arXiv:2602.16208v1 [math.CV] 18 Feb 2026

与气球形区域相关的星形函数系数问题

S. SIVAPRASAD KUMAR 和 A. TRIPATHI

Abstract. 近年来，图像与信号处理领域的进展借鉴了几何函数论，尤其是系数估计问题。鉴于其重要意义，我们引入一类与气球形区域相关的星形函数

$$\mathcal{S}_{\mathcal{B}}^{*}=\left\{f\in\mathcal{A}:\frac{zf'(z)}{f(z)}\prec\frac{1}{1-\log(1+z)}:=B(z);\ z\in\mathbb{D}\right\},$$

其中 $B(z)$ 将单位圆盘 $\mathbb{D}$ 映射到气球形区域。本文建立了涉及初始系数、对数系数以及 $f\in\mathcal{S}_{\mathcal{B}}^{*}$ 反函数的对数系数的二阶汉克尔行列式和二阶托普利兹行列式的界。

1 引言

考虑由定义在 $\mathbb{D}$ 上的解析函数 f 构成的类 $\mathcal{A}:=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|<1\}$，其满足归一化条件 $f(0)=0$ 且 $f'(0)=1$。对于 $f\in\mathcal{A}$:

$$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n. \tag{1.1}$$

令 $\mathcal{S}$ 为 $\mathcal{A}$ 的一个子类，它由在 $\mathbb{D}$ 中单叶的解析函数组成。$\mathcal{S}$ 中由星形函数组成的子类 $\mathcal{S}^*$，以及函数 $f\in\mathcal{S}^*$，定义如下:

$$\mathcal{S}^{*}=\left\{f\in\mathcal{A}:\Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>0;\quad z\in\mathbb{D}\right\}.$$

对于解析函数 f 和 g，若存在某个施瓦茨函数 w，满足 $w(0)=0$ 且 $|w(z)|<1$，使得 $f(z)=g(w(z))$，则称 f 从属于 g，记作 $f\prec g$ [29]。Ma and Minda [30] 引入了类 $\mathcal{S}^*(\varphi)$，其定义为:

$$\mathcal{S}^{*}(\varphi)=\left\{f\in\mathcal{A}:\frac{zf'(z)}{f(z)}\prec\varphi(z)\right\},$$

其中，φ 是解析且单叶的，$\Re\varphi(z)>0$，并将 $\mathbb{D}$ 映射到关于实轴对称的星形区域，且 $\varphi(0)=1$、$\varphi'(0)>0$。选择不同的 φ 可得到若干著名的 $\mathcal{S}^*$ 子类，见表 1。

在本研究中，我们考察一类与气球形区域 $B(\mathbb{D})$相关的星形函数，如图 1 所示。我们将此类定义为:

$$\mathcal{S}_{B}^{*}=\left\{f\in\mathcal{A}:\frac{zf'(z)}{f(z)}\prec B(z)\right\}.$$

2020 *Mathematics Subject Classification.* 30C45 · 30C50。*Key words and phrases.* 单叶函数 · 星形函数 · 反函数 · 气球形区域 · 汉克尔行列式 · Toeplitz行列式 · 初始系数 · 对数系数。

类	$\phi(z)$	参考文献
$\mathcal{S}^*[A,B]$	$\frac{1+Az}{1+Bz}$; $-1 \le B < A \le 1$	Janowski [14]
$\mathcal{S}^*_\rho$	$1+\sinh^{-1}(z)$	Arora等人 [4]
$\mathcal{S}^*_e$	e^z	Mendiratta等人 [32]
$\mathcal{SL}$	$\sqrt{1+z}$	Stankiewicz 等人 [41]
$\mathcal{S}^*_{\mathfrak{B}}$	$\sqrt{1+\text{双曲正切}\, z}$	Yadav等人 [25]
$\mathcal{S}^*_q$	$z+\sqrt{1+z^2}$	Raina 等人 [39]

TABLE 1. 对应于各种 $\phi(z)$的星形函数子类

区域 $B(\mathbb{D})$ 的特征为 $B(\mathbb{D}) = \{w \in \mathbb{C}\setminus\{0\} : |\exp(1-\frac{1}{w})-1| < 1\}$，其边界 $\partial B(\mathbb{D})$ 由 $|\exp(1-1/w)-1| = 1$ 给出。令 $z = e^{i\theta}$ 以 $\theta \in (-\pi,\pi)$ 参数化，得到 $w(\theta) = [1-\log(2\cos(\theta/2)) - i\theta/2]^{-1}$，这表明该区域关于实轴对称，最右端的尖端位于 $w(0) = 1/(1-\log 2) \approx 3.2589$，凸主体向左延伸至约 $(-0.181, \pm 0.678)$，并在原点处形成一个尖点；当 $\theta \to \pm\pi$ 的 $\arg(w) \to \mp\pi/2$ 时，该区域类似于一个系有结的气球。原点附近的边界近似为 $(x-1/2)^2 + y^2 = 1/4$。该区域关于$w = 1$呈星形且为单叶区域，见图 1。

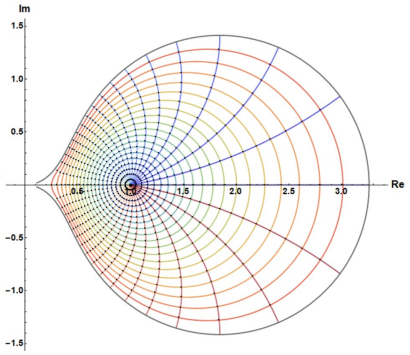


FIGURE 1. $B(\mathbb{D})$，一个气球形区域，$B(z) = 1 - \frac{1}{\log(1+z)}$。。

$\mathcal{S}^*_B$ 中的函数可通过如下积分公式表示：

$$f(z) = z\exp\int_0^z \frac{\phi(t)-1}{t}dt. \tag{1.2}$$

函数 $f_1(z)$、$f_2(z)$和 $f_3(z)$分别作为族 $\mathcal{S}^*_B$的极值函数，它们分别由(1.2)中的$\phi(t) = B(t)$ $\phi(t) = B(t^2)$ 和 $\phi(t) = B(it)$得到。这些函数由下式给出：

$$f_1(z) = z\exp\left(\int_0^z \frac{\log(1+t)}{t(1-\log(1+t))}\,dt\right) = z + z^2 + \frac{3}{4}z^3 + \frac{19}{36}z^4 + \frac{101}{288}z^5 + \dots, \tag{1.3}$$

$$f_2(z) = z\exp\left(\int_0^z \frac{\log(1+t^2)}{t(1-\log(1+t^2))}\,dt\right) = z + \frac{1}{2}z^3 + \frac{1}{4}z^5 + \frac{5}{36}z^7 \dots, \tag{1.4}$$

$$f_3(z) = z\exp\left(\int_0^z \frac{\log(1+it)}{t(1-\log(1+it))}\,dt\right) = z + iz^2 - \frac{3}{4}z^3 - \frac{19}{36}iz^4 + \frac{101}{288}z^5 + \dots \tag{1.5}$$

对于 $f \in \mathcal{S}$，对数系数 $\gamma_n(f)$定义为：

$$F_f(z) = \log\left(\frac{f(z)}{z}\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n(f)z^n, \quad \text{where } z \in \mathbb{D}.$$

我们将 $\gamma_n(f)$ 记为 γ_n。对于 $f \in \mathcal{S}$，对数系数由下式给出：

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}a_2, \quad \gamma_2 = \frac{1}{2}\left(a_3 - \frac{1}{2}a_2^2\right), \quad \gamma_3 = \frac{1}{2}\left(a_4 - a_2a_3 + \frac{1}{3}a_2^3\right). \tag{1.6}$$

根据 Koebe $1/4$-定理， $f \in \mathcal{S}$ 的反函数可在原点的某个邻域内定义为 $F_{f^{-1}} \in \mathcal{A}$ ，由下式给出：

$$F_{f^{-1}}(w) := \log\left(\frac{F(w)}{w}\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma_n w^n, \quad |w| < \frac{1}{4}.$$

这里， $f \in \mathcal{S}$ 的反函数的对数系数表示为 ：

$$\Gamma_1 = -\frac{1}{2}a_2, \quad \Gamma_2 = -\frac{1}{2}\left(a_3 - \frac{3}{2}a_2^2\right), \quad \Gamma_3 = -\frac{1}{2}\left(a_4 - 4a_2a_3 + \frac{10}{3}a_2^3\right). \tag{1.7}$$

