证明论中的插值

Irisvan derGiessen阿姆斯特丹大学，
荷兰
Raheleh Jalali
巴斯大学，英国
Roman Kuznets
捷克科学院计算机科学研究所，捷克

arXiv:2602.16318v1 [cs.LO] 18 Feb 2026

摘要

本章全面概述了用于确立各种逻辑（包括经典逻辑、直觉主义逻辑、模态逻辑和次结构逻辑）中的插值性质的证明论方法。讨论的核心是两种基础技术：用于克雷格插值的前原方法，以及用于一致插值的 Pitts 方法。本章阐述了这些方法如何在当代普遍证明论框架下，得出关于良性证明系统存在性的结果，并为运用现代证明形式体系构造插值证明提供路线图。本章着重介绍构造性、模块化且以句法为驱动的技术，揭示插值性质与证明系统之间更深层的联系。

目录

1 引言.2 2 预备知识.3

2.1 命题逻辑与模态逻辑.3 2.2 序列演算.5

3 使用序列演算的插值.7

3.1 通过 Maehara 方法实现 Craig 插值与 Lyndon 插值.7 3.2 受限切割与插值.14 3.3 通过 Pitts 方法实现一致插值.15**4 插值**

在普遍证明论中.20

4.1 半解析规则与插值.21 4.2 插值与序列演算的（非）存在性.23**5 插值**

使用相继式演算的推广.29

5.1 带标签序列.29

© 2025年本文作者版权所有**草稿**最终版本将发表于 Balderten Cate、Jean Christoph Jung、Patrick Koopmann、Christoph Wernhard 和 Frank Wolter 主编的《*Craig* 插值理论与应用》，第 XXXCHAPTER 章，XXXPFROM–XXXPTO 页。Ubiquity Press，2026年。XXXDOI。

2 证明论中的插值

5.2 带标签插值.31 5.3 带标签、超序列和嵌套序列的插值结果 39

6 结论.41 致谢.43 参考文献.43

1 引言

源自20世纪50至60年代的证明论插值技术 [19, 64] 已相当成熟，在当代插值研究中发挥着重要作用。本章旨在实现良好平衡，涵盖：（1）基于序列演算系统、用于证明插值性质（IPs）的备受推崇的证明论方法的基础；（2）这些方法在新兴的普遍证明论领域中，对于证明系统存在性的最新应用；以及（3）为更强大的当代证明系统（如带标签序列）发展类似方法。

证明 Craig 插值性质（CIP）的证明论方法被称为前原方法 [64]。该方法给出一种算法：给定 $\varphi \to \psi$的序列证明，便为其产生一个 Craig 插值式 θ 。该方法是构造性的：它显式构造一个插值式，而不仅仅证明其存在。有时，所构造的插值式会保持命题变元的极性，从而表明所谓的林登插值性质（LIP）。前原方法被用于广泛的逻辑，包括经典一阶逻辑与直觉主义一阶逻辑 [81, 84, 87], 、（直觉主义）模态逻辑 [25, 36],、线性逻辑 [79], 以及次结构逻辑 [75]。

Pitts [76] 发展了一种句法方法，用以证明直觉主义命题逻辑 IPC 的一致插值性质（UIP）（见第 9 章，即关于一致插值的主要章节）。当时，这一结果相当令人惊讶，因为它表明命题量化可以在 IPC 自身中得到解释。Pitts 使用一种针对 IPC 的强终止序列演算来证明 UIP。Pitts 的思想被推广到各种命题逻辑与（直觉主义）模态逻辑 [4, 11, 23, 44, 45]，并在 Coq/Rocq [23, 24] 中得到形式化，从而能够自动计算一致插值。

前原方法与 Pitts 方法均基于序列演算。随着更具表达力的相继式结构的发展，例如带标签序列、超序列和嵌套序列，人们设计了相关方法，以利用此类结构证明插值性质 [38, 39, 56, 59, 63]。这些新方法表明，需要一种更为稳健的“插值式”：仅将其定义为公式并不足够，而应将其定义为模仿当前相继式结构类型的结构。有趣的是，与借助分析相继式演算的前原方法相比，此类演算系统似乎更适合证明 Lyndon 插值性质。

插值的证明论方法不仅因其构造性而有用，也能在证明论本身建立一般性结果。在

普遍证明论领域中，人们找到了序列规则的结构条件，这些条件能够保证 Craig 插值性质或一致插值性质 [4, 5, 7, 45]。这类序列规则称为半解析规则，体现了“良好”规则的直观概念。鉴于中间逻辑中插值性质十分罕见，大多数这类逻辑都不可能拥有这样的“良好”序列演算系统。

证明论方法的优点如下（我们已经提到过其中几个）：它能构造性地证明插值性质；Craig 插值式的复杂度通常与证明的大小呈线性关系；它适用于不同类别的逻辑；并且可应用于证明复杂性和普遍证明论。这种方法也有一些缺点。尽管它具有构造性，却不能立即根据一个可证明的蕴涵 $\varphi \to \psi$ 给出计算插值式的算法，因为它要求先构造一个序列证明。此外，Maehara 的方法并不完备，这意味着给定的某些插值式可能无法通过这种方法构造 $\varphi \to \psi$ [42]。

本书其他章节介绍了插值的证明论方法的一些应用和发展。第6章关于证明复杂性的讨论涉及从证明中有效提取插值式，这与 NP 与 coNP 问题有关。第11章介绍了针对循环证明的新型 Maehara 型方法。

本章结构如下。我们选择用第2节介绍的简单命题逻辑和模态逻辑来说明这些方法。第3节将介绍 Maehara 方法和 Pitts 方法的基础。第4节将讨论这些方法的模块化及其对普遍证明论的影响。第5节将讨论带标签序列、超序列和嵌套序列的证明论方法及相关结果。第6节将给出一些总结性评论。

2 预备知识

2.1 命题逻辑与模态逻辑

固定一个可数的命题变元集 Prop $= \{p, q, \ldots\}$，也称为原子。对于命题逻辑，我们使用语言 $\mathcal{L}_{\mathsf{P}} := \{\bot, \top, \vee, \wedge, \to\}$，并用符号 $\varphi, \psi, \ldots$ 表示由 Prop 和 $\mathcal{L}_{\mathsf{P}}$ 按通常方式生成的公式。所有公式的集合记作 Form$_{\mathcal{L}_{\mathsf{P}}}$。我们使用标准缩写 $\neg\varphi := \varphi \to \bot$。本章使用的基础逻辑是经典命题逻辑CPC 和直觉主义命题逻辑IPC，其中 IPC 可定义为不含排中律 $\varphi \vee \neg\varphi$ 的 CPC。中间逻辑是满足 IPC $\subseteq$ L $\subseteq$ CPC 的任意逻辑 L；这里将逻辑视为对代换和肯定前件规则封闭的公式集。有兴趣的读者可参阅 [86, 87]。

对于模态逻辑，我们使用语言 $\mathcal{L}_{\Box} := \mathcal{L}_{\mathsf{P}} \cup \{\Box\}$。像往常一样，我们定义 $\Diamond\varphi := \neg\Box\neg\varphi$。我们将 $\Box^n\varphi$ 归纳定义为 $\Box^0\varphi := \varphi$ 和 $\Box^{n+1}\varphi := \Box(\Box^n\varphi)$。图 1 列出了标准模态公理和规则，图 3 的左栏列出了常见模态逻辑。从语义上看，模态逻辑可以用克里普克框架来刻画，这类框架也称为线性转移系统。一个克里普克模型是一个元组 $\mathcal{M} = (W, R, V)$，其中包含一个非空的世界集合 W、一个称为可达关系的二元关系 $R \subseteq W \times W$，以及一个函数

4 证明论中的插值

(k) $\Box(\varphi \to \psi) \to(\Box\varphi \to \Box\psi)$	(5) $\neg\Box\varphi \to \Box\neg\Box\varphi$	(MP)	$\dfrac{\varphi \to \psi \quad \varphi}{\psi}$
(t) $\Box\varphi \to \varphi$	(d) $\Box\varphi \to \Diamond\varphi$		
(4) $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$	(勒布公理) $\Box(\Box\varphi \to \varphi) \to \Box\varphi$	(必然化规则)	$\dfrac{\varphi}{\Box\varphi}$

图 1 模态公理以及肯定前件规则（MP）和必然化（Nec）这两条推理规则。

$M\ w \models p$	iff	$p \in V(w)$;
$M\ w \models \top$;		
$M\ w \not\models \bot$;		
$\mathcal{M}\ w \models \varphi \to \psi$ 当且仅当		$\mathcal{M}\ w \not\models \varphi$ 或 $\mathcal{M}\ w \models \psi$;
$M\ w \models \varphi \vee \psi$	iff	$\mathcal{M}\ w \models \varphi$ 或 $\mathcal{M}\ w \models \psi$;
$M\ w \models \varphi \wedge \psi$	iff	$\mathcal{M}\ w \models \varphi$ 和 $\mathcal{M}\ w \models \psi$;
$M\ w \models \Box\varphi$	iff	对于所有 v 使得 wRv，我们有 $\mathcal{M}\ v \models \varphi$.

图2 模态满足关系 $\models$（介于克里普克模型 $\mathcal{M} = (W, R, V)$、世界 $w \in W$ 与公式 φ 之间）的定义。

模态逻辑K := 经典命题演算 +(k)	所有模型的类
T := 模态逻辑K +(t)	所有自反模型的类
D := 模态逻辑K +(d)	所有持续模型的类
K4 := 模态逻辑K +(4)	所有传递模型的类
S4 := 模态逻辑K +(t) +(4)	所有传递且自反模型的类
S5 := 模态逻辑K +(t) +(5)	所有全关系模型的类
GL := 模态逻辑K +(勒布公理)	所有传递且逆良基模型的类

图 3 经典模态逻辑的公理化（均应理解为对规则（肯定前件规则）和（必然化规则）封闭），及其可靠性和完全性结果。

V：$W \to \mathcal{P}$(命题变元集)，称为赋值。图 2 给出了模态满足关系 $\models$ 的归纳定义，该关系定义于模型中的世界与公式之间。我们称公式 φ 在模型$\mathcal{M} = (W, R, V)$中有效，当且仅当对于所有世界 $w \in W$，$\mathcal{M}\ w \models \varphi$。图 3 总结了众所周知的可靠性和完全性结果；当公式 φ 在所示类别的所有相应模型中都有效时，它就属于相应逻辑。关于模态逻辑的完整介绍，请参阅 [14,18] 。

一般来说，语言 $\mathcal{L}$ 是一个符号集合，我们用 $\mathrm{Form}_{\mathcal{L}}$ 表示由 Prop 和 $\mathcal{L}$生成的公式集合。对于每种语言，我们使用符号 $\varphi, \psi, \ldots$ 表示公式。我们用 Sub(φ) 表示公式 φ中出现的所有子公式构成的集合。对于逻辑 L,

我们用 $\vdash_{\mathrm{L}} \varphi$ 表示 $\varphi \in \mathbf{L}$。

2.2 序列演算

序列演算是对一种逻辑的基于规则的描述，起源于 Gentzen [32,33]。这里我们介绍命题逻辑和模态逻辑的序列演算 [32,81,84,87]。

一个序列 是形如 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 的表达式，其中 Γ 和 Δ 是公式的有限多重集。 Γ 称为该序列的前件， Δ 称为其 后件 或结论。若 Δ 至多包含一个公式，则该序列称为单结论序列。我们用大写字母 $S, S', S_1, S_2, \ldots$ 来指称相继式。我们用记号 Γ, φ 表示多重集 $\Gamma \cup \{\varphi\}$ ，并用 Γ, Δ 表示 $\Gamma \cup \Delta$。我们将 $\mathsf{Sub}(\Gamma) := \bigcup_{\varphi \in \Gamma} \mathsf{Sub}(\varphi)$ 定义为出现在 Γ 和 $\Box\Gamma := \{ \Box\varphi \mid \varphi \in \Gamma\}$ 中的公式的所有子公式的集合。

序列 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 的预期含义是公式 $\bigwedge_{\varphi \in \Gamma} \varphi \to \bigvee_{\psi \in \Delta} \psi$，也称为该序列的公式解释。我们约定，空合取为 $\top$，空析取为 $\bot$。

推理规则是下面左侧所示形式的表达式，其中 S 和 S_i'是序列。每条推理规则都会产生不同的规则实例：对于每个代换 σ，右侧的表达式都是该规则的一个实例。

$$\frac{S_1 \quad S_2 \quad \ldots \quad S_n}{S} \qquad\qquad \frac{\sigma S_1 \quad \sigma S_2 \quad \ldots \quad \sigma S_n}{\sigma S} \tag{1}$$

这是一种相当形式化的呈现方式，用于介绍第 4.1 节所需的序列规则；不过目前，我们采用证明论中的标准做法，将代换隐去，并将规则写成规则模式（例如图4）。在这些规则中，所谓的多重集变元（以及公式变元和原子变量）可以分别表示任意多重集（以及公式和原子）。

规则上方的序列称为前提，下方的序列称为结论。没有前提的规则称为公理，有一个前提的规则称为一元规则，有两个前提的规则称为二元规则。在考察图4中的规则模式时，结论中的特定公式称为主公式，而像 Γ、Δ 等多重集称为上下文。前提中不属于上下文的公式称为该规则的活跃公式。公理 (id) 有所不同：它有两个主公式，但没有活跃公式。在切规则（图4）中，我们将 φ 称为切公式。

