arXiv:2602.16225v1 [math.GT] 18 Feb 2026

具有四个不动点的六维 GKM 流形

ˆ DONGHOON JANG、SHINTARO KUROKI、MIKIYA MASUDA 与 TAKASHI SATO

Abstract. 本文研究具有4个不动点的6维 GKM 流形。我们对所有可能的GKM 图进行分类，并对每一类图构造一个流形，从而证明其存在性。我们证明共出现六种类型。(P1) 复射影空间 $\mathbb{C}P^3$，具有标准复结构(P2) 在一个不动点处对 S^6 的爆破，微分同胚于 $\mathbb{C}P^3$(P3) $\mathbb{C}P^3$ 作为齐性空间Sp(2)/(U(1) $\times$ Sp(1))，具有非标准几乎复结构(Q1) 复二次超曲面 Q_3，具有标准复结构(Q2) 沿各向同性 2-球面对 S^6 的爆破，微分同胚于 Q_3(S) $S^2 \times S^4$，由两个 S^6沿轨道等变粘合得到

1. Introduction

GKM流形以Goresky、Kottwitz和MacPherson的工作命名[GKM98], ，是一类带有环面作用的殆复流形，其等变上同调由称为GKM图的组合数据描述[GZ01]。图的顶点集是不动点集，而边集则是不变二维球面构成的集合，这些二维球面连接两个不动点；每条边都有一个标记，对应于某个不动点处的一个权。

更准确地说，**GKM流形**是一个连通、紧致的殆复流形（M， J），其上带有一个紧致环面 T 的作用，该作用保持近复结构 J，并满足以下性质:

（1）不动点集 M^T 是有限集。（2）对于任意 T-模 T_pM，切空间处的权两两线性无关。 $p \in M^T$（3） M 的奇次上同调群[1]消失。

对于 GKM 流形 M，我们按如下方式关联一个 GKM 图：顶点集为不动点集；若 w 是 p 处的一个权，且 $-w$ 是 q 处的一个权，使得p， q 位于同一个二维球面上，且该二维球面上 T 的作用权为 w，则我们从 p 向 q 画一条标记为 w的边，由此得到一个有向标记图。详情请参见第 2节。

由（2）可知，作用于 GKM 流形上的环面维数至少为二，因此 GKM 流形的维数至少为四。Orlik-Raymond 基本上已经对四维 GKM 流形进行了分类 [OR70]。它们的 GKM 图是带有标记的多边形。在维数为 6 的情形下，具有 2 个不动点的 GKM 流形，其 GKM 图与 6 维球面上的 T^2-作用对应 S^6。接下来要讨论的是具有 4 个不动点的 6 维 GKM 流形。

[1]有些作者将这一性质纳入 GKM 流形的定义，而另一些作者则将其作为一项额外性质。

具有四个不动点的六维流形已针对 S^1-作用进行过研究。Ahara 研究了作用于 6 维紧致几乎复流形 M且具有 4 个不动点的 S^1-作用，并考察了 Todd(M) $=1$ 和 $\langle c_1^3(M)\ [M]\rangle \neq 0$ [Ah91]。Tolman 对作用于具有 4 个不动点的六维紧致辛流形上的 Hamiltonian S^1-作用进行了分类 [To10]。Li 重新研究了这一情形 [Li25]。 [Ja20] 的工作继续推进了这项研究，证明对于作用于具有 4 个不动点的 6 维紧致几乎复流形上的 S^1-作用，不动点处的权可分为六种情形，即情形（A-F）；情形（D）和（F）的流形是否存在仍未可知；参见定理 2.1。Konstantis 和 Lindsay 构造了一个情形（D）的流形 [KL25]。关于存在性问题的更多讨论，请参见注 2.3。

本文研究具有4个不动点的6维 GKM 流形。我们阐述本文的结果。设 M 是一个具有4个不动点的6维 GKM 流形。

• 在第2节中，我们通过证明图 M 1中的六个图之一 是 M 的 GKM 图，对所有可能的 GKM 图进行分类（定理2.5）。

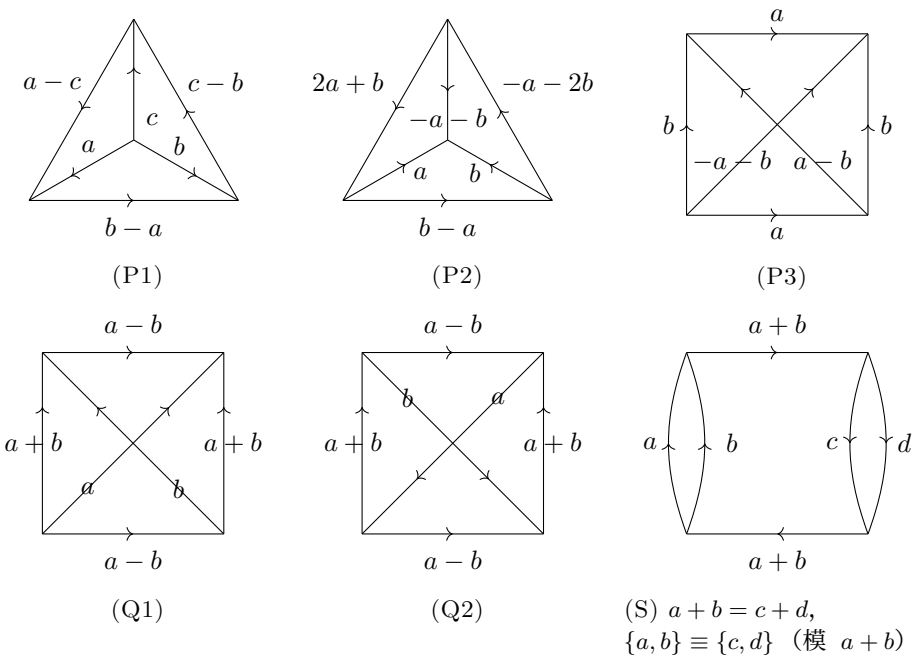


FIGURE 1. 具有4个不动点的6维 GKM 流形的 GKM 图

• 在接下来的各节（第 3–8节）中，对于 M的每一种可能的 GKM 图，我们将（1）计算 M的等变上同调、普通上同调和陈类；（2）证明 M的存在性。

• 对于每个 GKM 图，我们证明以下对象的存在性 M 如下。（1）（类型（P1），图 (P1)）带有标准复结构 $\mathbb{C}P^3$ 的复射影空间 J_{std} 以及标准线性环面作用，是一个 M 的例子，其 GKM 图为图 (P1)。

（2）（类型（P2），图（P2））对带有环面作用的 S^6 在不动点 p 处进行爆破 $\mathrm{Bl}_p S^6$，其 GKM 图如图（P2）所示。（3）（类型（P3），图（P3））齐性空间 Sp(2)/(U(1) ×Sp(1)) 与 $\mathbb{C}P^3$微分同胚，它具有非标准几乎复结构$J_{\text{n-std}}$ 和 T^2-作用，其 GKM 图为图（P3）。（4）（类型（Q1），图（Q1））复二次超曲面 Q_3上的线性环面作用配备标准复结构 J_{std}，其 GKM 图如图（Q1）所示。（5）（(Q2)型，图（Q2））沿各向同性二维球面 S^2对 S^6 进行爆破 $\mathrm{Bl}_{S^2} S^6$，其 GKM 图如图（Q2）所示。（6）（类型 (S)，图（S））我们证明流形 M 的存在性，其 GKM 图为图（S）；它是沿各向同性二维球面中的轨道对两个 S^6进行等变粘合所得。

- 在第9节中，我们介绍 GKM 流形自同构群的背景，并讨论各类型 M 的（连通极大紧闭子群）。
- 在附录A中，我们讨论 S^6 和 $S^2 \times S^4$ 作为八元数子集的几乎复结构。
- 在附录B中，我们讨论赋有紧李群 G作用的流形上的近复结构的变形。这使我们能够对近复 G流形的各向同性子流形进行爆破。
- 在附录C中，我们讨论忠实 T^n模的权。

注 1.1. 我们注意到以下几点：

(1) 若类型（P2）或类型（P3）的 GKM 流形是单连通的，例如类型（P2）的流形 $\mathrm{Bl}_p S^6$ 以及类型（P3）的（$\mathbb{C}P^3$，$J_{\text{n-std}}$），那么根据 Wall-Jupp-ˆZubr 对单连通六维流形的分类 [Wa66、Ju73、ˆZu88]，，该流形与复射影空间 $\mathbb{C}P^3$微分同胚，但其近复结构不同于 $\mathbb{C}P^3$上的标准复结构。(2) 类似地，若 (Q2) 型 GKM 流形是单连通的，例如流形 $\mathrm{Bl}_{S^2} S^6$，那么该流形与复二次超曲面Q_3微分同胚，但其近复结构不同于 Q_3上的标准复结构。(3) 此外，若类型 (S) 的 GKM 流形是单连通的，例如我们在小节 8.2中构造的流形，那么该流形与 $S^2 \times S^4$微分同胚。

Acknowledgements

D. JANG 获得了韩国政府（科学技术信息通信部）资助的韩国国家研究基金会（NRF）项目（2021R1C1C1004158）的支持。S. KUROKI 获得了日本学术振兴会科学研究费补助金 21K03262 的支持。M. Ma-suda 部分获得了日本学术振兴会科学研究费补助金 25K07007 和 HSE大学基础研究计划的支持。T. SATO 部分获得了日本学术振兴会科学研究费补助金 25K00205 的支持。本研究还部分获得了文部科学省特色联合研究中心推进计划 JP-MXP0723833165 的支持。

2. Classification of GKM graphs

设 Γ 为一个有限正则图。设 Γ 的顶点集和定向边集分别为 $V(\Gamma)$ 和 $E(\Gamma)$；其中，若 $e \in E(\Gamma)$，则具有相反方向、记作 $\bar{e}$ 的 e 也属于 $E(\Gamma)$。

设 T 为紧致环面，BT 为 T 的分类空间。$H^2(BT)$ 与由 T 到 S^1 的同态群 $\mathrm{Hom}(T, S^1)$ 之间存在自然同构，这使我们可以将 $H^2(BT)$ 的元素 u 视为从 T 到 S^1 的同态 χ^u，反之亦然。严格来说，$H^2(BT)$ 的元素是 $\mathrm{Hom}(T, S^1)$ 中相应元素的权。

对于 Γ 的一条边 e，用 $i(e)$ 和 $t(e)$ 分别表示 e 的始顶点和终顶点。若赋值 $\alpha\colon E(\Gamma) \to H^2(BT)$ 满足以下条件，则称其为一个**轴函数**：

(1) $\alpha(\bar{e}) = -\alpha(e)$，(2) 对任意 $p \in V(\Gamma)$，Λ_p 中的元素：$= \{\alpha(e) \mid i(e) = p\}$ 两两线性无关；(3) 对任意 $e \in E(\Gamma)$，$\Lambda_{i(e)} \equiv \Lambda_{t(e)}$ （模 $\alpha(e)$）。也就是说，$\Lambda_{i(e)}$ 与 $\Lambda_{t(e)}$ 之间存在一个双射，使得每一对对应元素都满足同余关系。

一个 **GKM图** 是一个二元组 (Γ, α)，其中 Γ 是一个带有定向边集的有限正则图，而 α 是一个轴函数。

根据定义，GKM图 (Γ, α) 的等变图上同调为

$$H_T^*(\Gamma,\alpha) := \left\{ \xi \in \mathrm{Map}(V(\Gamma), H^*(BT)) \;\middle|\; \begin{array}{c} \xi(i(e)) \equiv \xi(t(e)) \mod \alpha(e) \\ \text{for any } e \in E(\Gamma) \end{array} \right\}. \tag{2.1}$$

这里，$\mathrm{Map}(V(\Gamma)\ H^*(BT))$ 表示从 $V(\Gamma)$ 到 $H^*(BT)$ 的映射集合。

设 M 是一个 GKM流形。我们按如下方式为 M 关联一个 GKM图 (Γ_M, α_M)。

(1) 顶点集 $V(\Gamma_M)$ 等于 M的不动点集 M^T。(2) 对于一个不动点 p，设 $u \in H^2(BT) \cong \mathrm{Hom}(T, S^1)$ 是复 T-模 T_pM 中的一个权。由于 p处的权两两线性无关，包含 p的 $M^{\ker \chi^u}$的不动分支是一个二维球面 S_u。S_u 上的 T-作用还包含另一个不动点，记作 q。我们将 S_u 视为连接 p和 q的一条边；若 e 是方向从 p 指向 q的边，则将 u 赋给 e，将 $-u$ 赋给 $\bar{e}$。

注 2.1. 的等变上同调与其 GKM 图（Γ_M，α_M）的等变图上同调同构，参见 [GZ01]。因此，在第 3-8节中，对于每个 GKM 图，我们计算具有 4个不动点的 6 维 GKM 流形的等变上同调，即其 GKM 图的等变图上同调。

注 2.2. 本文中，李群在殆复流形（M，J）上的作用，均指保持殆复结构 J 的作用。

我们回顾 [Ja20]的主要结果。

定理2.1。 [Ja20] 设圆周有效地作用在一个6维紧致殆复流形 M 上，且该流形有4 个不动点。那么以下情形之一成立：

(A) Todd(M) $=1$ 且不动点处的权多重集为$\{a,b,c\}$, $\{-a,b-a,c-a\}$, $\{-b,a-b,c-b\}$, $\{-c,a-c,b-c\}$，其中 a,b,c 是两两不同的正整数，满足最大公约数$(a,b,c)=1$。*(B) Todd*$(M)=1$ 且不动点处的权多重集为 $\{a,a+b,a+2b\}$, $\{-a,b,a+2b\}$, $\{-a-2b,-b,a\}$, $\{-a-2b,-a-b,-a\}$，其中 a,b 是正整数，满足最大公约数$(a,b)=1$。*(C) Todd*(M) $=1$ 且不动点处的权多重集为$\{1,2,3\}$, $\{-1,1,a\}$, $\{-1,-a,1\}$, $\{-1,-2,-3\}$，其中 a是正整数。*(D) Todd*$(M)=0$ 且不动点处的权多重集为 $\{-a,-b,a,b\}$, $\{-c-d,c,d\}$, $\{-a,-b,a+b\}$, $\{-c,-d,c+d\}$，其中 a,b,c,d 是正整数，满足最大公约数$(a,b)=$最大公约数$(c,d)=1$。*(E) Todd*$(M)=0$ 且不动点处的权多重集为 $\{-3a-b,a,b\}$, $\{-2a-b,3a+b,3a+2b\}$, $\{-a,-a-b,2a+b\}$, $\{-b,-3a-2b,a+b\}$，其中 a,b 是正整数，满足最大公约数$(a,b)=1$；必要时可反转圆周作用。*(F) Todd*$(M)=0$ 且不动点处的权多重集为 $\{-a-b,2a+b,b\}$, $\{-2a-b,a,b\}$, $\{-b,-2a-b,a+b\}$, $\{-a,-b,2a+b\}$，其中 a,b 是正整数，满足最大公约数$(a,b)=1$。