比伯巴赫猜想 [12]推动了单叶函数论中的系数问题研究。Pommerenke [35] 引入了 q阶汉克尔行列式。对于 $f \in \mathcal{A}$，汉克尔行列式$\mathcal{H}_{q,\ n}(f)$定义如下：

$$\mathcal{H}_{q,n}(f) = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+q-1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{n+q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+q-1} & a_{n+q} & \cdots & a_{n+2(q-1)} \end{vmatrix}, \quad q, n \in \mathbb{N}. \tag{1.8}$$

各种子类 $\mathcal{S}$ 的汉克尔行列式的精确界已得到广泛研究（参见 [15, 22–24, 40, 43]）。由（1.8），二阶汉克尔行列式

$$\mathcal{H}_{2,1}(f) = (a_3 - a_2^2), \quad \mathcal{H}_{2,2}(f) = (a_2a_4 - a_3^2). \tag{1.9}$$

Ponnusamy等人 [37] 得到了单叶函数及其反函数的对数系数的精确界。对于 $f \in \mathcal{A}$， q^{th} 汉克尔行列式$\mathcal{H}_{q,\ n}(F_f)$由这些系数定义如下：

$$\mathcal{H}_{q,n}(F_f/2) = \begin{vmatrix} \gamma_n & \gamma_{n+1} & \cdots & \gamma_{n+q-1} \\ \gamma_{n+1} & \gamma_{n+2} & \cdots & \gamma_{n+q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n+q-1} & \gamma_{n+q} & \cdots & \gamma_{n+2(q-1)} \end{vmatrix}. \tag{1.10}$$

研究解析函数的对数系数构成的Hankel矩阵这一想法由B. Kowalczyk和A. Lecko [17–19], 提出；关于后续发展，参见[2, 21, 31, 33]。对于 $f \in \mathcal{A}$，由 f^{-1}的对数系数定义的 q^{th} 汉克尔行列式$\mathcal{H}_{q,\ n}(F_f)$表示为：

$$\mathcal{H}_{q,n}(F_{f^{-1}}/2) = \begin{vmatrix} \Gamma_n & \Gamma_{n+1} & \cdots & \Gamma_{n+q-1} \\ \Gamma_{n+1} & \Gamma_{n+2} & \cdots & \Gamma_{n+q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{n+q-1} & \Gamma_{n+q} & \cdots & \Gamma_{n+2(q-1)} \end{vmatrix}. \tag{1.11}$$

研究以逆解析函数的对数系数为元素的Hankel矩阵这一概念，最早在 [9, 27, 28]中被研究。对于 $f \in \mathcal{A}$，Toeplitz行列式由下式给出：

$$\mathcal{T}_{q,n}(f) = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+q-1} \\ a_{n+1} & a_n & \cdots & a_{n+q-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+q-1} & a_{n+q-2} & \cdots & a_n \end{vmatrix}, \quad q, n \in \mathbb{N}. \tag{1.12}$$

Ali等人 [3], 研究了 $\mathcal{S}^*$ 和 $\mathcal{C}$ 类中的Toeplitz行列式界，并在 [1, 10, 11, 26, 34, 42]中将结果进一步推广至 $\mathcal{S}$的子类。令(1.12)中的 $a_1 = 1$和 $q = 2$，

由此得到 $n=1$，2的二阶Toeplitz行列式。

$$\mathcal{T}_{2,1}(f)=(1-a_2^2),\quad \mathcal{T}_{2,2}(f)=(a_2^2-a_3^2),\quad \mathcal{T}_{2,3}(f)=(a_3^2-a_4^2). \tag{1.13}$$

对于 $f\in\mathcal{S}$，对应于对数系数的 Toeplitz 行列式如下：

$$\mathcal{T}_{q,n}(F_f/2)=\begin{vmatrix} \gamma_n & \gamma_{n+1} & \cdots & \gamma_{n+q-1} \\ \gamma_{n+1} & \gamma_n & \cdots & \gamma_{n+q-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n+q-1} & \gamma_{n+q-2} & \cdots & \gamma_n \end{vmatrix}. \tag{1.14}$$

Toeplitz 行列式$\mathcal{T}_{q,\ n}(F_{f^{-1}}/2)$，其元素为 $f\in\mathcal{S}$ 的逆函数的对数系数，具体如下：

$$\mathcal{T}_{q,n}(F_{f^{-1}}/2)=\begin{vmatrix} \Gamma_n & \Gamma_{n+1} & \dots & \Gamma_{n+q-1} \\ \Gamma_{n+1} & \Gamma_n & \dots & \Gamma_{n+q-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{n+q-1} & \Gamma_{n+q-2} & \dots & \Gamma_n \end{vmatrix}. \tag{1.15}$$

近年来，几何函数论研究了用于解析函数和星形函数系数界的汉克尔行列式与托普利茨行列式 [16]。尽管其应用仍然有限，但它们在图像处理、信号分析和数学物理领域展现出潜力，包括对比度增强 [6], 纹理分析 [38], 以及分数阶热方程 [13]。本文引入了气球形星形类，并推导出系数、Fekete-Szeg¨o 泛函以及二阶汉克尔行列式与托普利茨行列式的精确界。

2 预备结果

设 $\mathcal{P}$ 为由在 $\mathbb{D}$ 中具有正实部的函数组成的类，该子类称为 Carath´eodory 类。$f\in\mathcal{P}$ 的泰勒级数展开定义如下：

$$p(z)=1+p_1z+p_2z^2+\cdots=1+\sum_{n=1}^{\infty}p_nz^n. \tag{2.1}$$

卡拉泰奥多里´类 $\mathcal{P}$ 及其相关系数界在确立汉克尔行列式的精确界方面起着至关重要的作用。本节提供若干关键引理，它们构成了本节所给出主要结果的基础。

引理 2.1. *[7]*：若 $p\in\mathcal{P}$ 具有(2.1)的形式，则

$$p_1 = 2\zeta_1, \tag{2.2}$$
$$p_2 = 2\zeta_1^2+2(1-\zeta_1^2)\zeta_2, \tag{2.3}$$
$$p_3 = 2\zeta_1^3+4(1-\zeta_1^2)\zeta_1\zeta_2-2(1-\zeta_1^2)\zeta_1\zeta_2^2+2(1-\zeta_1^2)(1-|\zeta_2|^2)\zeta_3, \tag{2.4}$$

对某些 ζ_1、 ζ_2、 $\zeta_3\in\overline{\mathbb{D}}$。

对于 $\zeta_1\in\mathbb{T}:=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|=1\}$，存在唯一的函数 $p\in\mathcal{P}$，其 p_1 如(2.2)所示，即

$$p(z)=\frac{1+\zeta_1z}{1-\zeta_1z},\quad z\in\mathbb{D} \tag{2.5}$$

对于 $\zeta_1\in\mathbb{D}$ 和 $\zeta_2\in\mathbb{T}$，存在唯一的函数 $p\in\mathcal{P}$，其 p_1 和 p_2 如（2.2）和（2.3）所示，即

$$p(z)=\frac{1+(\overline{\zeta_1}\,\zeta_2+\zeta_1)z+\zeta_2z^2}{1+(\overline{\zeta_1}\,\zeta_2-\zeta_1)z-\zeta_2z^2},\quad z\in\mathbb{D}. \tag{2.6}$$

引理 2.2。 *[8]*: 若 A、 B、 $C\in\mathbb{R}$，考虑

$$Y(A,B,C):=\max\{|A+Bz+Cz^2|+1-|z|^2,\quad z\in\overline{\mathbb{D}}\}$$

情形 *1*: 如果 $AC\geq 0$，那么

$$Y(A,B,C)=\begin{cases}|A|+|B|+|C|, & |B|\geq 2(1-|C|),\\ 1+|A|+\dfrac{B^2}{4(1-|C|)}, & |B|<2(1-|C|).\end{cases}$$

情形 *2*: 如果 $AC<0$，那么

$$Y(A,B,C)=\begin{cases}1-|A|+\dfrac{B^2}{4(1-|C|)}, & -4AC(C^{-2}-1)\leq B^2\wedge|B|<2(1-|C|),\\ 1+|A|+\dfrac{B^2}{4(1+|C|)}, & B^2<\min\{4(1+|C|)^2,-4AC(C^{-2}-1)\},\\ R(A,B,C), & \textit{Otherwise},\end{cases}$$

