $\mathrm{Conf}^{\boldsymbol{m}^{(r)}-2}(\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\})$的乘积非典范同构。

3.1.1. 带有指定切线的带标记映射。 我们首先研究沿标记点具有指定切线的带标记映射空间。

通过开嵌入

$$\mathrm{Map}^*_{\boldsymbol{\delta}_i}(\mathbb{P}^1,\mathbb{P}^r) \subset \mathbb{A}^{\boldsymbol{\delta}_i(r+1)},$$

指定一条切线等价于在 $\mathbb{A}^{\boldsymbol{\delta}_i(r+1)}$ 中取一个仿射线性子空间，其中坐标为多项式系数。仿射坐标指定一个基向量$v \in T_\infty\mathbb{P}^1$，并在 v 处取导数，得到映射

$$d_\infty : \prod_{i=1}^k \mathrm{Map}^*_{\boldsymbol{\delta}_i}(\mathbb{P}^1,\mathbb{P}^r) \to \prod_{i=1}^k T_p\mathbb{P}^r,$$

它是映射的乘积

$$d_\infty^{(i)} : \mathrm{Map}^*_{\boldsymbol{\delta}_i}(\mathbb{P}^1,\mathbb{P}^r) \to T_p\mathbb{P}^r.$$

经初等计算可得如下结果：

引理 3.4. [KS24a，引理 4。1] 映射 $d_\infty^{(i)}$ 可分解为

$$\mathrm{Map}^*_{\boldsymbol{\delta}_i}(\mathbb{P}^1,\mathbb{P}^r) \to \mathbb{A}^{\boldsymbol{\delta}_i(r+1)} \xrightarrow{p_{\boldsymbol{\delta}_i-1}} \mathbb{A}^{r+1} \to T_p\mathbb{P}^r,$$

其中，投影 $p_{\boldsymbol{\delta}_i-1}$ 记录多项式 $(r+1)$-元组的 $z^{\boldsymbol{\delta}_i-1}$-系数，第二个映射是线性映射 $\mathbb{C}^{r+1} \to \mathbb{C}^{r+1}/\mathbb{C}\cdot(1,\ 1,\ \ldots\ldots,\ 1) \cong T_p\mathbb{P}^r$.

定义 3.5. 令 $w \in T_p\mathbb{P}^r$，定义

$$\mathrm{Map}^{*,w}_\delta(\mathbb{P}^1,\mathbb{P}^r) := \{f \in \mathrm{Map}^*_\delta(\mathbb{P}^1,\mathbb{P}^r) \mid d_\infty(v) = w\}.$$

在不致混淆时，为简洁起见，我们可用 $\mathrm{Map}^{*\ w}_{\delta}$，表示 $\mathrm{Map}^{*\ w}_{\delta}(\mathbb{P}^1,\ \mathbb{P}^r)$。

注记 3.6. 由引理 3.4，$\mathrm{Map}^{*\ w}_{\delta}(\mathbb{P}^1,\ \mathbb{P}^r)$ 是开子集 $\mathrm{Map}^*_\delta(\mathbb{P}^1,\ \mathbb{P}^r) \subset \mathbb{A}^{\delta(r+1)}$ 与仿射子空间的交集

$$L^w_\delta := \{(f_0,\cdots,f_r) \mid [(p_{\delta-1}(f_i))_{i=0}^r] = [w] \in \mathbb{C}^{r+1}/\langle(1,1,\cdots,1)\rangle \cong T_p\mathbb{P}^r\},$$

因此，它特别是仿射空间中的一个开集，与 $\mathbb{A}^{\delta(r+1)-r}$. 同构

[5]由于存在一个冻结标记点，其数值与标准同构 $\mathrm{Map}_d(\mathbb{P}^1,\ \mathbb{P}^r) \cong \mathcal{M}_{0,\ 3}(\mathbb{P}^r,\ d)$ 相差一。

我们按照$\mathrm{Map}_\delta^{*\,w,}$（$\mathbb{P}^1$，$\mathbb{P}^r$）中的方法计算 [FW16]，其计算了$\mathrm{Map}_\delta^*$（$\mathbb{P}^1$，$\mathbb{P}^r$）的上同调。

引理 3.7. 当 $\delta \geq 2$ 时，对所有 w,

$$H^i(\mathrm{Map}_\delta^{*,w}) = \begin{cases} \mathbb{Q}(-r), & i = 2r-1 \\ \mathbb{Q}(0), & i = 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

当 $\delta = 1$ 和 $w \neq 0$ 时，$\mathbf{Map}_\delta^{*\,w} \cong \mathbb{A}^1$，；而当 $\delta = 1$ 和 $w = 0.$ 时，该空间为空。由于 $\mathbf{Map}_\delta^{*\,w,}$ 是光滑的，因此存在庞加莱对偶性

$$H_i^{\mathrm{BM}}(\mathrm{Map}_\delta^{*,w}) \cong H^{2((\delta-1)(r+1)+1)-i}(\mathrm{Map}_\delta^{*,w})^\vee$$

与权滤过相容。

备注 3.8. 对于 $\delta \geq 2$，$\mathbf{Map}_\delta^{*\,w}$、$(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^r)$ 的上同调及其混合霍奇结构与 $\mathbb{A}^r \backslash \mathbf{pt}$ 的上同调一致，且独立于 δ 和 $w.$。这与 Farb–Wolfson 的结果密切相关 [FW16, 定理 1.2]：当 $\delta > 0$ 时，$\mathbf{Map}_\delta^*(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^r)$ 的上同调与 $\mathbb{A}^r \backslash \mathbf{pt}$ 的上同调一致，且独立于 δ.

证明。当 $w \neq 0$ 且 $\delta = 1$时，空间 $\mathbf{Map}_1^{*\,w,}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^r)$ 可识别为首一多项式 $\{(t+\alpha_0, \ldots\ldots, t+\alpha_r) \in \mathbb{A}^{r+1} \mid [(\alpha_0, \ldots\ldots, \alpha_r)] = w \in \mathbb{C}^{r+1}/\langle(1, \ldots\ldots, 1)\rangle\}$ 所构成的空间，因此同构于 $\mathbb{A}^1$.

当 $\delta \geq 2$时，我们对 $\delta.$ 使用归纳法。归纳假设为

$$H_i^{\mathrm{BM}}(\mathrm{Map}_\delta^{*,w}) = \begin{cases} \mathbb{Q}(\delta(r+1)-2r+1), & i = 2(\delta(r+1)-2r)+1 \\ \mathbb{Q}(\delta(r+1)-r), & i = 2(\delta(r+1)-r) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

并且，在边界映射下，$H_{2\delta(r+1)+1}^{\mathrm{BM}}(\mathbf{Map}_\delta^{*\,w,})$ 可识别为基点轨迹的基本类。基例分为 $w = 0$和 $w \neq 0.$ 两种情况

当 $w = 0$时，$\delta = 2$时，$\mathbf{Map}_2^{*\,0,}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^r) = L_0 \setminus \mathbb{A}^2$，其中 $\mathbb{A}^2$ 可识别为首一二次多项式所构成的空间，而 $\mathbb{A}^2 \hookrightarrow L_2^0$ 是对角映射。此情形的归纳假设由切除长正合列推出。

当 $w \neq 0, \delta = 2,$ 映射$_2^{*\,0} = L_2^w \setminus ($$\mathbb{A}^1 \times$ 映射$_1^{*\,w,})$ 时，其中 $\mathbb{A}^1 \times$ 映射$_1^{*\,w} \to L_2^w$,由乘法给出

$$(z, (t+\alpha_0, \ldots, t+\alpha_r)) \mapsto ((t+z)(t+\alpha_0), \ldots, (t+z)(t+\alpha_r))$$

并且是到补集 $L_w \backslash$映射$_2^{*\,0}$,上的同构。由前面的映射$_1^{*\,w} \cong \mathbb{A}^1$,可知，我们有映射$_2^{*\,0} \cong L_2^w \setminus \mathbb{A}^2$,，并且切除长正合列蕴含归纳假设。

对于归纳步骤，我们按照基点的数量对 L_δ^w进行分层：令 $L_{\delta,-k}^w \subset L_\delta^w$表示至少有 k 个基点的多项式元组构成的闭子空间，令 $L^{w,\delta\ \circ}{}_{,-k} \subset L_{\delta,-k}^w$ 表示恰有 k 个基点的多项式构成的开子空间。根据 [FW16，§3], 由 $(f, (g_0, \ldots, g_k)) \mapsto (fg_0, \ldots, fg_k)$ 给出的乘法映射$\mathbb{A}^k \times \mathbf{Map}_{\delta-k}^{*\,w} \to L^{w,,\delta\ \circ}{}_{,-k}$ 是适当映射且为同胚，

因此，拉回在紧支撑上同调上是一个同构，并且与混合霍奇结构相容。现在我们应用与滤过[6]相关联的分层谱序列

$$\cdots \subsetneq L^w_{\delta,-(k+1)} \subsetneq L^w_{\delta,-k} \subsetneq L^w_{\delta,0} = L^w_\delta,$$

其由 $E^1_{-k,q} = H^{\mathrm{BM}}_{-k+q}(L^w_{,\delta\,-k,}) \Rightarrow H^{\mathrm{BM}}_{-k+q}(L^w_{\delta,-d})$. 给出

回顾一下，归纳假设指出，对于所有 $\delta' < \delta$，$\mathrm{Map}^{*\,w}_{\delta'}$ 的 Borel–Moore同调群是基本类，且是 $\mathrm{Map}^{*\,w}_{\delta'-1}$ 的基本类在边界映射下的原像；对于 $k > 0$，利用 L^w、$_\delta{}^\circ$、$_{-k}$ 与 $\mathbb{A}^k \times \mathrm{Map}^{*\,w}_{\delta-k}$ 之间的同胚，可以对 L^w、$_\delta{}^\circ$、$_{-k\cdot}$ 作出类似描述。由于 E^1-页之间的 d^1 微分 $H^{\mathrm{BM}}_{-k+q}(L^w_{,\delta\,-k,}) \to H^{\mathrm{BM}}_{-(k-1)+q}(L^w_{,\delta\,-,(k-1)})$ 由边界映射给出，因此对所有 $k > 1.$，它们都是同构。因此，对所有 $k > 1.$，$E^2_{-k,q}$ 消失

尚需确定 d^1 在项 $E^1_{-1,\,q}$ 与 $E^1_{0,\,q\cdot}$ 上的取值。由于该谱序列位于第四象限，$E^2_{-1,\,q} = E^\infty_{-1,\,q}$ 是 $H^{\mathrm{BM}}_{-1+q}(L^w_\delta) \cong H^{\mathrm{BM}}_{-1+q}(\mathbb{A}^{\delta(r+1)-r})$ 的一个子商，类似地，$E^2_{0,\,q} = E^\infty_{0,\,q\cdot}$。因此，对所有 q，有 $E^2_{-1,\,q} = 0$，且对 $q \neq 2(\delta(r+1) - r)$，有 $E^2_{0,\,q} = 0$，以及 $E^2_{-1,\,2(\delta(r+1)-r)} = \mathbb{Q}(\delta(r+1) - r)$。换言之，对所有 q，$d^{-1}_{1\,q}$ 均为同构，且对所有 $q \neq 2(\delta(r+1) - r)$，$d^0_{1\,q}$ 均为同构，以及 $E^0_{2\,2(\delta(r+1)-r)} = E^0_{2\,2(\delta(r+1)-r)} = \mathbb{Q}(\delta(r+1) - r)$。由此我们推出，$\mathrm{Map}^{*\,w}_\delta$ 的Borel–Moore同调由下式给出

$$\begin{cases} \mathbb{Q}(\delta(r+1) - 2r), & i = 2(\delta(r+1) - 2r) + 1 \\ \mathbb{Q}(\delta(r+1) - r), & i = 2(\delta(r+1) - r) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

并且在边界映射下，$H^{\mathrm{BM}}_{2(\delta(r+1)-2r)+1}(\mathrm{Map}^{*\,w}_{\delta\,,})$ 与 $H^{\mathrm{BM}}_{2((\delta-1)(r+1)-r+1)}(\mathbb{A}^1 \times \mathrm{Map}^{*\,w}_{\delta-1,})$ 相对应。这就完成了归纳步骤。□

3.1.2. 线性相关向量空间。 我们描述 $\mathbb{P}^r$ 的切向量空间，这些切向量可能由导数线性相关的映射产生，并确定其 Borel–Moore 同调群的权重分量。

定义 3.9。 设 V 是一个关于 $\mathbb{C}$ 的 r 维向量空间：就我们的目的而言，$V = T_p\mathbb{P}^r$。记 $\mathsf{D}^*_k \subset V^k$ 为存在某种非消失线性相关关系的向量所构成的轨迹。令 $_\sim\pi_\sim : \mathsf{D}^*_k \to \mathsf{D}^*_k$，除了参数化向量外，还参数化该非消失线性相关关系本身，并且视公共重缩放下的等价类为同一对象。略去符号上的区别，我们可以将下标 k 替换为一个大小为 k 的指标集，例如 $[k] = \{1, \ldots, k\}$.

令 $\boldsymbol{\delta} \in \mathbb{Z}^k_{\geq 0}$ 为一个长度为 k 的次数向量。定义

$$\mathsf{D}^*_{\boldsymbol{\delta}} = \{\mathbf{v} \in \mathsf{D}^*_k \mid v_i \neq 0 \text{ if } \boldsymbol{\delta}_i = 1; v_i = 0 \text{ if } \boldsymbol{\delta}_i = 0\} \subset \mathsf{D}_k,$$

$$\widetilde{\mathsf{D}}^*_{\boldsymbol{\delta}} := \pi_\sim^{-1}(\mathsf{D}^*_{\boldsymbol{\delta}}) \subset \widetilde{\mathsf{D}}^*_k.$$

注 3.10. 根据引理 3.7中的描述，空间 $\mathsf{D}^*_{\boldsymbol{\delta}}$ 和 $\widetilde{\mathsf{D}}^*_{\boldsymbol{\delta}}$ 刻画了定义 $\mathrm{Map}^{*\,\mathsf{F}}_{\boldsymbol{\delta}\,,}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^r)$ 和 $\widetilde{\mathrm{Map}}^{*\,\mathsf{F}}_{\boldsymbol{\delta}\,,}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^r)$ 3.2 中参数化映射空间 3.2中的可实现切向量。

[6]当 $w = 0$，$L^w_{\delta,\,-(d-1)} = L^w_{\delta,\,-d}$，在这种情况下，我们形式上从滤过中删除项 $L^w_{\delta,\,-d}$。

注 3.11. </style}空间 D变形收缩到 (), 并且我们将 $\widetilde{\mathsf{D}}_k^*$ 的上同调表示为 $H^\star((\mathbb{C}^\star)^k/\mathbb{C}^\star\cdot\mathrm{Id})$ $\cong \bigwedge\left(\mathbb{Q}\{\alpha_1,\dots,\alpha_k\}/\langle\sum_{i=1}^k\alpha_i\rangle\right)$，其中每个 $\alpha_i\in H^1((\mathbb{C}^\star)^k/\mathbb{C}^\star)$ 都是对应因子 $(\mathbb{C}^\star)^k$. 的上同调生成元

定义 3.12。 对于一个多次数向量 $\boldsymbol{\delta}$，定义 $I_{\boldsymbol{\delta}}^{(1)}:=\{i\in[k]\mid \boldsymbol{\delta}_i=1\}$ 和 $I_{\boldsymbol{\delta}}^{(0)}:=\{i\in[k]\mid\boldsymbol{\delta}_i=0\}$. 记 $[k]_{\boldsymbol{\delta}_{\setminus 0}}:=[k]\setminus I_{\boldsymbol{\delta}}^{(0)}$.

注记 3.13。 投影映射 $\widetilde{\mathsf{D}}_{\boldsymbol{\delta}}^*\to\widetilde{\mathsf{D}}_{\boldsymbol{\delta}_{\setminus 0}}^*$ 给出一个同构 $\widetilde{\mathsf{D}}_{\boldsymbol{\delta}}^*\cong\widetilde{\mathsf{D}}_{\boldsymbol{\delta}_{\setminus 0}}^*\times(\mathbb{C}^\star)^{I_\delta^{(0)}}$.