注 2.3。我们讨论定理 2.1中流形的存在性。

(1) 具有标准复结构的 $\mathbb{C}P^3$ 上的标准线性 S^1-作用给出了情形（A）的一个例子。(2) 具有标准复结构的复二次超曲面 Q_3 上的标准线性 S^1-作用给出了情形（B）的一个例子。(3) 考虑情形（C）。带有 $a=2$ ($a=3$)的情形（C）属于情形（A）（分别属于情形（B））。众所周知，Fano 三维簇 V_5 和 V_{22} 分别是 $a=4$ 和 $a=5$对应的情形（C）的例子。对于a的其他取值，目前尚不清楚流形是否存在。(4) 在 [中，KL25], Konstantis 和 Lindsay 沿两个 S^6的自由轨道作等变连通和，构造了一个情形（D）的例子；他们的例子与 $S^2\times S^4$ 微分同胚。(5) 下文第 4.2 节中的 Bl_pS^6 和第 7.2 节中的 $\mathrm{Bl}_{S^2}S^6$，在将 T^2-作用限制到一般子圆周时，分别是情形（E）和（F）的例子。

我们确定定理 2.1 中流形的陈数。为此，我们回顾以下定理。

定理 2.2（ABBV 定位定理）。 [AB84，BV82] 设圆作用于紧致定向流形 M。对于任意 $\alpha\in H^*_{S^1}(M;\mathbb{Q})$,

$$\int_M\alpha=\sum_{F\subset M^{S^1}}\int_F\frac{\alpha|_F}{e_{S^1}(N_F)}.$$

这里，求和遍历所有不动分支，而 $e_{S^1}(N_F)$ 是 F 的法丛的等变欧拉类。

命题 2.3。设圆作用在一个 6维紧致殆复流形 M 上，且有 *4*个不动点。在定理 *2.1*的每种情形下，该流形M 具有以下陈数。

(A) $\int_M c_1c_2=24$, $\int_M c_1^3=64$

(B) $\int_M c_1c_2 = 24$, $\int_M c_1^3 = 54$*(复数域)*
$\int_M c_1c_2 = 24$, $\int_M c_1^3 = 72 - 2a^2$*(5-*
圆盘) $\int_M c_1c_2 = 0$, $\int_M c_1^3 = 0$*(E)*
$\int_M c_1c_2 = 0$, $\int_M c_1^3 = -8$*(F)*
$\int_M c_1c_2 = 0$, $\int_M c_1^3 = -2$

证明。由于 M 的 Todd 属等于 $\int_M \frac{c_1c_2}{24}$（例如，参见 [HBJ92，第 20] 页），$\int_M c_1c_2$ 的公式由此得出。由定理 2.2，

$$\int_M c_1^3 = \sum_{p\in M^{S^1}} \frac{(\sum_i w_{p,i})^3}{\prod_j w_{p,j}},$$

其中 $w_{p,\ i}$ 是 p处的权。

例如，在定理2.1的情形（C）中，

$$\begin{aligned}\int_M c_1^3 &= \tfrac{(1+2+3)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \tfrac{((-1)+1+a)^3}{(-1)\cdot 1\cdot a} + \tfrac{((-1)+(-a)+1)^3}{(-1)\cdot(-a)\cdot 1} + \tfrac{((-1)+(-2)+(-3))^3}{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)}\\ &= 72 - 2a^2.\end{aligned}$$

同理，其余情形也可得出。 □

由此得到以下命题。

命题2.4. 设 M 是一个6维紧致殆复流形(M, J)，其上存在一个 S^1作用。假设该作用有4 个不动点，且不动点处的权为 $\{1, 2, 3\}$, $\{-1, 1, a\}$, $\{-1, -a, 1\}$, $\{-1, -2, -3\}$，其中 a是某个正整数。也就是说，假设不动点处的权属于定理*2.1* 的情形（*C*）。若 $a = 1$ 或 $a \geq 4$，则 S^1作用不能扩张为一个有效的 T^2作用（保持 J，如注*2.2*所述）。

证明。反设 S^1作用可扩张为一个有效的 T^2作用。由命题2.3， $\int_M c_1c_2 = 24$ 且 $\int_M c_1^3 = 72 - 2a^2$。由于陈数是不变量 M，并且对于 $a = 1$ 或 $a \geq 4$，只有定理 2.1 的情形（C）具有这些陈数，因此不动点处的权必为

$$\{1, 2, 3\}, \{-1, 1, a\}, \{-1, -a, 1\}, \{-1, -2, -3\}$$

对于 T^2内一般 S^1 的作用。然而，我们总能找到T^2 的一个子圆，其在不动点处的权与上述不同。□

我们按如下方式对具有4个不动点的6维 GKM 流形的 GKM 图进行分类。

定理2.5. 设 M 是一个6维*GKM*流形，带有有效的 T^2作用，且有4 个不动点。则图*1* 中的某一图作为 M的*GKM*图出现。在每种情形下，不动点处的权如下，对某些a， b， $c \in H^2$（BT^2）。

*(P1) (*图（*P1*）*)* $\{a, b, c\}$, $\{-a, b-a, c-a\}$, $\{-b, a-b, c-b\}$, $\{-c, a-c, b-c\}$
*(P2) (*图 *(P2))* $\{-a, -b, a+b\}$, $\{a, b-a, -2a-b\}$, $\{b, a-b, -a-2b\}$, $\{-a-b,$
$2a + b, a + 2b\}$*(P3) (*图 *(P3))* $\{a, b, -a-b\}$, $\{-a, b, a-b\}$, $\{-a, -b, a+b\}$,
$\{a, -b, b-a\}$*(Q1) (*图 *(Q1))* $\{a, a-b, a+b\}$, $\{b, b-a, a+b\}$, $\{-a, b-a, -a-b\}$,
$\{-b, a-b, -a-b\}$

(Q2) *(Figure (Q2))* $\{-a, a-b, a+b\}$, $\{-b, b-a, a+b\}$, $\{a, b-a, -a-b\}$, $\{b, a-b, -a-b\}$

(S) *(Figure (S))* $\{a, b, -a-b\}$, $\{-a+k(a+b), -b-k(a+b), a+b\}$, $\{-a, -b, a+b\}$, $\{a-k(a+b), b+k(a+b), -a-b\}$ *for some integer* k.

对于类型（*P1*），a, b, c 生成 $H^2(BT^2)$；对于其他类型，a, b 构成$H^2(BT^2)$的一个基。

证明。对于一个一般的 S^1 作用于 T^2的作用，该 S^1-作用在不动点处的权，在将 2.1 若我们将 $H^2(BS^1)$ 认作$\mathbb{Z}$之后，属于定理 2.4中定理 2.1 的某一种情形。由命题 $a = 1$或 $a \geq 4$可知，定理 2.1 的情形（C）不会以这种形式出现。此外，定理 $a = 2$ 的情形（C）以及定理 $a = 3$的情形（C）2.1 分别属于情形（A）和情形（B）。因此，一般的 S^1 作用于 T^2 的作用在不动点处的权，属于定理 2.1的情形（A）、（B）、（D）、（E）或（F）之一。

由命题 2.3可知，定理2.1 中的情形（A）、（B）、（D）、（E）和（F）具有彼此不同的陈数。这意味着，如果某个 S^1-作用在 M上的权属于定理 2.1中的某一种情形，那么所有一般的 S^1-作用的权也都属于该情形。这意味着，T^2-权也具有该情形中的形式。

令 Γ 表示 M的 GKM 图。M 的等变上同调是 Γ [GZ01]的图上同调。由于 M 是连通的，这意味着 Γ 是连通的。因此 Γ 是图2中的某个图。



(1)　　(2)

FIGURE 2

（情形（A））假设不动点处的 T^2-权为

$$\{a, b, c\}, \{-a, b-a, c-a\}, \{-b, a-b, c-b\}, \{-c, a-c, b-c\}$$

其中 a、b、$c \in H^2$ 属于 BT^2，且其中任意两个都线性无关。由于作用是有效的，a、b、c 生成 H^2（BT^2），见附录 C。由于 a、b、c 两两线性无关，考虑同余关系（即，如果存在一条从 p 到 q 、标记为 w 的边，那么 p 处的权与 q 处的权模 w 同余），可以验证 Γ 是一个完全图（即 Γ 是图2(1)），并且 Γ 是图（P1）。这就是本定理的类型（P1）。

（情形（B））设不动点处的 T^2-权为

$$\{a, a+b, a+2b\}, \{-a, b, a+2b\}, \{a, -b, -a-2b\}, \{-a, -a-b, -a-2b\}$$

对某个 a，$b \in H^2$（BT^2）。由于该作用是有效的，a，b构成 H^2（BT^2）的一组基，见附录复数域。由于 a 与 b线性无关，考虑同余关系，可以证明 Γ 是图3。

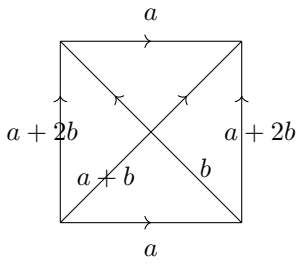


FIGURE 3

将 a 替换为 $a-b$，在图3中，得到图（Q1）。这是本定理的类型（Q1）。

（情形（D））假设不动点 T^2处的权 p_1、 p_2、 p_3、 p_4 具有定理2.1中情形（D）的形式。也就是说，假设它们为

$$\{x,a,b\},\ \{-a,-b,-x\},\ \{y,c,d\},\ \{-c,-d,-y\},$$

分别对某些 a、 b、 x、 c、 d、 $y\in H^2(BT^2)$ 成立，其中 $a+b+x=0$、 $c+d+y=0$。由于作用是有效的， a、 b（分别为 c、 d）构成 $H^2(BT^2)$ 的一组基。

假设 Γ是完全图，即 Γ是图2(1)。那么，从 p_1 到 p_2有一条边，从 p_1 到 p_3有一条边，并且从 p_1 到 p_4有一条边；除 x、 a和 b的排列外，其标记分别记为 x、 a和 b；见图4。由于 p_2 的权为$-b$，因此从 p_3 或 p_4到 p_2 必有一条标记为 b 的边。若为 p_4，则 p_4 的权为 $-b$ 和 b，且它们线性相关。因此，必有一条从 p_3 到 p_2、标记为 b 的边。于是 $-a$ 和 b 是 p_3处的权。由于 p_3 处的权之和为零， p_3 处剩下的权为 $a-b$，它是从 p_3 到 p_4的边的标记。因此， Γ是图 (P3)。这就是本定理的类型（P3）。

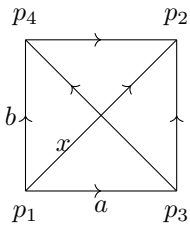


FIGURE 4

假设 Γ 不是完备的，也就是说， Γ 是图 2(2)。对 a、 b、 x重新排列后，不失一般性地假设有两条边从 p_1 连到 q_1，其标记为 a 和 b；还有一条边从 q_2 连到 p_1，其标记为 $-x$，其中 $\{q_1,q_2\}\subset\{p_2,p_3,p_4\}$；见图 5(1)。



FIGURE 5

那么， $-a$、 $-b$ 是 q_1处的两个权；由于 q_1 处各权之和为 0， q_1 处剩余的权为 $a+b$。令剩余的不动点为 q_3。那么有一条边从 q_1连到 q_3，其标记为 $a+b$；还有两条边从 q_3连到 q_2；见图 5(2)。由于有一条边从 q_2 连到 p_1，其标记为 $-x = a+b$，因此p_1 处的权 $\{a, b, x\}$ 与 q_2 处的权模 $a+b$同余。这意味着 q_2处的权为 $\{a + l(a+b)\ b + l'(a+b)\ a+b\}$，其中 l、 l'为整数。由于 q_2 处各权之和为零，可得 $2 + l + l' = 0$。令 $l' = k - 1$，则 q_2处的权为 $\{-a + k(a+b)\ -b - k(a+b)\ a+b\}$。因此， Γ 是图 (S)。这是本定理的类型 (S)。

（情形（E））假设不动点处的 T^2-权为

$$\{-3a-b, a, b\}, \{-2a-b, 3a+b, 3a+2b\}, \{-a, -a-b, 2a+b\},$$
$$\{-b, -3a-2b, a+b\}$$

对于某些 a， $b \in H^2(BT^2)$；那么 a， b构成一个基。由此可见 Γ 是图6。

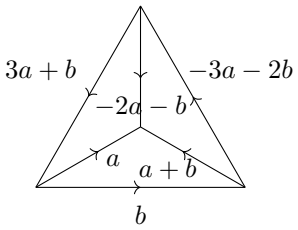


FIGURE 6

将 b替换为 $b-a$，在图6中得到图（P2）。这就是本定理的类型（P2）。

（情形（F））假设不动点处的 T^2-权为

$$\{-a-b, 2a+b, b\}, \{-2a-b, a, b\}, \{-b, -2a-b, a+b\}, \{-a, -b, 2a+b\}$$

对于某个 a， $b \in H^2(BT^2)$；此时 a， b构成一组基。

假设 Γ不是完全图，也就是说， Γ是图2(2)。每个不动点处的权之和分别为 $a+b$， $-a$， $-a-b$， a。于是，对于由两条边（重边）连接的两个顶点，这些点处的权之和之差必须能被这些边的标记整除。然而，很容易看出事实并非如此。因此， Γ 是完全图。由此可得， Γ 是图 7。

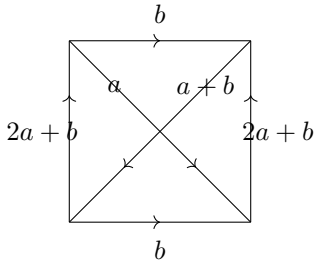


FIGURE 7

将图 a 中的 b 和 b 中的 $a-b$ 分别替换为图 7中的内容，得到图 (Q2)。这就是本定理的(Q2)型。□

对于类型（P1）的流形，定理2.5中 T^2 的作用可以延拓为有效的 T^3-作用。对于其他类型，由类似于命题2.4的论证， T^2-作用不能延拓为 T^3-作用，如下所示。

命题2.6. 每一个 T^2-作用（定理*2.5* 中的*(P2,P3,Q1,Q2,S)*型）都不能延拓为有效的 T^3-作用。因此，定理*2.5* 中的每一个*(P2,P3,Q1,Q2,S)*型都不容许有效的 T^3-作用。

证明。 这由定理2.1 得出，因为在情形(B)、(D)、(E)和(F)中存在两个参数 a 与 b ，并且这些情形中的每一种都具有唯一的陈数。□

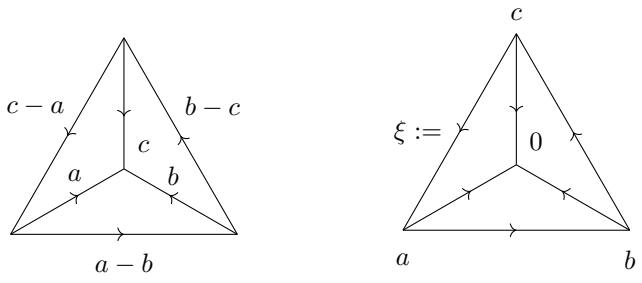
注记2.4. [Ma99，定理4.2] 与 [Ja23，定理1.7] 证明了：若 T^n有效地作用在一个 $2n$维紧连通殆复流形M 上且具有不动点（即 M 是殆复环面流形），则 M 的 Todd 属为正。这给出了另一个证明：定理2.5中类型（P2,P3,Q2,S）的每一个 T^2-作用都不能延拓为有效的 T^3-作用，因为类型（P2,P3,Q2,S）中的流形的Todd 属为零。此外， [Ma99，定理4.6] 指出，若 M 是殆复环面流形，且 $H^*(M) \cong H^*(\mathbb{C}P^n)$作为群，则 $H^*(M) \cong H^*(\mathbb{C}P^n)$作为环，因此类型（Q1）的 T^2-作用也不能延拓为有效的 T^3-作用。

3. TYPE (P1)

注记 3.1. 从第 3 节到第 8节，我们设 $T = T^2$。

本节中，令 M 表示一个类型（P1）的 GKM 流形，即图 (P1)是 M的 GKM 图。

3.1. **等变上同调与陈类。** 设 $\{a, b, c\}$ 是 $H^2(BT$中的非零且两两不同的元素，并生成 $H^2(BT$。下方左侧的 GKM 图可通过将图 (P1)中的（a、 b、 c）替换为（$-a$、$-b$、 $-c$）得到。



(1)　　(2)

FIGURE 8

i阶等变陈类 c_i^T 在顶点 p 处的限制，是 p 处权的 i阶初等对称多项式；而 c_i^T 由其在所有顶点处的限制所确定。注意到这一事实，可以很容易地验证如下结论。

$$c^T(M) = (1+\xi)(1+\xi-a)(1+\xi-b)(1+\xi-c).$$

断言。 $H_T^*(M) = H^*(BT)[\xi]/\big(\xi(\xi-a)(\xi-b)(\xi-c)\big)$.