一个序列演算 是有限的一组推理规则，而给定序列演算$\mathbf{G}$中的一个证明 是一棵有限的有根树，其节点是由$\mathbf{G}$中推理规则的实例归纳生成的相继式。这意味着，在一个证明中，所有叶子都是公理的实例。该树的根称为末序列 ，即由该序列证明所证明的序列。我们记 $\vdash_{\mathbf{G}} \Gamma \Rightarrow \Delta$ ，当且仅当在序列演算$\mathbf{G}$ 中存在以 $\Gamma \Rightarrow \Delta$为末序列的证明。

序列演算通过可靠性定理和完备性定理来表示逻辑的可证明公式。这体现在以下定义中：

$$\mathsf{id}\ \frac{}{p \Rightarrow p} \qquad \bot_l\ \frac{}{\bot \Rightarrow} \qquad \to_l\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \to \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \vee_l\ \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \wedge_l^i\ \frac{\varphi_i, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi_0 \wedge \varphi_1, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (i=0,1)$$

$$\top_r\ \frac{}{\Rightarrow \top} \qquad \to_r\ \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \to \psi} \qquad \vee_r^i\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_i}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_0 \vee \varphi_1}\ (i=0,1) \qquad \wedge_r\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}$$

$$\mathsf{w}_l\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \mathsf{w}_r\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi} \qquad \mathsf{c}_l\ \frac{\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \mathsf{c}_r\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi}$$

$$\mathsf{cut}\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \varphi, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}$$

图4 上图： 序列演算 **LK**。下标 l 和 r 分别表示左 规则和右 规则。结构规则 包括弱化 (w_l) 和 (w_r)，以及收缩 (c_l) 和 (c_r)。序列演算**LJ** 通过将这些规则限制为单结论序列而得到，即右规则中的 $\Delta = \varnothing$，左规则中的 Δ 至多包含一个公式；此外，对于 ($\to_l$)， Δ 不得出现在左前提中，并省略右收缩规则 (c_r)。**下图：** 切规则。对于单后件演算，我们要求 $\Delta = \varnothing$，且 Δ' 至多包含一个公式。

$$K\ \frac{\Gamma \Rightarrow \varphi}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box\varphi} \qquad T\ \frac{\Box\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Box\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad D\ \frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow}{\Box\Gamma, \Box\varphi \Rightarrow}$$

$$4\ \frac{\Box\Gamma, \Gamma \Rightarrow \varphi}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box\varphi} \qquad S4\ \frac{\Box\Gamma \Rightarrow \varphi}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box\varphi} \qquad GL\ \frac{\Box\Gamma, \Gamma, \Box\varphi \Rightarrow \varphi}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box\varphi}$$

图5 模态序列规则。

G.K := **LK** **+ (模态逻辑K) G.T :=** **模态逻辑K** **+ (T) G.D :=** **模态逻辑K** **+ (D) G.K4 :=** **LK** **+ (4) G.S4 :=** **LK** **+ (S4) + (T) G.GL :=** **LK** **+(GL)**

图6 模态序列演算。

▶**定义1.** 设**G** 是一个序列演算，L 是基于同一语言 L 的逻辑。我们称**G** 是L 的序列演算L，或称 L 是G 的逻辑**G**，当且仅当对于每个序列$\Gamma \Rightarrow \Delta$，都有 $\vdash_{\mathbf{G}} \Gamma \Rightarrow \Delta$ 当且仅当 $\vdash_{\mathsf{L}} \bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta$。

图4定义了经典逻辑 CPC 中著名的序列演算 **LK** ， 以及直觉主义逻辑 IPC 中的单结论演算 **LJ** 。我们定义不含切规则的演算系统（图4）。图5列出了一些著名的模态规则，图6则定义了经典模态逻辑的演算系统。我们用粗体表示序列演算，采用逻辑名称，有时会在名称前加上**G**。以标识系统。因此，在图5中，**G**。**K** 表示模态逻辑 K 的序列演算，等等。

需要注意的是，切规则在所介绍的演算系统中是可容许的。这意味着可以安全地将该规则加入演算系统，而不会推导出新的相继式。形式化地说，若某条规则的前提为 S_1，.....，S_n，结论为 S，则该规则在序列演算 $\mathbf{G}$ 中是可容许的，当且仅当对于任意代换 σ，如果对于所有 i，$\vdash_{\mathbf{G}} \sigma S_i$ 成立，那么 $\vdash_{\mathbf{G}} \sigma S$成立。

▶**定理 2** (切规则可容许性)。 图 *4* 和图 *6* 中的所有演算系统都容许规则(切规则) 。

切规则可容许性定理在证明论中占有重要地位。事实上，切规则有助于轻松得到完备性结果，而消去切规则的可能性则有着深远的应用，例如可用于证明一致性和可判定性结果。Maehara 的证明论方法使用无切演算来证明 Craig 插值性质 [64]。我们将在第 3.2 节看到，Maehara 方法可以采用某些形式的切规则，但这可能会给 Lyndon 插值性质带来问题。

▶ 注 3（序列演算的设计选择）。设计序列演算时可以作出多种选择。两种常见的选择是：所用序列的类型（例如列表、多重集或集合），以及采用显式还是隐式结构规则。一般而言，这些选择不会影响 Maehara 方法证明 Craig 插值性质，只有切规则可能带来问题。Pitts 的一致插值性质方法对这类设计选择更为敏感，其中收缩规则会造成问题（第 3.3 节）。」

▶ 注 4（序列演算与表演算）。序列规则的预期读法是从上到下：假设前提有效，则结论有效。表演算 [25] 与序列演算互为对偶。表演算可以看作是“上下颠倒”的序列演算：上方公式的不可满足性会在下方公式中得以保持。表演算 [25] 也有基于 Maehara 方法的证明论方法。更多详情请参阅本书第 1 章。」

3 使用序列演算进行插值

本节讨论基于命题逻辑和模态逻辑的插值性质证明论方法的基础。

3.1 通过 Maehara 方法实现克雷格插值与 Lyndon 插值

根据所考察的后承关系不同，克雷格插值有不同类型（参见本书其他章节）。对于局部 Craig 插值性质而言，Maehara 方法非常适用；该性质对 $\rightarrow$ 所表示的局部后承关系进行插值。它也适用于局部 Lyndon 插值性质，后者考虑命题变元的极性。

▶**定义 5** (签名)。 公式 φ 的签名 记作 $\mathsf{Var}(\varphi)$，是出现在 φ 中的命题变元的集合。

对于命题语言 L_{P} 和模态语言 $L_{\Box}$，我们归纳定义命题变元的集合 $Var^{+}(\varphi)$ 与 $Var^{-}(\varphi)$，它们分别是在 φ 中以正极性和负极性出现的命题变元：$Var^{+}(p) := \{p\}$，以及 $Var^{-}(p) := \varnothing$，对于 $p \in$ 命题变元集；$Var^{+}(\bot) = Var^{+}(\top) =$

8 证明论中的插值

$\mathrm{Var}^-(\top) = \mathrm{Var}^-(\bot) := \varnothing$；联结词 $\vee$ 和 $\wedge$ 保持极性；联结词 $\to$ 在前件中翻转极性，并在后件中保持极性；模态 $\Box$保持极性。

对于多重集 Γ，我们定义 $Var(\Gamma) := \bigcup_{\varphi\in\Gamma} Var(\varphi)$，对于 $Var^+(\Gamma)$ 和 $Var^-(\Gamma)$ 也作类似定义。对于序列 $\Gamma \Rightarrow \Delta$，我们定义 $Var^+(\Gamma \Rightarrow \Delta) := Var^-(\Gamma) \cup Var^+(\Delta)$，以及 $Var^-(\Gamma \Rightarrow \Delta) := Var^+(\Gamma) \cup Var^-(\Delta)$；其中前件中的极性翻转方式与 $\to$ 类似。

从定义可以清楚看出，对于任意公式 φ，无论其来自 $\mathcal{L}_\mathrm{P}$ 还是 $\mathcal{L}_\Box$，都有 $\mathrm{Var}(\varphi) = \mathrm{Var}^+(\varphi) \cup \mathrm{Var}^-(\varphi)$；对于多重集和相继式也同样如此。

▶ **例6**。 $\mathrm{Var}^+((\Box p \to q) \to r) = \{p, r\}$ 以及 $\mathrm{Var}^-((\Box p \to q) \to r) = \{q\}$。类似地，$\mathrm{Var}^+((\Box p \to q) \to q) = \{p, q\}$ 以及 $\mathrm{Var}^-((\Box p \to q) \to q) = \{q\}$。⌟

▶ 注7。我们将签名定义为仅由命题变元构成。也可以将模态视为签名的一部分。在一阶逻辑中，签名由一阶公式 φ 中出现的关系符号和函数符号构成。⌟

▶**定义 8** (克雷格插值)。 语言 L 上的逻辑 L 具有Craig 插值性质 (CIP)，当且仅当只要 $\vdash_\mathsf{L} \varphi \to \psi$，就存在公式 $\theta \in \mathsf{Form}_\mathcal{L}$，使得：
1. $\mathsf{Var}(\theta) \subseteq \mathsf{Var}(\varphi) \cap \mathsf{Var}(\psi)$，**2.** $\vdash_\mathsf{L} \varphi \to \theta$ 并且 $\vdash_\mathsf{L} \theta \to \psi$。
这样的公式 θ 称为 （克雷格）插值式，它是 $\varphi \to \psi$ 在 中的插值式。

▶ **定义 9** (林登插值)。 语言 L_P 或 $L_\Box$ 上逻辑的 Lyndon 插值性质 (LIP) 定义方式与 *CIP* 类似，只需将定理 *8* 中的条件 *1* 替换为
1'. $Var^+(\theta) \overset{f}{\subseteq} Var^+(\varphi) \cap Var^+(\psi)$ 和 $Var^-(\theta) \overset{g}{\subseteq} Var^-(\varphi) \cap Var^-(\psi)$。
后续 条件：
在这种情况下， θ 称为 L 中 $\varphi \to \psi$ 的 *Lyndon* 插值式。

从定义可知，LIP 蕴含 CIP。

▶ **例10（插值式不唯一）**。 对于一个可证的蕴含式 $\varphi \to \psi$，可能存在多个可证地不等价的 Craig/Lyndon 插值。例如，在经典命题演算中，设$\varphi = (p \wedge q) \vee (\neg r \wedge s)$ 和 $\psi = t \vee p \vee q \vee \neg r$。我们有 $\vdash_{\mathsf{CPC}} \varphi \to \psi$。它有多个可证地不等价的插值式，分别为（$p \wedge q$） $\vee \neg r$、 $p \vee \neg r$、 $q \vee \neg r$ 和 $p \vee q \vee \neg r$。⌟

现在我们介绍 Maehara 的方法，并说明如何利用序列演算来证明 Craig 插值性质和 Lyndon 插值性质。前原方法 通常被描述为一种证明论方法：通过对序列证明（或在其他合适的证明系统中的证明）进行归纳来证明 Craig 插值性质。这是一种很有帮助的直观理解。不过，这种方法更加精细，也更有趣，因为它背后的过程更为复杂。其思路是表述一种基于序列的插值性质，它至少与 Craig 插值性质同样强，并且依赖于一种具有更丰富序列的演算，这些序列称为分裂序列。

▶**定义11** （分割序列）。 **</style}形式为；** $\Gamma' \Rightarrow \Delta$； Δ'的表达式称为分割序列。多重集 Γ 和 Δ 属于左分裂，而 Γ' 和 Δ' 属于右分裂。

也可以将序列 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 视为分割序列 $\Gamma;\ \Gamma' \Rightarrow \Delta;\ \Delta'$的左分裂，将序列 $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$ 视为其右分裂。

▶ **定义12** （序列克雷格插值）。 设$\mathbf{G}$ 是基于语言 L 的序列演算。若对于任意$\vdash_{\mathbf{G}} \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'$，都存在一个公式 $\theta \in \mathsf{Form}_{\mathcal{L}}$ 使得

1. 变元$(\theta) \subseteq$ 变元$(\Gamma, \Delta) \cap$ 变元(Γ', Δ')，
并且**2.** $\vdash_{\mathbf{G}} \Gamma \Rightarrow \Delta, \theta$ 以及 $\vdash_{\mathbf{G}} \theta, \Gamma' \Rightarrow \Delta'$。
若上述性质成立，我们记作 $\vdash_{\mathbf{G}} \Gamma;\ \Gamma' \overset{\theta}{\Rightarrow} \Delta; \Delta'$，并称 θ 为分割序列 $\Gamma;\ \Gamma' \Rightarrow \Delta; \Delta'$ 在 $\mathbf{G}$中的一个（克雷格）插值式。对于单结论演算，我们要求$\Delta = \varnothing$ 和 Δ' 至多包含一个公式。

SCIP 的直观含义是，公式 θ 是在分裂的左侧与右侧之间进行插值，而不是在序列的前件与后件之间进行插值。正如定理 14 之后所解释的，分裂至关重要。

对于相继式 Lyndon 插值，我们会考虑变元的极性 :

▶ **定义13** (相继式林登插值)。 对于基于语言 L_{P} 或 $L_{\Box}$ 的逻辑，相继式林登插值性质(SLIP) 的定义与 *SCIP* 类似，只需将定理 *12* 中的条件 *1* 替换为 :