$\widetilde{}$ $\widetilde{}$利用开嵌入 $\mathsf{D}_{\boldsymbol{\delta}}^*\subset\mathsf{D}_k^*$，我们如下描述纯权和差一权分次部分。

$\widetilde{}$引理 3.14。 用 N_k 表示 $\dim\mathsf{D}_{\boldsymbol{\delta}}^*=(r+1)(k-1)$。 $\mathsf{D}_{\boldsymbol{\delta}}^*$ 的纯权 Borel–Moore同调 $\widetilde{}$ $\widetilde{}$ $\widetilde{}$由其基本类 $[\mathsf{D}_{\boldsymbol{\delta}}^*]\in H_{2N_k}^{\mathrm{BM}}(\mathsf{D}_{\boldsymbol{\delta}}^*)$张成。

$\widetilde{}$差一权分次部分 $\mathrm{gr}_{-\star+1}^W H_\star^{\mathrm{BM}}(\mathsf{D}_{\boldsymbol{\delta}}^*)$ 同构于

$$\mathbb{Q}(N_k-r)^{\oplus|I_{\boldsymbol{\delta}}^{(1)}|}\oplus\mathbb{Q}(N_k-1)^{\oplus k-1},$$

其中两个直和项分别由以下部分给出：

(1) 对所有 $j\in I_{\boldsymbol{\delta}}^{(1)}$，$\widetilde{}$，闭子空间 $\{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\alpha})\in\widetilde{\mathsf{D}}_k^*\mid \boldsymbol{v}_j=0\}\cong\mathbb{C}^\star\times\widetilde{\mathsf{D}}_{\boldsymbol{\delta}\setminus\{j\}}^*$ 的基本类在边界映射下的像；(2) 来自 D_k^* 的环面因子。

引理 3.15。 参数化映射空间 $\widetilde{\phantom{\mathrm{Map}}}\mathrm{Map}_{\boldsymbol{\delta}}^{*\,\mathsf{F}},(\mathbb{P}^1,\mathbb{P}^r)$ 是以下纤维积：

$$\begin{array}{ccc}\widetilde{\mathrm{Map}}_{\boldsymbol{\delta}}^{*,\mathsf{F}}(\mathbb{P}^1,\mathbb{P}^r) & \longrightarrow & \prod_{i=1}^k\mathrm{Map}_{\boldsymbol{\delta}_i}^*(\mathbb{P}^1,\mathbb{P}^r)\\ \downarrow & & \downarrow\\ \widetilde{\mathsf{D}}_{\boldsymbol{\delta}}^* & \longrightarrow & (T_p\mathbb{P}^r)^{\oplus k}\end{array}$$

因此，在点 $((v_1,\dots,v_k)\ [\alpha_1,\dots,\alpha_k])\in\widetilde{\mathsf{D}}_{\boldsymbol{\delta}}^*$ 上，映射 $\widetilde{\phantom{\mathrm{Map}}}\mathrm{Map}_{\boldsymbol{\delta}}^{*\,\mathsf{F}},(\mathbb{P}^1,\mathbb{P}^r)\to\widetilde{\mathsf{D}}_{\boldsymbol{\delta}}^*$ 的纤维为 $\prod_{i=1}^k\mathrm{Map}_\delta^{*\,v_i,}(\mathbb{P}^1,\mathbb{P}^r)$。

推论3.16. 记$\dim^{M_\delta}$ 为 $\prod_{i=1}^k\mathrm{Map}_{\boldsymbol{\delta}_i}^{*\,w_i,}$ 对任意使该乘积非空的$(w_i)_{i=1}^k$ 而言的维数。纯权Borel–Moore同调群由下式给出

$$\mathrm{gr}_{-\star}^W H_\star^{\mathrm{BM}}(\widetilde{\mathrm{Map}}_{\boldsymbol{\delta}}^{*,\mathsf{F}}(\mathbb{P}^1,\mathbb{P}^r))=\mathbb{Q}\cdot[\widetilde{\mathrm{Map}}_{\boldsymbol{\delta}}^{*,\mathsf{F}}(\mathbb{P}^1,\mathbb{P}^r)],$$

差一权分次部分由下式给出

$$\begin{aligned}\mathrm{gr}_{-\star+1}^W H_\star^{\mathrm{BM}}(\widetilde{\mathrm{Map}}_{\boldsymbol{\delta}}^{*,\mathsf{F}}(\mathbb{P}^1,\mathbb{P}^r))=&\left(\underbrace{\mathrm{gr}_{-\star+1}^W H_\star^{\mathrm{BM}}(\widetilde{\mathsf{D}}_{\boldsymbol{\delta}}^*)}_{\text{Lemma 3.14}}\otimes\mathbb{Q}\cdot[\prod_{i=1}^k\mathrm{Map}_{\boldsymbol{\delta}_i}^{*,w}]\right)\\&\oplus\left(\mathbb{Q}\cdot[\widetilde{\mathsf{D}}_{\boldsymbol{\delta}}^*]\otimes\underbrace{\mathbb{Q}(\dim_{M_{\boldsymbol{\delta}}}-r)^{\oplus k-|I_{\boldsymbol{\delta}}^{(0)}|-|I_{\boldsymbol{\delta}}^{(1)}|}}_{\mathrm{gr}_{-\star+1}^W H_\star^{\mathrm{BM}}(\prod_{i=1}^k\mathrm{Map}_{\boldsymbol{\delta}_i}^{*,w}),\text{ Lemma 3.7}}\right)\end{aligned}$$

证明。 我们利用映射的 Leray谱序列计算 $\widetilde{\mathrm{Map}}_{\boldsymbol{\delta}}^{*,\mathsf{F}}(\mathbb{P}^1,\mathbb{P}^r)$ 的紧支撑上同调

$$d_\infty : \widetilde{\mathrm{Map}}_{\boldsymbol{\delta}}^{*,\mathsf{F}}(\mathbb{P}^1,\mathbb{P}^r) \to \widetilde{\mathsf{D}}_{\boldsymbol{\delta}}^*.$$

由于该映射是线性投影映射的拉回

$$\prod_{i=1}^k \mathbb{A}^{\boldsymbol{\delta}_i(r+1)} \to \prod_{i=1}^k \mathbb{C}^{r+1} \to (T_p\mathbb{P}^r)^{\oplus k},$$

局部常值层 $(d_\infty)_!\mathbb{Q}$ 具有平凡单值化，因此 E_2页满足 K¨unneth 公式。该结论由对谱序列作权截断、应用引理 3.7，并检查权与上同调度而得出。 □

我们为下列对应于带参数的带标记映射模空间上基点的类设定记号。

定义 3.17. 设 $\beta_v \in H^{2r-1}(\widetilde{\mathrm{Map}}_{\boldsymbol{\delta}}^{*,\mathsf{F}}(\mathbb{P}^1,\mathbb{P}^r))$ 为:

(1) 当 $\boldsymbol{\delta}_v \geq 2$，来自与顶点 v 相关联的因子（属于 $\beta \in H^{2r-1}(\mathrm{Map}_{\boldsymbol{\delta}_v}^{*,w},)$）的拉回（引理 3.7），
(2) 当 $\boldsymbol{\delta}_v = 1$，来自 $\mathbb{Q}(N_k - r) \subset \mathrm{gr}_{\star+1}^W H^\star(\mathsf{D}_{\boldsymbol{\delta}}^*)$ 中对应于条目 v的拉回（引理 3.14 的第 (1) 项）。

3.1.3. 由自同构群商。 根据备注 3.3，遗忘映射的纤维

$$\mathcal{M}^{\mathbf{F}}_{(\boldsymbol{\delta}^{(r)},\boldsymbol{m}^{(r)})} \to \prod_{i=1}^k \mathcal{M}_{0,\boldsymbol{m}_i}$$

由 $\widetilde{\mathrm{Map}}_{\boldsymbol{\delta}}(\mathbb{P}^1,\mathbb{P}^r)$ 给出，我们使用与上述态射关联的Leray谱序列，计算 $H^\star(\mathcal{M}^{\mathbf{F}}_{(\boldsymbol{\delta}^{(r)},\boldsymbol{m}^{(r)})})$ 的权分次部分。

我们为 $\mathsf{M}_{0,1}$,$\mathsf{M}_{0,2}$ 上的 -类设定记号。 它们拉回到亏格零稳定映射的分层上的纯权类，即分层 $\mathcal{M}^{\mathbf{F}}_{(\boldsymbol{\delta}^{(r)},\boldsymbol{m}^{(r)})}$，和$\mathcal{M}_{\mathsf{C}_{k,(\mathbf{d},\mathbf{m})}}$.

定义 3.18。 令 $\psi \in H^2(\mathsf{M}_{0,1})$ 或 $\psi \in H^2(\mathsf{M}_{0,2})$ 为叠 $\mathsf{M}_{0,1} \cong B$自同构群$(\mathbb{P}^1, *)$ 与 $\mathsf{M}_{0,2} \cong B\mathbb{G}_m$. 之间同构下的标准生成元。它们与标记点的psi类仅相差一个符号，这对我们的目的而言已经足够。

设 v 是一个$(1, n, d)$-图中的一价或二价顶点，可以具有中心对齐。顶点 ψ-类 ψ_v 是相应映射空间分层中的上同调类，它沿唯一的指向内侧的半边从 $\psi \in H^2(\mathsf{M}_{0,1})$ 或 $\psi \in H^2(\mathsf{M}_{0,2})$ 拉回，记作 μ_v，见 [KS24a]。

引理 3.19。 $\mathcal{M}^{\mathbf{F}}_{(\boldsymbol{\delta}^{(r)},\boldsymbol{m}^{(r)})}$ 的纯权奇异上同调为:

(1) 当 $\rho^{-1}(|\rho|)$ 的所有顶点均为一价或二价时，由 $\{1,\psi,\ldots,\psi^{r-1}\}$ 张成；类 $\psi \in H^2(\mathcal{M}^{\mathbf{F}}_{(\boldsymbol{\delta}^{(r)},\boldsymbol{m}^{(r)})})$ 是任一一价或二价顶点的拉回 ψ-类；(2) 当存在非一价或二价的顶点时，$H^0 \cong \mathbb{Q}$。

作为一个 $W_\star H^\star(\mathcal{M}^{\mathbf{F}}{}_{(\boldsymbol{\delta}^{(r)},\ \boldsymbol{m}^{(r)})})$-模， $\mathcal{M}^{\mathbf{F}}{}_{(\boldsymbol{\delta}^{(r)},\ \boldsymbol{m}^{(r)})}$ 的差一权奇异上同调由以下元素生成：

(1) 当 $\rho^{-1}(|\rho|)$ 的所有顶点都是一价或二价时，从余维一线性子空间$\langle\beta_v-\beta_w\rangle_{v,w}\subset H^{2r-1}(\widetilde{\text{映射}}^{*\,\mathsf{F}}_{\boldsymbol{\delta}},(\mathbb{P}^1,\mathbb{P}^r))$ (定义 3.17)， （2）当并非所有顶点都是一价或二价时， （a）对所有 $\boldsymbol{m}_i\geq 4$,, $H^1(\mathcal{M}_{0,\boldsymbol{m}_i})$ 的拉回； （b）对所有不是一价或二价的顶点 v,w ，$((\mathbb{C}^\star)^k/\mathbb{C}^\star)\ [\alpha_v-\alpha_w]\in H^1$ 的拉回； （c）对所有顶点 v., β_v

证明。 通过考察与 $\mathcal{M}^{\mathbf{F}}{}_{(\boldsymbol{\delta}^{(r)},\boldsymbol{m}^{(r)})}\to\prod_{i=1}^k\mathcal{M}_{0,\boldsymbol{m}_i}$ 相关的 Leray谱序列的权和上同调次数，关于纯权分次部分和偏一权分次部分的可能非零微分由乘法生成

(1) $d^0{}_{,2}{}^{1\,2}:\mathrm{gr}_2^W E^0{}_{,2}{}^{1}\to\mathrm{gr}_2^W E^2{}_{,0}{}^{2}$ ，其中每个 $[\alpha_v-\alpha_w]\in H^1((\mathbb{C}^\star)^k/\mathbb{C}^\star)\ \subset\mathrm{gr}_2^W E^0{}_{,1}{}^{2}$ 都映射到 $\psi_v-\psi_w$. 这是因为 $(\mathbb{C}^\star)^k/\mathbb{C}^\star$-丛参数化了冻结标记点 [处切线之间的相容同构集合 BNR21, §2], 另见[KS24a, 引理 3.2]。这意味着关系 $\psi_v=\psi_w$ 在拉回到 $\mathcal{M}^{\mathbf{F}}{}_{(\boldsymbol{\delta}^{(r)},\boldsymbol{m}^{(r)})}$ 时成立，因此只要存在一个非一价或二价的顶点，所有 ψ_v 都会拉回为零；否则，它们都会拉回为同一个类 ψ 。(2) $d^0{}_{,2r}{}^{2r-1}:\mathrm{gr}_{2r}^W E^0{}_{,2}{}^{2r-1}\to\mathrm{gr}_{2r}^W E^{2r}{}_{,2r}{}^{0}$ ，其中 $\beta_v\mapsto\psi^r$. 这是 E_2 之后唯一可能非零的微分；如果它为零，那么 $W_\star H^\star(\mathcal{M}^{\mathbf{F}}{}_{(\boldsymbol{\delta}^{(r)},\boldsymbol{m}^{(r)})})$ 将是无限维的。通过显式计算 $\widetilde{\mathrm{Map}}^{*\,\mathsf{F}}_{\boldsymbol{\delta}},(\mathbb{P}^1,\mathbb{P}^r)\ \subset(\mathbb{C}^\star)^k/\mathbb{C}^\star\times\prod_{i=1}^k\mathrm{Map}^i_{\boldsymbol{\delta}_i}(\mathbb{P}^1,\mathbb{P}^r)$ 上的 $\mathbb{C}^\star$-作用，也可以看出这一点。其中 $\mathbb{C}^\star\subset\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^r,*)$ 是一个极大环面，因此 $B\mathbb{C}^\star\to B\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^r,*)$ 诱导一个上同调同构。

□

3.2. 来自光滑椭圆曲线的映射。我们通过§1.3中定义的部分紧化$\mathcal{Q}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)$来描述$\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)$ ˆ ˆ的权分次部分。空间$\mathcal{Q}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)$是万有皮卡群$\mathrm{Pic}^d_{1,n}$上一个射影丛的全空间，使得$((E,p_1,\dots,p_n)\ L)\in\mathrm{Pic}^d_{1,n}$ 上的纤维由 $\mathbb{P}(H^0(E,L)^{\oplus r+1})$给出。它具有相对超平面类 $H\hat{}_{\mathcal{Q}}\in H^2(\hat{}\mathcal{Q}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d))$。

注记 3.20. 尽管所选记号旨在类似于拟映射模空间ˆ[MOP11], 的记号，$\mathcal{Q}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)$中的基点不必与标记点不相交。 ˆ 这样一来，空间$\mathcal{Q}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)$可视为一个拟映射模空间，其中每个标记点的权为零。

ˆ**引理 3.21**。 $\mathcal{B}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d):=\mathcal{Q}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)\backslash\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)$ 的补集有一个来自 $\mathcal{C}_{1,n}\times_{\mathcal{M}_{1,n}}\mathcal{Q}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d-1)$ 的适当满射 ˆ 映射。

证明。 我们将 $\mathcal{C}_{1,\ n}\cong\mathbb{P}_{\mathrm{Pic}^1_{1,\ n}(\mathcal{P}_1)}$。 映射 $\mathcal{P}_1\boxtimes\mathcal{P}_{d-1}^{\oplus r+1}\to\mathcal{P}_d^{\oplus r+1}$ 定义在乘法映射$\otimes$ 之上：$\mathrm{Pic}^1{}_{1,\ n}\times\mathrm{Pic}^{d-1}_{1,\ n}\to\mathrm{Pic}^d_{1,\ n}$ 随后射影化为映射 $\mathcal{C}_{1,\ n}\times_{\mathcal{M}_{1,\ n}}\hat{}\mathcal{Q}_{1,\ n}(\mathbb{P}^r,\ d-1)\to\hat{}\mathcal{Q}_{1,\ n}(\mathbb{P}^r,\ d)$。

具体而言，该映射由线丛截面的相乘给出。上述描述表明该映射是射影的，因此是适当的。

由构造可知，该映射的像具有基点，因此它落在 $\mathcal{B}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)$。要证明满射性，只需考察标记点上的纤维。给定一组截面 $[s_0 : \cdots : s_r]$，其基点除子为 B，任取一个次数为一的有效除子 $p \le B$，并为其选取一个截面 s_p（在数乘意义下唯一），则 $[s_0 : \cdots : s_r]$ 是 $(p, [s_0/s_p : \cdots : s_r/s_p])$ 的像 □.