证明。我们将证明，任意元素 $\rho \in H_T^*(M)$都可以表示为 $H^*(BT)$上的 ξ 的多项式。我们可以通过从 ρ中减去 ρ 在中心顶点处的值，假设 ρ 在中心顶点处为零。于是，ρ 在左下顶点处的值可被 a整除，因此它可写成 αa 的形式，其中 $\alpha \in H^*(BT)$。从 ρ 中减去 $\alpha\xi$ （注意， $\alpha\xi$ 在中心顶点处为零）后，我们可以假设 ρ 在中心顶点和左下顶点处均为零。于是， ρ 在右下顶点处的值可被 $b(b-a)$整除，因此它可写成$\beta b(b-a)$的形式，其中 $\beta \in H^*(BT)$。从 ρ中减去 $\beta\xi(\xi-a)$后，我们可以假设 ρ 在除顶部顶点以外的所有顶点处都为零（注意， $\xi(\xi-a)$在中心顶点和左侧顶点处为零）。现在， ρ 在顶部顶点处的值可被c、 $c-a$和 $c-b$整除，因此它可写成 $\gamma c(c-a)(c-b)$的形式，其中 $\gamma \in H^*(BT)$。于是，ρ 与 $\gamma\xi(\xi-a)(\xi-b)$相等，这就证明了所需结论。元素$\xi(\xi-a)(\xi-b)(\xi-c)$为零，因为它在所有顶点处的限制均为零。因此，我们得到一个满同态

$$\Phi\colon H^*(BT)[\xi]/\big(\xi(\xi-a)(\xi-b)(\xi-c)\big) \to H_T^*(M).$$

可以验证，它们的希尔伯特级数相同。这意味着 Φ 确实是一个同构。□

Then

$$H^*(M) = \mathbb{Z}[x]/(x^4),$$

$$c_1(M) = 4x, \quad c_2(M) = 6x^2, \quad c_3(M) = 4x^3.$$

这里， x是 $\xi \in H_T^2(M)$在 $H^2(M)$上的限制。此外，由于第一庞特里亚金类 p_1 满足 $p_1 = c_1^2 - 2c_2$， M的第一庞特里亚金类 $p_1(M)$为 $p_1(M) = 4x^2$。

3.2. **实现**。 对于 $u \in H^2(BT)$，我们定义

$$g^u := \chi^u(g)$$

对所有 $g \in T$。

令 T 作用于复射影空间 $(\mathbb{C}P^3, J_{\mathrm{std}})$，其作用为

$$g \cdot [z_0 : z_1 : z_2 : z_3] = [z_0 : g^a z_1 : g^b z_2 : g^c z_3]$$

对所有 $g \in T$，其中存在某些非零且两两不同的 a, b, c，它们生成$H^2(BT)$。该作用有 4个不动点

$$[1:0:0:0], [0:1:0:0], [0:0:1:0], [0:0:0:1]$$

其权为

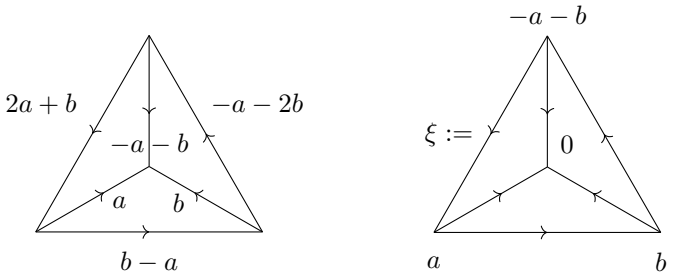
$$\{a, b, c\}, \{-a, b-a, c-a\}, \{-b, a-b, c-b\}, \{-c, a-c, b-c\},$$

分别。因此这是一个 GKM流形，其 GKM图见图(P1)。

4. Type (P2)

在本节中，令 M 表示一个类型（P2）的GKM流形，即图(P2)是 M的GKM图。

4.1. **等变上同调与陈类**。由GKM图



(1) (2)

Figure 9

我们得到

$$\begin{aligned} c_1^T(M) &= -2\xi, \quad c_2^T(M) = -a^2 - b^2 - ab, \\ c_3^T(M) &= \xi(\xi - a)(\xi - b) + \xi(\xi - a)(\xi + a + b) \\ &\quad + \xi(\xi - b)(\xi + a + b) + (\xi - a)(\xi - b)(\xi + a + b) \\ &= 4\xi^3 - 2(a^2 + b^2 + ab)\xi + ab(a + b). \end{aligned}$$

通过与子节3.1类似的论证，

$$H_T^*(M) = H^*(BT)[\xi]/\big(\xi(\xi - a)(\xi - b)(\xi + a + b)\big).$$

因此，

$$H^*(M) = \mathbb{Z}[x]/(x^4),$$

$$c_1(M) = -2x, \quad c_2(M) = 0, \quad c_3(M) = 4x^3, \quad p_1(M) = 4x^2.$$

这里，x 是 $\xi \in H_T^2(M)$在 $H^2(M)$上的限制。

4.2. **实现**。作为一个殆复流形，6维球面 S^6 允许一个 T-作用，其有 2 个不动点，不动点的权为 $\{\alpha,\beta,-\alpha-\beta\}$ 和 $\{-\alpha,-\beta,\alpha+\beta\}$，其中 α，β构成 $H^2(BT)$ 的一组基，参见例 A.1。其 GKM图见图 10。

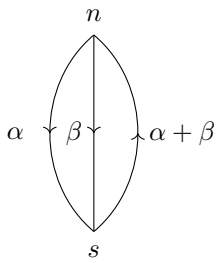
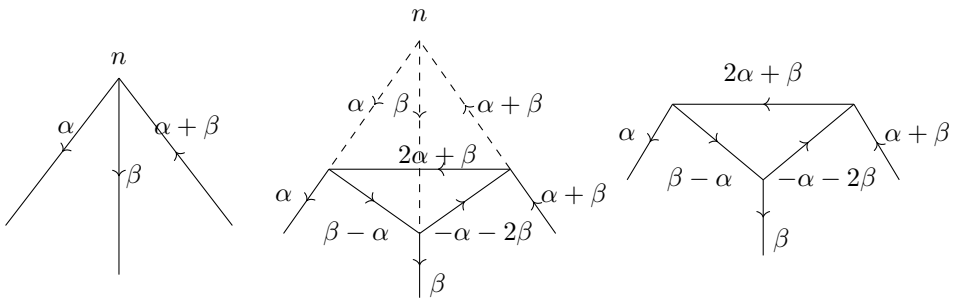


FIGURE 10. S^6的GKM图

我们对 T-不动点（例如北极）进行 n的 S^6爆破，爆破的含义见附录B。图11 展示了 S^6 在 n 处的图层面爆破，这对应于 n的顶点切割。



(1) n　　(2) n的爆破　　(3) 爆$_p S^6$

FIGURE 11. S^6 在 n处的爆破

于是，所得近复 T流形 $\mathrm{Bl}_p S^6$ 的 GKM 图如下，其中中心的顶点对应于 S^6的南极 s 。

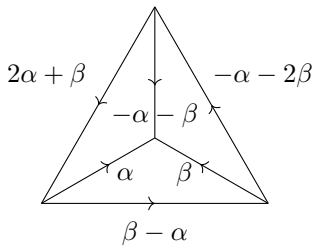


FIGURE 12. $\mathrm{Bl}_p S^6$的GKM图

设 $\alpha=a$ 与 $\beta=b$，我们得到类型（P2）的GKM图，图(P2)。

5. Type (P3)

本节中，令 M 表示一个类型（P3）的 GKM 流形，即，图 (P3)是 M的 GKM 图。

5.1. **等变上同调与陈类**。由 GKM图

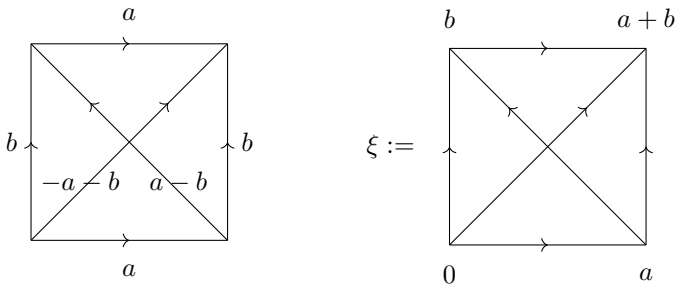


FIGURE 13

我们得到

$$\begin{aligned} c_1^T(M) &= 0, \quad c_2^T(M) = -2\xi^2 + 2(a+b)\xi - a^2 - b^2 - ab, \\ c_3^T(M) &= \xi(\xi-a)(\xi-b) + \xi(\xi-a)(\xi-a-b) \\ &\quad + \xi(\xi-b)(\xi-a-b) + (\xi-a)(\xi-b)(\xi-a-b) \\ &= 4\xi^3 - 6(a+b)\xi^2 + 2(a^2+b^2+3ab)\xi - ab(a+b). \end{aligned}$$

$$H_T^*(M) = H^*(BT)[\xi]/\big(\xi(\xi-a)(\xi-b)(\xi-a-b)\big).$$

因此，

$$H^*(M) = \mathbb{Z}[x]/(x^4),$$

$$c_1(M) = 0, \quad c_2(M) = -2x^2, \quad c_3(M) = 4x^3, \quad p_1(M) = 4x^2.$$

这里， x 是 $\xi \in H_T^2(M)$在 $H^2(M)$上的限制。

5.2. **实现**。设 G 是一个紧致连通李群， H 是 G的闭子群。设 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$ 分别为 G和 H 的李代数。众所周知，将 (g, v) 映至 $g_* v$的丛同构 $G \times \mathfrak{g} \to TG$ 诱导出一个丛同构 $\Psi\colon G \times_H (\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \to T(G/H)$，其中 H在 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 上的作用为伴随作用。

设 J_0 是 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$上的一个 H-等变复结构。那么 J_0 在 $G \times_H (\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \cong T(G/H)$上诱导出一个近复结构 J。事实上，我们将 J定义为

$$J([g, v]) := [g, J_0(v)] \quad (g \in G,\ v \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}).$$

这是良定义的，因为

$$J([gh^{-1}, hv]) = [gh^{-1}, J_0(hv)] = [gh^{-1}, hJ_0(v)] = [g, J_0(v)] \quad (\forall h \in H).$$

我们取 $G = \mathrm{Sp}(2)$，其中

$$\mathrm{Sp}(2) = \{A \in M_2(\mathbb{H}) \mid {}^t\bar{A}A = I\}.$$

这里， $M_2(\mathbb{H})$ 表示所有元素为四元数的 2 阶方阵组成的集合，而 I 表示 $M_2(\mathbb{H})$ 中的单位矩阵。Sp(2) 的李代数 $\mathfrak{sp}(2)$ 定义为

$$\mathfrak{sp}(2) = \{A \in M_2(\mathbb{H}) \mid {}^t\bar{A} = -A\}.$$

我们取 H 为 Sp(2) 的一个子群，定义如下:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{C},\ d \in \mathbb{H} \text{ with } |c| = |d| = 1 \right\},$$

它与 U(1) × Sp(1) 同构。于是， $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 可以识别为

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} zj & w \\ -\overline{w} & 0 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{C},\ w \in \mathbb{H} \right\} \tag{5.1}$$

作为 H-模。由于 H 在 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 上的作用是伴随作用，可以看出 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 分解为两个不可约的 H-模

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} zj & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{C} \right\}, \qquad U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & w \\ -\overline{w} & 0 \end{pmatrix} \mid w \in \mathbb{H} \right\}.$$

因此， $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 上由 H-等变复结构 J_+ 和 J_- 给出的本质上有两种选择

(1) $J_+ \begin{pmatrix} zj & w \\ -\overline{w} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} izj & iw \\ -\overline{iw} & 0 \end{pmatrix}$,

(2) $J_- \begin{pmatrix} zj & w \\ -\overline{w} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -izj & iw \\ -\overline{iw} & 0 \end{pmatrix}$.