1'. $Var^{+}(\theta) \subseteq Var^{-}(\Gamma \Rightarrow \Delta) \cap Var^{+}(\Gamma' \Rightarrow \Delta')$ 且 *$Var^{-}(\theta) \subseteq Var^{+}(\Gamma \Rightarrow \Delta) \cap Var^{-}(\Gamma' \Rightarrow \Delta')$*。
此时， θ称为分割序列 $\Gamma;\ \Gamma' \Rightarrow \Delta;\ \Delta'$ 在 *G* 中的林登插值式。

序列演算的插值性质蕴含其逻辑具有插值性质:

▶**定理 14.** 如果序列演算 $\mathbf{G}$ 具有 *SCIP/SLIP*，那么其逻辑 L 具有 *Craig* 插值性质/*Lyndon* 插值性质。

证明概要。 假设 $\mathbf{G}$ 具有 SCIP/SLIP，并令 $\vdash_{\mathsf{L}} \varphi \to \psi$。根据定理 1，$\vdash_{\mathbf{G}} \varphi \Rightarrow \psi$。对于该序列在 θ 分裂 $\varphi;\ \Rightarrow;\ \psi$ 中的任意 Craig/Lyndon 插值 $\mathbf{G}$，可以证明 θ 是 $\varphi \to \psi$ 在 L中的 Craig/Lyndon 插值。◀

前原方法的思路是使用分裂序列来表示序列规则；在分裂序列演算中，每条序列规则都对应多个版本，具体取决于主公式位于分裂的左侧还是右侧。图 7 展示了$\mathbf{LK}$的分裂系统。给定一个 $\vdash_{\mathbf{G}} \varphi;\ \Rightarrow; \psi$ 的分裂序列证明，我们先为叶节点指定 Craig 插值式，再沿树向下归纳地定义插值式，从而得到一个适用于 $\vdash_{\mathbf{G}} \varphi;\ \Rightarrow; \psi$ 的插值式。分裂确保了定理 12 的变量性质 1。实际上，自底向上看，分裂记录了哪些公式源自左侧的 φ，哪些公式源自分裂右侧的 ψ。例如，在下列规则 $R(\to_r)$ 的一个实例中，公式 ψ_1 应存放在前提前件中分裂的右侧:

$$R(\to_r)\ \frac{\varphi; \psi_1 \Rightarrow; \psi_2}{\varphi; \Rightarrow; \psi_1 \to \psi_2}$$

分裂公理：

$$RR(\mathsf{id})\ \frac{}{;p \overset{\top}{\Longrightarrow} ;p} \qquad LR(\mathsf{id})\ \frac{}{p; \overset{p}{\Rightarrow} ;p} \qquad RL(\mathsf{id})\ \frac{}{;p \overset{\neg p}{\Longrightarrow} p;} \qquad LL(\mathsf{id})\ \frac{}{p; \overset{\bot}{\Longrightarrow} p;}$$

$$L(\bot_l)\ \frac{}{\bot; \overset{\bot}{\Longrightarrow} ;} \qquad R(\bot_l)\ \frac{}{;\bot \overset{\top}{\Longrightarrow} ;} \qquad L(\top_l)\ \frac{}{; \overset{\bot}{\Longrightarrow} \top;} \qquad R(\top_r)\ \frac{}{; \overset{\top}{\Longrightarrow} ;\top}$$

一些一元分裂规则：

$$R(\wedge_l^i)\ \frac{\Gamma;\Gamma', \varphi_i \overset{\theta}{\Rightarrow} \Delta;\Delta'}{\Gamma;\Gamma', \varphi_0 \wedge \varphi_1 \overset{\theta}{\Rightarrow} \Delta;\Delta'} \qquad R(\to_r)\ \frac{\Gamma;\Gamma', \varphi \overset{\theta}{\Rightarrow} \Delta;\Delta', \psi}{\Gamma;\Gamma' \overset{\theta}{\Rightarrow} \Delta;\Delta', \varphi \to \psi} \qquad L(\mathsf{c}_r)\ \frac{\Gamma;\Gamma' \overset{\theta}{\Rightarrow} \Delta, \varphi, \varphi;\Delta'}{\Gamma;\Gamma' \overset{\theta}{\Rightarrow} \Delta, \varphi;\Delta'}$$

二元分裂规则：

$$L(\vee_l)\ \frac{\varphi,\Gamma;\Gamma' \overset{\theta_1}{\Longrightarrow} \Delta;\Delta' \quad \psi,\Gamma;\Gamma' \overset{\theta_2}{\Longrightarrow} \Delta;\Delta'}{\varphi \vee \psi,\Gamma;\Gamma' \overset{\theta_1 \vee \theta_2}{\Longrightarrow} \Delta;\Delta'} \qquad R(\vee_l)\ \frac{\Gamma;\Gamma', \varphi \overset{\theta_1}{\Longrightarrow} \Delta;\Delta' \quad \Gamma;\Gamma', \psi \overset{\theta_2}{\Longrightarrow} \Delta;\Delta'}{\Gamma;\Gamma', \varphi \vee \psi \overset{\theta_1 \wedge \theta_2}{\Longrightarrow} \Delta;\Delta'}$$

$$L(\wedge_r)\ \frac{\Gamma;\Gamma' \overset{\theta_1}{\Longrightarrow} \varphi,\Delta;\Delta' \quad \Gamma;\Gamma' \overset{\theta_2}{\Longrightarrow} \psi,\Delta;\Delta'}{\Gamma;\Gamma' \overset{\theta_1 \vee \theta_2}{\Longrightarrow} \varphi \wedge \psi,\Delta;\Delta'} \qquad R(\wedge_r)\ \frac{\Gamma;\Gamma' \overset{\theta_1}{\Longrightarrow} \Delta;\Delta', \varphi \quad \Gamma;\Gamma' \overset{\theta_2}{\Longrightarrow} \Delta;\Delta', \psi}{\Gamma;\Gamma' \overset{\theta_1 \wedge \theta_2}{\Longrightarrow} \Delta;\Delta', \varphi \wedge \psi}$$

$$L(\to_l)\ \frac{\Gamma;\Gamma' \overset{\theta_1}{\Longrightarrow} \Delta, \varphi;\Delta' \quad \psi,\Gamma;\Gamma' \overset{\theta_2}{\Longrightarrow} \Delta;\Delta'}{\varphi \to \psi,\Gamma;\Gamma' \overset{\theta_1 \vee \theta_2}{\Longrightarrow} \Delta;\Delta'} \qquad R(\to_l)\ \frac{\Gamma;\Gamma' \overset{\theta_1}{\Longrightarrow} \Delta;\Delta', \varphi \quad \Gamma;\Gamma', \psi \overset{\theta_2}{\Longrightarrow} \Delta;\Delta'}{\Gamma;\Gamma', \varphi \to \psi \overset{\theta_1 \wedge \theta_2}{\Longrightarrow} \Delta;\Delta'}$$

图 7 使用分裂序列演算为**LK**构造 Craig 插值式。大写字母 L 和 R分别表示主公式位于分裂的左侧还是右侧。图中只展示了三种一元分裂规则，因为其他所有一元分裂规则的形式都相同：前提中的活动公式与结论的主公式位于分裂的同一侧，并且结论的插值式沿用前提中的插值式。

在**LK** 的分裂序列演算中，我们可以看到，活动公式总是与主公式位于同一侧；对于其他逻辑的序列演算，情况则未必如此，见定理 21。

▶ 注 15（单调联结词）。当使用只含单调联结词的语言时，Maehara 分裂是多余的，因为可以将相继式箭头 $\Rightarrow$ 的左、右两侧分别视为左侧和右侧（参见 [25]中的对称相继式）。」

我们介绍经典命题逻辑的前原方法：

▶**定理 16. LK** 具有 *SCIP* 和 *SLIP*，因此 经典命题演算 满足 *Craig* 插值性质和 *Lyndon* 插值性质。

证明。 设 $\vdash_{\mathbf{LK}} \Gamma;\ \Gamma' \Rightarrow \Delta;\ \Delta'$ 并设 π 是其由图 7 中规则构成的分裂序列证明。我们将通过对 π的结构进行归纳来构造插值式 θ。对于基础步骤和归纳步骤，都要根据 π中最底层的分裂序列规则分成若干种情况。图 7 总结了各个情形下的插值项构造。这里我们将检查其中两种情况。由于大多数教科书只讨论 Craig 插值式，这里我们将说明，该构造也满足 Lyndon 插值式更强的变量条件。

- RR(id)：假设

$$\pi \;=\; \dfrac{}{;p \Rightarrow ;p}\,RR(\mathsf{id})$$

我们断言 $\theta = \top$。事实上，定理13中的变量条件 $1'$ 成立，因为 $\mathsf{Var}(\top) = \varnothing$。此外，由 $(\top_r)$ 可得 $\vdash_{\mathbf{LK}} \Rightarrow \top$，并且由 (id) 与 (w_l) 可得 $\vdash_{\mathbf{LK}} \top, p \Rightarrow p$，正如所需。

- $L(\to_l)$：假设最底层规则是 $(\to_l)$ 的一个实例，且主公式位于分裂的左侧。对于各前提，已选取适当的分裂。

$$\pi \;=\; \dfrac{\overset{\pi_1}{\triangledown} \qquad \overset{\pi_2}{\triangledown}}{\Gamma;\Gamma' \Rightarrow \Delta,\varphi;\Delta' \qquad \psi,\Gamma;\Gamma' \Rightarrow \Delta;\Delta'}\,L(\to_l)$$
$$\varphi \to \psi,\Gamma;\Gamma' \Rightarrow \Delta;\Delta'$$

根据关于 π_1 与 π_2的归纳假设（IH），存在 Lyndon 插值项 θ_1 与 θ_2，使得 $\Gamma;\ \Gamma' \overset{\theta_1}{\Longrightarrow} \Delta,\varphi;\ \Delta'$ 与 $\psi,\Gamma;\ \Gamma' \overset{\theta_2}{\Longrightarrow} \Delta;\ \Delta'$。我们证明 $\theta = \theta_1 \vee \theta_2$ 即为所需的插值式。在定理13的两个变量条件中，我们说明如何检验第一个（另一个是对称的）：

$$\begin{aligned}
&\mathsf{Var}^+(\theta_1 \vee \theta_2) = \mathsf{Var}^+(\theta_1) \cup \mathsf{Var}^+(\theta_2)\\
&\quad\subseteq \Big(\mathsf{Var}^-(\Gamma \Rightarrow \Delta,\varphi) \cap \mathsf{Var}^+(\Gamma' \Rightarrow \Delta')\Big) \cup \Big(\mathsf{Var}^-(\psi,\Gamma \Rightarrow \Delta) \cap \mathsf{Var}^+(\Gamma' \Rightarrow \Delta')\Big) \ (\mathrm{IH})\\
&\quad= \Big(\mathsf{Var}^-(\Gamma \Rightarrow \Delta,\varphi) \cup \mathsf{Var}^-(\psi,\Gamma \Rightarrow \Delta)\Big) \cap \mathsf{Var}^+(\Gamma' \Rightarrow \Delta')\\
&\quad= \Big(\mathsf{Var}^+(\psi,\Gamma) \cup \mathsf{Var}^-(\Delta,\varphi)\Big) \cap \mathsf{Var}^+(\Gamma' \Rightarrow \Delta')\\
&\quad= \Big(\mathsf{Var}^+(\varphi \to \psi,\Gamma) \cup \mathsf{Var}^-(\Delta)\Big) \cap \mathsf{Var}^+(\Gamma' \Rightarrow \Delta')\\
&\quad= \mathsf{Var}^-(\varphi \to \psi,\Gamma \Rightarrow \Delta) \cap \mathsf{Var}^+(\Gamma' \Rightarrow \Delta').
\end{aligned}$$

还需验证 $\vdash_{\mathbf{LK}} \varphi \to \psi,\Gamma \Rightarrow \Delta,\theta_1 \vee \theta_2$ 和 $\vdash_{\mathbf{LK}} \theta_1 \vee \theta_2,\Gamma' \Rightarrow \Delta'$。事实上：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{IH}{\triangledown}}{\Gamma \Rightarrow \Delta,\theta_1,\varphi}\,\mathsf{w}_r \qquad \dfrac{\overset{IH}{\triangledown}}{\psi,\Gamma \Rightarrow \Delta,\theta_2}\,\mathsf{w}_r}{\Gamma \Rightarrow \Delta,\theta_1,\theta_2,\varphi}\,\to_l}{\varphi \to \psi,\Gamma \Rightarrow \Delta,\theta_1,\theta_2}\,\mathsf{c}_r,\vee_r^0,\vee_r^1}{\varphi \to \psi,\Gamma \Rightarrow \Delta,\theta_1 \vee \theta_2}$$

$$\dfrac{\overset{IH}{\triangledown} \qquad \overset{IH}{\triangledown}}{\theta_1,\Gamma' \Rightarrow \Delta' \qquad \theta_2,\Gamma' \Rightarrow \Delta'}\,\vee_l$$
$$\theta_1 \vee \theta_2,\Gamma' \Rightarrow \Delta'$$

其他情况留给读者完成。 ◀

▶ 注 17（计算与复杂度）。前原方法具有构造性：它提供了一种计算插值式的算法。$\varphi \to \psi$ 的插值式的复杂度与其证明树中出现的相继式数量成线性关系。对于同一个相继式，不同的证明可能得到不同的插值式。」

▶ 注 18（不完备性）。有趣的是，已有研究表明，前原方法在不完备的意义上存在局限：有些蕴涵式 $\varphi \to \psi$ 存在插值式，但这些插值式无法通过前原方法计算得出 [42]（另见下一个例子）。」