定义 3.22. 令 $\mathrm{Pic}^{d_1\, d_2}_{1\, n}$，表示纤维积 $\mathrm{Pic}^{d_1}_{1,n} \times_{\mathcal{M}_{1,n}} \mathrm{Pic}^{d_2}_{1,n}$。

皮卡群的纯权分次部分 $\mathrm{皮卡}^{d}_{1,n}$ 和 $\mathrm{皮卡}^{d_1\, d_2}_{1\, n}$，可通过调整 Canning–Larson–Payne 的方法 $\mathcal{M}_{1,n}$ 与 [CLP24, §2.2], 中的部分紧化（利用万有曲线的纤维幂）相关联 $\mathcal{E} \to \mathcal{M}_{1,1}$。

引理 3.23。 (1) $\mathrm{Pic}^{d}_{1,n}$ 的纯权上同调为

$$W_\star H^\star(\mathrm{Pic}^d_{1,n}) \cong W_\star H^\star(\mathcal{M}_{1,n+1}) \oplus W_{\star-2}H^{\star-2}(\mathcal{M}_{1,n})(-1).$$

泰特扭曲为 $\Theta \in H^2(\mathrm{Pic}^{d}_{1,n})$，它是以下对象 $1 \in H^0(\mathcal{M}_{1,n})(-1) \to H^2(\mathcal{M}_{1,n})$ 在 Gysin 推前下的像；这是 $\mathrm{Pic}^{d}_{1,n} \to \mathcal{M}_{1,n}$ 的相对极化类

(2) 存在一个同构

$$W_\star H^\star(\mathrm{Pic}^{d_1,d_2}_{1,n}) \cong W_\star H^\star(\mathcal{M}_{1,n+2}) \oplus W_{\star-2}H^{\star-2}(\mathcal{M}_{1,n+1})(-1)^{\oplus 2} \oplus W_{\star-4}H^{\star-4}(\mathcal{M}_{1,n})(-2).$$

与 (1) 类似，这些泰特扭曲由相对极化给出：$\Theta_1, \Theta_2 \in H^2(\mathrm{Pic}^{d_1\, d_2}_{1\, n,,})$，以及 $\Theta_1 \cup \Theta_2 \in H^4(\mathrm{Pic}^{d_1\, d_2}_{1\, n,,})$。

同样的技巧使我们能够将皮卡群的相差一阶的上同调 $\mathrm{Pic}^{d}_{1,n}$ 与 Petersen 对 Getzler 关系在 $\mathrm{gr}^W_4 H^3(\mathcal{M}_{1,4})$ [Pet14]中的解释联系起来。

引理 3.24。 对于 k 为奇数的情形，$\mathrm{gr}^W_{k+1}H^k(\mathrm{Pic}^d_{1,n}) \neq 0$ 仅在 $k = 3$ 且 $n \ge 3$ 时成立；此时它同构于 $\mathrm{gr}^W_4 H^3(\mathcal{M}_{1,n+1})$；而在 $k = 5$ 且 $n \ge 4$ 时，它同构于 $\mathrm{gr}^W_4 H^3(\mathcal{M}_{1,n})(-1)$，该同构由任意截面 $\mathcal{M}_{1,n} \to \mathrm{Pic}^{d}_{1,n}$ 上的 Gysin 推前给出

类 $H^{\hat{}}_{\mathcal{Q}} \in H^2(\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d))$ 来自射影丛公式，记录了线性系中的超平面类。我们将其与从 $\mathbb{P}^r$ 拉回的超平面类联系起来。

引理 3.25。 当 $n \ge 1, d \ge 2$ $H^{\hat{}}_{\mathcal{Q}} \in H^2(\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d))$ 与 $\mathrm{ev}_i^* H$ 一致时，其中 $H \in H^2(\mathbb{P}^r)$ 是超平面类，且 $\mathrm{ev}_i : \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d) \to \mathbb{P}^r$ 是任意求值映射。

^^证明。 令 $\mathcal{C}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)$ 为 $\mathcal{Q}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)$ 上的万有曲线。也就是说，它是纤维积

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathcal{C}}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d) & \xrightarrow{\pi_{\hat{\mathcal{Q}}}} & \hat{\mathcal{Q}}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_{\mathcal{C}}} & \square & \downarrow \\ \mathcal{C}_{1,n} \times_{\mathcal{M}_{1,n}} \mathrm{Pic}^d_{1,n} & \longrightarrow & \mathrm{Pic}^d_{1,n} \end{array}$$

令 $\mathcal{C}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)\to\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)$ 为 $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)$ 上的万有曲线，则 $\mathcal{C}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)$ 是 $\hat{\mathcal{Q}}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)$ 中的开集，它是从开浸入 $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)\subset\mathcal{Q}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)$ 拉回得到的。

设 $\mathrm{ev}:\mathcal{C}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)\to\mathbb{P}^r$ 为求值映射，则 $\mathrm{ev}^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)\cong(\pi_{\mathcal{C}}^*\mathcal{P}_d)|_{\mathcal{C}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)}$ 此处回忆一下，$\mathcal{P}_d$ 是 $\mathcal{C}_{1,n}\times_{\mathcal{M}_{1,n}}\mathrm{Pic}^d_{1,n}$ 上的 Poincaré 线丛。另一方面，$\mathcal{Q}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)$ 上的线丛 $\hat{\mathcal{O}}_{\pi_*\mathcal{P}_d^{\oplus r+1}}(1)$ 满足 $\pi^*_{\mathcal{Q}}\mathcal{O}_{\pi_*\mathcal{P}_d^{\oplus r+1}}(1)\cong(\pi_{\mathcal{C}}^*\mathcal{P}_d)|_{\mathcal{C}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)}$. 因此，

$$\pi^*_{\hat{\mathcal{Q}}}H_{\hat{\mathcal{Q}}}|_{\mathcal{C}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)}=\mathrm{ev}^*H$$

在 $H^2(\mathcal{C}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d))$ 上。我们沿截面 s_i 拉回两边：$\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)\to\mathcal{C}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)$，它对应于标记点 p_i：它们是 $s_i^*(\pi^*_{\hat{\mathcal{Q}}}H_{\hat{\mathcal{Q}}}|_{\mathcal{C}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)})=(\pi_{\hat{\mathcal{Q}}}\circ s_i)^*H_{\hat{\mathcal{Q}}}=H_{\hat{\mathcal{Q}}}$ and $s_i^*\mathrm{ev}^*H=\mathrm{ev}_i^*H$. 因此 $H_{\hat{\mathcal{Q}}}=\mathrm{ev}_i^*H$. □

采用简写 $\mathcal{B}$ 表示 $\mathcal{B}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)$, 我们得到 Borel–Moore 同调中的切除正合列：

$$\cdots\to H_k^{\mathrm{BM}}(\mathcal{B})\xrightarrow{\phi}H_k^{\mathrm{BM}}(\hat{\mathcal{Q}}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d))\to H_k^{\mathrm{BM}}(\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d))\to H_{k-1}^{\mathrm{BM}}(\mathcal{B})\xrightarrow{\varphi}H_{k-1}^{\mathrm{BM}}(\mathcal{Q}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d))\to\cdots$$

我们利用长正合列的权截断，描述 $H_\star^{\mathrm{BM}}(\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d))$ 的纯权分量和偏一权分次部分。

引理 3.26. (1) 纯权分量 $\mathrm{gr}^W_\star H^\star(\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d))$ 由 $\mathrm{gr}^W_\star H^\star(\text{皮卡}^d_{1,n})\otimes H^i_{\hat{\mathcal{Q}}}$ for $0\le i\le r$. 给出

(2) 偏一权分次部分属于一个短正合列

$$0\to\frac{\mathrm{gr}^W_{-k+1}H_k^{\mathrm{BM}}(\hat{\mathcal{Q}}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d))}{\mathrm{im}(\phi)}\to\mathrm{gr}^W_{-k+1}H_k^{\mathrm{BM}}(\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d))\to\ker(\mathrm{gr}^W_{-k+1}\varphi)\to0\tag{1}$$

其中

(a) $\mathrm{gr}^W_{-\star+1}H_\star^{\mathrm{BM}}(\hat{\mathcal{Q}}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d))$ 由从 $\mathrm{gr}^W_{-\star+1}H_\star^{\mathrm{BM}}(\text{皮卡}^d_{1,n})$ 拉回的元素及其与 $H_{\hat{\mathcal{Q}}}$ 的帽积生成，

(b) $\ker(\mathrm{gr}^W_{-\star+1}\varphi)\subset\mathrm{gr}^W_{-\star+1}H^{\mathrm{BM}}_{\star-1}(\mathcal{B})$ 在满射下由……生成

$$\mathrm{gr}^W_{-\star+1}H^{\mathrm{BM}}_{\star-1}(\mathcal{C}_{1,n}\times_{\mathcal{M}_{1,n}}\hat{\mathcal{Q}}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d-1))\to\mathrm{gr}^W_{-\star+1}H^{\mathrm{BM}}_{\star-1}(\mathcal{B})$$

by $\mathrm{gr}^W_\star H^\star(\hat{\mathcal{Q}}_{1,n+1}(\mathbb{P}^r,d-1))\cap[\mathcal{C}_{1,n}\times_{\mathcal{M}_{1,n}}\hat{\mathcal{Q}}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d-1)]$.

证明。乘法映射 $\mathcal{C}_{1,n}\times_{\mathcal{M}_{1,n}}\mathcal{Q}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d-1)\to\mathcal{Q}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)$ 在（$\mathcal{M}_{1,n}$）上定义为

$$(q,(L,[s_0,\dots,s_n]))\mapsto(L\otimes\mathcal{O}(q),[s_ps_0:\cdots:s_ps_n])$$

通过……分解

$$\mathcal{C}_{1,n}\times_{\mathcal{M}_{1,n}}\hat{\mathcal{Q}}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d-1)\to\mathcal{B}\to\hat{\mathcal{Q}}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d).$$

引理 3.21 蕴含推前映射

$$\mathrm{gr}^W_{-\star+1}H^{\mathrm{BM}}_{\star-1}(\mathcal{C}_{1,n}\times_{\mathcal{M}_{1,n}}\hat{\mathcal{Q}}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d-1))\to\mathrm{gr}^W_{-\star+1}H^{\mathrm{BM}}_{\star-1}(\mathcal{B})$$

是满射。于是，沿适当推前可得到一个满射 $\ker(\mathrm{gr}^W_{-k+1}\tilde{m}_*)\twoheadrightarrow\ker(\mathrm{gr}^W_{-k+1}\varphi)$。为计算这一点，考虑以下图表，其中 $m':\mathcal{C}_{1,\ n}\times_{\mathcal{M}_{1,\ n}}\text{皮卡}^{d-1}_{1,\ n}\to\text{皮卡}^d_{1,\ n}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{1,n} \times_{\mathcal{M}_{1,n}} \hat{\mathcal{Q}}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d-1) & \xrightarrow{m} & \hat{\mathcal{Q}}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d) \\ \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} \\ \mathcal{C}_{1,n} \times_{\mathcal{M}_{1,n}} \mathrm{Pic}^{d-1}_{1,n} & \xrightarrow[m']{} & \mathrm{Pic}^{d}_{1,n} \end{array}$$

令 $\Theta \in H^2$(皮卡$^d_{1,n}$) 为 $\mathcal{M}_{1,n}$ 上的相对极化，并令 $\Theta_1, \Theta_2 \in H^2$($\mathcal{C}_{1,n} \times_{\mathcal{M}_{1,n}}$ 皮卡$^{d-1}_{1\ n}$,) 为分别从皮卡$^{d-1}_{1,n}$ $\to \mathcal{M}_{1,n}$ 和$\mathcal{C}_{1,n} \to \mathcal{M}_{1,n}$拉回的相对极化。我们有 $m'^*(\Theta) = \Theta_1 + \Theta_2$. 应用投影公式可知，推前映射$\alpha \in \mathrm{gr}^W_{-\star} H^{\mathrm{BM}}_\star$(皮卡$^d_{1,n}$)，它将 $\Theta_2 \cap (m')^*(\alpha) \mapsto \alpha$，以及 $\Theta_1 \cap (m')^*(\alpha) \mapsto -\alpha$，而在其他情况下均为零。特别地，核同构于 $\mathrm{gr}^W_\star H^\star$(皮卡$^{d-1}_{1,n+1}$) $\cap$ [$\mathcal{C}_{1,n} \times_{\mathcal{M}_{1,n}}$ 皮卡$^{d-1}_{1,n}$].

利用射影丛公式延拓映射 m'^*，映射 m_* 映射

$$H^a_{\hat{\mathcal{Q}}} \cap f_1^*(\Theta_2 \cap (m')^*(\alpha)) \mapsto H^{a+(r+1)}_{\hat{\mathcal{Q}}} \cap f_2^*(\alpha),$$

$$H^a_{\hat{\mathcal{Q}}} \cap f_1^*(\Theta_1 \cap (m')^*(\alpha)) \mapsto -H^{a+(r+1)}_{\hat{\mathcal{Q}}} \cap f_2^*(\alpha),$$

其他情况下则为零。(1) 和 (2-b) 可由求取 m_*,的核与余核得到，而 (2-a) 则可通过在 ˆ$\mathcal{Q}_{1,n}$($\mathbb{P}^r, d$) $\to$ 皮卡$^d_{1,n}$ · □上应用射影丛公式得到

作为上述引理的一个特例，我们记录下面关于偏一权分次部分的消失结果，以备后用。

引理 3.27. $\mathrm{gr}^W_2 H^1(\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)) = 0.$

证明。 回忆 dim $\mathcal{M}_{1,n}$($\mathbb{P}^r, d$) $= n + d(r+1)$, 记作 $\mathrm{d}_{n,r,d}$ · 。由庞加莱对偶性，这等价于

$$\mathrm{gr}^W_{-2(\mathrm{d}_{n,r,d}-1)} H^{\mathrm{BM}}_{2\mathrm{d}_{n,r,d}-1}(\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)) = 0.$$

我们考察引理 3.26 中的短正合列。当 $k-1 > 2$维$\mathcal{B}_{1,\ n}$($\mathbb{P}^r$, d)，由于维数原因，项 gr $^W_{-k+1} H^{\mathrm{BM}}_{k-1}$($\mathcal{B}_{1,\ n}$($\mathbb{P}^r$, d)) 消失。由引理 3.24, H^k(皮卡$^d_{1,\ n}$) 仅在 $k = 3$. 时具有偏离一的权重上同调。应用 Poincar´e 对偶性和射影丛公式，我们看到

$$\mathrm{gr}^W_{-2(\mathrm{d}_{n,r,d}-1)} H^{\mathrm{BM}}_{2\mathrm{d}_{n,r,d}-1}(\hat{\mathcal{Q}}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)) = 0,$$

因此 ker(gr$^W_{-k+1}\varphi$) $= 0$ 也成立。消失结果随即得到。 □

3.3. **来自节点椭圆曲线的映射。** 令 C$_{k,\ (\mathbf{d},\mathbf{m})}$ 为一个次数装饰的 k-环，其多重次数为 $\mathbf{d}$，标记为 $\mathbf{m}$，并令 $\mathcal{M}_{\mathrm{C}_{k,\ (\mathbf{d},\mathbf{m})}}$ 为由 C$_{k,\ (\mathbf{d},\mathbf{m})}$ · 指定的映射空间

定义 3.28。 将 C$_{k,\ \mathbf{m}}$ 定义为其底层带标记对偶图。令 $\mathfrak{M}_{\mathrm{C}_{k,\ \mathbf{m}}} \subset \mathfrak{M}_{1,\ |\mathbf{m}|}$ 为类型为 C$_{k,\ \mathbf{m}}$ 的节点曲线模空间。回忆

$$\mathfrak{M}_{\mathrm{C}_{k,\mathbf{m}}} \cong \left(\prod_{v \in V(\mathrm{C}_{k,\mathbf{m}})} \mathcal{M}_{0,\mathbf{m}(v)+2} \right) / \mathrm{Aut}(\mathrm{C}_{k,\mathbf{m}}),$$

因此它沿顶点 $v \in V$(C$_{k,\mathbf{m}}$)具有环面稳定子，并带有 $|\mathbf{m}(v)| = 0.$

设皮卡$^{\mathbf{d}}_{\mathsf{C}_{k,\mathbf{m}}} \to \mathfrak{M}_{\mathsf{C}_{k,\mathbf{m}}}$ 为具有多重次数$\mathbf{d}$, 的万有皮卡群，它是一个 $\mathbb{G}_m$-扭子。设$\mathfrak{C}_{\mathsf{C}_{k,\mathbf{m}}} \to \mathfrak{M}_{\mathsf{C}_{k,\mathbf{m}}}$ 为万有曲线，其中 $\mathcal{P}_{\mathbf{d}}$ 庞加莱′线丛位于皮卡$^{\mathbf{d}}_{\mathsf{C}_{k,\mathbf{m}}} \times_{\mathfrak{M}_{\mathsf{C}_{k,\mathbf{m}}}} \mathfrak{C}_{\mathsf{C}_{k,\mathbf{m}}}$· 之上。到万有曲线的投影映射记为

$$\pi^{(\mathbf{d})} : \mathrm{Pic}^{\mathbf{d}}_{\mathsf{C}_{k,\mathbf{m}}} \times_{\mathfrak{M}_{\mathsf{C}_{k,\mathbf{m}}}} \mathfrak{C}_{\mathsf{C}_{k,\mathbf{m}}} \to \mathrm{Pic}^{\mathbf{d}}_{\mathsf{C}_{k,\mathbf{m}}}.$$

令 $\hat{}\mathcal{Q}_{\mathsf{C}_{k,\ (\mathbf{d},\mathbf{m})}} \to$ 皮卡$^{\mathbf{d}}$ $_{\mathsf{C}_{k,\ \mathbf{m}}}$ 为射影丛 $\mathbb{P}(\pi_*^{(\mathbf{d})}\mathcal{P}^{\oplus r+1}$ $_{\mathbf{d}}$)。 与 $\mathcal{M}_{1,\ n}(\mathbb{P}^r,\ d)\ \subset\hat{}\ \hat{}\mathcal{Q}_{1,\ n}(\mathbb{P}^r,\ d)$ 的情形相同，映射空间 $\mathcal{M}_{\mathsf{C}_{k,\ (\mathbf{d},\mathbf{m})}}$ 可表示为 $\mathcal{Q}_{\mathsf{C}_{k,\ (\mathbf{d},\mathbf{m})}}$· 中的无基点轨迹