直接计算可知， J_+ 和 J_- 都是 H-等变的。

取 T 为 Sp(2) 中由对角矩阵组成的极大环面。 $\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \in T$ 对 (5.1) 中元素的伴随作用为 $\begin{pmatrix} g_1^2 zj & g_1 w \bar{g}_2 \\ -g_2 \bar{w} \bar{g}_1 & 0 \end{pmatrix}$，将 $w = w_1 + w_2 j$ 写成 w_1、 $w_2 \in \mathbb{C}$的形式，可得

$g_1 w \bar{g}_2 = g_1 \bar{g}_2 w_1 + g_1 g_2 w_2 j$。因此， T-模 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 的权为: 当 J_+ 时为 $2a$、 $a-b$、 $a+b$；当 J_- 时为 $-2a$、 $a-b$、 $a+b$，其中 a、 b是 $H^2(BT)$的一组基。此作用并非有效； $-I$ 平凡作用。

该 T-流形 Sp(2)/(U(1)×Sp(1)) 上由 J_- 诱导的近复结构使其成为一个 GKM 流形，其 GKM 图如图 14所示。

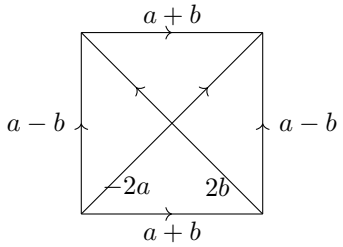


FIGURE 14. Sp(2)/(U(1)×Sp(1)) 的 GKM 图，其近复结构由 J_-诱导

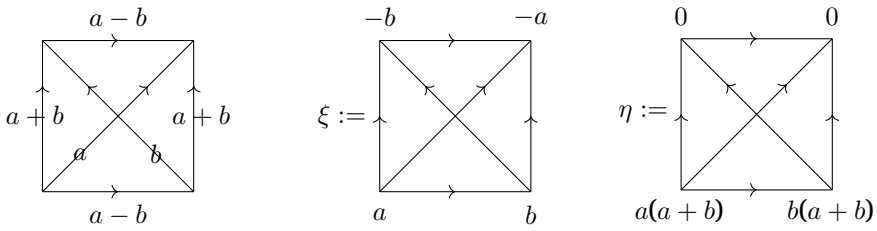
分别用 a 和 b 替换 $a+b$ 和 $a-b$，即可得到一个类型（P3）流形的实现。

注记 5.1. 由J_+ 上方诱导的 Sp(2)/(U(1)×Sp(1)) 上的近复结构与 $\mathbb{C}P^3$ 上的标准复结构具有相同的陈类。

6. Type (Q1)

在本节中，令 M 表示一个类型（Q1）的GKM流形，即图 (Q1)是 M的GKM图。

6.1. **等变上同调与陈类**。由 GKM 图



(1) (2) (3)

Figure 15

我们得到

$$c_1^T(M) = 3\xi, \quad c_2^T(M) = 4\xi^2 - a^2 - b^2,$$
$$c_3^T(M) = \xi(\xi+a)(\xi-a) + \xi(\xi+b)(\xi-b)$$
$$= 2\xi^3 - (a^2+b^2)\xi.$$

$$H_T^*(M) = H^*(BT)[\xi,\eta]/\big(2\eta - (\xi+a)(\xi+b), \eta(\eta-(a+b)\xi)\big).$$

因此，

$$H^*(M) = \mathbb{Z}[x,y]/(2y - x^2,\ y^2),$$
$$c_1(M) = 3x, \quad c_2(M) = 4x^2, \quad c_3(M) = 2x^3, \quad p_1(M) = x^2.$$

这里， x和 y分别是 $\xi \in H_T^2(M)$和 $\eta \in H_T^4(M)$在 $H^2(M)$和$H^4(M)$上的限制。

6.2. **实现**。 令 T 作用于具有复结构 Q_3

$$(Q_3, J_{\mathrm{std}}) = \{[z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4] \in \mathbb{C}P^4 \mid z_0z_1 + z_2z_3 + z_4^2 = 0\}$$

的复二次超曲面上，其中标准复结构为 J_{std}

$$g \cdot [z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4] = [g^a z_0 : g^{-a} z_1 : g^b z_2 : g^{-b} z_3 : z_4]$$

对所有 $g \in T$均成立，其中某个 $a, b \in H^2(BT)$构成一组基。该作用有4个不动点

$$[1:0:0:0:0], [0:1:0:0:0], [0:0:1:0:0], [0:0:0:1:0]$$

其权为

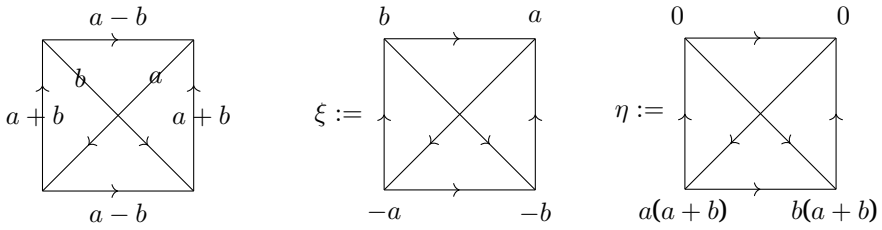
$$\{-a, b-a, -b-a\}, \{a, a+b, a-b\}, \{-b, a-b, -a-b\}, \{b, a+b, b-a\},$$

分别如此。这是一个 GKM流形，其 GKM图如图 （Q1）。

7. Type (Q2)

在本节中，令 M 表示一个(Q2)型GKM流形，也就是说，图(Q2)是 M的GKM图。

7.1. **等变上同调与陈类**。根据GKM图



(1)　(2)　(3)

FIGURE 16

我们得到

$$\begin{aligned} c_1^T(M) &= -\xi, \quad c_2^T(M) = -a^2 - b^2, \\ c_3^T(M) &= \xi(\xi+a)(\xi-a) + \xi(\xi+b)(\xi-b) \\ &= 2\xi^3 - (a^2+b^2)\xi. \end{aligned}$$

$$H_T^*(M) = H^*(BT)[\xi,\eta]/\big(2\eta - (\xi-a)(\xi-b),\ \eta(\eta+(a+b)\xi)\big).$$

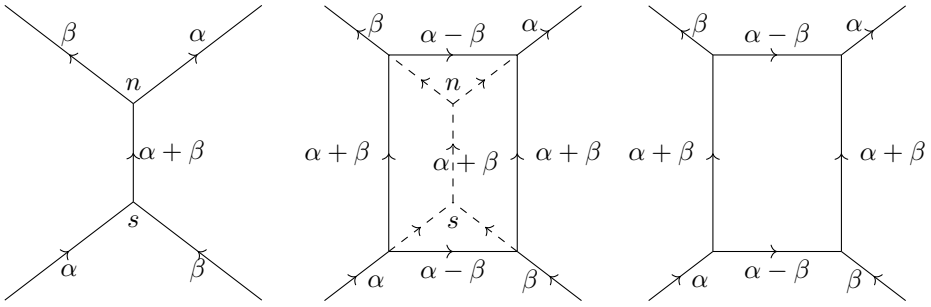
因此，

$$H^*(M) = \mathbb{Z}[x,y]/(2y - x^2,\ y^2),$$
$$c_1(M) = -x, \quad c_2(M) = 0, \quad c_3(M) = 2x^3, \quad p_1(M) = x^2.$$

这里，x和 y分别是 $\xi \in H_T^2(M)$和 $\eta \in H_T^4(M)$在 $H^2(M)$和$H^4(M)$上的限制。

7.2. **实现**。我们沿着 S^6 对 T-不变 S^2 进行爆破，它对应于图中标记为 $\alpha+\beta$ 的边（图10），这里的爆破采用附录 B中的定义。图 17 展示了在图的层面上沿边对 S^6 进行爆破，这对应于沿该边进行切割。

在将 S^2 的法丛分解为两个复直线丛 L_1 和 L_2 的直和时，若 L_1 在 n 处的权为 β，则由同余关系可知，L_1 在 s 处的权为 $-\alpha$；若 L_2 在 n 处的权为 α，则 L_2 在 s 处的权为 $-\beta$。因此，在图17(1)中，右上（左上）标记为 α（β）的边和右下（左下）标记为 $-\beta$（$-\alpha$）的边表示同一线丛中的纤维。



(1) 在 S^2附近的图　(2) 沿 S^2爆破　(3) $\mathrm{Bl}_{S^2}S^6$

FIGURE 17. 沿 S^2对 S^6 进行爆破 $\mathrm{Bl}_{S^2}S^6$

那么，由此得到的近复 T-流形 $\mathrm{Bl}_{S^2}S^6$ 的 GKM 图如图 18所示。

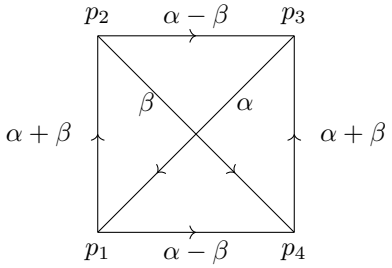


FIGURE 18

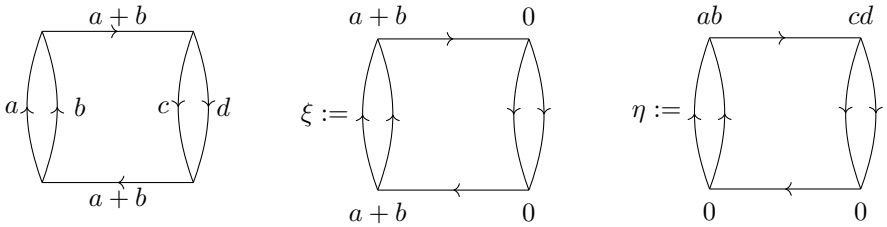
令 $\alpha=a$ 和 $\beta=b$，我们得到 (Q2)型的 GKM 图，如图 (Q2)所示。

注 7.1. 在 [Ma84], a 闭光滑六维流形 X 称为关于 $k\geq 1$ 的 k-扭曲 $\mathbb{C}P^3$，如果 $H^*(X)$ 与 $\cong H^*(\mathbb{C}P^3)$ 同构，且作为群，x^3 对于一个生成元$x\in H^2(X)$，是 k 倍的 $H^6(X)$ 的一个生成元。 [Ma84, 推论 9.2]中证明，如果 X 具有一个几乎复的有效 T作用且是单连通的，那么 X 与 $\mathbb{C}P^3$ 或 Q_3微分同胚，特别地，其分别为 $k=1$ 或 2。这是正确的。然而，其中的注释 (3) 声称此类 X 的总陈类与标准的 $\mathbb{C}P^3$ 或 Q_3 具有相同形式，这是错误的。事实上，(P2、P3、Q2)型（即 Todd 属为零的情形）被忽略了。

8. TYPE (S)

在本节中，令 M 表示一个类型 (S) 的 GKM流形，即，图(S)是 M的 GKM图。

8.1. 等变上同调与陈类。令 $\{a,b\}$ 为$H^2(BT)$的一个基。令 $\{c,d\}$为 $H^2(BT)$的另一个基，使得 $a+b=c+d$和$\{a,b\}\equiv\{-c,-d\}$ 模 $(a+b)$。



(1) $c=a-k(a+b)$, $d=b+k(a+b)$

(2)

(3)

FIGURE 19

由于 $\{a,b\}\equiv\{-c,-d\}$ 模 $(a+b)$，我们有 $ab\equiv cd$ 模 $(a+b)$。因此，存在 $\delta\in H^2(BT)$ 使得

$$ab-cd=\delta(a+b).$$

我们得到

$$c_1^T(M)=0,\quad c_2^T(M)=\delta\xi+cd-(a+b)^2,$$
$$c_3^T(M)=4\xi\eta-2(a+b)\eta-(ab+cd)\xi+(a+b)cd.$$
$$H_T^*(M)=H^*(BT)[\xi,\eta]/(\xi^2-(a+b)\xi,\ \eta^2-cd\eta-\delta\xi\eta).$$

因此,

$$H^*(M)=\mathbb{Z}[x,y]/(x^2,\ y^2),$$
$$c_1(M)=c_2(M)=0,\quad c_3(M)=4xy,\quad p_1(M)=0.$$

这里， x和 y分别是 $\xi\in H_T^2(M)$ 和 $\eta\in H_T^4(M)$ 在 $H^2(M)$ 和$H^4(M)$ 上的限制。

8.2. **实现**。 我们讨论具有 GKM 图 M 的存在性 (S)，它是沿各向同性二维球面中的轨道对两个 S^6进行等变粘合而成的。

回顾一下，存在一个自然同构

$$\Psi\colon H^2(BT)\cong \mathrm{Hom}(T,S^1).$$

由 $\chi^u(u\in H^2(BT))$ 定义的复一维 T-模记为 $\mathbb{C}(\chi^u)$，而 T-模 V的单位圆盘（分别为球面）记为 $D(V)$（分别为 $S(V)$）。

设 a， b是 $H^2(BT)$ 的一组基，并将带有权为 a， b， $-a-b$ 的近复 T-作用的 S^6 记为 $S^6(a,\ b)$。设 c， d是 $H^2(BT)$ 的另一组基，使得

$$a+b=c+d\quad\text{and}\quad\{a,b\}\equiv\{-c,-d\}\mod a+b. \tag{8.1}$$

注 8.1。 (1)一个简单的观察表明，(8.1)中的两个条件等价于以下条件:

$$\{c,d\}=\{a-k(a+b),\ b+k(a+b)\}\quad\text{for some } k\in\mathbb{Z}.$$

(2) 我们可以将 (8.1)中的同余关系 $\{a,b\}\equiv\{-c,-d\}$ 模 $a+b$ 替换为 $\{a,b\}\equiv\{c,d\}$ 模 $a+b$。

取 $S^6(a,\ b)$ 中一点的一个 T-轨道，其各向同性子群为 $K=\ker\chi^{a+b}$。将该 T-轨道记为 C_{a+b}。它是一个 T/K自由作用其上的圆。 C_{a+b}在 $S^6(a,\ b)$ 中的 T-法丛是平凡的，因此 C_{a+b}的 T-等变闭管状邻域 $N(C_{a+b})$ 与下列空间 T-等变微分同胚

$$N(C_{a+b})\cong C_{a+b}\times D(\mathbb{R}\oplus\mathbb{C}(\chi^a)\oplus\mathbb{C}(\chi^b))$$

其中 $\mathbb{R}$ 表示平凡的一维实 T-模。条件（8.1）确保 N（C_{c+d}）与 T-等变微分同胚于 N（C_{a+b}）。为简化记号，令

$$C:=C_{a+b},\quad D:=D(\mathbb{R}\oplus\mathbb{C}(\chi^a)\oplus\mathbb{C}(\chi^b)),\quad S:=S(\mathbb{R}\oplus\mathbb{C}(\chi^a)\oplus\mathbb{C}(\chi^b)).$$

注意， D 是一个5-圆盘，而 S 是一个4-球面。 D （分别为 S）中的 K-不动点集是 D（$\mathbb{R}$）（分别为 S（$\mathbb{R}$）$=S^0$）。

我们取 T-等变嵌入

$$\varphi_+\colon C\times D\to S^6(a,b)\quad\text{and}\quad\varphi_-\colon C\times D\to S^6(c,d)$$

使得 φ_+ 保向，而 φ_- 反向。更准确地说， φ_+ （分别地， φ_-）不仅在整个空间上，而且

也在 K-不动点集 $C\times D$（$\mathbb{R}$）上保向（分别地，反向）。我们作如下自然识别

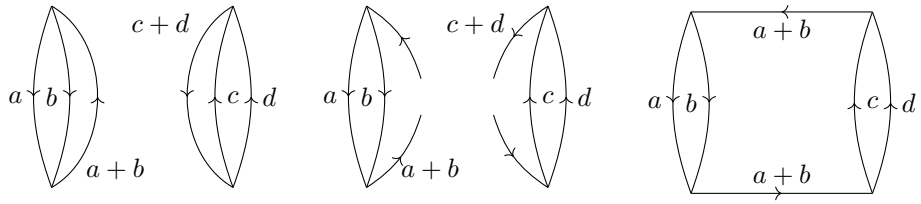
$$C\times(D\backslash\{0\})=C\times S\times(0,1]\quad\text{and}\quad C\times(\operatorname{Int}D\backslash\{0\})=C\times S\times(0,1).$$