其中

$$R(A,B,C)=\begin{cases}|A|+|B|-|C|, & |C|(|B|+4|A|)\leq|AB|,\\ -|A|+|B|+|C|, & |AB|\leq|C|(|B|-4|A|),\\ (|C|+|A|)\sqrt{1-\dfrac{B^2}{4AC}}, & \textit{Otherwise}.\end{cases}$$

引理 2.3. *[5, 36]* 设 $p\in\mathcal{P}$。则下列不等式成立

$$\begin{aligned}|p_t| &\leq 2, & t\geq 1,\\ |p_{t+2k}-\rho p_t p_k^2| &\leq 2(1+2\rho), & 0\leq\rho\leq 1,\\ \left|p_2-\frac{p_1^2}{2}\right| &\leq 2-\frac{|p_1|^2}{2},\end{aligned}$$

and

$$|c_{n+k}-\mu c_n c_k|\leq 2\max\{1,|2\mu-1|\}=\begin{cases}2, & \textit{if } 0\leq\mu\leq 1,\\ 2|2\mu-1|, & \textit{Otherwise}.\end{cases}$$

引理 2.4. *[44]* 设 $w\in\mathcal{H}$，称为满足 $w(0)=0$ 且 $|w(z)|<1$的施瓦茨函数，其中对所有 $z\in\mathbb{D}$ 均成立，并具有如下级数展开:

$$w(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n z^n \tag{2.7}$$

则下列不等式成立

$$\begin{aligned}|b_1| &\leq 1,\\ |b_2| &\leq 1-|b_1|^2,\\ |b_3| &\leq 1-|b_1|^2-\frac{|b_2|^2}{1+|b_1|}.\end{aligned}$$

3 汉克尔行列式

我们开始 首先通过建立函数 $f \in \mathcal{S}$ 的初始系数的界 $^*_B$:

定理 3.1. 令 $f \in \mathcal{S}^*_B$。则以下不等式成立

$$|a_2| \leq 1, \quad |a_3| \leq \frac{3}{4}, \quad |a_4| \leq \frac{19}{36}, \quad |a_5| \leq \frac{101}{288}.$$

这些不等式是尖锐的。

证明. 令 $f \in \mathcal{S}^*_B$。则存在一个施瓦茨函数 $w(z)$，使得

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{1}{1 - \log(1 + w(z))}. \tag{3.1}$$

设 $w(z) = (p(z) - 1)/(p(z) + 1)$，其中 $p \in \mathcal{P}$ 由 (2.1) 给出。将此表达式连同 (1.1) 和 (2.1) 代入 (3.1)，可得到以下系数关系:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{2}p_1, && (3.2)\\ a_3 &= \frac{1}{16}(p_1^2 + 4p_2), && (3.3)\\ a_4 &= \frac{1}{288}\left(p_1^3 + 12p_1p_2 + 48p_3\right), && (3.4)\\ a_5 &= -\frac{1}{4608}\left(7p_1^4 - 24p_1^2p_2 - 96p_1p_3 - 576p_4\right). && (3.5) \end{aligned}$$

由 (3.2)、(3.3)、(3.4) 和 (3.5) 可得

$$|a_2| \leq \frac{1}{2}|p_1|, \quad |a_3| \leq \frac{1}{16}\left|p_1^2 + 4p_2\right|, \quad |a_4| \leq \frac{1}{288}\left|p_1^3 + 12p_1p_2 + 48p_3\right|,$$

$$|a_5| \leq \frac{1}{4608}\left|7p_1^4 - 24p_1p_2 - 96p_1p_3 - 576p_4\right|.$$

利用引理 2.3，我们立即推出

$$|a_2| \leq 1, \quad |a_3| \leq \frac{3}{4}, \quad |a_4| \leq \frac{19}{36}, \quad |a_5| \leq \frac{101}{288}.$$

这些不等式的最佳性由极值函数 $f_1(z) \in \mathcal{S}^*_B$ 达到，该函数在 (1.3) 中定义。

∎

现在我们推导 Fekete-Szeg¨o 泛函 $|a_3 - \mu a_2^2|$ 在 $f \in \mathcal{S}^*_B$下的精确界。关于 Fekete-Szeg¨o 泛函的一些近期结果，参见 [20]。

定理 3.2. 设 $f \in \mathcal{S}^*_B$。那么，对任意复数 $\mu \in \mathbb{C}$，以下不等式成立:

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \tfrac{1}{2}\max\left\{1, \left|\mu - \tfrac{3}{4}\right|\right\}.$$

此不等式是尖锐的。

证明。 令 $f \in \mathcal{S}^*_B$。那么由 (3.2)、(3.3) 并利用引理 2.3，我们得到:

$$|a_3 - \mu a_2^2| = \frac{1}{16}\left|(1 - 4\mu)p_1^2 + 4p_2\right| \leq \frac{1}{2}\max\left\{1, \left|\mu - \frac{3}{4}\right|\right\}.$$

这些不等式的最佳性由函数 $f_2(z) \in \mathcal{S}^*_B$ 得出，该函数由式 (1.4) 给出。 ∎

注意，当 $\mu = 1$ 时，我们有 $\mathcal{H}_{2,\ 1}(f) = a_3 - a_2^2$。因此，由上述定理可知，$\mathcal{H}_{2,\ 1}(f)$ 的最佳界为 $|\mathcal{H}_{2,\ 1}(f)| \leq \frac{1}{2}$。当函数 $f_2(z) \in \mathcal{S}_B^*$（定义见式 (1.4)）取到等号。

现在我们推导与 $f \in \mathcal{S}_B^*$ 的初始系数相关的二阶Hankel行列式：

定理 3.3。设 $f \in \mathcal{S}_B^*$。则

$$|\mathcal{H}_{2,2}(f)| \leq \frac{1}{4}. \tag{3.6}$$

该不等式是尖锐的。

证明。设 $f \in \mathcal{S}_B^*$。在 (1.9) 中对 $\mathcal{H}_{2,2}(f)$ 使用 (3.2)、(3.3) 和 (3.4)，可得

$$\left|a_2a_4 - a_3^2\right| = \frac{1}{2304}\left|5p_1^4 + 24p_1^2p_2 - 192p_1p_3 + 144p_2^2\right| \tag{3.7}$$

由于类 $\mathcal{S}_B^*$ 和 $|a_2a_4 - a_3^2|$ 在旋转下保持不变。例如，考虑函数 $f_\theta(z) := e^{-i\theta}f(e^{i\theta}z)$，其中 $f \in \mathcal{S}$ 和 $\theta \in \mathbb{R}$，可得

$$\left(a_2a_4 - a_3^2\right)_\theta = e^{4i\theta}\left(a_2a_4 - a_3^2\right)$$

由于 $|(a_2a_4 - a_3^2)_\theta| = |a_2a_4 - a_3^2|$，因此 $|\mathcal{H}_{2,\ 2}(f)|$ 在旋转下保持不变。现在，将引理 2.1 应用于 (3.7)，可得

$$\left|a_2a_4 - a_3^2\right| = \frac{1}{144}\left|12\zeta_2^2(\zeta_1^4 + 2\zeta_1^2 - 3) + 12\zeta_1^2(\zeta_1^2 - 1)\zeta_2 - 5\zeta_1^4 + 48\zeta_1\zeta_3(1 - \zeta_1^2)(1 - |\zeta_2|^2)\right|, \tag{3.8}$$

由于 $|\zeta_3| \leq 1$，由 (3.8) 可得 $\zeta_1 = 0$ 和 $\zeta_1 = 1$的以下情形：

$$|a_2a_4 - a_3^2| = \begin{cases} \dfrac{|\zeta_2|^2}{4} \leq \dfrac{1}{4}, & \zeta_1 = 0, \\ \dfrac{5}{144}, & \zeta_1 = 1. \end{cases}$$

对于 $\zeta_1 \in (0,\ 1)$，对 (3.8) 应用三角不等式并利用 $|\zeta_3| \leq 1$，可得

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq \frac{1}{3}\zeta_1(1 - \zeta_1^2)\ \Psi(A, B, C), \tag{3.9}$$