引理 3.29。 当 $\mathbf{m}$ 满足对环上的所有顶点 v 均有 $|\mathbf{m}(v)| \geq 1$ 时，皮卡$^{\mathbf{d}}_{\mathsf{C}_{k,\ \mathbf{m}}}$ 的纯权上同调从基底 $W_\star H^\star(\mathfrak{M}_{\mathsf{C}_{k,\ \mathbf{m}}})$拉回，且其同构于

$$\left[\bigotimes_{\substack{v\in V(\mathsf{C}_{k,\mathbf{m}})\\ \mathbf{m}(v)=0}} H^\star\left(\mathsf{M}_{0,2}\right)\right]^{\mathrm{Aut}(\mathsf{C}_{k,\mathbf{m}})}$$

由自同构群 $\mathrm{Aut}(\mathsf{C}_{k,\ \mathbf{m}})$-不变多项式构成，这些多项式是二价顶点 $v \in V(\mathsf{C}_{k,\ \mathbf{m}})$ 的 ψ_v-类。。特别地，当所有$\mathbf{m}(v)\ \geq 1,$ 时，皮卡$^{\mathbf{d}}_{\mathsf{C}_{k,\ \mathbf{m}}}$ 的纯权上同调由 $H^0 \cong \mathbb{Q}.$ 给出

其偏一权分次部分由 $W_\star H^\star(\mathrm{Pic}^{\mathbf{d}}_{\mathsf{C}_{k,\ \mathbf{m}}})$-模上的拉回生成，这些拉回来自 $H^1(\mathcal{M}_{0,\ 4})$中的 WDVV 关系以及

$$\left[\bigotimes_{\substack{v\in V(\mathsf{C}_{k,\mathbf{m}})\\ \mathbf{m}(v)=0}} H^\star\left(\mathsf{M}_{0,2}\right)\otimes H^1(\mathbb{G}_m)\right]^{\mathrm{Aut}(\mathsf{C}_{k,\mathbf{m}})}$$

其中 $H^1(\mathbb{G}_m)$ 承载 $\mathrm{Aut}(\mathsf{C}_{k,\ \mathbf{m}})\ \subset D_k.$ 的符号表示

证明。 设 C 是一个有理曲线环。其多重次数为 $\boldsymbol{d}$ 的皮卡群可由正合列计算得到

$$0 \to H^0(C, \mathcal{O}_C^*) \to H^0(C^\nu, \mathcal{O}_{C^\nu}^*) \to \bigoplus_{e\in E(C)} H^0(\mathcal{O}_{\nu_e}^*) \to \mathrm{Pic}^{\boldsymbol{d}}(C) \to 0,$$

它同构于 $0 \to \mathbb{C}^\star \xrightarrow{\Delta} (\mathbb{C}^\star)^{V(C)} \to (\mathbb{C}^\star)^{E(C)} \to \mathrm{Pic}^{\boldsymbol{d}}(C)\ \to 0.$

另一方面，$\mathrm{Aut}(C)$ 位于正合列 $1 \to D \to \mathrm{Aut}(C) \to \prod_{v\in V(C)} \mathbb{C}^\star \to 1$ 中，其中 D 是该环的二面体群。我们可以计算得出，$\mathrm{Aut}(C)$ 在 $\mathrm{Pic}^{\boldsymbol{d}}(C)$ 上的作用可经由 $\mathrm{Aut}(C)\ \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$ 的符号表示分解，并且 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 在 $\mathrm{Pic}^{\boldsymbol{d}}(C)\ \cong \mathbb{C}^\star$ 上通过取逆作用。将标记点分配给 C 后，也有类似结论。

将 $\pi : \mathrm{Pic}^{\mathbf{d}}_{\mathsf{C}_{k,\mathbf{m}}} \to \mathfrak{M}_{\mathsf{C}_{k,\mathbf{m}}}$ 记作自然映射。上述描述的 $\mathrm{Aut}(C)$ 作用决定了 $R\pi_*\mathbb{Q}$ 作为 $\mathfrak{M}_{\mathsf{C}_{k,\mathbf{m}}}$· 上的局部系统时的单值化。所声称的结果现在可由层上同调计算得出。□

我们定义以下由线丛对构成的辅助模空间，用以描述基点轨迹ˆ: $\mathcal{Q}_{\mathsf{C}_{k,(\mathbf{d},\mathbf{m})}} \setminus \mathcal{M}_{\mathsf{C}_{k,(\mathbf{d},\mathbf{m})}}$·

定义 3.30。令 $\mathrm{Pic}^{\mathbf{d}_1,\mathbf{d}_{\mathbf{m}}{}^2} \to \mathfrak{M}_{\mathsf{C}_k\mathsf{C}_{k,,\mathbf{m}}}$ 为普遍皮卡群 $\mathrm{Pic}^{\mathbf{d}_1}{}_{\mathsf{C}_{k,\mathbf{m}}} \to \mathfrak{M}_{\mathsf{C}_{k,\mathbf{m}}}$ 与 $\mathrm{Pic}^{\mathbf{d}_2}{}_{\mathsf{C}_{k,\mathbf{m}}} \to \mathfrak{M}_{\mathsf{C}_{k,\mathbf{m}}}$的纤维积。

按照与上一节类似的思路，我们得到以下引理，从而描述 $H_c^\star(\mathcal{M}_{\mathsf{C}_{k,\,(\mathbf{d},\mathbf{m})}})$。的偏一权分次部分。

引理 3.31. $\mathrm{Pic}^{\mathbf{d}_1,\ \mathbf{d}_2\mathsf{C}_{k,\ \mathbf{m}}}$ 的纯权上同调是从基底 $W_\star H^\star(\mathfrak{M}_{\mathsf{C}_{k,\ \mathbf{m}}})$ 拉回的。

引理 3.32. 设 $D(\mathsf{C}_{k,\ (\mathbf{d},\mathbf{m})})$ 为 $\mathsf{C}_{k,\ \mathbf{m}}$ 上的非负多重次数 $\boldsymbol{\delta}$ 的集合，使得 $\boldsymbol{\delta} \le \mathbf{d}$ 且 $\sum_{v\in V(\mathsf{C}_{k,\ \mathbf{m}})} \boldsymbol{\delta}(v) = 1$. 存在一个适当的满射态射

$$\bigsqcup_{\boldsymbol{\delta}\in D(\mathsf{C}_{k,(\mathbf{d},\mathbf{m})})} \left(\mathbb{P}\pi_*^{(\boldsymbol{\delta})}\mathcal{P}_{\boldsymbol{\delta}} \boxtimes \hat{\mathcal{Q}}_{\mathsf{C}_{k,(\mathbf{d}-\boldsymbol{\delta},\mathbf{m})}}\right) \to \hat{\mathcal{Q}}_{\mathsf{C}_{k,(\mathbf{d},\mathbf{m})}} \setminus \mathcal{M}_{\mathsf{C}_{k,(\mathbf{d},\mathbf{m})}},$$

其中盒积取在 $\mathrm{Pic}^{\boldsymbol{\delta},\ \mathbf{d}-\boldsymbol{\delta}\ \mathsf{C}_{k,\ \mathbf{m}}}$ 上，且其纤维同构于 $\mathbb{P}^{(r+1)(d-1)-1}$.

推论 3.33. $\mathcal{M}_{\mathsf{C}_{k,\ (\mathbf{d},\mathbf{m})}}$ 的纯权上同调由 $H^i_{\hat{\mathcal{Q}}},\ \ d(r+1)-r+1 \le i \le d(r+1)$ 生成，其中 $H_{\hat{\mathcal{Q}}} \in H^2(\mathcal{M}_{\mathsf{C}_{k,\ (\mathbf{d},\mathbf{m})}})$ 是超平面类，而 $W_\star H^\star(\mathfrak{M}_{\mathsf{C}_{k,\ \mathbf{m}}})$。$\mathcal{M}_{\mathsf{C}_{k,\ (\mathbf{d},\mathbf{m})}})$ 的偏一权分次部分 $\mathrm{gr}^W_{\star+1}H^\star$ 作为 $W_\star H^\star(\mathcal{M}_{\mathsf{C}_{k,\ (\mathbf{d},\mathbf{m})}})$-模，由 $\mathrm{gr}^W_{\star+1}H^\star(\mathrm{Pic}^{\mathbf{d}}{}_{\mathsf{C}_{k,\ \mathbf{m}}})$ 以及纯权基点类 $\mathrm{gr}^W_\star H^\star(\hat{\mathcal{Q}}_{\mathsf{C}_{k,\ (\mathbf{d},\mathbf{m})}} \setminus \mathcal{M}_{\mathsf{C}_{k,\ (\mathbf{d},\mathbf{m})}})$ 生成，后者接受一个满射

$$\bigoplus_{\boldsymbol{\delta}\in D(\mathsf{C}_{k,(\mathbf{d},\mathbf{m})})} \mathrm{gr}^W_\star H^\star(\mathbb{P}\pi_*^{(\boldsymbol{\delta})}\mathcal{P}_{\boldsymbol{\delta}} \boxtimes \hat{\mathcal{Q}}_{\mathsf{C}_{k,(\mathbf{d}-\boldsymbol{\delta},\mathbf{m})}}) \to \mathrm{gr}^W_\star H^\star(\hat{\mathcal{Q}}_{\mathsf{C}_{k,(\mathbf{d},\mathbf{m})}} \setminus \mathcal{M}_{\mathsf{C}_{k,(\mathbf{d},\mathbf{m})}}).$$

4. 生成元

在本节中，我们使用 K¨unneth 公式汇总上一节的结果，并⌢描述纯权分次部分 $\mathrm{gr}^W_{-\star}H^{\mathrm{BM}}_\star(\mathcal{M}_{[\mathbf{G},\rho]})$。

⌢定理 4.1. (1) 当 $[\mathsf{G}\ \rho]$ 有一个正次数的亏格一顶点时，$\mathrm{gr}^W_{-\star}H^{\mathrm{BM}}_\star(\mathcal{M}_{[\mathbf{G},\rho]})$ 是 Aut([G])-轨道，包含 (a) 一个属于[7] $\mathrm{gr}^W_{-\star}H^{\mathrm{BM}}_\star(\mathcal{M}_{1,(L\cup L')}(\mathsf{G}^c)(\mathbb{P}^r,\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{G}^c}))$的类，它由以下元素生成：(i) 从 $\mathrm{gr}^W_{-\star}H^{\mathrm{BM}}_\star(\mathcal{M}_{1,(L\cup L')}(\mathsf{G}^c))$ 拉回的类；(ii) 这些类与 $H^i_{\hat{\mathcal{Q}}},\Theta$ 的帽积，其中 $d(r+1)-r+1 \le i \le d(r+1)$（引理 3.26）；(b) 一个属于 $\prod_{\ell\in L'}(\mathsf{G}^c)\ \mathcal{M}^*_{0\ ,\boldsymbol{m}_\ell}(\mathbb{P}^r,\boldsymbol{\delta}_\ell)$ 的类。(2) 当核心 $[\mathsf{G}]$ 是由正总次数的亏格零顶点构成的环 $\mathsf{C}_{k,(\mathbf{d},\mathbf{m})}$ 时，$\mathrm{gr}^W_{-\star}H^{\mathrm{BM}}_\star(\mathcal{M}^{\mathrm{st}}_{[\mathbf{G}]})$ 是 Aut([G])-轨道，包含 (a) 一个属于 $\mathrm{gr}^W_{-\star}H^{\mathrm{BM}}_\star(\mathcal{M}_{\mathsf{C}_{k,(\mathbf{d},\mathbf{m})}})$ 的类，它由以下元素生成：(i) 从 $\mathrm{gr}^W_{-\star}H^{\mathrm{BM}}_\star(\mathfrak{M}_{\mathsf{C}_{k,\mathbf{m}}})$ 拉回的类；后者由双价顶点的 ψ- 类多项式生成（引理 3.32），并按 $\mathrm{Aut}(\mathsf{C}_{k,\mathbf{m}})$-作用取商；(ii) 这些类与 $H_{\hat{\mathcal{Q}}}$的帽积；(b) 一个属于 $\prod_{\ell\in L'}(\mathsf{G}^c)$ $\mathcal{M}^*_{0\ ,\boldsymbol{m}_\ell}(\mathbb{P}^r,\boldsymbol{\delta}_\ell)$ 的类。

—

[7]记号 $(L\cup L')(\mathbf{G}^c)$ 是 $L(\mathbf{G}^c)\cup L'(\mathbf{G}^c)$ 的简写，即指分配给 $\mathbf{G}^c$ 的腿，以及连接 $\mathbf{G}^c$ 与图的其余部分的腿。

~对于分层 $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)$, 同一公式仍然成立，在~的情形下，以 Aut(G ρ) 替代 Aut(G)，其中 $\mathcal{M}_{[\mathbf{G},\rho]}$.

(3) 当核心的总次数为零且为一个亏格一顶点时，$\mathrm{gr}^W_{-\star}H^{\mathrm{BM}}_\star(\mathcal{M}^{\mathrm{st}}_{[\mathbf{G}]})$是自同构群([G])-张量积的轨道，这些张量积来自

- $\mathrm{gr}^W_{-\star}H_{\mathrm{BM}\star}(\mathcal{M}_{1,\ (L\cup L')(\mathbf{G}^c)})\otimes H^\star(\mathbb{P}^r)$,
- $\prod_{\ell\in L'(\mathbf{G}^c)}$ 中的一个类$\mathcal{M}_{0,\boldsymbol{m}_\ell}(\mathbb{P}^r,\boldsymbol{\delta}_\ell)$。

~对于$\mathrm{gr}^W_{-\star}H^{\mathrm{BM}}_\star(\mathcal{M}_{[\mathbf{G},\rho]})$ 的公式是上述拉回类与 $\psi_v^{i_v}$、$1\le i_v\le r-1$做帽积所得张量积的轨道，其中 v 遍历 $L'([\mathbf{G}^{cc}])$中的所有二价顶点（引理3.19）。

(4) 当核心 [G] 是环$\mathsf{C}_{k,\ (\mathbf{d},\mathbf{m})}$，由总次数为零的亏格零顶点构成时，~分层 $\mathcal{M}^{\mathrm{st}}_{[\mathbf{G}]}$ 与 $\mathcal{M}_{[\mathbf{G}]}$ 的纯权Borel–Moore同调群由自同构群(G)作用下、前一项中除$\mathrm{gr}^W_{-\star}H^{\mathrm{BM}}_\star(\mathcal{M}_{1,(L\cup L')(\mathbf{G}^c)})$之外所有生成元的张量积的轨道所张成。

推论4.2（定理 A）。沿用上述记号，存在一个满射

$$\bigoplus_{[\mathbf{G},\rho]}\mathrm{gr}^W_{-\star}H^{\mathrm{BM}}_\star(\widetilde{\mathcal{M}}_{[\mathbf{G},\rho]})\twoheadrightarrow H_\star(\widetilde{\mathcal{M}}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)),$$

并且这些分层的纯权Borel–Moore同调群由定理4.1中的类列表张成。

备注4.3。一个类似的满射

$$\bigoplus_{[\mathbf{G}]}\mathrm{gr}^W_{-\star}H^{\mathrm{BM}}_\star(\mathcal{M}_{[\mathbf{G}]})\twoheadrightarrow \mathrm{gr}^W_{-\star}H_\star(\overline{\mathcal{M}}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)),$$

成立于 稳定映射空间的纯权同调群$\mathcal{M}_{1,\ n}(\mathbb{P}^r,\ d)$ —— .