我们取一个自微分同胚

$$\psi\colon C\times S\times(0,1)\to C\times S\times(0,1),\quad(c,s,t)\mapsto(c,s,1-t)$$

并通过微分同胚 $\varphi_-\circ\psi\circ\varphi_+^{-1}$将 $S^6(a,\ b)\backslash C$和 $S^6(c,\ d)\backslash C$粘合起来，将 $\varphi_+($ $C\times S\times(0,\ 1))$映到$(\varphi_-\circ\psi)(C\times S\times(0,\ 1))$上。由于 $\varphi_-\circ\psi\circ\varphi_+^{-1}$是$T$-等变且保向，所得流形记为 M，它是一个闭定向 T-流形，并且继承了$S^6(a,\ b)$和 $S^6(c,\ d)$在外部的近复结构

$$\varphi_+(C\times S\times(0,1))=(\varphi_-\circ\psi)(C\times S\times(0,1)).$$



(1) $S^6(a,\ b)\sqcup S^6(c,\ d)$　(2) $S^6(a,\ b)\backslash C\sqcup S^6(c,\ d)\backslash C$　(3) M

FIGURE 20. 通过 $a+b=c+d$和 $\{a,b\}\equiv\{-c,-d\}$模 $a+b$，将 $S^6(a,$ $b)\backslash C$与 $S^6(c,\ d)\backslash C$进行等变粘合，从而构造 M

注意，$C\times S\times[0,1]$嵌入于 M中。事实上，嵌入映射 $\Phi\colon C\times S\times[0,1]\to M$由下式给出

$$\Phi=\begin{cases}\varphi_+ & \text{on } C\times S\times(0,1]\\ \varphi_-\circ\psi & \text{on } C\times S\times[0,1).\end{cases}$$

注意，Φ是良定义的，因为 $\varphi_+=\varphi_-\circ\psi$在 $C\times S\times(0,\ 1)$上。$C\times S\times[0,1]$的一个边界$C\times S\times\{1\}$带有由 φ_+诱导的近复结构，另一个边界 $C\times S\times\{0\}$则带有由 $\varphi_-\circ\psi$诱导的近复结构。它们是 T-等变的，因为映射 $\varphi_\pm$和 ψ都是 T-等变的。因此，为了在 M上得到一个 T-等变的近复结构，只需证明 $TM|_{(C\times S\times\{0,1\})}$上的 T-等变近复结构可延拓到 $X:=C\times S\times[0,1]$上，这一点我们将在下文说明。

首先注意到，由于 T/K 在 C 上的作用是自由的，只需证明对于某个 $c\in C$，$TX|_{(\{c\}\times S\times\{0,1\})}$ 上的近复结构（它是 K-等变的）能够延拓到 $\{c\}\times S\times[0,1]$上。下文为简化记号，将省略 $\{c\}$。

记住，$S^K=S(\mathbb{R})=S^0$。注意，$TX|_{(S(\mathbb{R})\times[0,1])}$是一个 K-向量丛，其中 K在底空间 $S(\mathbb{R})\times[0,1]$上平凡作用，因此根据纤维上的 K-表示，它分解为两个平凡实向量丛的 Whitney 和：一个秩为二，带有平凡的 K作用；另一个秩为四，带有非平凡的 K作用。记住，$TX|_{(S(\mathbb{R})\times\{0,1\})}$ 配备了一个 K-等变近复结构，并且该丛分解为分别对应 K作用的平凡部分和对应 K作用的非平凡部分。其上的复结构

对应 K作用的平凡部分上的复结构可延拓至 $S(\mathbb{R}) \times [0,1]$，因为这些复结构由 $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})/\mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$ 参数化，而该空间是连通的。至于对应 K作用的非平凡部分，边界 $S(\mathbb{R}) \times \{0,1\}$ 上非平凡纤维 K作用的权一致；事实上，根据注 8.1，它们模 $a+b$同余于 $\{a,-a\}$。因此，对应 K作用的非平凡部分上的近复结构也可 $S(\mathbb{R}) \times [0,1]$ K-等变地延拓。

Let

$$Y = S \times \{0,1\} \cup S(\mathbb{R}) \times [0,1].$$

我们已证明，K-等变近复结构可从 $TX|_{(S\times\{0,1\})}$延拓到 $TX|_Y$。设 $N(Y)$ 是 K-不变的 Y闭邻域，它可 Y K-等变地变形到 Y K。由于 Y 是$N(Y)$的 K-等变变形收缩核，我们可以假设定义在 $TX|_Y$上的 K-等变近复结构可延拓到 $N(Y)$上。

具体而言，我们取

$$N(Y) = S \times ([0,1/3] \cup [2/3,1]) \cup D_\epsilon \times [0,1],$$

其中，D_ϵ 是 S中 $S(\mathbb{R})$的一个 K-不变小闭邻域。于是

$$\begin{aligned} S \times [0,1] \setminus \operatorname{Int} N(Y) &= ((S \setminus \operatorname{Int} D_\epsilon) \times [0,1]) \setminus (S \times ([0,1/3) \cup (2/3,1])) \\ &= (S \setminus \operatorname{Int} D_\epsilon) \times [1/3,2/3]. \end{aligned}$$

由于 $S\setminus \operatorname{Int} D_\epsilon$与 $S^3 \times I$ K-等变同胚，其中 S^3是 S的赤道，I是一个闭区间，因此 $(S\setminus \operatorname{Int} D_\epsilon) \times [1/3,2/3]$与 $S^3 \times D^2$ K-等变同胚，其中 K 在 S^3 上自由作用，在 D^2上平凡作用。注意，$TX|S^3 \times \partial D^2$ 上已配备 K-等变近复结构，只需证明它能 $S^3 \times D^2$ K-等变地延拓。由于 K在 $S^3 \times D^2$ 上的作用是自由的，这个延拓问题可化为在它们关于 K作用的商空间上的延拓问题。

现在我们应用障碍理论。参数化 $\mathbb{R}^6$ 上近复结构的空间是 $\mathrm{GL}_6^+(\mathbb{R})/\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$，它与 $\mathrm{SO}(6)/\mathrm{U}(3)$ 同伦等价，因此只需验证

$$H^{q+1}(S^2 \times D^2, S^2 \times \partial D^2; \pi_q(\mathrm{SO}(6)/\mathrm{U}(3))) = 0 \quad \text{for all } q \geq 0. \tag{8.2}$$

通过初等计算可得

$$H^{q+1}(S^2 \times D^2, S^2 \times \partial D^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } q = 1,3, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

如 [KL25 第 5], 所述，Bott 周期性意味着对于 $q < 2n-1$,

$$\pi_q(\mathrm{SO}(n)/\mathrm{U}(n)) = 0 \quad \text{if } q \equiv 1,3,4,5 \mod 8,$$

参见 [Gr59，第 432]页。特别地，对于 $q = 1$，3，$\pi_q(\mathrm{SO}(6)/\mathrm{U}(3)) = 0$ 成立[2]。因此，(8.2) 得证。证明完毕。

[2]这也可由 $\mathrm{SO}(6)/\mathrm{U}(3)$ 与 $\mathbb{C}P^3$ 微分同胚这一事实推出。

9. Automorphism group

设 M 是一个带有近复结构 J的连通紧致几乎复流形。 M 的自同构是指保持近复结构 M 的微分同胚 J。已知 M的自同构群记作 Aut(M)，是一个李群 [BKW63]。

令 T为 Aut(M) 的极大环面。假设带有 T作用的 M 是一个 GKM流形。令 $\mathcal{G}_M$ 为其 GKM 图，Aut($\mathcal{G}_M$) 为 $\mathcal{G}_M$ 的自同构群。这里， $\mathcal{G}_M$ 的一个自同构是一个二元组 (φ, ϕ)，其中 φ 是 $\mathcal{G}_M$ 的图自同构， ϕ 是 $H^2(BT)$ 的自同构，并且对于 $\mathcal{G}_M$ 的任意有向边 e，均满足 $\alpha(\varphi(e)) = \phi(\alpha(e))$；其中 α 是 $\mathcal{G}_M$ 上的轴函数，参见 [JKMSZ]。令 K 为 Aut(M) 的连通极大紧李子群， $N_K(T)$ 为 T 在 K 中的正规化子。元素 $\sigma \in N_K(T)$ 自然诱导出 Aut($\mathcal{G}_M$) 的一个元素 $\sigma_* \in$，并且当 $\sigma \in T$ 时， σ_* 是恒等映射。因此，我们得到一个同态

$$\Psi\colon N_K(T)/T \to \mathrm{Aut}(\mathcal{G}_M), \tag{9.1}$$

其中 $N_K(T)/T$ 是 K的韦尔群。

引理9.1。 Ψ 是单射。

证明。由 σ_* 的定义显然可知， Ψ是一个同态。因此，只需证明当 σ_* 为恒等映射时，$\sigma \in T$。

假设 σ_* 是恒等映射。那么 σ 固定了 M 中的每个 T-不动点 p，并保持切向 T-模 T_pM中的所有复一维因子。这意味着， σ 在 p 处的微分 $d\sigma_p$ 在 T_pM 的每个复一维因子上都以复数乘法的形式作用。因此，对于任意 $g \in T$， $d\sigma_p$ 与 dg_p 交换。这意味着，在 p的某个邻域内， σ 与任意 g 交换。事实上，取一个 K-不变黎曼度量，并考虑相应的指数映射 $T_pM \to M$，即可看出这一点。该映射将 T_pM 的原点映到 p，并且在原点附近是一个 K_p-等变局部微分同胚。这里，K_p 是 K 在 p 处的各向同性子群，并且注意到 σ 和 $g \in T$ 属于 K_p。

现在考虑交换子 $\sigma g \sigma^{-1} g^{-1} \in K$。如上所述，它在 M 中固定了 p 的一个开邻域。另一方面，由于 K 是紧的， $\sigma g \sigma^{-1} g^{-1}$ 的不动点集必定是 M 的一个闭子流形。由于 M 连通，这意味着 $\sigma g \sigma^{-1} g^{-1}$ 在整个 M 上都是恒等映射，即 σ 与任意 $g \in T$ 交换。由于 σ 是 $N_K(T)$ 的一个元素，这意味着 $\sigma \in T$。□

注 9.1。若 $H^{\mathrm{odd}}(M)$ 通过 GKM理论作用，则群 Aut($\mathcal{G}_M$) 自然地作用于 $H^*(M)$。我们定义

$$\mathrm{Aut}^*(\mathcal{G}_M) = \{f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{G}_M) \mid \text{the induced action of } f \text{ on } H^*(M) \text{ is trivial}\}.$$

另一方面，由于 K 是连通的， K 在 $H^*(M)$ 上诱导的作用是平凡的；特别地，$\sigma \in N_K(T)$ 在 $H^*(M)$ 上诱导的作用是平凡的。因此，映射 Ψ在（9.1）中的像属于一个显然更小的群 Aut*($\mathcal{G}_M$)，而非 Aut($\mathcal{G}_M$)。

9.1. **类型（P1）**。令 M 为带有标准复结构 J_{std}的 $\mathbb{C}P^3$ 。U(4) 在 $\mathbb{C}P^3$ 上的线性作用保留 J_{std}。然而，U(4) 的中心在 M 上平凡作用，因此 U(4) 在 M 上的作用下降为 PU(4) 的有效作用。因此， Aut(M) 的连通极大紧李子群 K(P1)包含 PU(4)。PU(4) 的韦尔群是 4 次对称群 $\mathfrak{S}_4$ 。

固定 $a_1 \in H^2(BT)$。在图（P1）中，令 $a = a_2 - a_1$、$b = a_3 - a_1$、$c = a_4 - a_1$。对于 $1 \le i < j \le 4$，令$\sigma_{i,j}$为一个图自同构，它置换 p_i 和 p_j，并置换 a_i 和 a_j。

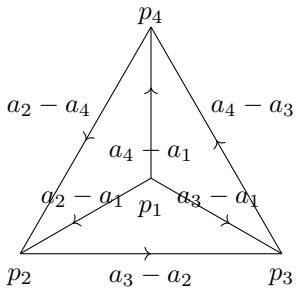


FIGURE 21

可以看出$\sigma_{i,j} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{G}_M)$对所有 $1 \le i < j \le 4$ 以及$\mathrm{Aut}(\mathcal{G}_M) = \mathfrak{S}_4$。因此，映射 Ψ 在（9.1）中是一个同构，这意味着 K（P1）=PU(4)。

注 9.2. 已知，$\mathbb{C}P^n$ 在标准复结构 J_{std} 下的自同构群是$\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{C})$，其极大紧致连通李子群是$\mathrm{PU}(n+1)$。

9.2. **类型（P2）**。设 M 是通过对一个 T-不动点（北极或南极）进行爆破而得到的流形，该点位于 S^6中。事实上，S^6 带有标准近复结构，具有 G_2 的对称性，并且存在一个子群SU(3)属于 G_2，该子群固定北极和南极，见附录A。由于爆破可以SU(3)-等变地进行，SU(3)作用在 M 上，并保持 M上的近复结构。该作用是有效的，因此连通极大紧李子群 K（P2）（属于$\mathrm{Aut}(M)$）包含SU(3)。SU(3)的韦尔群是对称群 $\mathfrak{S}_3$（3 次）。

只有 p_1 处的权之和为零；因此，$\mathrm{Aut}(\mathcal{G}_M)$ 中的任意元素都固定 p_1。在图（P2）中，令 $a = a_2, b = a_3, -a - b = a_4$。对于 $2 \le i < j \le 4$，令 $\sigma_{i,j}$ 为一个图自同构，它置换 p_i 和 p_j，并置换 a_i 和 a_j。

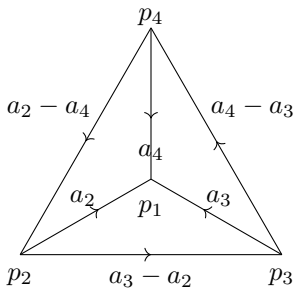


FIGURE 22

可以看出，对于所有 $\sigma_{i,j} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{G}_M)$ 以及 $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}_M) = \mathfrak{S}_3$。因此，$\Psi$（9.1）中的映射是一个同构，这意味着 $K(\mathrm{P2})$ =SU(3)。

9.3. **类型（P3）**。设 M 为 Sp(2)/(U(1) $\times$ Sp(1)) $\cong \mathbb{C}P^3$，其带有 非标准近复结构 $J_{\text{n-std}}$，该结构由 J_- 小节 5.2 中诱导得到。中心 $\pm I$ 在 M 上的作用是平凡的，其中 I 表示 Sp(2) 中的单位矩阵，而 Sp(2) 在 M 上的作用下降为 Sp(2) 的有效作用/$\{\pm I\}$。因此，连通极大紧李子群 K（P3）属于 Aut(M) 且包含 Sp(2) /$\{\pm I\}$。Sp(2) 的韦尔群/$\{\pm I\}$ 是一个 8 阶二面体群。