其中

$$\Psi(A, B, C) := |A + B\zeta_2 + C\zeta_2^2| + 1 - |\zeta_2|^2,$$

and

$$A = -\frac{5\zeta_1^3}{48(1 - \zeta_1^2)}, \quad B = \frac{1}{4}\zeta_1, \quad C = -\frac{3 + \zeta_1^2}{4\zeta_1}.$$

现在考虑引理 2.2 中的情形。对于 $\zeta_1 \in (0,\ 1)$，可以看出 $AC \geq 0$ 和$|B| \geq 2(1 - |C|)$。因此，由引理 2.2 可得

$$\Psi(A, B, C) \leq |A| + |B| + |C|.$$

将此估计代入 (3.9)，得到

$$\begin{aligned} |a_2a_4 - a_3^2| &\leq \frac{1}{3}\zeta_1(1 - \zeta_1^2)\left(|A| + |B| + |C|\right) \\ &\leq \frac{1}{3}\zeta_1(1 - \zeta_1^2)\left(\left|\frac{5\zeta_1^3}{48(1 - \zeta_1^2)}\right| + \left|\frac{\zeta_1}{4}\right| + \left|\frac{3 + \zeta_1^2}{4\zeta_1}\right|\right) \leq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

因此，由上述结果可知，不等式 (3.6) 成立。该界是最佳界，当函数 $f_2(z) \in \mathcal{S}_B^*$（定义见 (1.4)）取等号。 ∎

现在我们来确定函数$f \in \mathcal{S}_B^*$的对数系数的精确界：

定理 3.4. 设 $f \in \mathcal{S}_B^*$。那么，对数系数满足以下不等式：

$$|\gamma_1| \leq \frac{1}{2}, \quad |\gamma_2| \leq \frac{1}{4}, \quad |\gamma_3| \leq \frac{1}{8}.$$

这些界是尖锐的。

证明. 设 $f \in \mathcal{S}_B^*$。将 (3.2)、(3.3) 和 (3.4) 代入 (1.6)，得到

$$\gamma_1 = \frac{1}{4}p_1, \quad \gamma_2 = -\frac{1}{32}(p_1^2 - 4p_2), \quad \gamma_3 = \frac{1}{144}\left(p_1^3 - 6p_1p_2 + 12p_3\right).$$

应用引理 2.3，得到

$$|\gamma_1| \leq 1/2, \quad |\gamma_2| \leq 1/4, \quad |\gamma_3| \leq 1/8.$$

这些界是尖锐的，且当函数 $f_1(z)$ 和 $f_2(z) \in \mathcal{S}_B^*$ 分别由 (1.3) 和 (1.4) 给出时，等号成立。 ∎

通过修改系数，可计算式（1.9）中定义的初始系数对应的二阶汉克尔行列式，并得到不同系数取值下的第二Hankel行列式。例如，将式（1.6）代入式（1.10），可得对数系数的汉克尔行列式，其表达式为

$$\mathcal{H}_{2,1}(F_f/2) = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \gamma_1\gamma_3 - \gamma_2^2 = \frac{1}{4}\left(a_2a_4 - a_3^2 + \frac{1}{12}a_2^4\right). \tag{3.10}$$

值得注意的是，$|\mathcal{H}_{2,\ 1}(F_f/2)|$ 在旋转下保持不变。例如，考虑函数 $f_\theta(z) := e^{-i\theta}f(e^{i\theta}z)$，其中 $f \in \mathcal{S}$ 和 $\theta \in \mathbb{R}$，可得以下关系：

$$\mathcal{H}_{2,1}\left(F_{f_\theta}/2\right) = \frac{e^{4i\theta}}{4}\left(a_2a_4 - a_3^2 + \frac{1}{12}a_2^4\right) = e^{4i\theta}\mathcal{H}_{2,1}\left(F_f/2\right). \tag{3.11}$$

现在我们来确定 $f \in \mathcal{S}_B^*$ 对应的对数系数二阶汉克尔行列式的精确界。

定理 3.5. 设 $f \in \mathcal{S}_B^*$。则

$$|\mathcal{H}_{2,1}(F_f/2)| \leq \frac{1}{16}. \tag{3.12}$$

此不等式是最佳的。

证明。设 $f \in \mathcal{S}_B^*$。由于类 $\mathcal{S}_B^*$ 在旋转下不变，且 $\mathcal{H}_{2,1}(F_f/2)$ 由 (3.11) 给出，因此 $|\mathcal{H}_{2,1}(F_f/2)|$ 也是旋转不变的。因此，不失一般性，我们可以假设 $a_2 \geq 0$。从而，由 (3.2)，我们有 $p_1 \geq 0$，鉴于 (2.2)，这意味着 $\zeta_1 \in [0,1]$。因此，将 (3.2)、(3.3) 和 (3.4) 代入 (3.10)，我们得到

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{2,1}(F_f/2) &= \left(\frac{1}{2}a_2\right)\left(\frac{1}{2}\left(a_4 - a_2a_3 + \frac{1}{3}a_2^3\right)\right) - \left(\frac{1}{2}\left(a_3 - \frac{1}{2}a_2^2\right)\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(a_2a_4 - a_3^2 + \frac{1}{12}a_2^4\right) \\ &= \frac{1}{9216}\left(7p_1^4 - 24p_1^2p_2 - 144p_2^2 + 192p_1p_3\right) \end{aligned} \tag{3.13}$$

现在，将引理 2.1 应用于 (3.13)，我们得到

$$\mathcal{H}_{2,1}(F_f/2) = \frac{1}{576}\Big(12\zeta_2^2(\zeta_1^4+2\zeta_1^2-3)+12\zeta_1^2\zeta_2(1-\zeta_1^2)+ 7\zeta_1^4+48\zeta_1(1-\zeta_1^2)(1-|\zeta_2|^2)\zeta_3\Big) \tag{3.14}$$

(1) 由于 $|\zeta_3|\le 1$，由 (3.14) 得到 $\zeta_1=0$ 和 $\zeta_1=1$ 的以下情形。 :

$$|\mathcal{H}_{2,1}(F_f/2)| = \begin{cases} \dfrac{|\zeta_2|^2}{16}\le\dfrac{1}{16}, & \zeta_1=0, \\ \dfrac{7}{576}, & \zeta_1=1. \end{cases}$$

(2) 当 $\zeta_1\in(0,1)$ 时，由于 $|\zeta_3|\le 1$，对 (3.14) 应用三角不等式可得

$$\begin{aligned}|\mathcal{H}_{2,1}(F_f/2)| &\le \frac{1}{576}\big|12\zeta_2^2(\zeta_1^4+2\zeta_1^2-3)+12\zeta_1^2\zeta_2(1-\zeta_1^2)+ 7\zeta_1^4+48\zeta_1(1-\zeta_1^2)(1-|\zeta_2|^2)\zeta_3\big| \\ &= \frac{1}{7}\zeta_1(1-\zeta_1^2)\Psi(A,B,C)\end{aligned} \tag{3.15}$$

其中

$$\Psi(A,B,C) \;:=\; |A+B\zeta_2+C\zeta_2^2|+1-|\zeta_2|^2,$$

and

$$A=\frac{7\zeta_1^3}{48(1-\zeta_1^2)},\quad B=\frac{\zeta_1}{4},\quad C=-\frac{3+\zeta_1^2}{4\zeta_1}.$$

Since $AC<0$，通过应用引理 2.2 的 情形 *2* ，我们如下进行。我们定义 e

$$T_2(\zeta_1) := -4AC\left(\frac{1}{C^2}-1\right)-B^2 = -\frac{\zeta_1^2(18-\zeta_1^2)}{12(3+\zeta_1^2)}\le 0,$$

由此得到

$$-4AC\left(\frac{1}{C^2}-1\right)\le B^2.$$

A. 对于每个 $\zeta_1\in(0,1)$

$$T_1(\zeta_1) := |B|-2(1-|C|) = \frac{3}{2\zeta}+\frac{3\zeta_1}{4}-2>0,$$

这意味着 $|B|>2(1-|C|)$. 此外，

$$T_2(\zeta_1) := -4AC\left(\frac{1}{C^2}-1\right)-B^2 = -\frac{\zeta_1^2(18-\zeta_1^2)}{12(3+\zeta_1^2)}\le 0,$$