4.1. 分层闭包上的类。我们将该满射与分层闭包$\sim\mathcal{M}_{[\mathbf{G},\rho]}\subset\mathcal{M}_{[\mathbf{G},\rho]}$的同调群联系起来。该谱序列由滤过诱导~

$$\varnothing=X_{-1}\subset\cdots\subset X_p\subset X_{p+1}\subset\cdots\subset X_{\dim\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)}=\widetilde{\mathcal{M}}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d),$$

其中，X_p 是由维数小于或等于 p.的分层之并构成的闭子叠。根据构造，

$$\begin{aligned}E^\infty_{p,q}&=\frac{\mathrm{im}(H_{p+q}(X_p)\to H_{p+q}(\widetilde{\mathcal{M}}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)))}{\mathrm{im}(H_{p+q}(X_{p-1})\to H_{p+q}(\widetilde{\mathcal{M}}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)))}\\&=\frac{\mathrm{im}\left(\bigoplus_{\dim\widetilde{\mathcal{M}}_{[\mathbf{G},\rho]}=p}H_{p+q}(\overline{\mathcal{M}}_{[\mathbf{G},\rho]})\to H_{p+q}(\widetilde{\mathcal{M}}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d))\right)}{\mathrm{im}\left(\bigoplus_{\dim\widetilde{\mathcal{M}}_{[\mathbf{G}',\rho']}=p-1}H_{p+q}(\overline{\mathcal{M}}_{[\mathbf{G}',\rho']})\to H_{p+q}(\widetilde{\mathcal{M}}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d))\right)}\end{aligned}$$

第二个等式利用了如下事实：$\coprod_{\text{维数}\,\widetilde{\mathcal{M}}_{[\mathbf{G},\rho]}=p}\mathcal{M}_{[\mathbf{G},\rho]}\to X_p$ 是适当且满射的，因此诱导出纯权同调群的满射推前映射。

~将上述内容与满射 $\bigoplus_{\dim\widetilde{\mathcal{M}}_{[\mathbf{G},\rho]}=p}\mathrm{gr}^W_{-(p+q)}H^{\mathrm{BM}}_{p+q}(\mathcal{M}_{[\mathbf{G},\rho]})\twoheadrightarrow E^\infty_{p,q}$ 结合起来，我们看到~$\mathrm{gr}^W_{-\star}H^{\mathrm{BM}}_\star(\mathcal{M}_{[\mathbf{G},\rho]})$ 沿来自 $H_\star(\mathcal{M}_{[\mathbf{G},\rho]})$ 的满射的提升生成 $H_\star(\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d))$，从而得到定理 A 中的陈述。

虽然不存在将 $\mathcal{M}_{[\mathbf{G},\rho]}$ 上的纯权类提升到 $\mathcal{M}_{[\mathbf{G},\rho]}$的典范方式，但纯权类的模解释指出了方便的提升选择：

(1) $\mathcal{M}_{1,n}$ 上的纯权上同调类是基本类以及从 $\mathsf{S}_{k+1} = \mathrm{gr}_k^W H^k(\mathcal{M}_{1,k})$ 拉回的类，并且已知 $H^k(\mathcal{M}_{1,k}) \to \mathrm{gr}_k^W H^k(\mathcal{M}_{1,k})$ 是一个同构。(2) 将 $\mathrm{Pic}^d_{1,n'}$ 识别为 $\mathcal{M}_{1,n'}$ 上的万有曲线后，相对极化可以提升为 $\mathcal{M}_{1,n'}$ 或 $\mathcal{M}_{1,n'}$ 上万有曲线的相对切丛，并拉回到分层闭包上。(3) 当 $r \geq 2$ 时，固定一个余维 2 线性子空间 $L \subset \mathbb{P}^r$，令 $\mathcal{H}$ 为 $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)$ 中由与 L. 相交的映射组成的除子。Pan99，引理 1.1 中的同一论证 [表明，限制到 $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)$ 上时，类 $\mathcal{H}$ 等于 $\delta_r \cdot H^{\hat{}}$ ，其中 $\delta_r \in \mathbb{Z}_{>0}$. 因此， $\mathcal{H}/\delta_r$ 是 $H_{\hat{\mathcal{Q}}}$. 的一个提升

简言之，$\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)$ 中的同调类要么是典范类、边界分层，要么是 $\mathcal{M}_{1,n'}$. 上尖点形式的（对偶类）。我们现在利用这一点，推导出 $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)$ 的 (上)同调群的定性性质。

4.2. 霍奇猜想与泰特猜想。 对生成元的描述使我们得以验证 Vakil–Zinger 空间上的霍奇猜想与泰特猜想。回顾一下，堆栈 $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)$ 在 Spec($\mathbb{Z}$) 上是光滑且适当的。

推论 4.4. (1) 循环类映射 $A^\star(\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d))_{\mathbb{Q}} \to H^{2\star}(\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d))_{\mathbb{Q}}$ 是满射。(2) 设 K 是 $\mathbb{Q}$ 的有限扩张或一个有限域，并设 $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)_K$ 是 $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)$ 到 Spec(K) 的基变换，$\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)_K$. 也类似。对于任意在 K 中可逆的 ℓ，循环类映射 $A^\star(\widetilde{\mathcal{M}}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)_K)_{\mathbb{Q}_\ell} \to H^{2\star}(\widetilde{\mathcal{M}}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)_K, \mathbb{Q}_\ell(\star))^{\mathrm{Gal}(K/K)}$ 是满射。

证明。 在偶数次上，定理4.1 给出的所有生成元都是典范类与分层基本类的帽积。将这些典范类提升到其在中的分层闭包上4.1 并将其推前，我们看到，$\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)$的偶同调群由代数循环生成，这就证明了第 (1) 项。我们还注意到，与典范类对应的代数循环定义在 K.

设 K 是一个数域，并固定嵌入 $\sigma : K \to \mathbb{C}$ 和 $\sigma \to \mathbb{C}$.适当基变换 [DA73, Exp. XII] 给出了一个比较同构

$$H^{2\star}(\widetilde{\mathcal{M}}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell(\star) \cong H^{2\star}(\widetilde{\mathcal{M}}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)_K, \mathbb{Q}_\ell(\star))$$

复解析空间 $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)(\mathbb{C})$ 的贝蒂上同调（位于左侧）与右侧的 ℓ-adic ´étale 上同调之间。该同构下，左侧的复共轭[8] 作用对应于右侧的 $\tilde{c} \in \mathrm{Gal}(K/K)$ 作用。由于所有偶数次贝蒂上同调群都是霍奇–泰特的，这个比较同构给出

$$H^{2\star}(\widetilde{\mathcal{M}}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)_K, \mathbb{Q}_\ell(\star))^{\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)} \subseteq H^{2\star}(\widetilde{\mathcal{M}}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)_K, \mathbb{Q}_\ell(\star))^{\langle \tilde{c} \rangle} \cong H^{2\star}(\widetilde{\mathcal{M}}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell(\star).$$

[8]为简便起见，我们假设嵌入 σ 是实嵌入。一般情形也有类似的结论。

由于右侧有一个由定义在 K,上的典范类所给出的满射，(2) 项成立。将 Frobenius 自同构替换为 $\tilde{c} \in \mathrm{Gal}(K/K)$，用同样的论证即可证明 K 为有限域时的情形。□

4.3. **具有奇上同调的次数**。 生成元的描述控制着 tures 上的霍奇结- $H^\star(\mathcal{M}_{1,\ n}(\mathbb{P}^r,\ d))$，进而推出上同调群消失的结果。

下文中，令 L $= H^2(\mathbb{P}^1)$ 为 Tate Hodge 结构，并令 $W_k H^k(\mathcal{M}_{1,\ k}) =: \mathsf{S}_{k+1}$ 为在 Eichler–Shimura 同构下对应于权 k 、$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 尖点形式的权 $k+1$ 霍奇结构。

推论 4.5。 Th e 在 $H^\star(\mathcal{M}_{1,\ n}(\mathbb{P}^r,\ d))$ 中出现的霍奇结构是 L 与 S_{k+} 的乘积 $_1$.

证明。 定理中的生成元4.1 要么是陈类（具有 Tate Hodge 结构），要么是从 $W_\star H^\star(\mathcal{M}_{1,\ n})$ 拉回的。已有证明见 [CLP24, §2] 每个 $W_k H^k(\mathcal{M}_{1,\ n})$ 都由沿遗忘映射 $\mathcal{M}_{1,\ n} \to \mathcal{M}_{1,\ k}$. 拉回霍奇结构 $W_k H^k(\mathcal{M}_{1,\ k}) \to W_k H^k(\mathcal{M}_{1,\ n})$ 生成。因此，每个 $W_\star H^\star(\mathcal{M}_{1,\ n})$ 都具有霍奇结构 S $_{k+1}$. □

由于第一个非零的最小权$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-尖点形式为 12，$\mathsf{S}_{k+1}$ 首次非零出现在 $k = 11$.这恢复了 Fontanari 的如下消失结果 [Fon07]。

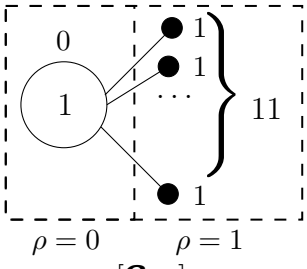
推论 4.6. 对于奇数 $k < 11$ 以及所有 n，d，我们有 $H^\star(\mathcal{M}_{1,\ n}(\mathbb{P}^r,\ d)) = 0$.

证明。 由于 $\mathcal{M}_{1,\ n}(\mathbb{P}^r,\ d)$ 是光滑且适当的， $H^k(\mathcal{M}_{1,\ n}(\mathbb{P}^r,\ d))$ 带有权k. 的 Hodge 结构。另一方面，上述结论表明，可能出现在 $H^\star(\mathcal{M}_{1,\ n}(\mathbb{P}^r,\ d))$ 上的第一个奇数权 Hodge 结构是 $\mathsf{S}_{12,}$，其权为 11。因此，次数小于 11 的奇上同调群不可能非零。 □

另一方面，当 $n \geq 11$，从 $\mathcal{M}_{1,\ 11}$ 拉回可得 $H^{11}(\mathcal{M}_{1,\ n}(\mathbb{P}^r,\ d)) \neq 0$，例如，对 作进一步的处理。接下来，我们固定 $n = 0$，并询问使 $\mathcal{M}_{1,\ 0}(\mathbb{P}^r,\ d)$ 具有奇上同调的最小最小 d 是什么。

推论 4.7。当 $r \geq 11$，使 $\mathcal{M}_{1,\ 0}(\mathbb{P}^r,\ d)$ 具有奇上同调的最小 d 是 $d = 11$.

证明。通过考察从 $\mathcal{M}_{1,\ 11}$ 到 $\mathcal{M}_{1,\ 0}(\mathbb{P}^r,\ d)$ 中各分层的拉回，我们看到 $d = 11$ 是一个下界。只需证明，当 $r \geq 10$.时，$\mathcal{M}_{1,\ 0}(\mathbb{P}^r,\ 11)$ 中以下中心对齐型具有非零奇数阶上同调



[**G** ρ]

根据定理4.1，该分层对纯权上同调的贡献为

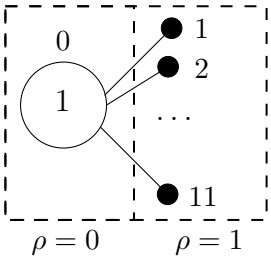
$$\left[W_\star H^\star(\mathcal{M}_{1,11}) \otimes \bigotimes_{j=1}^{11} \left(\bigoplus_{i=0}^{r-1} \psi_{v_j}^i \right) \right]^{S_{11}},$$

其中 $S_{11} \cong$ 自同构群([G ρ]). 奇上同调全部来自令 $\star = 11$。

作为 S_{11}-表示， $W_{11}H^{11}(\mathcal{M}_1$,11) $\cong \mathrm{sgn}_{S_{11}} \otimes \mathsf{S}_{12,}$ [Get99，§5]。因此奇上同调简化为 S $_{12} \otimes \bigwedge^{11} \left(\bigoplus_{i=0}^{r-1} \psi^i \right)$，它非零当且仅当 dim $\left(\bigoplus_{i=0}^{r-1} \psi^i \right) \geq 11$，亦即当 $r \geq 11$. 当 $r = 11$ 时，该分层上相应的上同调次数为 $121 = 11 + 2 \cdot \binom{11}{2}$，它在 Gysin 推前下映到 $H^{123}(\widetilde{\mathcal{M}}_1$,0($\mathbb{P}^r$, 11))。由于奇次数生成元具有纯权并带有霍奇结构 S_{12},，在 $H^\star(\mathcal{M}_1$,0($\mathbb{P}^r$, 11)) 的分层谱序列中进出$\widetilde{}$它们的微分全部为零，因此生成元$\widetilde{}$留存至 $H^\star(\mathcal{M}_1$,0($\mathbb{P}^r$, 11))

. □

$\widetilde{}$**例 4.8.** 最小的奇数上同调次数 k 使得 $H^k(\mathcal{M}_{1,\ 0}(\mathbb{P}^r,\ d)) \neq 0$ 可表示为 $k = 13$ 和 $d = \binom{12}{2} = 66$. 相关的对偶图分层如下



[**G** ρ]

其自同构群是平凡的。因此，该分层贡献了非零的 H^{11}，$\widetilde{}$它在谱序列中存活下来，并通过 Gysin 映射推前至 $H^{13}(\mathcal{M}_{1,\ 0}(\mathbb{P}^r,\ 66))$。另一方面，我们已经知道，最小的 k 必须是 $k \geq 11$，但对于所有 r， $d.$， $\mathrm{gr}_{11}^W H^{11}(\mathcal{M}_{1,\ 0}(\mathbb{P}^r,\ d))$ 均为零。因此，最小的此类 k 是 $k = 13.$

$\widetilde{}$4.4. **有理皮卡群**。 作为下一节的铺垫，我们确定 $H^2(\mathcal{M}_{1,\ n}(\mathbb{P}^r,\ d))$，并证明它与有理皮卡群同构。

$\widetilde{}$ $\widetilde{}$在本节中，我们令 D $= \dim \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)$。对偶化为 $H^{\mathrm{BM}}_{2\mathrm{D}-2}(\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d))$ 并考察分层谱序列后，我们注意到， $H^2(\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d))$ 由 $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)$ 上的类 Θ, Hˆ$\wp$ （引理 3.26 ）以及边界除子的基本类生成。

$\widetilde{}$**命题 4.9** （推论 F）。 上面列出的类构成了 $H^2(\mathcal{M}_{1,\ n}(\mathbb{P}^r,\ d))$ 的一组基，且 $\widetilde{}$ $\widetilde{}$循环类映射 $A^1_{\mathbb{Q}}(\mathcal{M}_{1,\ n}(\mathbb{P}^r,\ d)) \to H^2(\mathcal{M}_{1,\ n}(\mathbb{P}^r,\ d))$ 是一个同构。

$\widetilde{}$证明。 我们通过分层谱序列计算 $H^{\mathrm{BM}}_{2\mathrm{D}-2}(\mathcal{M}_{1,\ n}(\mathbb{P}^r,\ d))$。

基于维数的原因，可能有贡献的唯一 E_1 页是 $\mathrm{gr}^W_{-2(\mathrm{D}-1)} E^1_{\mathrm{D}-1,\mathrm{D}-1}$和 $\mathrm{gr}^W_{-2(\mathrm{D}-1)} E^{\mathrm{D},}$ $_1{}^{\mathrm{D}-2} = H^{\mathrm{BM}}_{2(\mathrm{D}-1)}(\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d))$. 考虑上同调次数和权后，后者作为 $H_c^{2(\mathrm{D}-1)}(\widetilde{\mathcal{M}}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d))$. 的子商，在 E_∞ 页存活。

$E^{\mathrm{D}-1}_{\cdot,1}$ $^{\mathrm{D}-1}$ 页由边界分层的基本类直和给出，因此是纯权 $2(\mathrm{D}-1)$。基于权的原因，唯一可能非零的微分是 $d_1 : E^1_{\mathrm{D}-1,\mathrm{D}-1} \to E^1_{\mathrm{D},\mathrm{D}-1,}$ 并且 d^1 非零当且仅当复合

$$E^1_{\mathrm{D},\mathrm{D}-1} \to E^1_{\mathrm{D}-1,\mathrm{D}-1} \to \mathrm{gr}^W_{2(\mathrm{D}-1)} E_1^{\mathrm{D},\mathrm{D}-1} = \mathrm{gr}^W_{2(\mathrm{D}-1)} H_c^{2\mathrm{D}-1}(\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d))$$

不为零。然而，后者与 $\mathbf{gr}^W_2 H^2(\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d))$ 对偶，而根据引理 3.27，该项为零。因此，整个页面 $E^{\mathrm{D}-1}_{\cdot,1}$ $^{\mathrm{D}-1}$ 作为 $H_c^{2(\mathrm{D}-1)}(\widetilde{\mathcal{M}}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d))$ 的子商存留至 E_∞。结合 $H_c^{2(\mathrm{D}-1)}(\widetilde{\mathcal{M}}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d))$ 的两个子商并取对偶，可得 $H^2(\widetilde{\mathcal{M}}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d))$ 的基。

现在转向映射空间的皮卡群。回忆一下，[9] $A^1_{\mathbb{Q}}(\mathrm{Pic}^d_{1,n}) = \langle \Theta \rangle$，那么由 $\hat{\mathcal{Q}}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d) \to \mathrm{Pic}^d_{1,n}$ 上的射影丛公式可知，$A_{\mathrm{d}_n,r,d-1}(\hat{\mathcal{Q}}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)) \cong \langle \Theta, H_{\hat{Q}} \rangle$。因此，由开嵌入 $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d) \subset \mathcal{Q}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)$ 以及 $\sim$ $\sim\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d) \subset \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)$ 对应的切除序列可知，$A^1_{\mathbb{Q}}(\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d))$ 由边界除子生成，H 和 Θ.