▶ **例 19**。回顾定理 10，其中 $\varphi = (p \wedge q) \vee (\neg r \wedge s)$ 和 $\psi = t \vee p \vee q \vee \neg r$。我们在分裂演算**LK** 中进行推导（图 7）。Craig 插值式 $p \vee \neg r$ 的推导如下：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{LR(\mathsf{id})\ \dfrac{}{p;\ \overset{p}{\Longrightarrow};p}}{L(\mathsf{w}_l),R(\mathsf{w}_r)\ \dfrac{}{p,q;\ \overset{p}{\Longrightarrow};t,p,q,\neg r}}}{L(\wedge_l)\ \dfrac{}{p\wedge q;\ \overset{p}{\Longrightarrow};t,p,q,\neg r}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{RL(\mathsf{id})\ \dfrac{}{;r\ \overset{\neg r}{\Longrightarrow}r;}}{R(\to_r),R(\mathsf{w}_r)\ \dfrac{}{\overset{\neg r}{\Longrightarrow}r;\neg r}} \qquad \dfrac{L(\bot_l)\ \dfrac{}{\bot;\ \overset{\bot}{\Longrightarrow};}}{R(\mathsf{w}_r)\ \dfrac{}{\bot;\ \overset{\bot}{\Longrightarrow};\neg r}}}{L(\to_l)\ \dfrac{}{\neg r;\ \overset{\neg r\vee\bot(=\neg r)}{\Longrightarrow};\neg r}}}{L(\mathsf{w}_l),R(\mathsf{w}_r)\ \dfrac{}{\neg r,s;\ \overset{\neg r}{\Longrightarrow};t,p,q,\neg r}}}{L(\wedge_l)\ \dfrac{}{\neg r\wedge s;\ \overset{\neg r}{\Longrightarrow};t,p,q,\neg r}}$$

$$L(\vee_l),R(\vee_r)\ \dfrac{}{(p\wedge q)\vee(\neg r\wedge s);\ \overset{p\vee\neg r}{\Longrightarrow};t\vee p\vee q\vee\neg r}$$

一个类似的分裂序列证明，其左分支以公理 $q;\ \overset{q}{\Rightarrow};q$ 开始，导出插值式 $q \vee \neg r$。通过使用收缩规则，前原方法可以得到插值式 $(p \vee q) \vee \neg r$。然而，在**LK** 中，前原方法无法得到插值式 $(p \wedge q) \vee \neg r$（见 [42]）。」

▶ 备注 20（其他类型的序列演算）。前原方法非常灵活，已用于不同类型的序列演算（回顾定理 3）。我们采用的是双边（多重集）序列演算**LK**。它同样适用于基于列表或集合的相继式，也适用于采用隐式弱化与收缩规则的情况 [87]。该方法也适用于单边序列 演算，这类演算以否定范式的公式为基础，其中单边分裂序列的形式为 $\Delta_l; \Delta_r$，左分裂为 Δ_l，右分裂为 Δ_r。回顾定理 4，序列演算可以视为表演算的对偶。因此，前原方法也可以调整后用于语义树（见本书第 1.10 章）。」

▶ 注21（单后件演算）。前原方法也适用于 LJ 这类单后件序列演算。主要区别在于，相继式的后件中只有一个公式，因此无需分裂后件；等价地说，可以将后件视为始终属于分裂的“右侧”。对于 **LJ**，插值式的构造与图 7 中描述的 **LK** 情形大致相同，但 $RL(\mathsf{id})$ 等规则以及

$$L(K)\ \frac{\Gamma;\Gamma' \overset{\theta}{\Rightarrow} \varphi;}{\Box\Gamma;\Box\Gamma' \overset{\Diamond\theta}{\Longrightarrow} \Box\varphi;} \qquad R(K)\ \frac{\Gamma;\Gamma' \overset{\theta}{\Rightarrow};\varphi}{\Box\Gamma;\Box\Gamma' \overset{\Box\theta}{\Longrightarrow};\Box\varphi} \qquad L(D)\ \frac{\varphi,\Gamma;\Gamma' \overset{\theta}{\Rightarrow};}{\Box\varphi,\Box\Gamma;\Box\Gamma' \overset{\Box\theta}{\Longrightarrow};} \qquad R(D)\ \frac{\Gamma;\Gamma',\varphi \overset{\theta}{\Rightarrow};}{\Box\Gamma;\Box\Gamma',\Box\varphi \overset{\Box\theta}{\Longrightarrow};}$$

$$L(GL)\ \frac{\Box\Gamma,\Gamma,\Box\varphi;\Box\Gamma',\Gamma' \overset{\theta}{\Rightarrow} \varphi;}{\Box\Gamma;\Box\Gamma' \overset{\Diamond\theta}{\Longrightarrow} \Box\varphi;} \qquad R(GL)\ \frac{\Box\Gamma,\Gamma;\Box\Gamma',\Gamma',\Box\varphi \overset{\theta}{\Rightarrow};\varphi}{\Box\Gamma;\Box\Gamma' \overset{\Box\theta}{\Longrightarrow};\Box\varphi} \qquad L(T)\ \frac{\varphi,\Box\varphi,\Gamma;\Gamma' \overset{\theta}{\Rightarrow} \Delta;\Delta'}{\Box\varphi,\Gamma;\Gamma' \overset{\theta}{\Rightarrow} \Delta;\Delta'}$$

图 8 模态规则的插值项变换。当主公式位于规则（K）和（GL）中分裂的左侧时，这是一种“$\Diamond$-变换”；当主公式位于右侧时，则是一种“$\Box$-变换”。图5中的规则（4）和（$S4$）也同样适用。对于规则（T），两种分裂都适用同一个插值式。规则（D）的两种变换都是“$\Box$-变换”，因为 φ在其中唯一的作用是确保前件非空。参见定理 70 和 80。

$R(\wedge_r)$被省略，分裂规则 $L(\rightarrow_l)$作如下调整：

$$L(\rightarrow_l)\ \frac{\Gamma';\Gamma \overset{\theta_1}{\Longrightarrow} \varphi \quad \psi,\Gamma;\Gamma' \overset{\theta_2}{\Longrightarrow} \Delta'}{\varphi \rightarrow \psi,\Gamma;\Gamma' \overset{\theta_1\rightarrow\theta_2}{\Longrightarrow} \Delta'}$$

其中，公式 $\varphi \rightarrow \psi$ 在结论中位于分裂的左侧，而 φ 则被迫位于左前提中分裂的“右侧”。因此，我们必须交换此前提中 Γ' 和 Γ两侧的位置，以确保 Γ 和 φ 仍位于分裂的同一侧。」

根据前面的说明，我们有如下定理。

▶**定理22**。 逻辑IPC 具有 *Craig* 插值性质和 *Lyndon* 插值性质。

对于模态逻辑，我们为图6中的序列演算给出了插值式变换，并证明逻辑K、T、D、K4、S4和GL具有 Craig 插值性质。事实上，除GL之外，这些逻辑都具有 Lyndon 插值性质。考察图 8中的分裂规则 $L(GL)$和 $R(GL)$时， φ 两个 $\Box\varphi$都被置于分裂的同一侧。因此，定理 12(1)中的Craig条件得以满足，但无法保证定理13(1′)中更强的Lyndon条件：前提前件中的 $\Box\varphi$ 与结论后件中的 $\Box\varphi$ 具有相反的极性。因此，尽管逻辑GL确实具有Lyndon 插值性质 [83]，序列演算**G。GL** 可用于证明Craig 插值性质，却不能用于证明Lyndon 插值性质。已有一项关于GL的Lyndon 插值性质的证明论证明 [82] 使用了循环证明，相关内容将在第11章讨论。更一般地说，存在无切相继演算并不能保证该逻辑具有Craig 插值性质；同样，逻辑具有Craig 插值性质也不保证可以用无切相继演算来证明这一性质。

尽管前原方法可灵活适用于多种类型的逻辑，但这并不意味着每种类型中的许多逻辑都具有Craig插值性质。事实上，插值在例如中间逻辑和模态逻辑中较为罕见 [29, 35], ，这对证明论具有至关重要的影响（见第4.2节）。

$$\text{an-cut}\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \varphi, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\ \varphi \in \mathsf{Sub}(\Gamma, \Gamma', \Delta, \Delta')$$

$$\Box\text{-semi-cut}\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \Box^n \psi \quad \Box^n \psi, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}\ \psi \in \mathsf{Sub}(\Gamma, \Gamma', \Delta, \Delta')$$

图 9 受限切规则的示例。

$$T\ \frac{\Box\varphi, \varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Box\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$5\ \frac{\Box\Gamma \Rightarrow \varphi, \Box\Delta}{\Sigma, \Box\Gamma \Rightarrow \Box\varphi, \Box\Delta}$$

图 10 $\mathbf{G.S5}$的模态规则：$\mathbf{G.S5} := \mathbf{LK} + (\text{an-cut}) + (T) + (5)$。

3.2 受限切割与插值

在许多证明论教科书中 [84,87], , 前原方法被表述为切规则可容许性定理的一项应用。在上一节中，我们假定已有一个无切割演算，但众所周知，为使前原方法证明Craig插值性质（尽管未必是Lyndon插值性质），可以容许特殊形式的切规则。这对于那些不容许无切相继演算、但拥有包含受限切规则的完备演算的逻辑尤其有用。

受限切规则规避了前原方法所面临的一般切规则问题，即人们无法把握切公式中出现的命题变元。我们介绍三类受限切割。

- 解析切规则：解析切规则（an-cut）如图 9 所示。切公式被限制为结论序列的子公式。该规则保持全局子公式性质，即在任何证明中，其中出现的每个公式都是末序列的子公式。具有子公式性质的演算系统通常称为解析的，这也说明了该规则名称的由来。前原方法结合解析切规则的例子包括模态逻辑 S5 [74]和双直觉主义逻辑 [52]。

- 半解析切规则：半解析性是指切公式的命题变元出现在结论中的一个公式中这一概念。换言之，切公式是结论中某一公式的子公式的任意（可任意复杂的）组合，这也说明了半解析这一名称的由来。一个例子是图 9 中的（$\Box$-semi-cut），它在 [25] 的表列演算中被引入。在第 4.1 节中，我们讨论一种略有不同的半解析规则概念，它为应用前原方法提供了一个一般框架。

- 单色切（例如，[17]）：这种切规则比半解析切更一般，因为后者的切公式只能是结论中多个公式的子公式的任意组合。必须谨慎确定允许哪些多个公式，因此，这种切规则只对分割序列有定义：在末序列为 $\Gamma_1; \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1; \Delta_2$ 的分裂序列证明 π 中，若一次切规则的应用满足以下条件：切公式 φ 满足 $\mathsf{Var}(\varphi) \subseteq \mathsf{Var}(\Gamma_1) \cup \mathsf{Var}(\Delta_1)$ 或 $\mathsf{Var}(\varphi) \subseteq \mathsf{Var}(\Gamma_2) \cup \mathsf{Var}(\Delta_2)$，则称该应用是单色的；也就是说，只沿着 Maehara 分裂的左侧或右侧追踪命题变量。

  为了说明此类切规则在前原方法中的用法，我们考虑 S5 模态逻辑

作为来自 [74] 的一个例子。目前尚不知道 S5 具有无切相继演算。序列演算 $\mathbf{G.S5} := \mathbf{LK} + \text{(an-cut)} + (T) + (5)$，包括解析切规则，对 S5 是完备的（全部规则参见图 4、9 和 10）。

►**定理 23**。 模态逻辑 S5 具有 *Craig* 插值性质。

证明。 证明见 [74]，并且遵循类似于定理 16 证明中的 Maehara 风格论证。我们只陈述解析切规则的插值式构造，其余细节留给读者。对于(一个-切规则)，插值式构造取决于结论中的公式，而切公式 φ 是该公式的子公式。分两种情况：

$$L(\text{an-cut})\ \frac{\Gamma_1;\Gamma_1' \overset{\theta_1}{\Longrightarrow} \Delta_1,\varphi;\Delta_1' \quad \varphi,\Gamma_2;\Gamma_2' \overset{\theta_2}{\Longrightarrow} \Delta_2;\Delta_2'}{\Gamma_1,\Gamma_2;\Gamma_1',\Gamma_2' \overset{\theta_1\vee\theta_2}{\Longrightarrow} \Delta_1,\Delta_2;\Delta_1',\Delta_2'}\ \varphi \in \mathsf{Sub}(\Gamma_1,\Gamma_2,\Delta_1,\Delta_2)$$

$$R(\text{an-cut})\ \frac{\Gamma_1;\Gamma_1' \overset{\theta_1}{\Longrightarrow} \Delta_1;\Delta_1',\varphi \quad \Gamma_2;\Gamma_2',\varphi \overset{\theta_2}{\Longrightarrow} \Delta_2;\Delta_2'}{\Gamma_1,\Gamma_2;\Gamma_1',\Gamma_2' \overset{\theta_1\wedge\theta_2}{\Longrightarrow} \Delta_1,\Delta_2;\Delta_1',\Delta_2'}\ \varphi \in \mathsf{Sub}(\Gamma_1',\Gamma_2',\Delta_1',\Delta_2')$$