由此得到 $-4AC\left(\frac{1}{C^2}-1\right)\le B^2$. 因此， $T_1(\zeta_1)\cap T_2(\zeta_1)=\emptyset$，并且如引理 2.2 所述，对于任意 $\zeta_1\in(0,1)$，这种情况都不会发生。

B. 对于 $\zeta_1\in(0,1)$，我们有

$$T_3(\zeta_1) := 4(1+|C|)^2 = \frac{(3+4\zeta_1+\zeta_1^2)^2}{4\zeta_1^2}>0,$$

$$T_4(\zeta_1) := -4AC\left(\frac{1}{C^2}-1\right) = -\frac{7\zeta_1^2(9-\zeta_1^2)}{48(3+\zeta_1^2)}<0.$$

因此，$\min\{T_3(\zeta_1)\ T_4(\zeta_1)\}=T_4(\zeta_1)$。由于 $-4AC\left(\frac{1}{C^2}-1\right)\le B^2$，对于任何 $\zeta_1\in(0,\ 1)$，此情形也不成立。

C. 考虑

$$T_5(\zeta_1) := |AB| - |C|(|B| + 4|A|) = -\frac{12 + 20\zeta_1^2 + 3\zeta_1^4}{64(1 - \zeta_1^2)} < 0,$$

我们得到 $|AB| < |C|(|B| + 4|A|)$，这意味着对于 $\zeta_1 \in (0,1)$，此情况不可能成立。

D. 最后，定义

$$T_6(\zeta_1) := |AB| - |C|(|B| - 4|A|) = -\frac{36 - 108\zeta_1^2 - 47\zeta_1^4)}{192(1 - \zeta_1^2)} \leq 0.$$

which holds for $0 < \zeta_1 \leq \zeta' = \left(\sqrt{\frac{6}{47}(8\sqrt{2} - 9)}\right)$.

因此，由引理 2.2，

$$\Psi(A, B, C) \leq |A| + |B| + |C|.$$

将其代入 (3.15)，得到

$$\begin{aligned} |\mathcal{H}_{2,1}(F_f/2)| &\leq \frac{1}{7}\zeta_1(1 - \zeta_1^2)\big(|A| + |B| + |C|\big) \\ &= \frac{1}{576}(36 - 12\zeta_1^2 - 31\zeta_1^4) \\ &\leq \frac{1}{16} \approx 0.0625. \end{aligned}$$

对于 $\zeta' < \zeta_1 < 1$，再次应用引理 2.2 得到

$$\begin{aligned} |\mathcal{H}_{2,1}(F_f/2)| &\leq \frac{1}{12}\zeta_1(1 - \zeta_1^2)\left(|C| + |A|\right)\sqrt{1 - \frac{B^2}{4AC}} \\ &= \frac{1}{168}\sqrt{\frac{6 + \zeta_1^2}{21 + 7\zeta_1^2}}\left(5\zeta_1^4 + 24\zeta_1^2 - 36\right) := \phi_2(\zeta_1) \end{aligned}$$

对于 $\zeta_1 \in (\zeta', 1)$，我们发现

$$\phi_2(\zeta_1) \leq 0.0516512 \leq \frac{1}{16} \quad \text{at} \quad \zeta_1 = \sqrt{\frac{6}{47}(8\sqrt{2} - 9)}.$$

因此，不等式 (3.12) 成立。在引理 2.1 中，将 $p_1 = p_3 = 0$和 $p_2 = 2$代入后，相应的极值函数 $f \in \mathcal{S}_B^*$ 描述为

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{1}{1 - \log(2p(z)/(p(z) + 1))} \tag{3.16}$$

其中，$p(z)$由 (2.6) 给出，取 $\zeta_1 = 0$和 $\zeta_2 = 1$，可得 $p(z) = (1 + z^2)/(1 - z^2)$。解 (3.16) 可得函数 (1.4)。

∎

现在，我们继续推导二阶汉克尔行列式的界，其中各项为 $f \in \mathcal{S}_B^*$的反函数的对数系数。将方程（1.7）代入（1.11），可得反函数的对数系数如下：

$$\mathcal{H}_{2,1}(F_{f^{-1}}/2) = \begin{vmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \Gamma_2 & \Gamma_3 \end{vmatrix} = \Gamma_1\Gamma_3 - \Gamma_2^2 = \frac{1}{48}\left(13a_2^4 - 12a_2^2a_3 - 12a_3^2 + 12a_2a_4\right). \tag{3.17}$$

类似地，我们可以验证，$|\mathcal{H}_{2,1}(F_{f^{-1}}/2)|$ 在旋转下也保持不变。事实上，对于旋转函数 $f_\theta(z)$:= $e^{-i\theta}f(e^{i\theta}z)$，其中 $f\in\mathcal{S}$ 和 $\theta\in\mathbb{R}$，我们得到

$$\mathcal{H}_{2,1}(F_{f_\theta^{-1}}/2)=\frac{e^{4i\theta}}{48}\left(13a_2^4-12a_2^2a_3-12a_3^2+12a_2a_4\right)=e^{4i\theta}\mathcal{H}_{2,1}(F_{f^{-1}}/2). \tag{3.18}$$

接下来，我们将得到属于类$\mathcal{S}_B^*$的函数 f 的反函数对数系数相关的二阶汉克尔行列式的精确界:

定理3.6。设 $f\in\mathcal{S}_B^*$。则

$$|\mathcal{H}_{2,1}(F_{f^{-1}}/2)|\le\frac{43}{576}. \tag{3.19}$$

此不等式是精确的。

证明。设 $f\in\mathcal{S}_B^*$。鉴于类 $\mathcal{S}_B^*$ 的旋转不变性，且由 (3.18) 可知，$|\mathcal{H}_{2,\ 1}(F_{f^{-1}}/2)|$ 具有旋转不变性。因此，不失一般性，我们假设$a_2\ge 0$。由此根据 (3.2) 可得 $p_1\ge 0$，进而由 (2.2) 得到 $\zeta_1\in[0,1]$。将 (3.2)、(3.3) 和 (3.4) 代入 (3.17)，得到

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{2,1}(F_{f^{-1}}/2) &= \Gamma_1\Gamma_3-\Gamma_2^2\\ &= \frac{1}{48}\left(13a_2^4-12a_2^2a_3-12a_3^2+12a_2a_4\right)\\ &= \frac{1}{9216}\left(115p_1^4-168p_1^2p_2-144p_2^2+192p_1p_3\right)\end{aligned} \tag{3.20}$$

在 (3.20) 中应用引理 2.1，得到

$$\mathcal{H}_{2,1}(F_{f^{-1}}/2)=\frac{1}{576}(12\zeta_2^2(\zeta_1^4+2\zeta_1^2-3)+60\zeta_1^2(\zeta_1^2-1)\zeta_2+43\zeta_1^4+48\zeta_1\zeta_3(1-\zeta_1^2)(1-|\zeta_2|^2)) \tag{3.21}$$

(1) 正弦由于 $|\zeta_3|\le 1$，由 (3.21) 可得 $\zeta_1=0$ 和 $\zeta_1=1$ 满足以下不等式:

$$|\mathcal{H}_{2,1}(F_{f^{-1}}/2)|=\begin{cases}\dfrac{|\zeta_2|^2}{16}\le\dfrac{1}{16}, & \zeta_1=0,\\[2ex] \dfrac{43}{576}, & \zeta_1=1.\end{cases}$$

(2) 对于 $\zeta_1\in(0,\ 1)$ 和 $|\zeta_3|\le 1$，对 (3.21) 应用三角不等式可得

$$|\mathcal{H}_{2,1}(F_{f^{-1}}/2)|\le\frac{1}{12}\zeta_1(1-\zeta_1^2)\ \Psi(A,B,C), \tag{3.22}$$

其中

$$\Psi(A,B,C):=|A+B\zeta_2+C\zeta_2^2|+1-|\zeta_2|^2,$$

and

$$A=\frac{43\zeta_1^3}{48(1-\zeta_1^2)},\ B=-\frac{5}{4}\zeta_1,\ C=-\frac{3+\zeta_1^2}{4\zeta_1}. \tag{3.23}$$

由于 $AC<0$，根据引理 2.2，我们分析以下几种情况:

A. 对每个 $\zeta_1\in(0,\ 1)$,

$$T_1(\zeta_1):=|B|-2(1-|C|)=\frac{3}{2\zeta_1}+\frac{7\zeta_1}{4}-2>0,$$

这意味着 $|B|>2(1-|C|)$。此外,

$$T_2(\zeta_1):=-4AC\left(\frac{1}{C^2}-1\right)-B^2=-\frac{\zeta_1^2(153+8\zeta_1^2)}{12(3+\zeta_1^2)}\le 0,$$

这意味着

$$-4AC\left(\frac{1}{C^2}-1\right)\leq B^2.$$

由于 $T_1(\zeta_1)\cap T_2(\zeta_1)=\emptyset$，因此此子情形对于任何 $\zeta_1\in(0,1)$ 都不会出现。

B. 对于 $\zeta_1\in(0,1)$,

$$T_3(\zeta_1):=4(1+|C|)^2=\frac{(3+4\zeta_1+\zeta_1^2)^2}{4\zeta_1^2}>0,$$

$$T_4(\zeta_1):=-4AC\left(\frac{1}{C^2}-1\right)=-\frac{43\zeta_1^2(9-\zeta_1^2)}{48(3+\zeta_1^2)}<0.$$

因此，$\min\{T_3(\zeta_1)\ T_4(\zeta_1)\}=T_4(\zeta_1)$。由上述子情形可知，我们已经知道 $-4AC\left(\frac{1}{C^2}-1\right)\leq B^2$，所以此子情形也不会出现。

C. 对于 $\zeta_1\in(0,1)$,

$$T_5(\zeta_1):=|AB|-|C|(|B|+4|A|)=-\frac{180+396\zeta_1^2-103\zeta_1^4}{192(1-\zeta_1^2)}<0.$$

这意味着 $|AB|<|C|(|B|+4|A|)$，因此此子情形也不可能成立。

D. 对于 $\zeta_1\in(0,1)$，我们取

$$T_6(\zeta_1):=|AB|-|C|(|B|-4|A|)=-\frac{60-212\zeta_1^2-149\zeta_1^4}{64(1-\zeta_1^2)}\leq 0.$$

这对.....成立

$$0<\zeta_1\leq\zeta'=\sqrt{\frac{2}{149}(2\sqrt{1261}-53)}\approx 0.491827.$$

因此，由引理 2.2,

$$\Psi(A,B,C)\leq -|A|+|B|+|C|.$$

将其代入 (3.21)，得到

$$\begin{aligned}|\mathcal{H}_{2,1}(F_{f^{-1}}/2)| &\leq \frac{1}{12}\zeta_1(1-\zeta_1^2)\left(-|A|+|B|+|C|\right)\\ &= \frac{1}{576}(36+36\zeta_1^2-115\zeta_1^4)\leq\frac{31}{460}\approx 0.0673913.\end{aligned}$$

对 $\zeta'<\zeta_1<1$ 应用引理 2.2，得到

$$\begin{aligned}|\mathcal{H}_{2,1}(F_{f^{-1}}/2)| &\leq \frac{1}{12}\zeta_1(1-\zeta_1^2)\big(|C|+|A|\big)\sqrt{1-\frac{B^2}{4AC}}\\ &= \frac{1}{288\sqrt{43}}\sqrt{\frac{51-8\zeta_1^2}{3+\zeta_1^2}}\left(36-24\zeta_1^2+31\zeta_1^4\right)=:\phi_2(\zeta_1)\end{aligned}$$

对于 $\zeta_1\in(\zeta',1)$，我们得到 $\phi_2(\zeta_1)\leq\frac{43}{576}\approx 0.0746528$。

因此，不等式 (3.19) 成立。在引理 2.1 中，将 $p_1=p_2=p_3=0$ 替换为.....。相应的极值函数 $f\in\mathcal{S}_B^*$ 描述为

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}=\frac{1}{1-\log(2p(z)/(p(z)+1))} \tag{3.24}$$

其中 $p(z)$ 由 (2.5) 在 $\zeta_1=1$ 下给出，我们得到 $p(z)=(1+z)/(1-z)$。求解 (3.24)，我们得到函数 (1.3)。 ∎

4 Toeplitz行列式

现在我们建立 $f \in \mathcal{S}_B^*$ 的与初始系数相关的二阶托普利兹行列式的界:

定理 4.1. 设 $f \in \mathcal{S}_B^*$。则

$$|\mathcal{T}_{2,1}(f)| \leq 2.$$

这个不等式是尖锐的。

证明。 设 $f \in \mathcal{S}_B^*$。将 (3.2) 代入 (1.13) 中的 $\mathcal{T}_{2,1}(f)$，得到

$$|1 - a_2^2| \leq 1 + |a_2|^2 = 1 + \frac{|p_1|^2}{4}$$

应用引理 (2.3)，可得 $|1 - a_2^2| \leq 2$。这个界是尖锐的，且当函数 $f_3(z) \in \mathcal{S}_B^*$ 取到在 (1.5) 中定义的形式时，等号成立。 ∎

定理 4.2. 设 $f \in \mathcal{S}_B^*$。则

$$|\mathcal{T}_{2,2}(f)| \leq \frac{25}{16}.$$

此不等式是锐利的。

证明。 设 $f \in \mathcal{S}_B^*$。将 (3.2) 和 (3.3) 代入 (1.13) 中的 $\mathcal{T}_{2,2}(f)$，可得

$$\begin{aligned} \left|a_3^2 - a_2^2\right| &\leq |a_3|^2 + |a_2|^2 \\ &\leq \frac{1}{256}\left|p_1^4 + 16p_2^2 + 8p_1^2 p_2\right| + \frac{1}{4}|p_1|^2 \end{aligned}$$

应用引理 2.3，可得

$$|a_3^2 - a_2^2| \leq \frac{25}{16}.$$

此界是锐利的，且当函数 $f_3(z) \in \mathcal{S}_B^*$（定义见 (1.5)）时等号成立。 ∎

定理 4.3. 设 $f \in \mathcal{S}_B^*$。则

$$|\mathcal{T}_{2,3}(f)| \leq \frac{545}{648}.$$

该不等式是锐利的。

证明。令 $f \in \mathcal{S}_B^*$。那么，存在满足 (2.7) 的施瓦茨函数 $w(z)$。通过求解并比较 (3.1) 中 $f(z)$ 和 $w(z)$ 的系数，我们得到

$$a_2 = b_1, \quad a_3 = \frac{3b_1^2}{4} + \frac{b_2}{2}, \quad a_4 = \frac{19b_1^3}{36} + \frac{5b_1 b_2}{6} + \frac{b_3}{3}. \tag{4.1}$$

将 (4.1) 中的表达式代入 (1.13) 中的 $\mathcal{T}_{2,3}(f)$ 并化简，我们得到

$$\begin{aligned} T_{2,3}(f) &= a_3^2 - a_4^2 \\ &= -\frac{1}{1296}\big(361b_1^6 - 729b_1^4 + 1140b_1^4 b_2 - 972b_1^2 b_2 - 342b_2^2 \\ &\quad + 900b_1^2 b_2^2 + 456b_1^3 b_3 + 720b_1 b_2 b_3 + 144b_3^2\big) \end{aligned}$$

应用三角不等式和引理 2.4，我们得到

$$\begin{aligned}|T_{2,3}(f)| &\leq \frac{1}{1296}\big[361|b_1|^6+729|b_1|^4+1140|b_1|^4|b_2|+972|b_1|^2|b_2|+342|b_2|^2\\ &\quad +900|b_1|^2|b_2|^2+456|b_1|^3|b_3|+720|b_1||b_2||b_3|+144|b_3|^2\big]\\ &\leq \frac{1}{1296}\Big[361|b_1|^6+729|b_1|^4+1140|b_1|^4(1-|b_1|^2)+972|b_1|^2(1-|b_1|^2)\\ &\quad +342(1-|b_1|^2)^2+900|b_1|^2(1-|b_1|^2)^2+456|b_1|^3\left(1-|b_1|^2-\frac{|b_2|^2}{1+|b_1|}\right)\\ &\quad +720|b_1|(1-|b_1|^2)\left(1-|b_1|^2-\frac{|b_2|^2}{1+|b_1|}\right)+144\left(1-|b_1|^2-\frac{|b_2|^2}{1+|b_1|}\right)^2\Big]\end{aligned}$$