设 τ 为GKM图的90度逆时针旋转，连同将 a 映到 b并将 b映到 $-a$的映射。设 ρ 为关于GKM图中间竖直线的反射，连同将 a 映到$-a$的映射。

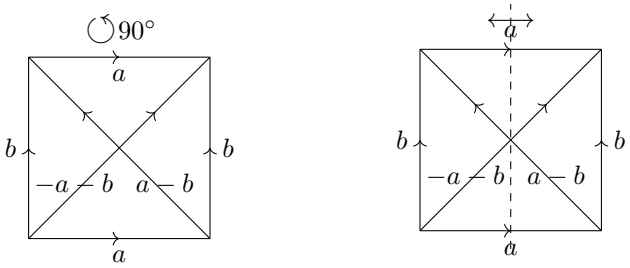


FIGURE 23. 图自同构，图 形 (P3)

可以验证，τ 与 ρ 生成 Aut($\mathcal{G}_M$)，它是阶为 8 的二面体群。因此，映射 Ψ 在 (9.1) 中是一个同构，这意味着 K(P3) =Sp(2)/$\{\pm I\}$。

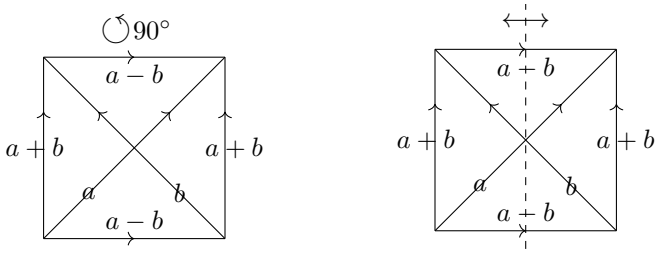
注 9.3. 取 $M = G/K$，其中 G =Sp(2)/$\{\pm I\}$。由 [Wo69，命题 3.1] 及其后的注 1，Aut(M，$J_{\text{n-std}}$) 的连通极大紧李子群与几乎厄米等距变换的最大连通群一致，这些等距变换属于 M，该群为 Sp(2)/$\{\pm I\}$。由于 $J_{\text{n-std}}$ 不可积，Aut(M，$J_{\text{n-std}}$) 的恒等映射连通分支与几乎厄米等距变换的最大连通群一致，这些等距变换属于 M，此结论依据 [Wo69，定理 4.1 (3)]。

9.4. **类型（Q1）**。令 M 为带有标准复结构 J_{std}的 Q_3。经过线性变换后，我们还可以将（Q_3，J_{std}）描述为由方程定义的 $\mathbb{C}P^4$的超曲面

$$Q_3 = \{[z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4] \in \mathbb{C}P^4 \mid z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 0\}.$$

SO(5) 在 $\mathbb{C}P^4$ 上的线性作用保持 Q_3，且 SO(5) 在 Q_3 上的作用是有效的。因此，Aut(M) 的一个连通极大紧李子群 K（Q1）包含 SO(5)。SO(5) 的韦尔群是阶为 8 的二面体群。

令 τ 表示 GKM 图的逆时针旋转 90 度，并同时将 a映射到 b，将 b映射到 $-a$。令 ρ表示沿 GKM 图中间的垂直线反射，并同时交换 a 和b。



(1) τ　　(2) ρ

FIGURE 24. 图 (Q1)的图自同构

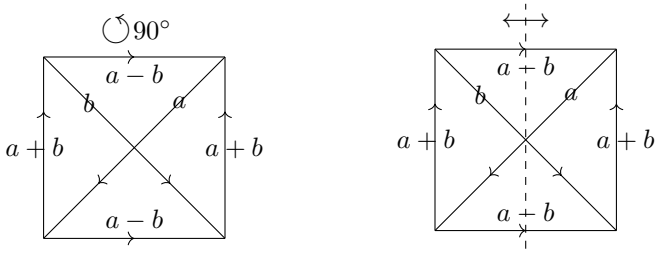
可以验证， τ 和 ρ 生成了 Aut($\mathcal{G}_M$)，它是一个阶为 8 的二面体群。因此， Ψ（9.1）中的映射是一个同构，这意味着 K(Q1) =SO(5)。

注9.4. 众所周知（例如，参见 [Ak95, 第3.3节，定理 2]），具有标准复结构的 Q_n = PO($n+2$)/P(O(n) × O(2)) 的自同构群为 PO($n+2;\mathbb{C}$)。这里，PO($n+2$) := SO($n+2$)/Z，其中$Z \subset$ SO($n+2$) 是中心。容易验证，若 n 为奇数（分别为偶数），则 $Z = \{I\}$ （分别为 $Z = \{\pm I\}$）。因此，特别地，Aut(Q_3) 的极大紧子群是 SO(5)。关于 $K(Q1)$ 的结论也可由此得出。

9.5. **(Q2)型**。令 M 为沿着 T的一个 S^1子群固定的 S^2对 S^6 进行爆破后得到的流形，该流形与 Q_3微分同胚。

存在一个 SO(4) 子群 G_2，它保持 S^2 不变，见引理 A.1和注 A.1。该爆破可以 SO(4)等变地进行，且 SO(4) 在 M 上的作用是有效的，因此连通极大紧李子群 K（Q2）包含于 Aut(M) 中，并包含 SO(4)。注意，SO(4) 的韦尔群为 $S^0 \times S^0$。

令 τ 为 GKM 图逆时针旋转 90 度，并同时将 a 映射到 b、将 b映射到 $-a$。令 ρ 为沿 GKM 图中间竖线的反射，并同时交换 a 和b。可以验证， τ 和 ρ 生成 Aut($\mathcal{G}_M$)，它是一个 8 阶二面体群。



(1) τ　　(2) ρ

FIGURE 25. 图 (Q2) 的图自同构

命题 9.2. $K(\mathrm{Q2}) = \mathrm{SO}(4)$。

证明。 我们假设 K(Q2) 真包含 SO(4)，并由此推出矛盾。由于 K(Q2)的秩为二，K(Q2)必为 G_2 、Sp(2)或 SO(5)。然而， $K(\mathrm{Q2}) \neq G_2$ ，因为G_2的极大紧致连通李子群同构于 SO(4) 或 SU(3)，但 $\dim G_2/\mathrm{SO}(4) = 8$，且 SU(3) 同胚于 S^6 ，而我们的流形 M 同胚于 Q_3。我们看到，Sp(2)不包含同构于 SO(4) 的李子群，尽管它包含同构于 Sp(1) × Sp(1) 的李子群。因此， K(Q2)必为 SO(5)。

如上所述，限制在 M 上的 SO(4) 作用有一个 5 维轨道，因此 SO(5) 在 M 上的作用有一个维数至少为 5、至多为 6 的轨道，因为 $\dim M = 6$。SO(5) 轨道同构于 SO(5)/H，其中 H 是 SO(5) 的一个紧李子群，其李代数的维数为 4 或 5，因为 $\dim \mathrm{SO}(5) = 10$ ，且 $5 \leq \dim(\mathrm{SO}(5)/H) \leq 6$。容易验证， $\mathfrak{so}(5)$ 中维数为 4 或 5 的李子代数同构于 $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(2)$。因此，$\dim(\mathrm{SO}(5)/H) = 6$。这意味着 SO(5) 在 M 上的作用是传递的，因为 $\dim M = 6$ ，且 M 是连通的。

我们注意到 H 是连通的。事实上，若将H 的单位连通分支记为 H_0，则有覆盖 SO(5)/H_0 →SO(5)/$H = M$ ，其中 H/H_0 为覆盖变换。由于 $M = Q_3$ 是单连通的， H/H_0 必定只含有一个元素，这意味着 H 是连通的。

由于 H 是连通的，且 H 的李代数同构于 $\mathfrak{so}(3)\oplus\mathfrak{so}(2)$，因此 H 同构于 SO(3)×SO(2) 或 U(2)。通过考察 SO(5) 的李子代数可以看出，同构于 U(2) 的 SO(5) 的紧李子群彼此在 SO(5) 中共轭；并且已知 SO(5)/ U(2) 微分同胚于 $\mathbb{C}P^3$。因此， H 必定同构于 SO(3) × SO(2)。

与 SO(3) ×SO(2) 同构的 SO(5) 紧李子群在 SO(5) 中也彼此共轭。因此，我们可以假设 H 是以标准方式嵌入 SO(5) 的 SO(3) ×SO(2)。由于我们的近复结构在 K(Q2) =SO(5) 的作用下不变，它由$\mathfrak{so}(5)/(\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(2))$ 上一个关于 SO(3) × SO(2) 的伴随作用不变的复结构决定。这里，实 SO(3) × SO(2)-模 $\mathfrak{so}(5)/(\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(2))$ 是不可约的，因此其上的不变复结构在相差一个符号的意义下唯一，而且可以看出，相应的 GKM图与类型 B 的图相同。这与假设矛盾，因此K(Q2) = SO(4)。 □

9.6. **类型 (S)**。 设 M 为第 8.2小节中构造的流形，它与 $S^2 \times S^4$微分同胚。我们可以看到

$$\mathrm{Aut}^*(\mathcal{G}_M) = \begin{cases} \langle\tau\rangle & \text{if } \{a,b\} \neq \{c,d\}, \\ \langle\tau\rangle \times \langle\rho\rangle & \text{if } \{a,b\} = \{c,d\}, \end{cases} \tag{9.2}$$

其中 τ 是关于 GKM 图中间竖线的反射（作为图自同构），并将 $\{a,b\}$ 映射到 $\{-c,-d\}$；而 ρ 是恒等映射（作为图自同构），并交换 a 与 b。两者 τ 和ρ 都是对合（图 26）。

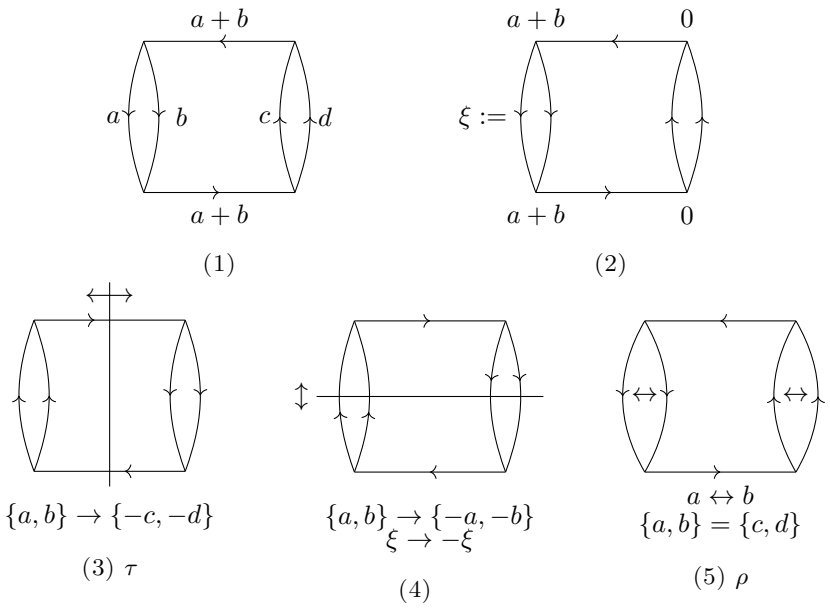


FIGURE 26. 图自同构

注 9.5。关于 GKM 图中间横线的反射（作为图自同构）并改变标记的符号，即图 26中间的那个，是 Aut($\mathcal{G}_M$) 的一个元素，但它在 $H^2(\mathcal{G}_M)$ 上的作用非平凡；事实上，它在 $H^2(\mathcal{G}_M)$ 上的作用相当于乘以 -1。

当 $\{a,b\} = \{c,d\}$时，我们可以看到，连通的极大紧李子群 $K(\mathrm{S1})$ of $\mathrm{Aut}(M)$ 是 $K(\mathrm{S1}) = \mathrm{SO}(4)$，参见附录中的小节 A.2 。

APPENDIX A. THE OCTONIONS

八元数是一种 8 维代数，其基为 $e_0 = 1$，e_1，e_2，e_3，e_4，e_5，e_6，e_7且其乘法满足

(1) $e_k^2 = -1$ 对于 $1 \le k \le 7$，(2) $e_i e_j = -e_j e_i$ 对于 $1 \le i \ne j \le 7$，以及 (3) $e_i e_j$ 对于 $1 \le i \ne j \le 7$，要么是 e_k，要么是某个 $1 \le k (\ne i,\ j) \le 7$的 $-e_k$。

满足上述第三个条件 (3) 的乘法有许多种选择。通常，乘法规则由乘法表或法诺平面给出，见下方图 27 。众所周知，作为代数，$\mathbb{O}$ 的同构类型不依赖于乘法的定义。我们也知道，$\mathbb{O}$的代数自同构群，记作 Aut($\mathbb{O}$)，是例外紧李群 G_2。

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	$-e_3$	-1	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_2	$-e_1$	-1	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	-1	e_1	e_2	e_3
e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	-1	$-e_3$	e_2
e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	-1	$-e_1$
e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	-1

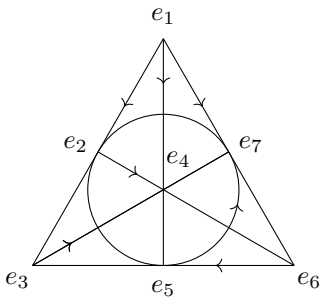


FIGURE 27. 乘法表与法诺平面

我们考虑四元数对，其乘法（以及自然加法）定义如下

$$(p_1, q_1)(p_2, q_2) = (p_1 q_1 - \overline{q_2} q_1, q_2 p_1 + q_1 \overline{p_2}) \qquad (p_1, q_1, p_2, q_2 \in \mathbb{H}) \tag{A.1}$$

其中 $\bar{q}$ 表示 $q \in \mathbb{H}$的共轭。所有带有乘法 (A.1) 的四元数对构成八元数代数。事实上，若将 $\sum_{i=0}^{7} x_i e_i$ $(x_i \in \mathbb{R})$ 看作四元数对 $(x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k,$ $x_4 + x_5 i + x_6 j + x_7 k)$，那么乘法 (A.1) 与图 27[3]中的乘法表所给出的乘法一致。

引理 A.1. 我们将 $\mathbb{O}$ 视为带有乘法 (A.1)的四元数对。于是， φ_s 和 ψ_t 定义为

$$\varphi_s(p, q) = (sps^{-1}, qs^{-1}) \quad (s \in \mathrm{Sp}(1)), \quad \psi_t(p, q) = (p, tq) \quad (t \in \mathrm{Sp}(1))$$

是$\mathrm{Aut}(\mathbb{O})$的元素，且它们生成$\mathrm{Aut}(\mathbb{O})$ 的一个子群，该子群同构于$\mathrm{SO}(4)$。

证明。 显然，引理中定义的映射是 $\mathbb{O}$的线性自同构，并保持乘法 (A.1)，因此它们是 $\mathrm{Aut}(\mathbb{O})$ 的元素。它们彼此可交换，且同态的核

$$\varphi \times \psi \colon \mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{O}), \qquad (s, t) \to \varphi_s \psi_t$$

是由 $(-I, -I)$ 生成的二阶群。众所周知，$(\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1))/\langle(-I, -I)\rangle$与 $\mathrm{SO}(4)$ 同构，故引理得证。□