令 $\mathcal{B}$ 为由边界除子集合 $H_{\hat{Q}}$ 自由生成的向量空间，并且 Θ. 关于 $H^2(\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d))$ 的基的 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$前述结果给出一个同构 $H^2(\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)) \cong \mathcal{B}$，于是循环类映射的复合为恒等映射 $\mathrm{id}_{\mathcal{B}}$,

$$\mathcal{B} \twoheadrightarrow A^1_{\mathbb{Q}}(\widetilde{\mathcal{M}}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)) \to H^2(\widetilde{\mathcal{M}}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)) \cong \mathcal{B},$$

因此循环类映射是一个同构。 □

5. 关系

生成元之间的关系对应于微分 $\mathbf{gr}^W_{-(p+q)} E^r_{p+r,q-r+1} \to \mathbf{gr}^W_{-(p+q)} E^r_{p,q}$ 的像。它们是边界映射的直和

$$\mathrm{gr}^W_{-(p+q)} H^{\mathrm{BM}}_{p+q+1}(\mathcal{M}_{[\mathbf{G},\rho]}) \to \mathrm{gr}^W_{-(p+q)} H^{\mathrm{BM}}_{p+q}(\mathcal{M}_{[\mathbf{G}',\rho']})$$

或其子商，其中 $[\mathbf{G}', \rho'] \to [\mathbf{G}\ \rho]$ 要么是核心边收缩，要么是层级合并；更高页微分在由这类态射的复合相关联的分层子商之间映射。相差一权的权重分量 $\mathrm{gr}^W_{-(p+q)} H^{\mathrm{BM}}_{p+q+1}(\mathcal{M}_{[\mathbf{G},\rho]})$ 及引理3.26、3.19和3.33 中给出的模解释，使我们能够定性地确定微分，并在 §5.4、5.5中描述由此得到的关系。简而言之，它们是：

(1) 对 $\mathcal{M}_{0,n'}$ 或 $\mathcal{M}_{1,n'}$, 上偏一权类的拉回，分别对应 WDVV 或 Getzler 关系的拉回；(2) 与带基点拟映射相关的类，对应于带有有理尾的分层之间的关系（可能由典范类修饰），我们称之为基点关系,

[9] 这是由以下事实得出的：$A^1(\mathcal{M}_{1,\ n}) = 0$ 以及皮卡 $^d_{1,\ n} \cong \mathcal{C}_{1,\ n}$，因此我们使用切除正合列 $\bigoplus_n A_\star(\mathcal{M}_{1,\ n}) \to A_\star(\mathcal{C}_{1,\ n}) \to A_\star(\mathcal{M}_{1,\ n+1}) \to 0$. 每个 $A^0(\mathcal{M}_{1,\ n})$都会被推前到 Θ，由于它在循环类映射下映射为一个非零类，因此该类非零。

(3) 上述两类与支撑在顶点上的纯权类的 K¨unneth 张量积，它们是上述两类关系与其他上同调类的杯积。

现在我们逐一考察偏一权类的各个来源，并描述它们在谱序列中的行为。

5.1. **正次数核心**。 本节讨论 $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)$ 上的偏一类，其中$d>0.$。我们指出，这一讨论同样适用于来自有理曲线环的正次数映射情形。

我们回顾引理 3.26中的短正合列

$$0\to\frac{\mathrm{gr}^W_{-k+1}H^{\mathrm{BM}}_k(\hat{\mathcal{Q}}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d))}{\mathrm{im}(\phi)}\to\mathrm{gr}^W_{-k+1}H^{\mathrm{BM}}_k(\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d))\to\ker(\mathrm{gr}^W_{-k+1}\varphi)\to 0,$$

其中 $\mathrm{gr}^W_{-k+1}\varphi$ 是推前映射 $H^{\mathrm{BM}}_{k-1}(\mathcal{B})\to H^{\mathrm{BM}}_{k-1}(\mathcal{Q}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d))$.的纯权截断。

$\hat{}\mathcal{Q}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)$ 上的偏一类由从 $\mathrm{gr}^W_{-\star+1}H^{\mathrm{BM}}_\star$(皮卡$^d_{1,n}$) 拉回的类生成；根据引理 3.24 ，这些类又由从 $\mathcal{M}_{1,n'}$. 拉回的类生成。因此，$\mathrm{gr}^W_{-k+1}H^{\mathrm{BM}}_k(\hat{}\mathcal{Q}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d))/\mathrm{im}(\phi)$ 中的偏一类，是沿着 $H^2(\overline{\mathcal{M}_{0,n'}})\to H^2(\overline{\mathcal{M}_{[\mathbf{G},\rho]}})$ 和 $H^4(\overline{\mathcal{M}_{1,n'}})\to H^4(\overline{\mathcal{M}_{[\mathbf{G},\rho]}})$. 拉回 WDVV 和 Getzler 关系所得。

$\widetilde{}$比较与 $\mathcal{M}_{1,\ n}(\mathbb{P}^r,\ d)$ 相关的分层（及其分层）的分层谱序列，以及 $\mathcal{M}_{0,\ n'}$ 和 $\mathcal{M}_{1,\ n'}$ 在拉回下的分层谱序列，我们看到，从曲线模空间拉回的偏一类及其与纯权类的 K¨unneth 张量积，在谱序列的 E^2 页和 E^3 页上分别不再存活。

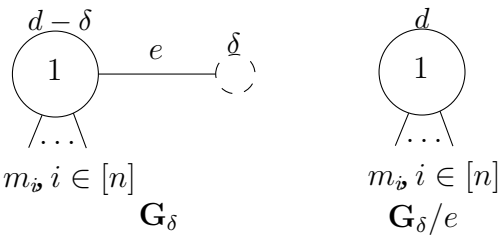
现在我们将重点放在短正合列中的余核上。

定义 5.1. 我们定义 $B_{k-1}(n,\ r,\ d):=$核$(\varphi:\mathrm{gr}^W_{-k+1}H^{\mathrm{BM}}_{k-1}(\mathcal{B})\to\mathrm{gr}^W_{-k+1}H^{\mathrm{BM}}_{k-1}(\mathcal{Q}_{1,\ n}(\mathbb{P}^r,\ d)))$。

$\hat{}$ 由于 $B_{k-1}(n,\ r,\ d)$ 来源于补集 $\mathcal{Q}_{1,\ n}(\mathbb{P}^r,\ d)\setminus\mathcal{M}_{1,\ n}(\mathbb{P}^r,\ d)$，该补集对应于带有基点的截面组元组，因此我们将 $B_{k-1}(n,\ r,\ d)$ 中的元素称为 $\mathcal{M}_{1,\ n}(\mathbb{P}^r,\ d)$ 的基点偏一类。

5.1.1. 有理尾收缩。 我们描述与有理尾收缩相关的、从 $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)$ 上的基点偏一类出发的微分。

$\widetilde{}$令 $d>\delta$，并令 $\mathbf{G}_\delta$ 为下方给出的 $(\mathbf{1},n,d)$-图。它确定了 $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)$ 中的一个粗分层 $\widetilde{\mathcal{M}_{[\mathbf{G}_\delta]}}$，该粗分层与由同一图确定的稳定映射分层一致。对其进行唯一的边收缩，即可恢复与 $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)$. 相关联的 $(\mathbf{1},n,d)$-图。



基本的几何图景是，有理尾上的稳定映射会被收缩为亏格一曲线上的一个基点。如 §1.3 所述，有理尾收缩诱导出一对的映射$\widetilde{\quad}\quad\widetilde{\quad}\quad\hat{}\,\hat{}\,(\mathcal{M}_{1,n}\cup\mathcal{M}_{[\mathbf{G}_\delta]},\mathcal{M}_{[\mathbf{G}_\delta]})\to(\mathcal{Q}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)\,\mathcal{Q}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)\setminus\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d))$，从而得到一个交换图，用以比较与这对对象相关联的边界态射。由于基点$\hat{}$类是 $\mathcal{Q}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)\setminus\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)$ 上的纯权类，因此基点类$B_{k-1}(n,r,d)$ 在微分作用下的行为完全由该比较交换图确定。

$\widetilde{\quad}$**引理5.2.** 边界映射 $\partial\colon \mathrm{gr}^W_{-(k-1)}H^{\mathrm{BM}}_k(\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d))\to\mathrm{gr}^W_{-(k-1)}H^{\mathrm{BM}}_{k-1}(\mathcal{M}_{[\mathbf{G}_\delta]})$ 可置于以下交换图中

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{gr}^W_{-(k-1)}H^{\mathrm{BM}}_k(\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)) & \xrightarrow{\quad\partial\quad} & \mathrm{gr}^W_{-(k-1)}H^{\mathrm{BM}}_{k-1}(\widetilde{\mathcal{M}}_{[\mathbf{G}_\delta]})\\ \big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle s}\\ B_{k-1}(n,r,d) & \longrightarrow & \mathrm{gr}^W_{-(k-1)}H^{\mathrm{BM}}_{k-1}(\mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{P}^r,d-\delta))\end{array}$$

$\widetilde{\quad}$其中 s 在 K ¨ünneth 公式下将 $\sigma\mapsto\sigma\otimes[\mathrm{pt}]$ 映至 $H^{\mathrm{BM}}_\star(\mathcal{M}_{[\mathbf{G}_\delta]})\cong H^{\mathrm{BM}}_\star(\mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{P}^r,d-\delta))\otimes H_\star(\overline{\mathcal{M}}^*_{0\ ,0}(\mathbb{P}^r,\delta))$。映射 s 是沿遗忘映射$\sim\mathcal{M}_{[\mathbf{G}_\delta]}\to\mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{P}^r,d-\delta)$的真推前映射的截面。

证明。由于 $\mathrm{gr}^W_{-k+1}H^{\mathrm{BM}}_k(\hat{}\,\mathcal{Q}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d))$ 由从 $\mathrm{gr}^W_{-\star+1}H^{\mathrm{BM}}_\star$(皮卡$^d_{1,n}$) 拉回的元素生成，给定任意

$$g\in\frac{\mathrm{gr}^W_{-k+1}H^{\mathrm{BM}}_k(\hat{\mathcal{Q}}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d))}{\mathrm{im}(\phi)}\subset\mathrm{gr}^W_{-(k-1)}H^{\mathrm{BM}}_k(\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)),$$

我们有 $\pi_*\partial(g)=0$. 因此，存在一个良定义映射

$$B_{k-1}(n,r,d)\to\mathrm{gr}^W_{(k-1)}H^{\mathrm{BM}}_{k-1}(\mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{P}^r,d-\delta)).$$

下文中，我们用 $\mathrm{d}_{\mathcal{B}}$ 作为 $\dim(\mathcal{B})$ 的简写。回想引理 3.26，基点类 $B_\star(n,\ r,\ d)$ 是 $\mathrm{gr}^W_{2\mathrm{d}_{\mathcal{B}}-\star}H^{2\mathrm{d}_{\mathcal{B}}-\star}(\hat{}\,\mathcal{Q}_{1,\ n+1}(\mathbb{P}^r,\ d-1))$ 的一个满射像。这使我们能够如下几何地描述边界映射。

$\hat{}\,\hat{}$ 考虑映射 $\mathcal{Q}_{1,\ n+1}(\mathbb{P}^r,\ d-\delta)\to\mathcal{Q}_{1,\ n+1}(\mathbb{P}^r,\ d-1)$，它作为一个关于 $\mathcal{M}_{1,\ n+1}$ 的映射由下式给出

$$(\mathcal{L},[s_0:\cdots:s_r])\mapsto(\mathcal{L}\otimes\mathcal{O}((\delta-1)s_{p+1}),s_{p+1}^{\delta-1}\otimes[s_0:\cdots:s_r]).$$

由于该映射位于由 $\mathcal{L}\mapsto\mathcal{L}\otimes\mathcal{O}((\delta-1)p_{n+1})$ 给出的、覆盖 $\mathcal{M}_{1,n}$ 上的同构 $\mathrm{Pic}^{d-\delta}_{1\ ,n+1}\to\mathrm{Pic}^{d-1}_{1\ ,n+1}$ 之上，因此在不超过 $\hat{}\,\hat{}\,\dim\mathcal{Q}_{1,n+1}(\mathbb{P}^r,d-\delta)$ 的上同调次数范围内，上同调拉回是一个同构。另一方面，真推前将 $[\mathcal{Q}_{1,n+1}(\mathbb{P}^r,d-\delta)]$ 映到 $H^{(\delta-1)(r+1)\ \hat{}_{\mathcal{Q}}}\cap[\,\hat{}\,\mathcal{Q}_{1,n+1}(\mathbb{P}^r,d-1)]$. 。因此，投影公式确定了 Borel–Moore 同调群水平上的真推前映射。所需的边界映射分解为经过如下交换图

$$\begin{array}{ccc}B_\star(n,r,d) & \longrightarrow & \mathrm{gr}^W_{-\star}H^{\mathrm{BM}}_\star(\mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{P}^r,d-\delta))\\ \big\uparrow & & \big\uparrow\\ \mathrm{gr}^W_{-\star}H^{\mathrm{BM}}_\star(\hat{\mathcal{Q}}_{1,n+1}(\mathbb{P}^r,d-1)) & \longleftarrow & \mathrm{gr}^W_{-\star}H^{\mathrm{BM}}_\star(\hat{\mathcal{Q}}_{1,n+1}(\mathbb{P}^r,d-\delta))\end{array}$$

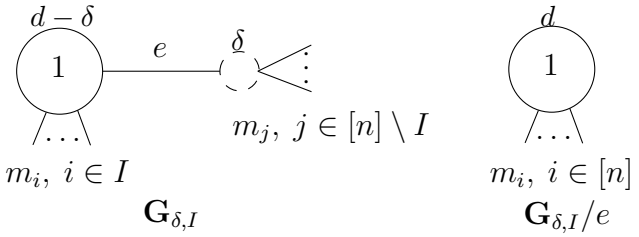
□

注记 5.3。 由于 $H^{\mathrm{BM}}_\star(\widetilde{\mathcal{M}}_{[\mathbf{G}_\delta]}) \cong H^{\mathrm{BM}}_\star(\mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{P}^r, d-\delta)) \otimes H_\star(\overline{\mathcal{M}}^*_{0,0}(\mathbb{P}^r, \delta))$，推前映射 map $\mathcal{M}_{[\mathbf{G}_\delta]} \to \mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{P}^r, d-\delta)$ 是线性投影

$$H^{\mathrm{BM}}_\star(\mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{P}^r, d-\delta)) \otimes H_\star(\overline{\mathcal{M}}^*_{0,0}(\mathbb{P}^r, \delta)) \to H^{\mathrm{BM}}_\star(\mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{P}^r, d-\delta)) \otimes [\mathrm{pt}].$$

因此，基点关系涉及的是来自亏格一核、而非有理尾的类。粗略地说，在每个分层的同调群上可见的有理尾上上同调的复杂性，会在极限 $H_\star(\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d))$。

当有理尾上存在标记时，我们沿遗忘映射进行平坦拉回，从而归约到上文讨论的无标记有理尾情形。设 $I \subset [n]$ 为一个子集，$d > \delta$，并令 $\mathbf{G}_{\delta,I}$ 为下方给出的、带有指定分层 $\mathcal{M}_{[\mathbf{G}_{\delta,I}]}$ 的 $(1, n, d)$ 图

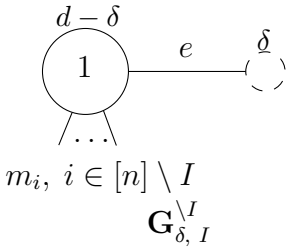


我们仍有一对之间的映射

$$(\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d) \cup \mathcal{M}_{[\mathbf{G}_{\delta,I}]}, \mathcal{M}_{[\mathbf{G}_{\delta,I}]}) \to (\hat{Q}_{1,|I|+1}(\mathbb{P}^r, d), \hat{\mathcal{Q}}_{1,|I|+1}(\mathbb{P}^r, d) \setminus \mathcal{M}_{1,|I|+1}(\mathbb{P}^r, d)),$$

且边界映射之间诱导的交换图与沿自然映射进行的平坦拉回相容；该自然映射会遗忘 $[n] \setminus I$. 中的标记

引理 5.4。 设 $\mathbf{G}^{\setminus I}_{\delta,I}$ 为从 $\mathbf{G}_{\delta,I}$ 中忘却 I 里的标记后得到的 $(\mathbf{1}, n-|I|, d)$-图，如下图所示。



边界映射 $B_{k-1}(n, r, d) \to \mathbf{gr}^W_{-(k-1)} H^{\mathrm{BM}}_{k-1}(\mathcal{M}_{[\mathbf{G}_{\delta,I}]})$ 由以下交换图表确定

$$\begin{array}{ccc} B_{k-1-|I|}([n] \setminus I, r, d) & \longrightarrow & \mathrm{gr}^W_{-(k-1-|I|)} H^{\mathrm{BM}}_{k-1-|I|}(\widetilde{\mathcal{M}}_{[\mathbf{G}^{\setminus I}_{\delta,I}]}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_{k-1}(n, r, d) & \longrightarrow & \mathrm{gr}^W_{-(k-1)} H^{\mathrm{BM}}_{k-1}(\widetilde{\mathcal{M}}_{[\mathbf{G}_{\delta,I}]}) \end{array}$$

其中，垂直映射是沿遗忘映射进行的平坦拉回；这些遗忘映射会遗忘由 I 索引的标记点（并在必要时进行稳定化）。

上述图表 与引理5证明中的交换图相容。 2.