令 $|b_1|:=x$ 和 $|b_2|:=y$，则得到

$$\begin{aligned}|T_{2,3}(f)| &\leq \frac{1}{1296}\Big[361x^6+729x^4+1140x^4(1-x^2)+972x^2(1-x^2)+342(1-x^2)^2\\ &\quad +900x^2y^2+456x^3\left(1-x^2-\tfrac{y^2}{1+x}\right)\\ &\quad +720xy\left(1-x^2-\tfrac{y^2}{1+x}\right)+144\left(1-x^2-\tfrac{y^2}{1+x}\right)^2\Big]\\ &\leq \frac{1}{1296}M(x,y),\end{aligned} \tag{4.2}$$

其中

$$\begin{aligned}M(x,y) &= \Big[361x^6+729x^4+1140x^4(1-x^2)+972x^2(1-x^2)+342(1-x^2)^2\\ &\quad +900x^2y^2+456x^3\left(1-x^2-\tfrac{y^2}{1+x}\right)\\ &\quad +720xy\left(1-x^2-\tfrac{y^2}{1+x}\right)+144\left(1-x^2-\tfrac{y^2}{1+x}\right)^2\Big]\end{aligned}$$

根据引理 2.4，我们有 $\phi=\{(x,\ y):\ 0\leq y\leq 1-x^2,\ \ 0\leq x\leq 1\}$，我们的目标是在区域 ϕ 内求出 $M(x,\ y)$ 的最大值。因此， $M(x,\ y)$ 的临界点满足以下条件

$$\frac{\partial M}{\partial x}=0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial M}{\partial y}=0$$

可以观察到， $M(x,\ y)$ 在 ϕ 的内部没有解，因此， $M(x,\ y)$ 的最大值必定在 ϕ 的边界上取得。

$$M(x,0)=361x^6+729x^4-456x^5+456x^3+144(1-x^2)^2\leq 1090;\quad 0\leq x\leq 1,$$

$$M(0,y)=144y^4+54y^2+144\leq 342;\quad 0\leq y\leq 1.$$

and

$$M(x,1-x^2)\leq 1090;\quad 0\leq x\leq 1.$$

因此，我们得到 $M(x,\ y)\leq 1090$；将 $M(x,\ y)$ 的最大值代入方程（4.2），可得

$$|T_{2,3}(f)|\leq \frac{1090}{1296}=\frac{545}{648}\approx 0.8410493827.$$

此界是精确的，当函数 $f_3(z)\in\mathcal{S}_B^*$ 取值时等号成立，该函数定义于（1.5）中。 ∎

通过改变系数，我们可以计算不同系数集对应的 Toeplitz行列式。例如，将方程（1.6）代入（1.14），即可得到对数系数对应的行列式。

$$\mathcal{T}_{2,1}(F_f/2)=\begin{vmatrix}\gamma_1 & \gamma_2\\ \gamma_2 & \gamma_1\end{vmatrix}=\gamma_1^2-\gamma_2^2=\frac{1}{16}\left(4a_2^2-a_2^4-4a_3^2+4a_2^2a_3\right). \tag{4.3}$$

现在，我们将建立与 $f\in\mathcal{S}_B^*$ 的对数系数相关的二阶Toeplitz行列式的精确界：

定理4.4。设 $f\in\mathcal{S}_B^*$。则

$$|\mathcal{T}_{2,1}(F_f/2)|\leq\frac{17}{64}.$$

此不等式是精确的。

证明。 设 $f\in\mathcal{S}_B^*$。将 (4.1) 中的表达式代入 (1.6) 并化简，得到

$$\begin{aligned}(\gamma_1^2-\gamma_2^2) &= -\frac{1}{16}\left(a_2^4-4a_2^2+4a_3^2-4a_2^2a_3\right)\\ &= -\frac{1}{64}\left(b_1^4+4b_1^2b_2-16b_1^2+4b_2^2\right)\end{aligned} \tag{4.4}$$

将引理 2.4 应用于 (4.4)，得到

$$\begin{aligned}|\gamma_1^2-\gamma_2^2| &\leq \frac{1}{64}(|b_1|^4+4|b_1|^2|b_2|+16|b_1|^2+4|b_2|^2)\\ &\leq \frac{1}{64}\left(|b_1|^4+4|b_1|^2(1-|b_1|^2)+16|b_1|^2+4(1-|b_1|^2)^2\right)\\ &\leq \frac{1}{64}\left(|b_1|^4+12|b_1|^2+4\right)\end{aligned}$$

令 $\zeta:=|b_1|$，则有

$$|\gamma_1^2-\gamma_2^2|\leq\frac{1}{64}\left(\zeta^4+12\zeta^2+4\right)$$

由于 $\zeta\in[0,1]$,

$$|\mathcal{T}_{2,1}(F_f/2)|\leq\frac{17}{64}$$

该界是精确的，当函数 $f_3(z)\in\mathcal{S}_B^*$ 取等号时成立，该函数定义于 (1.5) 中。 ∎

通过在 (1.15) 中应用方程 (1.7)，现在我们计算与反函数的对数系数相对应的 Toeplitz行列式。

$$\mathcal{T}_{2,1}(F_{f^{-1}}/2)=\begin{vmatrix}\Gamma_1 & \Gamma_2\\ \Gamma_2 & \Gamma_1\end{vmatrix}=\Gamma_1^2-\Gamma_2^2=-\frac{1}{16}\left(9a_2^4-4a_2^2+4a_3^2-12a_2^2a_3\right). \tag{4.5}$$

接下来，我们建立与逆函数的对数系数相对应的二阶Toeplitz行列式的精确界：

定理4.5。设 $f\in\mathcal{S}_B^*$，则

$$|\mathcal{T}_{2,1}(F_{f^{-1}}/2)|\leq\frac{25}{64}.$$

这个不等式是锐利的。

*Pr*哎。 令 $f \in \mathcal{S}_B^*$。将 (4.1) 中的表达式代入 (4.5)，我们得到 in

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{2,1}(F_{f^{-1}}/2) &= \Gamma_1^2 - \Gamma_2^2 \\ &= -\frac{1}{16}\left(9a_2^4 - 4a_2^2 + 4a_3^2 - 12a_2^2a_3\right) \\ &= -\frac{1}{64}\left(9b_1^4 + 4b_2^2 - 16b_1^2 - 12b_1^2b_2\right) \qquad (4.6)\end{aligned}$$

将引理 2.4 应用于 (4.6)，得到

$$\begin{aligned}|\mathcal{T}_{2,1}(F_{f^{-1}}/2)| &\leq \frac{1}{64}\left(9|b_1^4| + 4|b_2|^2 + 16|b_1|^2 + 12|b_1|^2|b_2|\right) \\ &\leq \frac{1}{64}\left(9|b_1|^4 + 4(1-|b_1|^2)^2 + 16|b_1|^2 + 12|b_1|^2(1-|b_1|^2)\right) \\ &\leq \frac{1}{64}\left(|b_1|^4 + 20|b_1|^2 + 4\right).\end{aligned}$$

令 $\zeta := |b_1|$，则有

$$|\mathcal{T}_{2,1}(F_{f^{-1}}/2)| \leq \frac{1}{64}\left(\zeta^4 + 20\zeta^2 + 4\right),$$

由于 $\zeta \in [0,1]$,

$$|\mathcal{T}_{2,1}(F_{f^{-1}}/2)| \leq \frac{25}{64}.$$

此界 是锐的，并且当函数 $f_3(z) \in \mathcal{S}_B^*$（定义见 (1.5)）时取等号 . ∎

5 结论

解析单叶函数的系数界问题一直是几何函数论的核心课题，并在图像重建、信号分析、复动力系统和混沌建模中具有重要意义。受这些应用的启发，本研究引入了一类与气球形区域相关的星形函数。针对这一类函数，本文推导了精确的初始系数估计、Fekete-Szeg¨o 型不等式，以及二阶汉克尔行列式与托普利茨行列式（包括对数型和反对数型变体）的精确界。这些结果揭示了几何结构与解析行为之间的深层联系，为极值问题提供了统一的方法，并为推广至高阶行列式及相关单叶函数子类奠定了基础。