由于子公式要求，定理 12 中的变量条件 1 得以满足。

◄

事实上，S5 还具有 Lyndon 插值性质。这一点无法使用序列演算 $\mathbf{G。S5}$证明，但可以通过使用其超序列演算得到（见第 5.3 节）。

3.3 通过 Pitts 方法实现统一插值

UIP 是对 CIP 的一种优美强化（另见第 9 章，关于一致插值的主要章节）。在这里，我们关注 Pitts 的 [76] 重要结果：命题量化 可以在直觉主义命题逻辑 IPC 中得到解释（即只使用命题语言）。为此，Pitts 提供了一种证明论方法，证明 UIP 对 IPC 成立。后来，这种方法被应用于（直觉主义）模态逻辑 [5,11,44]。本节旨在解释 Pitts 方法中的主要概念。

$\varphi \to \psi$ 的 Craig 插值式在满足以下条件时称为一致的：它只 依赖于 φ （或只依赖于 ψ），也就是说，对于任何带有ψ' 且在指定词汇表中 $\varphi \to \psi'$ 的可证明蕴含，它都是一个能够一致适用的 Craig 插值式。形式化地，我们定义如下：其中，公式 φ 是 p-自由的，当且仅当$p \notin \mathsf{Var}(\varphi)$；是 p^+-自由的，当且仅当 $p \notin \mathsf{Var}^+(\varphi)$；是 p^--自由的，当且仅当 $p \notin \mathsf{Var}^-(\varphi)$：

►**定义 24** （一致插值）。 固定语言 L 上的一个逻辑L 。我们称L 具有一致插值性质（UIP），当且仅当对于任意公式 $\varphi \in \mathsf{Form}_{\mathcal{L}}$ 和命题变量 $p \in \mathsf{Prop}$，存在同一语言 L 上的公式 $\exists p\varphi, \forall p\varphi$，使得以下条件成立：

1. $\exists p\varphi$ 和 $\forall p\varphi$ 是 p无 -自由的，且 $\mathsf{Var}(\exists p\varphi) \subseteq \mathsf{Var}(\varphi)$ 和 $\mathsf{Var}(\forall p\varphi) \subseteq \mathsf{Var}(\varphi)$；**2.** $\vdash_{\mathsf{L}} \varphi \to \exists p\varphi$ 和 $\vdash_{\mathsf{L}} \forall p\varphi \to \varphi$；

3. 对于所有 p-自由公式 ψ:
   如果 $\vdash_{\mathsf{L}} \varphi \to \psi$，那么 $\vdash_{\mathsf{L}} \exists p\varphi \to \psi$.;
   如果 $\vdash_{\mathsf{L}} \psi \to \varphi$，那么 $\vdash_{\mathsf{L}} \psi \to \forall p\varphi$.

公式 $\exists p\varphi$ 称为 φ 关于 p的一致后插值式，而 $\forall p\varphi$ 是 φ 关于 p 在L中的一致前插值式。当对于所有公式 $\varphi \in$公式$_{\mathcal{L}}$和 $p \in$ 命题变元集，$\exists p\varphi$ （分别为 $\forall p\varphi$）都存在时，我们称L具有后一致插值性质（PostUIP）（分别为前一致插值性质（PreUIP））。

记号 $\exists p\varphi$ 和 $\forall p\varphi$ 颇具暗示性：这些公式实际上并不含量词，而是定义在（命题／模态）语言$\mathcal{L}$之上。不过，这种记法有其依据：Pitts 的结果表明，一致插值式诠释了二阶直觉主义逻辑中的命题量词，并将其映射到命题语言中。一致插值式也与所谓的双模拟量词 有关（见本书第 9 章）。在文献中，尤其是第 1 章中，后一致插值式和前一致插值式分别称为右一致插值式和左一致插值式。

▶ 备注 25. 在经典逻辑中，我们可以定义 $\exists p\varphi := \neg\forall p(\neg\varphi)$。 ⌟

以下性质的证明可见于例如 [36]。

▶**定理 26 (**唯一性)。 设 χ_1 和 χ_2 都是逻辑 L 中关于 p 的 φ 的一致前插值式。那么 $\vdash_{\mathsf{L}} \chi_1 \to \chi_2$ 和 $\vdash_{\mathsf{L}} \chi_2 \to \chi_1$。一致后插值式也同样成立。

最近，Kurahashi [54] 引入了一致 Lyndon 插值的概念:

▶ **定义 27 (**一致 Lyndon 插值)。 语言 L 上的逻辑 L 具有一致 Lyndon 插值性质（ULIP），当且仅当对于任意 $\varphi \in$ 公式$_{\mathcal{L}}$ 和 $p \in$ 命题变元集，都存在公式 $\forall^{+}p\varphi$、$\forall^{-}p\varphi$、$\exists^{+}p\varphi$ 和 $\exists^{-}p\varphi$，它们属于 公式$_{\mathcal{L}}$，并满足 $Theorem\ 24$ 中的性质；但每处出现的 p-***free*** 都替换为：对于 $\forall^{+}p\varphi$ 和 $\exists^{+}p\varphi$，替换成 p^{+}-***free***；对于 $\forall^{-}p\varphi$ 和 $\exists^{-}p\varphi$，替换成p^{-}-***free***。

▶ **定理 28** ([54])。若逻辑 L 具有一致插值性质/统一局部插值性质，则它具有 *Craig* 插值性质/*Lyndon* 插值性质 .

事实上，一致插值式是最弱的和最强的Craig 插值式。

现在我们转向 Pitts 的证明论方法。与前原方法相比，Pitts 方法的要点总结于表 1。出于技术原因，我们不会像 Pitts 的原始证明那样证明 IPC 的一致插值性质 [76], ，而是会介绍 Bílková 在 [11]中对模态逻辑 K 所采用的 Pitts 方法。回顾定理 25：我们只关注预插值的构造 $\forall p\varphi$。

关于 UIP 的基于相继式的表述，我们有如下设想。相对于 p ， φ 的前插值式几乎可以作为所有蕴涵式 $\psi \to \varphi$ 的 Craig 插值式，其中 ψ 不含 p（之所以说几乎，是因为它可能违反 Craig 变量条件）。因此，右侧的 φ 是固定的，而左侧的 ψ 则是灵活的。以下定义中的分裂相继式将体现这一思路： $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 固定在分裂右侧，而不含 p 的上下文 Π 和 Σ 则是灵活的，并且始终位于分裂左侧。

前原方法	Pitts 方法
克雷格插值	一致插值
Craig 插值性质的序列形式	一致插值性质的序列形式
“无割”序列演算	“强终止”序列演算
$\varphi \to \psi$的证明	φ的证明搜索

表 1 Maehara 方法与 Pitts 方法之间相似之处和差异的总体概览。“无割”一词加了引号，因为无割系统对前原方法很有用，但并非必不可少（回顾第 3.2 节）。同样，对于 Pitts 方法，强终止演算是证明一致插值性质的一项有用特性，但并非必不可少（见定理 34）。

▶**定义 29**。 语言 L 上的序列演算 $\mathbf{G}$ 具有序列前一致插值性质（SPreUIP），当且仅当对任意相继式 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 以及任意 $p \in$ 命题变元集，都存在一个公式 $A_p(\Gamma \Rightarrow \Delta) \in$ 公式$_{\mathcal{L}}$，使得下列性质成立：
1. $Var(A_p(\Gamma \Rightarrow \Delta)) \subseteq Var(\Gamma, \Delta) \setminus \{p\}$；*2.* $\vdash_{\mathbf{G}} \Gamma, A_p(\Gamma \Rightarrow \Delta) \Rightarrow \Delta$；*3.* $\vdash_{\mathbf{G}} \Pi \Rightarrow A_p(\Gamma \Rightarrow \Delta), \Sigma$ 对于任意不含 p 的多重集 Π 和 Σ，满足 $\vdash_{\mathbf{G}} \Pi, \Gamma \Rightarrow \Sigma, \Delta$。

▶ 注 30。我们仅关注模态逻辑 K，因为根据定理 25，上述 UIP 的序列式表述已足够。考虑直觉主义逻辑时，还必须定义一个公式 $E_p(\Gamma)$，使其满足类似对偶的性质（并非严格对偶，因为 $E_p(\Gamma)$ 的构造取决于 $A_p(\Gamma \Rightarrow \varphi)$）。此处省略所有这些细节，读者可参阅 [5, 76]。」

▶ 注 31。此处我们仅为 UIP 定义序列版本。也可以为 ULIP 给出序列版本，参见 [4]。」

▶**定理 32.** 设 $\mathbf{G}$ 是逻辑 L 的一个序列演算。若$\mathbf{G}$ 具有 *SPreUIP*，则L 具有前一致插值性质。

证明。 定义 $\forall p\varphi := A_p(\ \Rightarrow \varphi)$。细节留给读者验证。 ◀

$A_p(\Gamma \Rightarrow \Delta)$ 是用序列演算构造的。对于前原方法，我们给定一个可证明的 分割序列 $\Gamma; \Gamma' \Rightarrow \Delta; \Delta'$；而这里给定的是一个可能不可证明的序列 $\Gamma \Rightarrow \Delta$。因此，我们无法查看 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 的证明，因为它可能根本不存在。诀窍是通过对 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 进行证明搜索 来构造一致插值式。对一个序列进行证明搜索，就是构造一棵树，自底向上应用序列演算的规则，尝试找到一个证明。我们希望这种证明搜索具有一个关键特性：它是有限的。这有助于确保构造一致前插值式的算法能够终止。

$$(\mathsf{id})^*\ \frac{}{p, \Gamma \Rightarrow \Delta, p} \qquad (K)^*\ \frac{\Gamma \Rightarrow \varphi}{\Pi, \Box\Gamma \Rightarrow \Delta, \Box\varphi}$$

$$(\bot_l)^*\ \frac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \to_l \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \to \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \vee_l \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \wedge_l \frac{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$(\top_r)^*\ \frac{}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \top} \qquad \to_r \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \to \psi} \qquad \vee_r \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi} \qquad \wedge_r \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}$$

图 11 序列演算 **G3K**。

▶**定义 33** (强终止性)。 如果对于每个序列，按任意顺序自底向上应用规则都会产生一棵有限树，即最终停在这样的叶节点上：它们要么是公理，要么是无法应用任何规则的不可证明序列，那么就称该序列演算具有强终止性 。

▶ 注 34。我们重点关注强终止的演算系统，但较弱形式的终止性也可能奏效，不过通常需要额外的机制，例如，为了证明超序列演算中 S5 [39], 的 UIP，模态逻辑 T [11], 需要借助循环证明 [1]。 ⌟

许多序列演算并不具有强终止性。例如，序列演算 **LJ** 因收缩规则 (c_l) 而不具有强终止性（见图 7）；但即使像 [87], 中的 **G3ip** 那样，将显式的弱化规则和收缩规则合并起来，强终止性仍然无法成立，这是因为规则 ($\to_l$) 的直觉主义版本将收缩嵌入如下:

$$(\to_l)^*\ \frac{\varphi \to \psi, \Gamma \Rightarrow \varphi \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \to \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

其中 Δ 至多包含一个公式。因此，Pitts 为 IPC 采用了强终止的演算系统 **G4ip**，其中 ($\to_l$)* 被替换为另外四条蕴涵规则 [22, 43, 89, 90], ；这一思路后来扩展到了直觉主义模态逻辑 [46]。

我们考察模态逻辑 K。由于收缩规则的存在，序列演算**G.K** 并非强终止。为此，我们将考虑图 11 中带有隐式弱化与收缩的演算**G3K** 。

▶ **定理 35**。 用于K 的序列演算**G3K** 是强终止的。

证明。 我们定义公式 $w(\varphi)$的权重 φ 为其中出现的符号数量，按多重集计数。对于相继式，我们定义 $w(\Gamma \Rightarrow \Delta) := \Sigma_{\varphi \in \Gamma} w(\varphi)$。对于 **G3K** 中的所有规则，每个前提的权重都小于结论的权重，这意味着该演算是强终止的。◀

▶注 36。图5中的模态序列规则（4）和（T）妨碍强终止性，因为规则（4）会复制上下文 Γ，而规则（T）会在前提中复制主公式 φ。事实上，逻辑K4和S4不具有一致插值性质 [11, 34]。 ⌟

rule	$\Gamma \Rightarrow \Delta$ 匹配	$A_p(\Gamma \Rightarrow \Delta)$ 等于
(恒等)*	$r, \Gamma' \Rightarrow \Delta', r$	$\top$
$(\top_r)^*$	$\Gamma \Rightarrow \Delta', \top$	$\top$
$(\bot_l)^*$	$\bot, \Gamma' \Rightarrow \Delta$	$\top$
$(\wedge_l)$	$\Gamma', \psi_1 \wedge \psi_2 \Rightarrow \Delta$	$A_p(\Gamma', \psi_1, \psi_2 \Rightarrow \Delta)$
$(\vee_l)$	$\Gamma', \psi_1 \vee \psi_2 \Rightarrow \Delta$	$A_p(\Gamma', \psi_1 \Rightarrow \Delta) \wedge A_p(\Gamma, \psi_2 \Rightarrow \Delta)$
$(\rightarrow_l)$	$\Gamma', \psi_1 \rightarrow \psi_2 \Rightarrow \Delta$	$A_p(\Gamma' \Rightarrow \Delta, \psi_1) \wedge A_p(\Gamma, \psi_2 \Rightarrow \Delta)$
$(\wedge_r)$	$\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi_1 \wedge \psi_2$	$A_p(\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi_1) \wedge A_p(\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi_2)$
$(\vee_r)$	$\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi_1 \vee \psi_2$	$A_p(\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi_1, \psi_2)$
$(\rightarrow_r)$	$\Gamma \Rightarrow \Delta', \psi_1 \rightarrow \psi_2$	$A_p(\Gamma, \psi_1 \Rightarrow \Delta', \psi_2)$
(模态逻辑K)* 或不是规则适用	$\Box\Gamma', \Phi \Rightarrow \Box\Delta', \Psi$ 其中 $\Gamma' \neq \varnothing$	$\Diamond A_p(\Gamma' \Rightarrow \varnothing) \vee \bigvee_{q \in \Phi \setminus \{p\}} q \vee \bigvee_{r \in \Psi \setminus \{p\}} \neg r \vee \bigvee_{\psi \in \Delta'} \Box A_p(\Gamma' \Rightarrow \psi)$
(模态逻辑K)* 或否规则适用	$\Phi \Rightarrow \Box\Delta', \Psi$	$\bigvee_{q \in \Phi \setminus \{p\}} q \vee \bigvee_{r \in \Psi \setminus \{p\}} \neg r \vee \bigvee_{\psi \in \Delta'} \Box A_p(\Rightarrow \psi)$