备注5.5。我们回顾Petersen的一个结果 [Pet14，定理1.1、1。3]在$\mathcal{M}_{1,\ n}$ 上的纯权上同调类要么是 H^0（$\mathcal{M}_{1,\ n}$），要么是与尖点形式相对应的奇上同调群。后者类沿遗忘映射$\mathcal{M}_{1,\ n} \to \mathcal{M}_{1}$的拉回行为由$n-k$在 [CLP24，命题22]中描述。这些事实确保上述交换图确实确定了边界映射。

在讨论不同分层之间的高余维有理尾部收缩之前，我们先作如下观察。

引理5.6。基点类 $B_{k-1}(n,\ r,\ d)$ 不会存活到 E^2-页。

证明。 由于 $B_{k-1}(n,\ r,\ d)$ 来自具有次数为一的基点的拟映射，因此，通过收缩次数为一的有理尾部（带有零个或一个标记）得到的微分，会将 E^1 页上的所有 $B_{k-1}(n,\ r,\ d)$ 都映射到下一项中的非零类。□

迭代上述过程即可确定将有理尾收缩至核心的任意收缩。设 $\mathbf{G}$ 为一个具有正核心次数的 $(1,\ n,\ d)$-图，且 e 是一条连接某个有理尾与核心的边。

定义 5.7。 设 $\mathbf{G}^{(e)}$ 为 $\mathbf{G}$ 的子图：除通过 e. 与核心相连的有理尾外，其余所有有理尾均被切除。

回顾引理 2.15，我们有 K¨关于 Borel–Moore 同调群的 Künneth 公式$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$，其对象为 $\mathcal{M}^{\mathrm{ord}}_{\mathbf{G}}$和 $\mathcal{M}^{\mathrm{ord}}_{\mathbf{G}/e}$。

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$**引理5.8**。 边界映射 $\mathrm{gr}^W_{-(k-1)}H^{\mathrm{BM}}_k(\mathcal{M}_{\mathbf{G}/e}) \to \mathrm{gr}^W_{-(k-1)}H^{\mathrm{BM}}_{k-1}(\mathcal{M}_{\mathbf{G}})$ 由交换图表确定

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{gr}^W_{-(k-1)}H^{\mathrm{BM}}_k(\widetilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{ord}}_{\mathbf{G}/e}) & \longrightarrow & \mathrm{gr}^W_{-(k-1)}H^{\mathrm{BM}}_{k-1}(\widetilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{ord}}_{\mathbf{G}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{gr}^W_{-(k-1)}H^{\mathrm{BM}}_k(\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbf{G}/e}) & \longrightarrow & \mathrm{gr}^W_{-(k-1)}H^{\mathrm{BM}}_{k-1}(\widetilde{\mathcal{M}}_{\mathbf{G}}) \end{array}$$

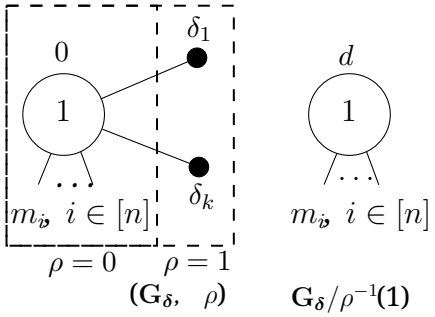
这里顶部的水平映射是边界映射的 K¨unneth 乘积

$$\mathrm{gr}^W_{-(\star-1)}H^{\mathrm{BM}}_\star(\widetilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{ord}}_{\mathbf{G}^{(e)}/e}) \to \mathrm{gr}^W_{-(\star-1)}H^{\mathrm{BM}}_\star(\widetilde{\mathcal{M}}^{\mathrm{ord}}_{\mathbf{G}^{(e)}})$$

以及其他 K¨unneth 分量上的恒等映射；这些分量是其他有理尾的上同调群。两个垂直映射是通过取 Aut($\mathbf{G}/e$) 和 Aut($\mathbf{G}$)-作用得到的商映射。

因此，亏格一核上的基点偏一类与有理尾上任意纯权类的 K¨unneth 张量积也无法存活到 E^2 页。

5.1.2. 向核心径向合并。 我们描述将收缩半径上的亏格零映射收缩到核心所诱导的边界映射。根据引理5.4和5.8中的相同考量，只需考虑以下层级合并：



将亏格零映射收缩为亏格一核上带基点的拟映射后，标准的函子性论证再次推出

引理5.9。 边界映射 $\partial:\mathrm{gr}^W_{-(k-1)}H^{\mathrm{BM}}_k(\mathcal{M}_{1,\ n}(\mathbb{P}^r,\ d))\ \to \mathrm{gr}^W_{-(k-1)}H^{\mathrm{BM}}_{k-1}(\mathcal{M}_{[\mathbf{G}_{\boldsymbol{\delta}},\rho]})$ 属于以下交换图

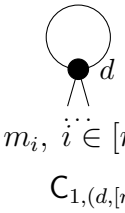
$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{gr}^W_{-(k-1)}H^{\mathrm{BM}}_k(\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r,d)) & \xrightarrow{\ \partial\ } & \mathrm{gr}^W_{-(k-1)}H^{\mathrm{BM}}_{k-1}(\widetilde{\mathcal{M}}_{[\mathbf{G}_{\boldsymbol{\delta}},\rho]}) \\
\twoheadrightarrow\big\downarrow & & \big\downarrow\pi_* \\
B_{k-1}(n,r,d) & \longrightarrow & \mathrm{gr}^W_{-(k-1)}H^{\mathrm{BM}}_{k-1}(\mathcal{M}_{1,n+k}(\mathbb{P}^r,0)) \\
\big\downarrow\hookrightarrow & & \big\uparrow\twoheadrightarrow\iota \\
\mathrm{gr}^W_{-(k-1)}H^{\mathrm{BM}}_{k-1}(\mathcal{B}) & \xleftarrow[m_*]{} & \mathrm{gr}^W_{-(k-1)}H^{\mathrm{BM}}_{k-1}(\mathcal{C}^k_{1,n}\times_{\mathcal{M}_{1,n}}\hat{\mathcal{Q}}_{1,n}(\mathbb{P}^r,0))
\end{array}$$

其中 $\pi:\mathcal{M}_{[\mathbf{G}_{\boldsymbol{\delta}},\rho]}\to\mathcal{M}_{1,\ n+k}(\mathbb{P}^r,\ 0)$ 收缩亏格零映射集，并记录椭圆曲线上的ˆ收缩点；映射 $m:\mathcal{M}_{1,\ n+k}(\mathbb{P}^r,\ 0)\to\mathcal{B}\subset\mathcal{Q}_{1,\ n}(\mathbb{P}^r,\ d)$ 将最后的 k 个标记点作为重数为 $\delta_1,\ \ldots,\ \delta_k$，的基点引入，而 ι 表示开嵌入

$$\mathcal{M}_{1,n+k}(\mathbb{P}^r,0)\subset\mathcal{C}^k_{1,n}\times_{\mathcal{M}_{1,n}}\hat{\mathcal{Q}}_{1,n}(\mathbb{P}^r,0).$$

备注 5.10。 我们用 $(\mathbf{G}_{\boldsymbol{\delta},\ \boldsymbol{m}},\ \rho)$ 表示居中对齐的 $(1,\ n,\ d)$-图，它由一个亏格为一的零度顶点和一个收缩半径组成，其次数分布和标记分布由 $(\boldsymbol{\delta},\ \boldsymbol{m})$. 给出。

5.1.3. 核心边收缩。 我们考虑如下所示的由一个 1-圈、一个次数为 d 的单顶点以及所有标记点构成的 $(1,\ n,\ d)$-图 $\mathsf{C}_{1,\ (d,[n])}$。它指定了局部闭分层$\sim\mathcal{M}_{\mathsf{C}_{1,\ (d,[n])}}\subset\mathcal{M}_{1,\ n}(\mathbb{P}^r,\ d)$。



基点类 $B_{k-1}(n,\ r,\ d)$ 在以下意义上不会对与核心边收缩相关的边界映射作出贡献。

引理5.11。 边界映射的核 $\ker\partial$

$$\partial : \mathrm{gr}^W_{-(k-1)} H^{\mathrm{BM}}_k(\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)) \to \mathrm{gr}^W_{-(k-1)} H^{\mathrm{BM}}_{k-1}(\mathcal{M}_{\mathsf{C}_{1,(d,[n])}})$$

满射到 $B_{k-1}(n,\ r,\ d)$。

证明。 令 $\mathcal{M}_{\mathsf{C}_{1,\ [n]}} \subset \mathcal{M}_{1,\ n}$ 为具有一个 $\hat{}$ 节点的节点椭圆曲线的局部闭子栈。我们可以将 $\mathcal{Q}'$ 上的拟映射空间构造为在 $\mathcal{M}_{1,\ n} \cup \mathcal{M}_{\mathsf{C}_{1,\ [n]}}$ 上的射影丛，该射影丛位于 $\mathcal{M}_{1,\ n} \cup \mathcal{M}_{\mathsf{C}_{1,\ [n]}}$· 的相对次数-$d$ 皮卡群之上。特别地，我们有 $\mathcal{Q}' = \mathcal{Q}_{1,\ n}(\mathbb{P}^r,\ d) \cup \hat{} \hat{} \mathcal{Q}_{\mathsf{C}_{1,\ (d,[n])}}$ 以及一个开嵌入 $\mathcal{M}_{\mathsf{C}_{1,\ (d,[n])}} \subset \mathcal{Q}_{\mathsf{C}_{1,\ (d,[n])}}$，作为无基点拟映射。

与两对 $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d) \subset \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d) \cup \hat{} \hat{} \mathcal{M}_{\mathsf{C}_{1,(d,[n])}}$ 以及 $\mathcal{Q}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d) \subset \mathcal{Q}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d) \cup \mathcal{Q}_{\mathsf{C}_{1,(d,[n])}}$ 相关的切除长正合序列与开嵌入 $\hat{}\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d) \cup \mathcal{M}_{\mathsf{C}_{1,(d,[n])}} \subset \mathcal{Q}'$相容，因此我们有以下交换图

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{gr}^W_{-(k-1)} H^{\mathrm{BM}}_k(\hat{\mathcal{Q}}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)) & \longrightarrow & \mathrm{gr}^W_{-(k-1)} H^{\mathrm{BM}}_{k-1}(\hat{\mathcal{Q}}_{\mathsf{C}_{1,(d,[n])}}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{gr}^W_{-(k-1)} H^{\mathrm{BM}}_k(\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)) & \xrightarrow{\partial} & \mathrm{gr}^W_{-(k-1)} H^{\mathrm{BM}}_{k-1}(\mathcal{M}_{\mathsf{C}_{1,(d,[n])}}) \\
\downarrow & & \\
B_{k-1}(n, r, d) & &
\end{array}$$

其中水平映射是长正合列中的边界映射。由于

$$B_{k-1}(n, r, d) = \frac{\mathrm{gr}^W_{-(k-1)} H^{\mathrm{BM}}_k(\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d))}{\mathrm{im}(\mathrm{gr}^W_{-(k-1)} H^{\mathrm{BM}}_k(\hat{\mathcal{Q}}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)))},$$

且右侧的垂直箭头是满射，经过图表追逐可得，$\ker(\partial)$满射到$B_{k-1}(n,\ r,\ d)$。

□

直观而言，这一陈述表明，与核心边收缩相关的边界映射反映了底层曲线的退化，因此与基点类“正交”。同样的构造通常也适用于节点椭圆曲线的核心边收缩。

5.1.4. 带环的核心。我们简要介绍与来自有理曲线圈的映射相关的基点类记号。回顾一下，$\mathsf{C}_{\ell,\ (\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{m})}$ 表示由一个 ℓ-环给出的 $(1,\ n,\ d)$-图，其次数分布和标记分布分别由 $\boldsymbol{\delta}$ 和 $\boldsymbol{m}$. 给出

定义5.12. 定义

$$B_{k-1}(\mathsf{C}_{\ell,(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{m})}) := \ker(\mathrm{gr}^W_{-(k-1)} H^{\mathrm{BM}}_{k-1}(\hat{\mathcal{Q}}_{\mathsf{C}_{\ell,(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{m})}} \setminus \mathcal{M}_{\mathsf{C}_{\ell,(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{m})}}) \to \mathrm{gr}^W_{-(k-1)} H^{\mathrm{BM}}_{k-1}(\hat{\mathcal{Q}}_{\mathsf{C}_{\ell,(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{m})}})).$$

它接受来自 $\mathrm{gr}^W_{-(k-1)} H^{\mathrm{BM}}_k(\mathcal{M}_{\mathsf{C}_{\ell,\ (\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{m})}})$。的满射。

基点类 $B_{k-1}(\mathsf{C}_{\ell,\ (\delta,m)})$ 在谱序列微分中的行为类似于与 $\mathcal{M}_{1,\ n}(\mathbb{P}^r,\ d)$ 相关联的类 $B_{k-1}(n,\ r,\ d)$:

(1) 与有理尾收缩或收缩半径中的层级合并相对应的边界映射，将 $B_{k-1}(\mathsf{C}_{\ell,\ (\delta,m)})$ 上的类映到核心上次数更低的纯权类，再通过取 $\otimes[\mathrm{pt}]$，并使用 K¨unneth 公式，将这些类扩展为分层上的纯权类。(2) 对次数为一的有理尾进行收缩，会导致从整个 $B_{k-1}(\mathsf{C}_{\ell,\ (\delta,m)})$，出发的非零边界映射，因此它们无法存留到 E^2-页。

5.2. **收缩核心**。 可能对与径向合并相对应的微分有贡献的偏一类，是核心上的偏一类：而这些类又是从 $\mathcal{M}_{0,\ n'}$，$\mathcal{M}_{1,\ n'}$，以及环面丛纤维上的偏一类拉回的。与前文相同，它们贡献的关系是 WDVV 关系和 Getzler 关系，以及$\mathcal{M}^{\mathrm{cen}}_{1\,n,}$，的分层闭包中的关系；后者由 $\mathcal{M}_1^{\mathrm{cen}}{}_{,\ n} \to \mathcal{M}_{1,\ n}$ [RSPW19] 的爆破公式得出。它们通过从 $\mathcal{M}^{\mathrm{cen}}_{1\,n'\,,}$ 拉回到相关图分层并推前，对 $\widetilde{\mathcal{M}}_{1,\ n}(\mathbb{P}^r,\ d)$ 上的关系作出贡献。

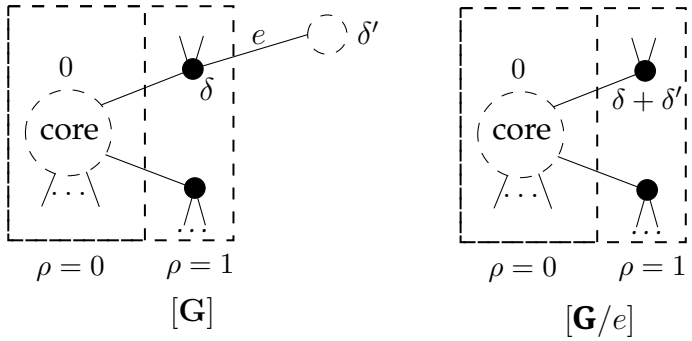
5.3. **具有分解性质的亏格零映射**。 除核心之外，偏一权类的另一个来源是满足分解性质的亏格零映射，记作 $\mathcal{M}^{\mathbf{F}}{}_{(\boldsymbol{\delta}^{(r)},\ \boldsymbol{m}^{(r)})}$：这对 $(\boldsymbol{\delta}^{(r)},\ \boldsymbol{m}^{(r)})$ 表示收缩半径上的次数与标记分布。由引理 3.19可知，除纯权类外，其奇异上同调中的偏一类由以下部分给出:

(1) 从 $H^1(\mathcal{M}_{0,\ m'})$拉回，(2) 从 $H^{2r-1}(\widetilde{\ \ \mathsf{Map}}^{\mathsf{F}}_{\delta}(\mathbb{P}^1,\ \mathbb{P}^r))$拉回，我们将其称为零属基点类，(3) 来自环面纤维的偏一类。

其中，条目 (1) 再次对应于 WDVV 关系的拉回。与引理 3.19证明中关于环面丛的讨论一样，条目 (3) 对应于关系$\psi_v = \psi_w$ 对于任意单价或双价顶点 $v,\ w$. 这穷尽了环面丛产生的所有偏一类，因此它们不会存活到谱序列的 E^2-页。

注5.13。 由于参数化非消失线性依赖的环面丛是从 $\mathcal{M}_1^{\mathrm{cen}}{}_{,n}$ [RSPW19], 拉回的分层，关系 $\psi_v = \psi_w$ 是从 $\mathcal{M}^{\mathrm{cen}}_{1\,n\cdot\text{拉回的},}$

基点类的行为与§5.1.1中的讨论类似：有理尾被收缩为带基点的零亏格拟映射。更确切地说，设 $[\mathbf{G}]$ 和 $[\mathbf{G}/e]$是以下中心对齐的 $(1, n, d)$-图的粗等价类。



由 K¨unneth 公式以及与平坦拉回的相容性（类似于引理5.4和5.8），该边收缩的边界映射确定了将有理尾收缩至收缩半径的一般情形。设 $(\boldsymbol{\delta}^{(r)}, \boldsymbol{m}^{(r)})$ 是 $[\mathsf{G}]$，在收缩半径上的次数与标记分布，$(\boldsymbol{\delta}'^{(r)}, \boldsymbol{m}^{(r)})$ 是 $[\mathsf{G}/e]$ 上的次数与标记分布，因此 $\boldsymbol{\delta}'^{(r)} = \boldsymbol{\delta}^{(r)} + \delta' \cdot \mathsf{e}_v$ 对于顶点 v 在 $[\mathsf{G}]$ 和 $[\mathsf{G}/e]$. 上

设$\mathbf{G}^{cc}$ 为 $[\mathbf{G}]$, 的收缩核，则 $H^{\mathrm{BM}}_\star(\widetilde{\mathcal{M}}_{[\mathbf{G}]}) = H^{\mathrm{BM}}_\star(\widetilde{\mathcal{M}}_{[\mathbf{G}^{cc}]}) \otimes H^{\mathrm{BM}}_\star(\mathcal{M}^*_{0,0}(\mathbb{P}^r, \delta'))$. —