参考文献

[1] Ahuja, O. P.、Khatter, K. 与 Ravichandran, V.，与星形函数及凸函数的 Ma-Minda类相关的 Toeplitz 行列式，《伊朗科技学报》45(6)，2021–2027（2021）。[2] Allu, V. 与 Shaji, A.，凸函数与星形函数的对数逆系数的第二 Hankel行列式，《澳大利亚数学会通报》111(1)，128–139（2025）。[3] Ali, M.F.、Thomas, D.K. 与 Vasudevarao, A.，其元素为解析单叶函数系数的 Toeplitz 行列式，《澳大利亚数学会通报》97(2)，253–264（2018）。[4] Arora, K. 与 Kumar, S.S.，与花瓣形区域相关的星形函数，《韩国数学会通报》59(4)，993–1010（2022）。[5] Carath´eodory, C.， ¨关于不取给定值的幂级数之系数变程¨。《数学年刊》，64(1)，95–115（1907）。[6] Chen, L.、Li, Z.、Li, Z.、Chen, S.、Yang, Q. 与 Du, Y.，基于模糊技术的红外手指静脉图像对比度增强方法，载于：2019年 IEEE 第14届智能系统与知识工程国际会议（ISKE），第307–310页（2019）。[7] Cho, N.E.、Kowalczyk, B.、Lecko, A. 与 ´Smiarowska, B.，关于 Carath´eodory 类中的第四与第五系数。Filomat，34(6)，2061-2072（2020）。

[8] Choi, J.H.、Kim, Y.C. 与 Sugawa, T.，Fekete-Szeg¨o 问题的一般方法，《日本数学会杂志》59(3)，707–727（2007）。[9] Eker, S.S.、Lecko, A.、C¸eki¸c, B. 与 S¸eker, B.，强 Ozaki 近凸函数的对数系数的第二Hankel行列式，《马来西亚数学科学学会通报》，46(6)，183（2023）。[10] Giri, S. 与 Kumar, S.S.，某些单叶函数的厄米特托普利茨行列式，Anal. Math. Phys. 13(2)，37（2023）。[11] Giri, S. 与 Kumar, S.S.，一维及高维中的 Toeplitz 行列式，《数学科学学报》44，1931–1944（2024）。[12] Goodman, A.W.，《单叶函数》，Mariner Publishing Company Inc.，坦帕（1983）[13] Ibrahim, R.W.、Jalab, H.A.、Karim, F.K.、Alabdulkreem, E. 与 Ayub, M.N.，基于分数阶偏微分方程广义类的医学图像增强，《定量影像医学与外科》12(1)，172（2022）。[14] Janowski, W.，具有正实部的函数族及相关族的极值问题，《波兰数学年刊》23，159–177（1970）[15] Janteng, A.、Halim, S.A. 与 Darus, M.，星形函数与凸函数的汉克尔行列式，《国际数学分析杂志》1(13)，619–625（2007）[16] Kanwal, B.、Iman, A.、Kanwal, S. 与 Alkhalifa, A.K.，新月形区域中对称星形函数的汉克尔不等式估计及其在图像处理中的应用。《科学报告》15(1)，27402（2025）。[17] Kowalczyk, B. 与 Lecko, A.，凸函数与星形函数的对数系数的第二Hankel行列式，《澳大利亚数学学会通报》，105(3)，458–467（2022）。[18] Kowalczyk, B. 与 Lecko, A.，阶为 alpha 的凸函数与星形函数的对数系数的第二Hankel行列式，《马来西亚数学科学学会通报》，45(2)，727-740（2022）。[19] Kowalczyk, B. 与 Lecko, A.，强星形函数与强凸函数的对数系数的第二Hankel行列式，《西班牙皇家精确、物理与自然科学学院学报 A辑：数学》，117(2)，91（2023）。[20] Kowalczyk, B. 与 Lecko, A.，关于依赖于实参数的某星形函数的近凸函数的 Fekete-Szeg¨o 不等式，《不等式及其应用杂志》2014，65（2014）。[21] Kumar, S.S.、Tripathi, A. 与 Pannu, S.，关于 S_ρ^*的系数问题，《伊朗数学学会通报》51(4)，50（2025）。[22] Kumar, S.S. 与 Kamaljeet, G.，心形线区域与星形函数，Anal. Math. Phys. 11(2)，54（2021）。[23] Kumar, S.S. 与 Verma, N.，与条带区域相关的星形函数的一个子类，Ukr. Math. J. 76(12)，（2023）。[24] Kumar, S.S. 与 Verma, N.，关于某类星形函数的汉克尔行列式估计，Filomat 39(12)，3907–3930（2025）。[25] Kumar, S.S. 与 Yadav, P.，与豆形区域相关的一类星形函数，《伊朗科学杂志》（2025）。[26] Lecko, A.、Sim, Y.J. 与 ´Smiarowska, B.，凸函数的四阶厄米特托普利茨行列式，Anal. Math. Phys. 10(3)，39（2020）。[27] Lecko, A. 与 ´Smiarowska, B.，给定阶有界转动反函数的对数系数的第二 Hankel行列式，墨西哥数学会通报（Bolet´ín de la Sociedad Matem´atica Mexicana），30(2)，51（2024）。[28] Lecko, A. 与 ´Smiarowska, B.，某些解析函数类中反函数对数系数的 Zalcman泛函的精确不等式，《数学不等式杂志》，19(1)，81–97（2025）。[29] L¨owner, K.，¨单位圆盘的单叶共形映射研究. I，《数学年刊》，89(1)，103-121（1923）。[30] Ma, W.C. 与 Minda, D.，单叶函数的特殊类的统一处理，载于：《复分析会议论文集》，Conf. Proc. Lecture Notes Anal.（天津，1992），第157–169页（1994）[31] Mandal, S.、Roy, P.P. 与 Ahamed, M.B.，某些单叶函数类的反函数对数系数的汉克尔行列式与托普利茨行列式，《伊朗科学杂志》49(1)，243–252（2025）。[32] Mendiratta, R.、Nagpal, S. 与 Ravichandran, V.，与指数函数相关的强星形函数的一个子类，《马来西亚数学科学学会通报》38(1)，365–386（2015）。[33] Mundalia, M.、Kumar, S.S.，某些近凸函数的系数问题，《伊朗数学学会通报》49(1)，5（2023）。[34] Obradovi´c, M. 与 Tuneski, N.，单叶函数类 $\mathcal{S}$ 的厄米特托普利茨行列式，Armen. J. Math. 13(4)，1–10（2021）。

[35] Pommerenke, C.，关于单叶函数的汉克尔行列式，Mathematika 14(1), 108–112 (1967). [36] Po mmerenke, C.，《单叶函数》，Vandenhoeck and Ruprecht，G¨ottingen (1975) [37] Ponnusamy, S.，Sharma, N.L. 和 Wirths, K.J.，与星形函数和凸函数相关的函数族中的对数系数问题，J. Aust. Math. Soc. 109(2), 230–249 (2020). [38] Priya, H. 和 Sruthakeerthi, B.，利用 Horadam 多项式系数估计分析 Sakaguchi 型函数类的纹理，科学报告 13(1), 14436 (2023). [39] Raina, R.K., Sok´o-l, J.，关于某一类星形函数的系数估计，Hacet. J. Math. Stat. 44(6), 1427–1433 (2015) [40] Raza, M., Riaz, A., Thomas, D.K. 和 Zaprawa, P.，与指数函数相关的星形函数和凸函数的三阶汉克尔行列式，Bol. Soc. Mat. Mex. 31(1), 16 (2025). [41] Sok´o-l, J. 和 Stankiewicz, J.，若干强星形函数子类的凸性半径。Zesz. Nauk. Politech. Rzesz. Mat. 19, 101–105 (1996) [42] Toeplitz, O.，关于无穷多个变量的双线性形式族的变换，Nachr. Ges. Wiss. G¨ottingen Math.-Phys. Kl. 110–115 (1907) [43] Verma, N. 和 Kumar, S.S.，关于 S^*_α 中函数的三阶汉克尔行列式最佳界，Math. Methods Appl. Sci. (2025). [44] Zaprawa, P. 关于关于对称点星形的函数的初始对数系数。Bol. Soc. Mat. Mex. 27, 62 (2021).

Department of Applied Mathematics, Delhi Technological University, Bawana Road, Delhi-110042, INDIA*Email address*: spkumar@dce.ac.in

Department of Applied Mathematics, Delhi Technological University, Bawana Road, Delhi-110042, INDIA*Email address*: ms.aryatripathi 25phdam03@dtu.ac.in