表 2 针对**G3K**的一致插值构造，其中 Φ 和 Ψ 不含带框公式。

▶**定理 37.** 序列演算 **G3K** 具有 *SPreUIP*，因此逻辑 模态逻辑K 享有一致插值性质。

证明思路。 通过对 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 的递归，我们构造公式 $A_p(\Gamma \Rightarrow \Delta)$ 并证明它充当 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 相对于 p的预插值。该算法自下而上开始针对序列 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 的证明搜索，并归纳地定义一致插值。该算法根据相继式的形状，按照表 2 中的步骤进行，并优先处理表中较高的行。表的左列指出证明搜索中所应用的规则，中间列给出该规则结论的形状，右列则利用该规则的前提定义预插值。第 2–7 行对应于所谓的 可逆规则。我们强调，对于每条可逆规则，结论的预插值总可以取为前提的预插值的合取。最后一行是一个特殊情形，对应于 不可逆规则 (模态逻辑 K) 在结果中提供 $\Box$-子句，但它也对应于这样一种可能性：证明搜索‘应用规则 (模态逻辑 K)’于额外上下文 Σ 中的某个框公式，该公式处于来自定理 29 条件 3 的‘左分裂’上，从而提供$\Diamond$-子句。该算法在权重 w 上按照序列演算 **G3K** 终止时所依据的同一序终止（定理 35）。事实上，除最后一行外，所有行都反映了该演算的规则，并且最后一行中的递归也以同样的方式归约。

接下来需要检查该算法的正确性，也就是说，我们需要检查定理 29 的条件。这要依靠句法论证，相关内容请参阅 [11]。◀

▶ **例 38.** 让我们对公式 $\Box p \vee \Box\neg p$ 应用 **G3K** 的一致插值算法。

20 证明论中的插值

我们以一种 p 在证明树搜索中，我们计算括号内所表示的每个序列的 $A_p(\cdot)$:

$$\vee_r\,\dfrac{\dfrac{\Rightarrow p\ \ (\bot) \qquad \to_r\,\dfrac{p \Rightarrow \bot\ \ (\bot)}{\Rightarrow \neg p\ \ (\bot)}}{\Rightarrow \Box p, \Box\neg p\ \ (\Box\bot \vee \Box\bot)}\ \text{Proof search on rule } (K)}{\Rightarrow \Box p \vee \Box\neg p\ \ (\Box\bot \vee \Box\bot)}$$

对于顶端的相继式，**G3K** 的规则均不适用，而表 2 的最后一行适用，其中空析取产生 $\bot$。定理 29 的条件留待读者自行验证。」

针对经典模态逻辑 GL、S4.Grz、T [11], 和 D [44], ，以及直觉主义模态逻辑 iK、iKD [45],和 iSL [23]，也已有类似的基于证明论的一致插值证明。该方法已扩展到一般形式的演算系统，并为广泛的中间逻辑和次结构逻辑提供了结果，下一节将对此进行讨论。

一致插值算法已在交互式定理证明器 Coq/Rocq 中针对 IPC、模态逻辑K、GL 和 iSL [23, 24]实现形式化。这促成了一个一致插值式在线计算器 [23,24]。该计算器有助于证明某些二阶直觉主义联结词不可定义 [50]。

4 普遍证明论中的插值

普遍证明论由Iemhoff [44, 45] 开创，并在后续工作 [2–7], 中得到扩展，研究在广泛的逻辑类中表现良好的证明系统的存在性、等价性与刻画等一般问题。它提供了一种统一且模块化的方法，通过将这些性质与某些结构受限的序列演算的存在性联系起来，来确立诸如Craig插值性质、一致插值性质以及Visser规则的可容许性 [6],等逻辑性质。该框架通过定义保证这些性质的句法条件，适用于多种逻辑，尤其是直觉主义逻辑、模态逻辑和子结构逻辑。

该方法既产生肯定性结果，也产生否定性结果。从肯定方面看，如果一个逻辑容许满足所需结构条件的（终止的）半解析 演算，则它具有Craig 插值性质（以及一致插值性质）。在第 4.1 节中，我们引入这些演算，并看到它们为公理和规则提供了一般形式，因此该框架提供了一种证明插值性质的系统方法。从否定方面看，而且更为重要的是，由于这些性质较为罕见，这些结果表明大多数逻辑不可能具有半解析（相应地，终止的半解析）演算，我们将在第4.2节中讨论这一点。从这个意义上说，它不仅提供了证明插值结果的系统方法，也表明对于大类逻辑而言，表现良好的演算并不存在。

尽管插值性质是这一研究方向最先考察的内容， [6] 引入了一种新的逻辑不变量：Visser规则的可容许性。这一扩展显著拓宽了普遍证明论的研究范围，使其不再局限于插值，还涵盖了更多证明论性质。这种推广尤其

有助于获得否定性结果，因为它为刻画证明系统的局限性提供了新工具。在 [6], 中，研究者引入了一种构造性相继演算，其中一个有趣的结果是：除IPC外，没有其他中间逻辑能够拥有构造性相继演算。

4.1 半解析规则与插值

以下定义引入了所谓的半解析规则。这一概念比规则的分析性稍弱：当结论中的主公式包含前提中的公式作为子公式时，该规则称为解析的。因此，这些规则比解析规则涵盖范围更广，也更为一般。

▶ **定义 39**（半解析规则， [5, 7]）。对于 $1 \leq i \leq n$ 和 $1 \leq j \leq m$，设 Γ_i、 Δ_i和 Π_j分别是两两不相交且各自元素两两不同的多重集变元族， φ_{ir}、 ψ_{js}和χ_{js}是公式多重集， φ 是一个公式，其中 $1 \leq \overline{r} \leq k_i$ 且 $1 \leq s \leq l_j$。

如果一条规则具有以下形式，则称为左单结论半解析规则：

$$\frac{\{\Pi_j, \overline{\psi}_{js} \Rightarrow \overline{\chi}_{js} \mid 1 \leq j \leq m, 1 \leq s \leq l_j\} \qquad \{\Gamma_i, \overline{\varphi}_{ir} \Rightarrow \Delta_i \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq r \leq k_i\}}{\Pi_1, \ldots, \Pi_m, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n, \varphi \Rightarrow \Delta_1, \ldots, \Delta_n}$$

并且满足以下变量条件：

$$\bigcup_{ir} \mathsf{Var}(\overline{\varphi}_{ir}) \cup \bigcup_{js} \mathsf{Var}(\overline{\psi}_{js}) \cup \bigcup_{js} \mathsf{Var}(\overline{\chi}_{js}) \subseteq \mathsf{Var}(\varphi).$$

在该规则的每个实例中， Δ_i中至多有一个可以被公式替换，其余必须为空，因为该规则是单结论的。

一条规则被称为右单结论半分析，如果它具有如下形式

$$\frac{\{\Gamma_i, \overline{\varphi}_{ir} \Rightarrow \overline{\chi}_{ir} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq r \leq k_i\}}{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n \Rightarrow \varphi}$$

并且下列变量条件成立：

$$\bigcup_{ir} \mathsf{Var}(\overline{\varphi}_{ir}) \cup \bigcup_{ir} \mathsf{Var}(\overline{\chi}_{ir}) \subseteq \mathsf{Var}(\varphi).$$

一条多结论半解析规则可以类似地定义，此时我们允许该规则为多结论（参见 *[7, 定义4.3]*）。一条规则被称为半解析，如果它是单结论或多结论的左或右半解析规则。

▶ **例40.** 左单结论半分析规则的一个一般例子如下：

$$\frac{\Pi, \nu_{11}^1, \nu_{11}^2 \Rightarrow \rho_{11} \quad \Pi, \nu_{12} \Rightarrow \rho_{12} \quad \Gamma, \mu_1^1, \mu_1^2, \mu_1^3 \Rightarrow \Delta}{\Pi, \Gamma, \mu \Rightarrow \Delta}$$

其中 $\mathsf{Var}(\mu_1^1) \cup \mathsf{Var}(\mu_1^2) \cup \mathsf{Var}(\mu_1^3) \cup \mathsf{Var}(\nu_{11}^1) \cup \mathsf{Var}(\nu_{11}^2) \cup \mathsf{Var}(\nu_{12}) \cup \mathsf{Var}(\rho_{11}) \cup \mathsf{Var}(\rho_{12}) \subseteq \mathsf{Var}(\mu)$。

左侧和中间的前提属于同一族，其中上下文 Π位于前件中。因此，结论的前件中会出现一个 Π 副本。 ⌟

▶ **例41**。 多结论半解析规则的具体例子是图4中的规则，但切规则除外。这些规则的单结论版本是单结论半解析规则。多结论半解析规则的具体反例包括切规则，因为它违反了变量条件。考察图5中的模态规则，规则（T）和（$S4$）是单结论半解析规则；（K）和（D）是反例，因为上下文从前提到结论没有保持不变；（4）和（GL）也属于反例，因为上下文 Γ 从前提到结论中消失了。单结论半解析规则的反例由上述规则的单结论版本给出，即（K）、（D）、（4）、（GL）以及（切规则）。另一个反例是演算 **KC** 中的下述规则，该演算由 [15] 针对逻辑 KC $=$ IPC $+ \neg\varphi \vee \neg\neg\varphi$引入：

$$\frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \psi, \Delta}{\Gamma \Rightarrow \varphi \to \psi, \Delta} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \psi, \Pi \Rightarrow \Lambda}{\Gamma, \varphi \to \psi, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda}$$

其中， Δ 必须代换为严格负公式的多重集（并非包含语言中的所有公式；见 ）。由于上下文 Δ不允许任意多重集代换，因此该规则不是半解析规则。」

▶ 注 42. 请注意，第3.1节中引入的半解析切规则并不属于定理39所述的半解析规则范畴。原因很简单：切规则中没有主公式。不过，我们可以推广这一概念，使其也涵盖半解析切规则；这将留待未来工作。」

现在，我们为公理定义一种一般形式。

▶ **定义 43** (聚焦公理, [7])。 若元序列具有以下某种形式，则称其为聚焦公理：

$$\varphi \Rightarrow \varphi \qquad \Rightarrow \bar{\psi} \qquad \bar{\theta} \Rightarrow \qquad \Gamma, \bar{\varphi} \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow \bar{\varphi}, \Delta$$

其中，对每个公理 $\mathsf{Var}(\mu) = \mathsf{Var}(\nu)$，对于任意 μ、 $\nu \in \bar{\eta}$和 $\eta \in \{\varphi$、 ψ、 $\theta\}$。

请注意，术语聚焦不同于证明搜索中使用的“聚焦证明”概念，例如文献 [62, 68]中的相关工作。

▶**例 44**。 序列演算**LK** 和**LJ**中的公理全部都是聚焦的。更多示例 s:

$$p, \neg p \Rightarrow \qquad \Rightarrow p, \neg p \qquad \Gamma, \neg\top \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\bot$$

作为一个反例，考虑公理（p， $\neg p$， $q \Rightarrow$），其中 p和 q是不同的原子。该公理不是聚焦的，因为 p和 q 的变量集合并不相同。」

▶ **定义 45.** 如果演算 **G** 中的每条规则都是（单结论）多结论半解析的，且其公理是聚焦公理（的单结论版本），则称演算 **G** 为（单结论）多结论半解析的。如果语言包含模态 $\Box$，则还允许在**G**中出现以下规则集合的任意并集：$\{$(模态逻辑K)$\}$、$\{(4)\}$、$\{$(模态逻辑K), $(D)\}$、$\{$(模态逻辑K), $(T)\}$。

我们以定义演算完全终止的含义来结束本小节。这比定理 33 中引入的强终止性概念更强。

▶ **定义 46** (完全终止的序列演算)。 设$\mathbf{G}$ 是一个演算，且 $\preceq$ 是定义在相继式上的良基序。若对于任意相继式 S，结论为 S的$\mathbf{G}$ 中规则实例至多只有有限多个，则称$\mathbf{G}$ 相对于 $\preceq$ 完全终止。此外，我们要求以下对象相对于序 $\preceq$都严格小于 S：

- 结论为 S的规则的所有实例的前提、 S的真子相继式，以及在语言包含模态 $\Box$的情况下，
- 任何 $S' = (\Gamma, \Pi \Rightarrow \Delta, \Lambda)$，其中$\Pi \cup \Lambda \neq \varnothing$，以及 $S = (\Gamma, \Box\Pi \Rightarrow \Delta, \Box\Lambda)$。
-