注 A.1. 直接计算可知，引理 A.1中的子群 $\mathrm{SO}(4)$ 保持由 e_1, e_2, e_3 张成的三维空间中的单位球面不变。

引理 A.2. 引理 $(p, q) \in \mathbb{O}$ 处的 $\mathrm{SO}(4)$作用 （见引理 *A.1*） 的各向同性子群同构于

$$\begin{cases} \mathrm{SO}(4) & \text{if } \mathrm{Im}(p) = 0 \text{ and } q = 0, \\ \mathrm{Sp}(1)/\langle -I \rangle \cong \mathrm{SO}(3) & \text{if } \mathrm{Im}(p) = 0 \text{ and } q \neq 0, \\ (\mathrm{U}(1) \times \mathrm{Sp}(1))/\langle(-I, -I)\rangle & \text{if } \mathrm{Im}(p) \neq 0 \text{ and } q = 0, \\ \mathrm{U}(1) & \text{if } \mathrm{Im}(p) \neq 0 \text{ and } q \neq 0, \end{cases}$$

其中 $\mathrm{Im}(p)$ 表示 $p \in \mathbb{H}$ 的虚部。

[3]在 [Ba02], 中，四元数对的乘法定义为 $(q_2 q_1 \ p_1 q_2 + p_2 q_1$ $p_1 \ q_1 \ \ p_2 \ q_2 \ = \ p_1 p_2 -$,) (,) 这对应于一个不同于图 27 的乘法表。

证明。假设 $\mathrm{Im}(p) = 0$，即 p 是一个实数。则 $\varphi_s\psi_t(p,q) = (p, tqs^{-1})$。因此，$\varphi_s\psi_t(p,q) = (p,q)$ 当且仅当 $q = tqs^{-1}$。特别地，对任意 s，$(p,0)$ 在 $t \in \mathrm{Sp}(1)$ 下保持不动，从而证明第一种情形。当 $q \neq 0$ 时，$q = tqs^{-1}$ 等价于 $t = qsq^{-1}$；因此 t 由 s 决定。由于子群 $\{(s, qsq^{-1}) \mid s \in \mathrm{Sp}(1)\}$ 包含子群 $\langle(-I,-I)\rangle$，第二种情形随之成立。

众所周知，同态

$$\rho\colon \mathrm{Sp}(1) \to \mathrm{GL}(\mathrm{Im}\ \mathbb{H}) \quad \text{given by} \quad s \to (x \to sxs^{-1})$$

在 $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}\ \mathbb{H}$ 上诱导出 $\mathrm{SO}(3) \cong \mathrm{Sp}(1)/\{\pm 1\}$ 的标准表示，其中 $\mathrm{Im}\ \mathbb{H}$ 表示 $\mathbb{H}$ 和 $x \in \mathrm{Im}\ \mathbb{H}$ 的虚部。因此，当 $x \neq 0$ 时，子群 $H := \{s \in \mathrm{Sp}(1) \mid sxs^{-1} = x\}$ 在 ρ 下的像是一个圆子群，这意味着 H 同构于 $\mathrm{U}(1)$，从而证明了第三种情形。最后一种情形可由这一观察以及前一个观察得出：当 $q \neq 0$ 时，$t = qsq^{-1}$（因此 t 由 s 决定）。□

由于 G_2 包含 $\mathrm{SU}(3)$ 作为子群，因此 $\mathrm{SU}(3)$ 应当在 $\mathbb{O}$ 上以代数自同构的方式作用。然而，目前尚不清楚它如何通过乘法（A.1）作用于 $\mathbb{O}$。为了说明 $\mathrm{SU}(3)$ 在 $\mathbb{O}$ 上以代数自同构的方式作用，下面的乘法很方便（参见 [Yo25，第 1 节。5]）。我们将 $\mathbb{O}$ 中的一个元素视为 $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^3$ 中的一个元素，并将其记作

$$a + \mathbf{m} \quad \text{where } a \in \mathbb{C} \text{ and } \mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3. \tag{A.2}$$

然后，我们考虑 $\mathbb{O}$ 上如下定义的乘法

$$(a + \mathbf{m})(b + \mathbf{n}) = (ab - \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle) + (a\mathbf{n} + \bar{b}\mathbf{m} - \overline{\mathbf{m} \times \mathbf{n}}) \tag{A.3}$$

其中 $\bar{}$ 表示复共轭，并且

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}, \quad \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \sum_{i=1}^{3} m_i \bar{n}_i, \quad \mathbf{m} \times \mathbf{n} = \begin{pmatrix} m_2 n_3 - m_3 n_2 \\ m_3 n_1 - m_1 n_3 \\ m_1 n_2 - m_2 n_1 \end{pmatrix}.$$

不难看出，$A \in \mathrm{SU}(3)$ 在 $\mathbb{O}$ 上由下式定义的作用

$$a + \mathbf{m} \to a + A\mathbf{m}$$

是 $\mathbb{O}$ 的代数自同构，其乘法为（A.3）（见 [Yo25，定理1.9。1]）。这表明 $\mathrm{SU}(3)$ 是 $\mathrm{Aut}(\mathbb{O})$ 的一个子群 $= G_2$。

注 A.2. (1) 乘法 (A.3) 由下列乘法表或法诺平面给出。

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	e_7	$-e_6$
e_2	$-e_3$	-1	e_1	$-e_6$	e_7	e_4	$-e_5$
e_3	e_2	$-e_1$	-1	e_7	e_6	$-e_5$	$-e_4$
e_4	$-e_5$	e_6	$-e_7$	-1	e_1	$-e_2$	e_3
e_5	e_4	$-e_7$	$-e_6$	$-e_1$	-1	e_3	e_2
e_6	$-e_7$	$-e_4$	e_5	e_2	$-e_3$	-1	e_1
e_7	e_6	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	$-e_1$	-1

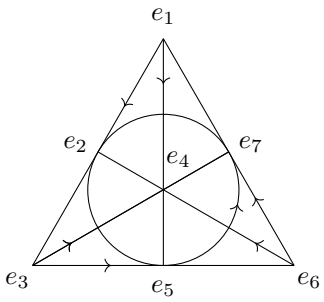


FIGURE 28. 与 (A.3) 对应的乘法表和法诺平面

(2) 若用表达式 (A.1) 表示乘法 (A.2)，则

$$(a+\mathbf{m})(b+\mathbf{n}) = (ab - m_1\bar{n}_1 - m_2\bar{n}_2 - \bar{m}_3 n_3) + \begin{pmatrix} an_1 + \bar{b}m_1 + \bar{m}_2 n_3 - m_3\bar{n}_2 \\ an_2 - \bar{b}m_2 + m_3\bar{n}_1 - \bar{m}_1 n_3 \\ \bar{a}n_3 + bm_3 + m_1 n_2 - m_2 n_1 \end{pmatrix}.$$

将此与 (A.3) 比较，可见由下式定义的映射

$$a + \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} \to a + \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ -\bar{m}_3 \end{pmatrix} \tag{A.4}$$

给出了一个代数同构，将具有乘法 ($\mathbb{O}$ A.1) 的映射到 $\mathbb{O}$，其乘法为 (A.3)。

A.1. **上的近复结构**。我们将 $u \in \mathbb{O}$ 的实部记为 $\operatorname{Re} u$，并设

$$\operatorname{Im}\mathbb{O} = \{u \in \mathbb{O} \mid \operatorname{Re} u = 0\}.$$

八元数 $\mathbb{O}$ 带有标准内积

$$(u,v) = u_0 v_0 + \sum_{i=1}^{7} u_i v_i \qquad \text{for } u = u_0 + \sum_{i=1}^{7} u_i e_i \text{ and } v = v_0 + \sum_{i=1}^{7} v_i e_i.$$

因此，

$$(u,v) = -\operatorname{Re}(uv) \quad \text{if } u, v \in \operatorname{Im}\mathbb{O}. \tag{A.5}$$

我们定义

$$S^6 = \{u \in \operatorname{Im}\mathbb{O} \mid |u| = 1\}$$

其中 $|u| = \sqrt{(u,\ u)}$）。注意到（A.5），我们可以将 S^6 的切丛的总空间描述为

$$TS^6 = \{(u,v) \in \operatorname{Im}\mathbb{O} \times \operatorname{Im}\mathbb{O} \mid |u| = 1,\ \operatorname{Re}(uv) = 0\}.$$

J_u 在 S^6 的 $u \in S^6$ 处，切空间 $T_u S^6$ 上的近复结构由 $J_u(u,\ v) = (u,\ uv)$定义。$\mathrm{Aut}(\mathbb{O}) = G_2$ 对 $\mathbb{O}$ 的作用使 S^6 保持不变，并保留 S^6上的近复结构 $J = \{J_u\}_{u \in S^6}$。$\mathrm{Aut}(\mathbb{O}) = G_2$ 的作用是传递的，且在 $\pm e_1$ （ S^6的北极和南极）处的各向同性子群同构于SU(3)。

例A.1. 利用乘法（A.3），令 $T = T^2$ 作用于 S^6，作用方式为

$$g \cdot \left(a + \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} \right) = a + \begin{pmatrix} g^{-\alpha-\beta} & 0 & 0 \\ 0 & g^{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & g^{\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}$$

对所有 $a + \mathbf{m} \in S^6$ 以及 $g \in T$，对某个 α，β 它们构成 $H^2(BT$的一个基。此作用有两个不动点 e_1 和 $-e_1$，它们的权为 $\{-\alpha-\beta, \alpha, \beta\}$ 和 $\{\alpha+\beta, -\alpha, -\beta\}$分别。这是一个GKM流形，其 GKM图如图 10所示。

A.2. $S^2 \times S^4$**上的近复结构**。我们定义

$$S^2 \times S^4 = \{u \in \mathbb{O} \mid u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1 = u_0^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2\}.$$

对于 $u \in S^2 \times S^4$，我们设

$$n_1 = \sum_{i=1}^{3} u_i e_i, \quad n_2 = u_0 + \sum_{i=4}^{7} u_i e_i.$$

那么切空间 $T_u(S^2 \times S^4)$ 可表示为

$$T_u(S^2 \times S^4) = \{(u, v) \in (S^2 \times S^4) \times \mathbb{O} \mid \langle n_1, v\rangle = 0 = \langle n_2, v\rangle\}.$$

引理A.3。令 u、v、n_1、n_2 如上所述。则 $\langle n_1, (n_2 n_1)v\rangle = 0 = \langle n_2, (n_2 n_1)v\rangle$。

证明。首先证明前一个恒等式。注意到

$$\begin{aligned} n_2 n_1 &= (u_0 + \sum_{i=4}^{7} u_i e_i)(\sum_{i=1}^{3} u_i e_i) = u_0(\sum_{i=1}^{3} u_i e_i) + (\sum_{i=4}^{7} u_i e_i)(\sum_{i=1}^{3} u_i e_i) \\ &= (\sum_{i=1}^{3} u_i e_i)u_0 - (\sum_{i=1}^{3} u_i e_i)(\sum_{i=4}^{7} u_i e_i) = n_1 \bar{n}_2. \end{aligned}$$

因此

$$\overline{(n_2 n_1)} n_1 = \overline{(n_1 \bar{n}_2)} n_1 = (n_2 \bar{n}_1) n_1 = n_2 (\bar{n}_1 n_1) = n_2.$$

于是

$$\langle n_1, (n_2 n_1)v\rangle = \langle \overline{(n_2 n_1)} n_1, v\rangle = \langle n_2, v\rangle = 0.$$

这就证明了第一个恒等式。至于第二个恒等式，我们注意到

$$\overline{(n_2 n_1)} n_2 = (\bar{n}_1 \bar{n}_2) n_2 = \bar{n}_1 (\bar{n}_2 n_2) = \bar{n}_1 = -n_1.$$

于是

$$\langle n_2, (n_2 n_1)v\rangle = \langle \overline{(n_2 n_1)} n_2, v\rangle = -\langle n_1, v\rangle = 0.$$

这就证明了第二个恒等式。 □

We define $J_u : T_u(S^2 \times S^4) \to T_u(S^2 \times S^4)$ by

$$J_u(u, v) = (u, (n_2 n_1)v).$$

由于 $n_2 n_1 \in$ 虚部 $\mathbb{O}$，我们有 $(n_2 n_1)^2 = -|n_2|^2 |n_1|^2 = -1$。因此，$\{J_u\}_{u \in S^2 \times S^4}$在 $S^2 \times S^4$上定义了一个近复结构。这验证了 $S^2 \times S^4$ 中的近复结构 [5-圆盘与4-球面20]。

不难看出，由引理 $\mathbb{O}$中的 φ_p 和 ψ_q生成的 Aut(A.1 的子群与 SO(4) 同构，并且保持 $S^2 \times S^4$ 及其上述近复结构 $\{J_u\}_{u \in S^2 \times S^4}$。

Appendix B. Deformation of almost complex structures

设 G 是一个紧李群，且 $(X,\ J^X)$ 是一个带有 G-不动点 p 的近复 G-流形。我们证明，通过连续变形给定的近复结构 J^X，可以（局部地）将 p 的一个邻域视为复 G-模。这使我们能够在 X 中对 p 进行等变爆破，从而得到一个近复 G-流形，该流形与 $X\#\mathbb{C}P^n$ 微分同胚，其中 $n=$ 维数为$_{\mathbb{C}}X$。

论证如下。我们取一个 a G-等变光滑映射

$$f\colon T_pX \to X$$

它在 T_pX 中一个 G-不变的开圆盘 W（以 0 为中心）上是微分同胚。构造这样的 f 的一种方法是，在（ X 中一个 G- 不变的邻域 p 内的） X 上选取一个 G- 不变的黎曼度量，并取其在 p 处对应的指数映射。通过 f，我们得到 W 上一个 G-不变的近复结构 $J=\{J_z\}_{z\in W}$，其中 J_z 是 $T_z(T_pX)$ $(=T_pX)$ 上的诱导复结构，即 $J_z:=df^{-1}\circ J^X_{f(z)}\circ df$。注意，由于 $f(0)=p$，且 df 在 p 处是恒等映射，因此 $J_0=J^X_p$。由此，我们需要研究作为流形的 W（$\subset T_pX$）上一个 G-不变近复结构的连续变形。

一般而言，设 V 是一个实 G-模，带有 G-不变度量，并且 W 是 V中的一个 G-不变开圆盘（以 0 为中心）。在我们的应用中，取 $V=T_pX$。我们将 W 视为一个 G-流形，并假设它具有一个 G-不变近复结构 J，即 $J=\{J_z\}_{z\in W}$，其中 J_z 是 $T_zW(=V)$上的一个复结构，使得

$$dg\circ J_z = J_{gz}\circ dg \quad \text{for any } z\in W \text{ and } g\in G, \tag{B.1}$$

其中，$dg\colon TW\to TW$表示 $g\colon W\to W$的微分。

引理 B.1。存在一个 G-不变近复结构 $\mathcal{J}$，定义在 W 上，使得 $\mathcal{J}$ 与 J 同伦，并且

$$\mathcal{J}_z=\begin{cases} J_0 & \text{for } z \text{ with } |z|<\epsilon_1 \\ J_z & \text{for } z \text{ with } |z|>\epsilon_2 \end{cases}$$