引理 5.14. 当 $\delta' = 1$, 边界映射

$$\mathrm{gr}^W_{-(k-1)} H^{\mathrm{BM}}_k(\widetilde{\mathcal{M}}_{[\mathbf{G}/e]}) \to \mathrm{gr}^W_{-(k-1)} H^{\mathrm{BM}}_{k-1}(\widetilde{\mathcal{M}}_{[\mathbf{G}]})$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$将 $\beta_v \cap [\mathcal{M}^{\mathbf{F}}{}_{(\boldsymbol{\delta}^{(r)},\ \boldsymbol{m}^{(r)})}]$ 映射到 $[\mathcal{M}_{[\mathbf{G}^{cc}]}] \otimes [\mathrm{pt}]$. 边界映射在 $\beta_v \cap H^{\mathrm{BM}}_k(\mathcal{M}_{[\mathbf{G}/e]}) \subset \widetilde{\ }\mathrm{gr}^W_{-(k-1)} H^{\mathrm{BM}}_k(\mathcal{M}_{[\mathbf{G}/e]})$ 上为零，其余情况下则不为零。

证明。 在 $\delta' = 1$的情形下，边界像可由将亏格零稳定映射收缩为顶点 v上的亏格一映射的基点得到，这与亏格一情形（§5.1.1）类似。其他情形下，(同)调次数的约束迫使映射为零。 □

推论5.15。 （庞加莱对偶的）偏一类 β_v 不会存留到 E^2-页。

5.4. **基点关系**。 只需描述单个有理尾情形下这些类的像，因为将它们与支撑在有理尾上的类取 K¨unneth 张量积，便能线性张成所有基点关系。

定义5.16。 我们将以下对象的边界映射像定义为基点关系：

(1)
$$B_{k-1}(n, r, d) \to \bigoplus_{\substack{[\mathbf{G},\rho]:\mathbf{G}\text{ loop-free} \\ \mathrm{codim}\widetilde{\mathcal{M}}_{[\mathbf{G},\rho]}=1}} \mathrm{gr}^W_{-(k-1)} H^{\mathrm{BM}}_{k-1}(\widetilde{\mathcal{M}}_{[\mathbf{G},\rho]}),$$

(2)
$$B_{k-1}(\mathsf{C}_{\ell,(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{m})}) \to \bigoplus_{\substack{\mathsf{C}_{\ell,(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{m})} \rightsquigarrow [\mathbf{G}',\rho'] \\ \text{rational tail contraction}}} \mathrm{gr}^W_{-(k-1)} H^{\mathrm{BM}}_{k-1}(\widetilde{\mathcal{M}}_{[\mathbf{G}',\rho']}),$$

(3) 对所有满足 $|\rho| = 1$ 且没有有理尾的 $[\mathbf{G}\ \rho]$,

$$\mathrm{gr}^W_{-(\star-1)} H_\star(\widetilde{\mathcal{M}}_{[\mathbf{G},\rho]}) \supset \langle \beta_v \cap [\widetilde{\mathcal{M}}_{[\mathbf{G},\rho]}] \rangle \to \bigoplus_{\substack{[\mathbf{G},\rho] \rightsquigarrow [\mathbf{G}',\rho'] \\ \text{rational tail contraction}}} \mathrm{gr}^W_\star H^{\mathrm{BM}}_\star(\widetilde{\mathcal{M}}_{[\mathbf{G}',\rho']}).$$

~目标空间上的同调次数为 $2(\dim \mathcal{M}_{[\mathbf{G},\rho]} - (r-1))$。

~令 $\mathbf{B} \subset \bigoplus_{[\mathbf{G}\ \rho]} \mathrm{gr}^W_{-\star} H^{\mathrm{BM}}_\star(\mathcal{M}_{[\mathbf{G},\rho]})$ 为一个向量子空间，它由对基点关系与分层上所有纯权上同调类取帽积生成。

结合引理 5.2、5.4 和 5.9，我们给出由 $B_\star(n,\ r,\ d)$ 经满射得到的基点关系的显式公式

$$\mathrm{gr}^W_{-\star} H^{\mathrm{BM}}_\star \hat{\mathcal{Q}}_{1,n+1}(\mathbb{P}^r, d-1) \twoheadrightarrow B_{k-1}(r,n,d).$$

ˆ 由引理 3.23 和射影丛公式可知，$\mathcal{Q}_{1,\ n+1}(\mathbb{P}^r,\ d-1)$ 上纯权类的一组基为

$$\left\{ \left((\alpha_1 + \Theta \cdot \alpha_2) \cdot H^m_{\hat{\mathcal{Q}}} \right) \cap [\hat{\mathcal{Q}}_{1,n+1}(\mathbb{P}^r, d-1)] \right\},$$

其中

(1) $\alpha_1,\ \alpha_2$ 分别遍历 $H^\star(\mathcal{M}_{1,\ n+2})$ 和 $H^\star(\mathcal{M}_{1,\ n+1})$ 的某些基；(2) $0 \le m \le (d-1)(r+1) - 1$.

给定这样一个基元素，考虑所有满足如下条件的子集 $I \subset [n]$：若存在某个 $(\alpha_1^{(I)},\ \alpha_2^{(I)}) \in H^\star(\mathcal{M}_{I+2}) \times H^\star(\mathcal{M}_{I+1})$，使得有序对 $(\alpha_1,\ \alpha_2)$ 是其拉回，则对每个 I，这样的 $(\alpha_1^{(I)},\ \alpha_2^{(I)})$ 若存在则唯一。基点关系是由以下纯权类组成的集合：

(1) $[(\alpha_1^{(I)} + \Theta \cdot \alpha_2^{(I)}) \cdot H^{m-\delta(r+1)}{}_{\hat{\mathcal{Q}}}\ ] \otimes [\mathrm{pt}]$ 上的 $\widetilde{\mathcal{M}}_{[\mathbf{G}_{\delta,I}]}$（定义见引理 5.4之前），若 $m - \delta(r+1) < 0$，则该项视为零；(2) 当收缩半径只有一个顶点，且核心上的标记为子集 I，时，$[(\alpha_1^{(I)} + \Theta \cdot \alpha_2^{(I)}) \cdot H^{m-\delta(r+1)}{}_{\hat{\mathcal{Q}}}\ ] \otimes [\mathrm{pt}]$ 上的 $\widetilde{\mathcal{M}}_{[\mathbf{G}_{\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{m}},\rho]}$；(3) 在所有其他余维一分层上取零。

注 5.17. 基点关系属于如下形式的类：$\varphi \otimes [\mathrm{pt}]$，其中 φ 是椭圆曲线映射空间上的一个纯权类，而有理尾或收缩半径由类 $[\mathrm{pt}]$. 修饰。换言之，基点关系与亏格零稳定映射上的代数循环无关。

可以得到关于以下对象的关系的类似公式：$B_{k-1}(\mathsf{C}_{\ell,(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{m})})$，而引理5.14已经确定了由这些类诱导的关系 β_v.

5.5. 同调群的表示。

~**定义 5.18.** 令 $\mathbf{P} \subset \bigoplus_{[\mathbf{G}\ \rho]} \mathrm{gr}^W_{-\star} H^{\mathrm{BM}}_\star(\mathcal{M}_{[\mathbf{G},\rho]})$ 为任意纯权类与以下某个相差一阶的上同调类的帽积所得到的边界像：

(1) 从[10] $H^3(\mathcal{M}_{1,4})$ 拉回，(2) 从 $H^1(\mathcal{M}_{0,4})$ 拉回，(3) 来自环面丛的相差一阶的类。

[10]严格来说，这些类只有在 E^2 页才会对非平凡微分作出贡献，因此只有讨论这些类在 E^2 微分下的像才有意义。

同样，**P** 中纯权类的元组对应于从 $\mathcal{M}_{1,n}^{\mathrm{cen}}$ 、拉回的关系，分别对应于 Getzler 关系、 —— WDVV 关系，以及 $\psi_v = \psi_w$ 对于同一水平上的两个顶点 v、 w 。

定理 5.19。我们有 $H_\star(\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)) = \bigoplus_{[\mathbf{G},\rho]} \mathrm{gr}^W_{-\star} H_\star^{\mathrm{BM}}(\mathcal{M}_{[\mathbf{G},\rho]})/\langle \mathbf{B}, \mathbf{P}\rangle$.

证明。偏一类的生成元 $\bigoplus_{[\mathbf{G},\rho]} \mathrm{gr}^W_{-(\star-1)} H_\star^{\mathrm{BM}}(\mathcal{M}_{[\mathbf{G},\rho]})$ 已知是从曲线模空间、环面纤维以及零亏格和一亏格中的基点类（包括有理曲线圈）拉回的：见引理3.26，3.19和3.33。前两类偏一类涵盖于**P** 和5.1 节开头的讨论中，由此可知它们不会存活到 E^3页。引理5.6，5.15 以及§5.1.4 中的讨论指出，基点类在 E^1页微分中的像均非零——由**B**记录——并且不会存活到 E^2页。

因此，在 E^3 页之后，不再有能在谱序列微分中产生非零像的差一类，这意味着我们已经穷尽了 E^1 页上纯权类之间所有可能的关系。□

注 5.20。处理 $H^\star(\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d))$ 上的类及其关系更为方便。**P** 中的关系已知是从 $\mathcal{M}_{1,n}^{\mathrm{cen}}$ 上的关系拉回得到的，

另一方面，设 $\beta \in \mathrm{B} \cap \bigoplus \dim \widetilde{\mathcal{M}}_{[\mathbf{G},\rho]=p} \mathrm{gr}^W_{-\star} H_\star^{\mathrm{BM}}(\mathcal{M}_{[\mathbf{G},\rho]})$ 是 p 维分层之间的一个基点关系，并设 $\beta \in \bigoplus_{[\mathbf{G},\rho]} H_\star(\mathcal{M}_{[\mathbf{G},\rho]})$ 是一个提升，例如—— §4.1 中引入的那些提升。则 β in $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)$ 的推前必定位于 $(p-1)$- 维分层的推前像中。对 $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d)$ 的维数建立归纳（令 (n, r, d) 变化），根据归纳假设和 K¨unneth 公式，$(p-1)$ 维分层上的生成元与关系已知。简言之，我们可以迭代地产生 $H_\star(\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{P}^r, d))$ 中提升后的 生成元之间的一组关系，这组关系与 B 和 P 的张成空间一一对应。由此得到定理 B 的结论。

参考文献

[AC98] Enrico Arbarello 和 Maurizio Cornalba。通过代数几何计算曲线模空间的上同调群。《IH´ES 数学出版物》，88:97–127，1998 年。7[Ara05] Donu Arapura。Leray 谱序列是动机的。《数学创刊》，160(3):567–589，2005 年 6 月。arXiv:math/0301140。3[BC23] Luca Battistella 和 Francesca Carocci。射影空间中亏格二曲线空间的一个光滑紧化：通过对数几何和 Gorenstein 曲线。Geometry & Topology，27(3):1203–1272，2023 年 6 月。8[BFP24] J. Bergstr¨om、C. Faber 和 S. Payne。稳定曲线模空间上的多项式点计数与奇次上同调消失。数学年刊，199(3)，2024 年 5 月。7[BM96] K. Behrend 和 Yu. Manin。稳定映射叠与 Gromov-Witten 不变量。Duke 数学杂志，85(1):1–60，1996 年。2[BNR21] Luca Battistella、Navid Nabijou 和 Dhruv Ranganathan。亏格一的曲线计数：椭圆奇点与相对几何。Algebraic Geometry，第 637–679 页，2021 年 11 月。11, 19[CL24] S. Canning 和 H. Larson。关于稳定曲线模空间的周环与上同调环。欧洲数学学会杂志，2024 年 11 月。7

[CLP23] Samir Canning、Hannah Larson 和 Sam Payne。$\mathcal{M}_g$的第十一上同调群。$_n$。《数学论坛·Sigma》，11:e62，2023 年。7[CLP24] Samir Canning、Hannah Larson 和 Sam Payne。$\mathcal{M}_g$上同调中典范环的扩张与动机结$_n$构。《数学论坛·Pi》，12:e23，2024 年。6, 7, 20, 27, 33[CLPW24a] Samir Canning、Hannah Larson、Sam Payne 和 Thomas Willwacher。具有多项式点计数的曲线模空间。arXiv 电子预印本，第 arXiv:2410.19913 页，2024 年 10 月。7[CLPW24b] Samir Canning、Hannah Larson、Sam Payne 和 Thomas Willwacher。曲线模空间上同调中的动机结构 LS_{12} 与 S_{16} 。arXiv 电子预印本，第 arXiv:2411.12652 页，2024 年 11 月。7[CLPW25] Samir Canning、Hannah Larson、Sam Payne 和 Thomas Willwacher。$\mathcal{M}_g$上的全纯形式的 FA-模。$_n$。arXiv 电子预印本，第 arXiv:2509.08774 页，2025 年 9 月。7[Coo14] Yaim Cooper。亏格一中的稳定商的几何。《数学年刊》，361(3-4):943–979，2014 年 9 月。8[DA73] P. Deligne 和 M. Artin。《拓扑斯理论与概形的 étale 上同调》。Springer Berlin Heidelberg，1973 年。26 Fon[Claudio Fontanari。迈向高亏格稳定映射模空间的上同调。《数学档案》，89(6):530–535，2007 年 10 月。7, 2707] FW[Benson Farb 和 Jesse Wolfson。结式的拓扑与算术。I。《纽约数学杂志》，22:801–821，2016 年。4, 7, 1516] Get[E. Getzler。解析构形空间上的混合霍奇模。Duke 数学杂志，96(1):175–203，1999 年。2899] GP[Ezra Getzler 和 Rahul Pandharipande。06] 、$\mathcal{M}_0$($_n$、r) 的贝蒂数。《代数几何杂志》，15(4):709–732，2006 年 5 月。5 dKS24a[Siddarth Kannan 和 Terry Dekun Song。通过 Vakil–Zinger 模空间的几何研究] 、$\mathcal{M}_1$($_n$、$\mathbb{P}^r$) 的对偶复形。arXiv 电子预印本，第 arXiv:2411.03518 页，2024 年。2, 7, 8, 9, 10, 11, 14, 18, 19 dKS24b[Siddarth Kannan 和 Terry Dekun Song。] -等变的 S_n、$\mathcal{M}_1$($_n$、$\mathbb{P}^r$) 欧拉示性数。arXiv 电子预印本，第 arXiv:2412.12317 页，2024 年。7 dKS[Siddarth Kannan 和 Terry Dekun Song。26] 、$\mathcal{M}_g$($_n$、$\mathbb{P}^r$) 的虚霍奇数：稳定性与计算。arXiv 电子预印本，第 arXiv:2601.07981 页，2026 年 1 月。8 dMM[Andrei Mustat07] ˇa 和 Magdalena Anca Mustat˛ˇa。稳定映射的中间模空间。《数学创刊》，167(1):47–90，2007 年。5, 8.MM08a[Anca M Mustat]a 和 Andrei Mustaţˇa。¸ˇ、M_0($_m$、n) 的周环。《纯粹与应用数学杂志》（Crelles Journal），2008(615)，2008 年 1 月。5, 8 dMM08b ¨Anca M. Mustat[ˇa 和 Andrei Mustat] ˇa。稳定映射空间的典范环。《数学进展》，217(4):1728–1755，2008 年。5, 8.MOP.Alina Marian、Dragos Oprea 和 Rahul Pandharipande。稳定商模空间。Geometry & Topology，15(3):1651–1706，2011 年 10 月。8, 19[Opr06a11] Dragos Oprea。通过环面作用研究到 [的稳定映射模空间上的典范类。《数学进展》，207(2):661–690，2006 年 12 月。5] Opr06b $\overline{\mathbb{P}^r}$ Dragos Oprea。到旗簇的稳定映射模空间的典范环。《代数几何杂志》，15(4):623–655，2006 年 6 月。7[Pan] Rahul Pandharipande。Kontsevich 模空间 [、99] ($\mathbb{Q}$、M_0) 上 $_n$-除子的交与枚举几何。《美国数学会汇刊》，351(4):1481–1505，1999 年。26$\mathbb{P}^r$Pet dDan Petersen。亏格一中典范环的结构。Duke 数学杂志，163(4)，2014 年 3 月。arXiv:1205.[math14] 。6, 7, 20, 331586 [Pet]Dan Petersen。主极化阿贝尔曲面模空间上的局部系统的上同调。《太平洋数学杂志》，275(1):39–61，2015 年 4 月。8

[Pet16] Dan Petersen. 紧型带标记二次曲线空间的典范环。 *CompositioMathematica*，152(7):1398–1420，2016年。8[RSPW19] Dhruv Ranganathan 、 Keli Santos-Parker 和 Jonathan Wise。亏格一稳定映射模空间与对数几何 I。 *Geometry &Topology*，23(7):3315–3366，2019年12月。 2，8，10，11，12，36[Son26] Terry Dekun Song。重新探讨射影空间中亏格零稳定映射的关系， 2026+。准备中。8[VZ08] Ravi Vakil 和 Aleksey Zinger。射入 $\mathbb{P}^n$中的一阶稳定映射模空间主分支的消奇异化。 *Geometry &Topology*，12(1):1–95，2008年2月。 1

D系P纯数学M与M数学S统计学，英国剑桥大学C剑桥，剑-桥，CB3 0WA电子邮箱：ds2016@cam.ac.uk