若存在一个序 $\preceq$，使得$\mathbf{G}$ 相对于 $\preceq$完全终止，则称演算$\mathbf{G}$ 是完全终止的。

▶ 注 47。在模态逻辑中，完全终止的半解析演算不能包含图5中给出的模态规则（4）和（T）。这意味着，任何完全半解析的模态序列演算都可以包含模态规则集合{（K）}以及{（K），（D）}。」

关于插值的一条有用经验法则是：若逻辑 L 具有半解析演算$\mathbf{G}$，则 L 具有 Craig 插值性质；并且若$\mathbf{G}$ 完全终止，则它也具有一致插值性质。这些证明本质上遵循 Maehara 关于 Craig 插值性质的方法，以及用于一致插值性质的 Pitts 方法。当然，还有许多技术细节需要核验，对此我们参阅 [5, 7]。

4.2 插值与序列演算的（不）存在

在本节中，我们应用在普遍证明论的上下文中引入的统一方法，并基于 Craig 插值性质与一致插值性质，针对不同逻辑给出大量肯定性结果与否定性结果。对于肯定性结果，我们首先观察到给定逻辑具有（完全终止的）半解析演算，由此可以断定该逻辑具有 Craig 插值性质（一致插值性质）。对于否定性结果，我们使用逆否：若已知某逻辑不具有 Craig 插值性质（一致插值性质），则可立即断定该逻辑不可能具有（完全终止的）半解析演算。

4.2.1 中间逻辑与模态逻辑

下列定理是关于证明 Craig 插值性质与一致插值性质的主要正面结果。

▶ **定理48** ([5, 7]). 设 L 为语言 $L \in \{L_{\mathrm{P}}, L_{\Box}\}$ 上的逻辑，且 $\mathbf{G}$ 为L的单结论（相应地，多结论）半解析演算。

- 若 $L = L_{\mathrm{P}}$，且 IPC $\subseteq$L （相应地，L $=$ CPC），则 L 具有 *Craig* 插值性质。此外，若 $\mathbf{G}$ 完全终止，则 L具有一致插值性质。若 $L = L_{\Box}$，且 K $\subseteq$ L，则 L 具有 *Craig* 插值性
- 质。此外，若 $\mathbf{G}$ 完全终止，则 L具有一致插值性质。

该定理目前的形式无法为两类逻辑带来强有力的一般性正面结果，原因有二。首先，在中间逻辑领域，已知只有七种相容的中间逻辑具有 Craig 插值性质和一致插值性质，分别是 IPC 、 LC 、 KC 、 Bd_2, Sm 、 GSc 和 CPC [65]。其次，对于模态演算系统，是否为半解析取决于对规则的临时考察，因为目前我们尚无半解析模态规则的一般形式。然而，对于模态逻辑，已有许多关于 Craig 插值性质的证明论证明，例如 GL 模态逻辑 [11] 以及 [45] 中的直觉主义模态逻辑（另见第3节）。

为了陈述我们的否定性结果（以下推论），我们依赖于这样一个事实：在广泛的一类逻辑中，CIP 和 UIP 均不成立 [12,34,35,65,66]。因此，我们得出结论：不存在仅由半解析规则和聚焦公理构成的（完全终止的）演算系统。

▶ **推论 49** （否定性结果，Craig 插值性质）。 以下结果成立：

- 除 IPC、LC、KC、Bd_2, Sm、GSc 和 CPC 这些逻辑外，没有任何中间逻辑拥有单结论或多结论半解析序贯演算。除 S4 至多有 *37* 个、Grz至多有 *6* 个例外的可能性外，它们的一致扩张均没有单结论或多结论半解析序贯演算。

▶ **推论 50** （否定性结果，一致插值性质）。 除 S4至多有六个扩张的可能性外，S4 和 K4 的扩张均没有单结论或多结论的完全终止半解析序贯演算。

4.2.2 （模态）子结构逻辑与线性逻辑

上一节的结果被推广到（模态）子结构逻辑与线性逻辑。考虑有界语言 $\mathrm{L}^b := \{\wedge, \vee, \to, *, 0, 1, \top, \bot\}$ 以及无界语言 $\mathrm{L}^u := \mathrm{L}^b \setminus \{\top, \bot\}$。记 $\mathrm{L}^b_! := \mathrm{L}^b \cup \{!\}$ 与 $\mathrm{L}^u_! := \mathrm{L}^u \cup \{!\}$。我们在图 12 和图 13 中回顾一些关于子结构规则与线性规则的著名演算系统。图14的左列给出了使用这些规则、图4中的弱化与收缩规则，以及图 11中的 $(\bot_l)^*$ 和 $(\top_r)^*$ 的著名序列演算。左列中演算系统的单结论版本分别为 FLe、FLew、FLec、IMALL、AIMALL 和 RIMALL。

对于包含'!'的语言$\mathcal{L}^b_!$，我们利用图13中的规则，为图14右栏中的若干逻辑给出序列演算。值得注意的是，若将语言中的!记为 □，则图13中的规则类似于标准模态规则。因此，例如，我们写$\mathbf{FL_eK}$来表示$\mathbf{FL_e} + \{K!\}$，写$\mathbf{FL_{ew}D}$来表示$\mathbf{FL_{ew}} + \{K!, D!\}$，或写$\mathbf{FL_eT}$来表示$\mathbf{FL_e} + \{!_l\}$；同样，我们用FLeK、FLewD和FLeT表示它们相应的逻辑。下列演算系统已在 [20,30,32,40,41,48,49,73–75,85],以及 [21,命题 4]中被证明具有切割可容许性：

▶定理 *51.* 以下序列演算具有切割可容许性：*FL*e、*FL*ew、*FL*ec、*CFL*e、*CFL*ew、*CFL*ec、*LJ*、*LK*、*IMALL*、*AIMALL*、*RIMALL*、*MALL*、*AMALL*、*RMALL*、$X + \{(!_r), (!_l)\}$，其中 $X \in \{CFL_e, CFL_{ew}, CFL_{ec}, LK\}$ ； $CFL_e + \{(!_r), (!_l), (c!)\}$ 、 $CFL_{ew} + \{(!_r), (!_l), (c!)\}$ 、 *ILL* 、 *CLL* 、 *ALL* 、 *RLL* 、 *ELL*。

$$\mathsf{id}_\varphi\ \frac{}{\varphi \Rightarrow \varphi} \qquad 0_l\ \frac{}{0 \Rightarrow} \qquad 1_r\ \frac{}{\Rightarrow 1} \qquad 0_r\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, 0} \qquad 1_l\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{1, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$*_l\ \frac{\varphi, \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi * \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad (\to_l)^*\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \psi, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\varphi \to \psi, \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'} \qquad \vee_l\ \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \wedge_l^i\ \frac{\varphi_i, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\varphi_0 \wedge \varphi_1, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (i{=}0,1)$$

$$*_r\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Gamma' \Rightarrow \Delta', \psi}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta', \varphi * \psi} \qquad \to_r\ \frac{\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \to \psi} \qquad \vee_r^i\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_i}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi_0 \vee \varphi_1}\ (i{=}0,1) \qquad \wedge_r\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \wedge \psi}$$

图12 次结构逻辑 $\mathrm{CFL_e}$ 的序列演算$\mathbf{CFL_e}$。规则 $(\vee_l)$、$(\wedge_l^i)$、$(\to_r)$、$(\vee_r^i)$、$(\wedge_r)$ 和 (cut) 与图4中的相同。

$$!_r\ \frac{!\Gamma \Rightarrow \varphi}{!\Gamma \Rightarrow !\varphi} \qquad !_l\ \frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, !\varphi \Rightarrow \Delta} \qquad \mathsf{w}!\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, !\varphi \Rightarrow \Delta} \qquad \mathsf{c}!\ \frac{\Gamma, !\varphi, !\varphi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, !\varphi \Rightarrow \Delta} \qquad K!\ \frac{\Gamma \Rightarrow \varphi}{!\Gamma \Rightarrow !\varphi} \qquad D!\ \frac{\Gamma \Rightarrow}{!\Gamma \Rightarrow}$$

图13 线性逻辑中"!"的序列规则。

于是，次结构逻辑和线性逻辑中的定理48的对应版本如下（这些结果可推广至多模态次结构逻辑 [7], ，由于篇幅所限，此处不作讨论）：

▶ **定理52** ([7])。 设L 是定义在 $L \in \{L^b, L^u, L^b_!, L^u_!\}$ 上的逻辑，且$\mathbf{G}$ 是L的单结论（分别为多结论）半解析演算系统。那么，

- 若 $L = L^b$ 或 $L = L^b_!$ 且IMALL $\subseteq$ L （分别为MALL $\subseteq$ L），则L 具有 *Craig* 插值性质；
- 若 $L = L^u$ 或 $L = L^u_!$ 且$\mathsf{FL_e} \subseteq$ L （分别为$\mathsf{CFL_e} \subseteq$ L），则L 具有 *Craig* 插值性质。

▶ **推论53** (正面结果)。 具有 *Craig* 插值性质的逻辑的具体例子包括定理*51*中的序列演算系统所定义的逻辑。

证明。这些逻辑的序列演算由聚焦公理和半解析规则组成。因此，根据定理48，我们得到这些逻辑的 Craig 插值性质。◀

我们利用一系列关于多种逻辑中不存在 CIP 的事实，得出否定性结果。在此之前，我们先回顾其中一些逻辑。图15给出了定义带点交换剩余格簇的等式条件，图 16 则给出了通常意义上的等式逻辑。设 $\mathbf{A}$ 为一个带点交换剩余格，$\mathbf{Fm}$ 为带点交换剩余格语言的公式代数。给定任意一个带点交换剩余格簇 $\mathbb{V}$，一个逻辑 $\mathrm{L}^{\mathbb{V}}$

关于 $\mathcal{L}^u$ 的演算系统:

$\mathbf{CFL_e}$:=图12

$\mathbf{CFL_{ew}} := \mathbf{CFL_e} + \{(\mathsf{w}_l),\ (\mathsf{w}_r)\}$

$\mathbf{CFL_{ec}} := \mathbf{CFL_e} + \{(\mathsf{c}_l),\ (\mathsf{c}_r)\}$

关于$\mathcal{L}^b$的演算系统:

$\mathbf{MALL} := \mathbf{CFL_e} + \{(\bot_l)^*,\ (\top_r)^*\}$

$\mathbf{AMALL} := \mathbf{MALL} + \{(\mathsf{w}_l),(\mathsf{w}_r)\}$

$\mathbf{RMALL} := \mathbf{MALL} + \{(\mathsf{c}_l),\ (\mathsf{c}_r)\}$

关于 $\mathcal{L}_!^b$ 的演算系统:

$\mathbf{CLL} := \mathbf{MALL} + \{(!_r),\ (!_l),\ (\mathsf{w}!),\ (\mathsf{c}!)\}$

$\mathbf{ILL} := \mathbf{IMALL} + \{(!_r),(!_l),(\mathsf{w}!),(\mathsf{c}!)\}$

$\mathbf{ELL} := \mathbf{MALL} + \{(\mathsf{w}!),(\mathsf{c}!),(\text{模态逻辑}K!),(D!)\}$

$\mathbf{ALL} := \mathbf{CLL} + \{(\mathsf{w}_l),\ (\mathsf{w}_r)\}$

$\mathbf{RLL} := \mathbf{CLL} + \{(\mathsf{c}_l),(\mathsf{c}_r)\}$

图14 不同语言下逻辑的序列演算。在**ILL**中，我们使用规则的单结论版本。规则 (w_l)、(w_r)、(c_l) 和 (c_r) 见图4，规则 $(\bot_l)^*$ 和 $(\top_r)^*$ 见图 11。

(prl)	$1 \le (x \to y) \vee (y \to x)$	(fp)	$0 = 1$
(dis)	$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$	(div)	$x * (x \to y) = y * (y \to x)$
(inv)	$\neg\neg x = x$	(can)	$x \to (x * y) = y$
(int)	$x \le 1$	(rcan)	$1 = \neg x \vee ((x \to (x * y)) \to y)$
(bd)	$0 \le x$	(nc)	$x \wedge \neg x \le 0$
(id)	$x = x * x$		

图15 一些等式条件。

可通过对所有 $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathbf{Fm}$ 固定以下内容来定义,

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{L}^{\mathbb{V}}} \varphi \Leftrightarrow \text{对于任意 } \mathbf{A} \in \mathbb{V} \text{ 和同态 } v\colon \mathbf{Fm} \to \mathbf{A}:$$
$$\text{if for all } \psi \in \Gamma,\quad 1 \leqslant v(\psi),\qquad \text{then}\qquad 1 \leqslant v(\varphi)$$

我们用$\mathcal{V}(\mathbb{K})$表示由一类带点交换剩余格 $\mathbb{K}$生成的簇。下面定义一些基本模糊逻辑。对于任意 $n > 1$，令 $L_n = \{0, \frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}$ 和

$$\mathbb{L}_n = \langle L_n, min, max, *_{\text{Ł}}, \to_{\text{Ł}}, 1, 0\rangle \quad , \quad \mathbb{G}_n = \langle L_n, min, max, min, \to_G, 1, 0\rangle$$

其中 $x *_{\text{Ł}} y = max\{0, x + y - 1\}$、$x \to_{\text{Ł}} y = min\{1, 1 - x + y\}$，且 $x \to_G y$ 若 $x > y$ 则为 y，否则为 1。定义 $\mathbf{Ł}_n$ 和 $\mathbf{G}_n$ 为 $n > 1$ 的逻辑，分别对应$\mathcal{V}(\mathbb{L}_n)$ 和 $\mathcal{V}(\mathbb{G}_n)$（见 [67]）。另外，将相关逻辑 R 定义为满足以下条件的分配带点交换剩余格簇的逻辑：对于任意 x，$x \le x * x$ 和 $\neg\neg x = x$。

▶ **推论54** （否定性结果，Craig 插值性质）。 以下两族逻辑不具备 *Craig* 插值性质，因此不可能拥有单结论半解析序列演算。第一族:

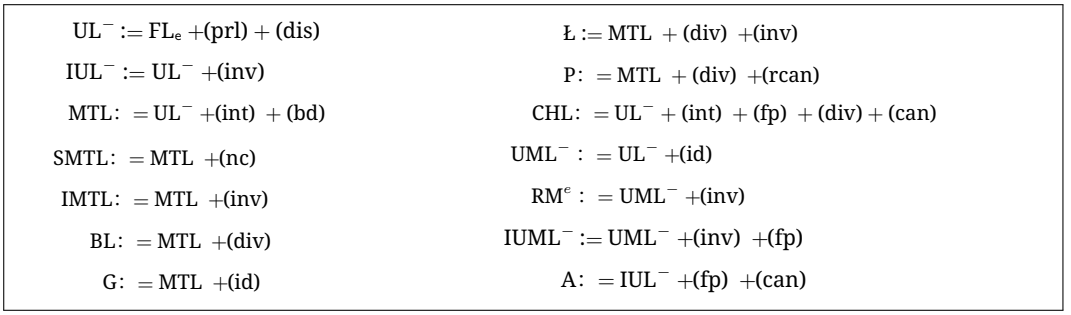

图 16 一些次结构逻辑。在每种逻辑中，公理 (prl) 和 (dis) 均成立 .