其中 $0<\epsilon_1<\epsilon_2$ 且 $\{z\in V\mid |z|<\epsilon_2\}\subset W$。

证明。取一个连续同伦 $\rho_t\colon W\to[0,1]$ $(t\in[0,1])$，其由连续的 G-不变函数组成，使得

$$\begin{aligned} &\rho_0(z)=1 \quad \text{for } \forall z\in W, \\ &\rho_t(z)=1 \quad \text{for } \forall t\in[0,1] \text{ and } \forall z \text{ with } |z|>\epsilon_2, \\ &\rho_1(z)=0 \quad \text{for } \forall z \text{ with } |z|<\epsilon_1. \end{aligned} \tag{B.2}$$

不难找到这样的 ρ_t。例如，取一个连续函数 $\gamma\colon[0,\infty)\to[0,1]$ 使得

$$\gamma(x)=\begin{cases} 0 & \text{for } x \text{ with } x<\epsilon_1 \\ 1 & \text{for } x \text{ with } x>\epsilon_2 \end{cases}$$

并令 $\gamma_t(x)=t\gamma(x)+(1-t)$，其中 $t\in[0,1]$。那么 $\rho_t(z):=\gamma_t(|z|)$ 就是所需的函数。

对于每个 $t\in[0,1]$，我们在 T_zW 上定义一个近复结构，定义如下：

$$\mathcal{J}^t_z := J_{\rho_t(z)z}. \tag{B.3}$$

（注意，当且仅当 $z \in W$ 时，$\rho_t(z)z \in W$，因为 $\rho_t(z) \in [0,1]$，且 W 是以 0 为中心的开圆盘。）对于每个 $t \in [0,1]$，$\{\mathcal{J}_z^t\}_{z\in W}$ 在 W 上的近复结构是 G-不变的，因为

$$\begin{aligned} dg \circ \mathcal{J}_z^t &= dg \circ J_{\rho_t(z)z} = J_{g(\rho_t(z)z)} \circ dg \\ &= J_{\rho_t(z)gz} \circ dg = J_{\rho_t(gz)gz} \circ dg = \mathcal{J}_{gz}^t \circ dg \end{aligned}$$

对任意 $z \in W$ 和 $g \in G$，其中第二个恒等式由（B.1）得出，第三个由 G-作用在 V上的线性性得出，第四个由 G-不变性（即 ρ的该不变性）得出。由（B.2）和（B.3）可知，$\mathcal{J}_z^0 = J_z$ 对 $\forall z \in W$成立，即 $\mathcal{J}^0 = J$，并且

$$\mathcal{J}_z^1 = \begin{cases} J_0 & \text{for } z \text{ with } |z| < \epsilon_1, \\ J_z & \text{for } z \text{ with } |z| > \epsilon_2. \end{cases}$$

因此，$\mathcal{J}^1$ 即为所求的 $\mathcal{J}$。 □

上述论证适用于 X 沿闭近复 G-子流形 Y（属于 X）的爆破。事实上，设 V 为实 G-向量丛（具有G-不变度量），定义在 Y 上，且 W 为 G-不变开圆盘丛，取自 V。我们将 W 视为一个光滑的 G-流形，并假定 W 具有一个 G-不变近复结构 $J = \{J_z\}_{z\in W}$，其中 J_z 是 T_zW 上的一个复结构，如前所述。于是引理B.1可按同样的论证作如下推广。

引理 B.2。令 $\pi\colon\ W \to Y$ 为投影。存在一个 G-不变的近复结构 $\mathcal{J}$，定义在 W 上，使得 $\mathcal{J}$ 与 J 同伦，并且

$$\mathcal{J}_z = \begin{cases} J_{\pi(z)} & \textit{for } z \textit{ with } |z| < \epsilon_1 \\ J_z & \textit{for } z \textit{ with } |z| > \epsilon_2 \end{cases}$$

其中 $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2$ 且 $\{z \in V \mid |z| < \epsilon_2\} \subset W$。

我们在 X 上取一个 G-不变的黎曼度量，并令 V 为 X中 Y 的一个正规 G-向量丛。于是，V 具有一个 G-不变度量，且指数映射 $f\colon\ V \to X$ 是一个 G-等变光滑映射，它在 V的某个 G-不变开圆盘丛 W 上是微分同胚。通过 f，我们将 W 视为 X中 Y 的一个 G-不变开管状邻域。于是，引理 B.2 使我们能够沿着 Y爆破 X，我们将在下文更详细地讨论这一点。

令 W_2 为 V的开 ϵ_2-圆盘丛，其中 ϵ_2 是引理 B.2 中的正实数。W_2 包含于 W 中且是 G-不变的。根据引理 B.2，$W_2 \to Y$ 在 $y \in Y$ 上方的纤维是一个复向量空间的开圆盘（其复结构为 J_y），因此我们可以将 $W_2 \to Y$ 视为某个复G-向量丛在 Y上的开圆盘丛，记作 $E \to Y$，其实化为 $V \to Y$。由此，我们得到一个与 $E \to Y$相关联的复射影丛 $P(E) \to Y$。令 $L \to P(E)$ 为典范线丛，其中

$$L := \{(\ell, v) \mid \ell \in P(E),\ v \in \ell\}. \tag{B.4}$$

我们考虑它的开 ϵ_2-圆盘丛 $D(L)$，其中 $P(E)$ 嵌入为 $D(L)$ 的零截面。若 $(\ell, v) \in D(L)$ 不属于 $P(E)$，即 $v \neq 0$，那么直线 ℓ由 v 确定，而 v 可视为 W_2中的一个点。事实上，投影 $(\ell, v) \to v$ 给出了一个几乎复 G-等变微分同胚

$$\varphi\colon D(L)\backslash P(E) \to W_2 \backslash Y.$$

通过 φ 将 $D(L)$ 粘合到 $X\backslash Y$，得到一个几乎复 G-流形 X，它是沿 Y对 X 进行爆破所得的流形。

~**注 B.1.** 从集合论的角度看， X 可由 X 将 Y 替换为 P（E）得到。~事实上， P（E）作为一个 G不变的闭子流形嵌入在 X中。令 q: P（E） $\to$~Y为投影。对于 $\ell \in P$（E） $\subset X$，存在一个自然同构

$$T_\ell \widetilde{X} \cong dq_\ell^*(T_{q(\ell)}Y) \oplus T_\ell(P(E_{q(\ell)})) \oplus L_\ell,$$

其中 L_ℓ 表示 $L \to P$（E）在 ℓ上的纤维。~$T_\ell X$ 上的近复结构由上式右侧的近复结构给出。

Appendix C. Weights of faithful T-modules

设 T 为一个维数为 n的紧致环面。回忆一下，对于 $u \in H^2$（BT），我们用 χ^u 表示从 T 到 S^1 的同态，该同态通过自然识别H^2（BT） $\cong$ Hom（T， S^1）得到。设 u_1，...， $u_m \in H^2$（BT），并考虑由下式定义的同态 Φ: $T \to T^m$

$$\Phi(g) := (\chi^{u_1}(g), \dots, \chi^{u_m}(g)). \tag{C.1}$$

映射 Φ: $T \to T^m$ 诱导一个从 $H^2(BT^m)$ 到 $H^2(BT)$ 的同态，同时也诱导一个从 Hom(T^m, S^1) 到 Hom(T, S^1) 的同态。我们常常将 $H^2(BT^m)$（分别地， $H^2(BT)$）与 Hom(T^m, S^1)（分别地， $H^2(BT^m)$）等同，并将这两个诱导同态都记为 Φ^*。

引理 C.1. Φ^*: $H^2(BT^m) \to H^2(BT)$ 的像是由 $u_1, \dots, u_m$ 生成的 $H^2(BT)$ 的子群。

证明. 设 p_i: $T^m \to S^1$ 为第 i 个投影（$i = 1, \dots, m$）。则 $\Phi^*(p_i) = p_i \circ \Phi = \chi^{u_i}$。由此即得该引理，因为 $H^2(BT^m)$ 由 p_i 的权生成。□

命题 C.2。 同态 Φ: $T \to T^m$ 在 (C.1) 是单射，当且仅当 $u_1, \dots, u_m$ 生成 $H^2(BT)$。

证明。假设 Φ 是单射。那么 $m \geq n$ 和 Φ: $T \to \Phi(T)$ 是同构。由于 $\Phi(T)$ 是 T^m 的一个 n 维子环面，存在一个与之互补的 T^m 的（$m - n$）维子环面 K，使得 $\Phi(T)$ 和 K 生成 T^m，且 $\Phi(T) \cap K$ 是恒等映射。因此，存在 $p \in$ Hom(T^m, T)，使得 $p \circ \Phi$ 是恒等映射。事实上， p 是投影 $T^m \to \Phi(T)$ 与同构 Φ^{-1}: $\Phi(T) \to T$ 的复合。给定一个 $f \in$ Hom(T, S^1)，我们定义 $\hat{}f \in$ Hom(T^m, S^1) 为 $f \circ p$。那么 $\Phi^*(\hat{}f) = \hat{}f \circ \Phi = f \circ p \circ \Phi = f$.。这表明$\Phi^*$ 是满射，因此根据引理 C.1， $u_1, \dots, u_m$ 生成 $H^2(BT)$。

反过来，假设 $u_1, \dots, u_m$ 生成 $H^2(BT)$。那么根据引理 C.1，映射 Φ^*: Hom$(T^m, S^1) \to$ Hom(T, S^1) 是满射。因此，对于任意 $f \in$ Hom(T, S^1)，存在一个提升 $\tilde{f} \in$ Hom(T^m, S^1)，使得 $f = \tilde{f} \circ \Phi$。这意味着，对于任意 $f \in$ Hom(T, S^1)，ker Φ 都包含于 ker f。由于所有 $f \in$ Hom(T, S^1)对应的 ker f的交集是恒等映射，ker Φ 必为恒等映射，从而证明了 Φ的单射性。□

References

[Ah91] K. Ahara，K，*6-dimensional almost complex S^1-manifolds with $\chi(M) = 4$*，《东京大学理学部》Sect. IA, Math. 38 (1991) no 1, 47–72. [Ak95] D. N. Akhiezer，*Lie group actions in complex analysis*，数学专题。E27。布伦瑞克：Vieweg。vii，201页。（1995）。[AB84] M. Atiyah 和 R. Bott，*The moment map and equivariant cohomology*，《Topology》23 (1984), 1–28. [Ba02] J. C. Baez，*The octonions*，《美国数学会公报》（N.S.）39 (2002), no. 2, 145–205. [BV82] *Classes caractéristiques équivariantes. Formule de localisation en cohomologie équivariante* N. Berline 和 M. Vergne，，《巴黎科学院院刊》，Ser. I, ( ), – . **295** 1982 539 541 [BKW 63] *A note on mappings and automorphisms of almost complex manifolds* W. M. Boothby、S. Kobayashi 和 H.-C. Wang，，《数学年刊》（), – . **77** 1963 329 334 [DS 20] *On almost complex structures on six-dimensional products of spheres* N.A. Daurtseva 和 N.K. Smolentsev，，《数学科学杂志》，( ), – . **245** 2020 568 600 [GKM 98] *Equivariant cohomology Koszul duality and the localization theorem* M. Goresky、R. Kottwitz 和 R. MacPherson，，《数学发明》，，( ), – . **131** 1998 25 83 [GZ01] V. Guillemin 和 C. Zara，*1-skeleta, Betti numbers, and equivariant cohomology*，《杜克数学杂志》107, No. 2, 283–349 (2001). [Gr59] J. W. Gray，*Some global properties of contact structures*，《数学年刊》（2）69, 421–450 (1959). [HBJ92] F. Hirzebruch、T. Berger 和 R. Jung，*Manifolds and modular forms*，数学专题，卷 E20，Vieweg，布伦瑞克，（1992）。[JKMSZ] *Automorphisms of GKM graphs and regular semisimple Hessenberg varieties* D. Jang、S. Kuroki、M. Masuda、T. SATO 和 H. Zeng，，（ ），2024 2405 16399, arXiv: 。即将在 Transformation Groups 上发表。[Ja20] D. Jang，*Circle actions on almost complex manifolds with 4 fixed points*，《数学杂志》294 (2020), 287–319. [Ja23] D. Jang，*Almost complex torus manifolds - graphs and Hirzebruch genera*，《国际数学研究通知》（2023），第17期，14594–14609。[Ju73] P. Jupp，*Classification of certain 6-manifolds*，《剑桥哲学学会会报》73, 293–300 (1973) [KL25] P. Konstantis 和 N. Lindsay，*Exotic almost complex circle actions on 6-manifolds*，《全球分析与几何年刊》 68, 7 (2025). [Li25] H. Li，*Revisit Hamiltonian S^1-manifolds of dimension 6 with 4 fixed points*，《几何与物理杂志》213 (2025), no. 105489. [Ma84] M. Masuda，*S^1-actions on twisted $\mathbb{C}P^3$*，《东京大学理学部》Sect. IA Math. 31 (1984), 1–31.[Ma99] M. Masuda，*Unitary toric manifolds, multi-fans and equivariant index*，《东北数学杂志》，51 (1999), 237–265. [OR70] P. Orlik 和 F. Raymond，*Actions of the Torus on 4-Manifolds. I*，《美国数学会汇刊》152 (1970), 531–559. [To10] S. Tolman，*On a symplectic generalization of Petrie's conjecture*，《美国数学会汇刊》362 (2010), no. 8, 3963–3996. [Wa66] C. T. C. Wall，*Classification problems in differential topology V. On certain 6-manifolds*，《数学发明》1, pp. 355–374, (1966). [Wo69] J. A. Wolf，*The automorphism group of a homogeneous almost complex manifold*，《美国数学会汇刊》144 (1969), 535–543. [Yo25] I. Yokota，*Exceptional Lie groups*，《数学讲义》，2369，Springer，Cham，2025，xix+249 页。[ˆZu88] A. ˆZubr，*Classification of simply connected topological 6-manifolds*，《Topology and geometry, Rohlin Semin. 1984–1986》，《数学讲义》，1346，325–339 (1988)。

Department of Mathematics and Institute of Mathematical Science, Pusan NationalUniversity, 2, Busandaehak-ro 63beon-gil, Geumjeong-gu, Busan, 46241, Republic ofKorea.

Email address: donghoonjang@pusan.ac.kr

Department of Applied Mathematics Faculty of Science, Okayama University of Sci-ence, 1-1 Ridai-Cho Kita-Ku Okayama-shi Okayama 700-0005, Okayama, Japan*Email address*: kuroki@ous.ac.jp

Osaka Central Advanced Mathematical Institute, Osaka Metropolitan University, Sugimoto, Sumiyoshi-ku, Osaka, 558-8585, Japan*Email address*: mikiyamsd@gmail.com

Osaka Central Advanced Mathematical Institute, Osaka Metropolitan University, Sugimoto, Sumiyoshi-ku, Osaka, 558-8585, Japan*Email address*: 00tkshst00@gmail.com