（[10, 53, 88][67, 推论 *3*.2]）。UL^-、*MTL*、*SMTL*、*BL*、*P*、*CHL*、G_n（对于 $n \geq 4$）；([65])。*IPC* 的所有一致扩张，但可能不包括 *IPC*、*G*、*KC*、Bd_2，*Sm*、*GSc* 和经典命题演算；（[10,70][67, 定理 *3*.3]）。所有一致的 *BL* 扩张，但可能不包括 *G*、*G3* 和经典命题演算；以及第二族：（[10, 53, 88][67, 推论 *3*.2]）。*R*、*A*、IUL^-、*IMTL*、*Ł*、$Ł_n$（对于 $n \geq 3$）；（[67,推论 *3*.5][51]）。所有一致的 *IMTL* 扩张，因此也是 *Ł* 的所有一致扩张，但不包括经典命题演算；（[67,定理 *4*.9]）。RM^e 的所有一致扩张，但可能不包括 RM^e、$IUML^-$、经典命题演算、RM^e_3、RM^e_4、经典命题演算 $\cap IUML^-$、$RM^e_4 \cap IUML^-$ 以及经典命题演算 $\cap RM^e_3$。这包括：RM^e_n 对于 $n \geq 5$、$RM^e_{2m} \cap RM^e_{2n+1}$ 对于 $n \geq m \geq 1$ 且具有 $n \geq 2$，以及 $RM^e_{2m} \cap IUML^-$ 对于 $m \geq 3$；（[28,推论 *3*.14]）。*MALL* 和 *CLL* 的连续统多个扩张。第二族中的逻辑也不具有多结论半解析演算。

关于一致插值性质（UIP），我们有如下结果。我们的定理推广了 [8] 和 [12] 的结果，也涵盖了模态情形：

▶ **推论 55** (正面结果，一致插值性质)。 逻辑$\mathrm{CFL_e}$、$\mathrm{CFL_{ew}}$和经典命题演算，它们的模态逻辑K 和D 模态版本，以及逻辑$\mathrm{FL_e}$、$\mathrm{FL_{ew}}$、$\mathrm{FL_e}$模态逻辑K、$\mathrm{FL_{ew}}$模态逻辑K、$\mathrm{FL_e}$D、$\mathrm{FL_{ew}}$D、$\mathrm{FL_e}$T和$\mathrm{FL_{ew}}$T 均具有一致插值性质。

证明。 这些逻辑的通常演算系统中的规则都是半解析的，其公理都是聚焦的；并且在没有收缩规则的情况下，这些演算系统显然是完全终止的。 ◀

4.2.3 非正规模态逻辑与条件逻辑

这种方法可以扩展到（非正规）模态逻辑、条件逻辑和直觉主义模态逻辑。为了证明这种方法具有普遍性，我们再次将其应用于各种逻辑，并在这一次证明 ULIP。首先，我们需要介绍这些逻辑。

28 证明论中的插值

模态公理：

(M) $\Box(\varphi \wedge \psi) \to \Box\varphi \wedge \Box\psi$ (C) $\Box\varphi \wedge \Box\psi \to \Box(\varphi \wedge \psi)$ (自然数集) $\Box\top$

条件公理：

(CM) $(\varphi \rhd \psi \wedge \theta) \to (\varphi \rhd \psi) \wedge (\varphi \rhd \theta)$ (CN) $\varphi \rhd \top$ (ID) $\varphi \rhd \varphi$

(CC) $(\varphi \rhd \psi) \wedge (\varphi \rhd \theta) \to (\varphi \rhd \psi \wedge \theta)$ (CEM) $(\varphi \rhd \psi) \vee (\varphi \rhd \neg\psi)$

模态与条件规则：

$$(\mathsf{E})\ \frac{\varphi \leftrightarrow \psi}{\Box\varphi \leftrightarrow \Box\psi} \qquad (\mathsf{CE})\ \frac{\varphi_0 \leftrightarrow \varphi_1 \quad \psi_0 \leftrightarrow \psi_1}{\varphi_0 \rhd \psi_0 \to \varphi_1 \rhd \psi_1}$$

图17 模态与条件公理和规则。

非正规模态逻辑：

EN := E +(自然数集) M := E +(M) MN := M +(自然数集) MC := M +(C)

模态逻辑K := MC +(自然数集) EC := E +(C) ECN: = EC +(自然数集)

条件逻辑：

CEN := CE +(C自然数集) CM: = CE +(CM) CMN := CM +(CN) CMC: = CM +(CC)

CK: = CMC +(CN) CEC: = CE +(CC) CECN: = CEC +(CN) CKID: = CK +(ID)

CKCEM: = CK +(CEM) CKCEMID: = CKCEM + (ID)

图18 非正规模态逻辑与条件逻辑。

将$\mathcal{L}_{\rhd} := \{\wedge, \vee, \to, \bot, \rhd\}$定义为条件逻辑的语言。对于非正规模态逻辑与条件逻辑，统一（局部）插值性质的研究不如在正规逻辑中的研究充分。回顾一下，基本的非正规模态逻辑 E （相应地，条件逻辑 CE ）是包含经典重言式、且在（ MP ）和（ E ）（相应地，（ CE ））下封闭的最小$\mathcal{L}_{\Box}$-公式集（相应地，$\mathcal{L}_{\rhd}$-公式集）。如图18所示，通过添加图17中的公理来定义其他非正规模态逻辑与条件逻辑。此外，回顾一下广为人知的直觉主义非正规模态逻辑，即直觉主义单调模态逻辑 iM；它是在 IPC 上由规则（E）和公理 $\Box(\varphi \wedge \psi) \to \Box\varphi \wedge \Box\psi$ 公理化的。

为了证明逻辑具有 ULIP，我们需要将这一概念扩展到序列演算中，这与 UIP 的情形类似。如果某个序列演算具有这种形式的 ULIP，那么与之对应的逻辑也具有 ULIP。以下定理总结了这些结果。

▶**定理 56** (正面结果， [3,4])。以下逻辑具有统一局部插值性质（因此也具有一致插值性质和 *Lyndon* 插值性质）：非正规模态逻辑：E、M、EN、MN、MC和模态逻辑K。条件逻辑：CE、CM、CEN、CMN、CMC、CK和CKID。

- 直觉主义单调模态逻辑 iM。

▶**定理57** (否定结果， [4])。逻辑 CKCEM 和 CKCEMID 不具有统一局部插值性质（但具有一致插值性质）。因此，它们不可能拥有完全终止的半解析演算。非正规模态逻辑 EC 和 ECN 以及条件逻辑 CEC 和 CECN 不具有*Craig* 插值性质（因此也不具有统一（局部）插值性质）。所以，它们不可能拥有半解析演算。

5 使用序列演算推广形式的插值 i

对于许多逻辑，目前尚无已知的无切相继演算。某些类型的受限切割并不会妨碍前原法（见第 3.2 节），但对于某个逻辑而言，找到无切的超序列、嵌套序列或带标签序列演算，往往比找到（半）解析序列演算更容易。此外，前者更适合用于证明 LIP。本节将展示如何将前原法推广到这些相继式的推广形式。

我们的目标是提供一份通用指南，说明如何构造插值式，以便进一步探究读者感兴趣的其他逻辑（本节讨论的逻辑除外）的插值性质。为此，我们提出一种逆向工程策略。具体而言，我们将分析规则的形式，并以此为指引，构造出恰当的插值式。

由于超序列和嵌套序列通常可以转换为带标签序列格式，而且基于逻辑 [71, 72]，的克里普克语义，已有强大的通用方法可用于构造无割带标签序列演算，因此我们先在第 5.1 节和第 5.2 节重点讨论经典命题演算之上的模态逻辑的带标签序列。随后，我们将在第 5.3 节简要说明如何将这一方法应用于超序列和嵌套序列。

本节所述方法有时会因显式使用语义元素而受到批评。对此，我们想引用文献 [63] 中对该方法的另一种表述，它避免了这种显式使用。

5.1 带标签序列

（基于语言$\mathcal{L}$的）带标签序列是（基于$\mathcal{L}$的）一种附加了标签的序列：序列中的每个公式 φ 都配有一个标签 i，从而得到一个带标签公式 $i{:}\varphi$。标签 i 可以取自任意集合。不失一般性，我们将使用来自 $\mathbb{N}$ 的整数标签。

这种证明插值的方法最初由 Fitting 和 Kuznets 为嵌套序列 [27] 开发，之后 Kuznets 在 [57]将其改编为带标签序列。这里我们主要遵循 [58], ，其中可以找到更多细节。与第3节一样，我们将给出保证插值成立的一般条件，但这些条件依据的是克里普克框架条件，而不是序列规则形式。

与带标签序列本身一样，这种方法依赖于克里普克语义。具体而言，标签 i 被解释为 Kripke 世界。而标准相继式 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 由

$$\mathsf{Lid}^{*}\ \frac{}{\mathcal{R}, i{:}\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta, i{:}\varphi} \qquad \mathsf{L}\wedge_{\iota}\ \frac{\mathcal{R}, i{:}\varphi, i{:}\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\mathcal{R}, i{:}\varphi \wedge \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \mathsf{L}\to_{\iota}\ \frac{\mathcal{R}, \Gamma \Rightarrow \Delta, i{:}\varphi \quad \mathcal{R}, i{:}\psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\mathcal{R}, i{:}\varphi \to \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

图19 图 11 中部分命题序列规则的带标签版本。

两个公式多重集（前件 Γ 和后件 Δ），带标签序列 $\mathcal{R}\ \Gamma \Rightarrow \Delta$ 由两个多重集 Γ 和 Δ （其中包含带标签公式）以及关系部分$\mathcal{R}$组成。该$\mathcal{R}$由形如 iRj 的关系原子构成，其中 i 和 j 是标签， R 是克里普克可及关系。[1] $\mathtt{L}(S)$ 表示 S中出现的所有标签的集合。例如，$\mathtt{L}(1R2, 2{:}\varphi, 4{:}p \Rightarrow 4{:}\psi) = \{1, 2, 4\}$。我们用 $i \in S$ 表示 $i \in \mathtt{L}(S)$。

▶ **定义58** (带标签语义)。 设 $M = (W, R, V)$ 是一个克里普克模型。对于带标签序列 $S = R\ \Gamma \Rightarrow \Delta$，函数 $[\![\cdot]\!]\colon X \to W$称为从 S到 M 的解释，当且仅当$X \supseteq \mathtt{L}(S)$，即 $[\![\cdot]\!]$解释 S的所有标签，并且当 $iRj \in R$ 时， $[\![i]\!]R[\![j]\!]$在 M 中成立。对于这样的解释，$M\,[\![\cdot]\!] \models R\ \Gamma \Rightarrow \Delta$ 当且仅当

$$\textit{either} \quad \mathcal{M}, [\![i]\!] \not\models \varphi \textit{ for some } i{:}\varphi \in \Gamma \quad \textit{or} \quad \mathcal{M}, [\![j]\!] \models \psi \textit{ for some } j{:}\psi \in \Delta,$$

在这种情况下，我们称 $R\ \Gamma \Rightarrow \Delta$对于 $[\![\cdot]\!]$为真。否则，它为假。 S在模型类 $\mathcal{C}$ 中有效，记作 $\mathcal{C} \models S$，当且仅当对于将 S映射到模型 $M \in \mathcal{C}$ 中的所有解释 $[\![\cdot]\!]$， S都为真。

如果将解释的定义域精确限定为序列 S 的标签 $\mathtt{L}(S)$，而不是其任意超集 $X \supseteq \mathtt{L}(S)$，有效性的概念也不会改变。

▶ 注59。普通序列 $\Gamma \Rightarrow \Delta$ 可以视为单标签带标签序列 $1{:}\Gamma \Rightarrow 1{:}\Delta$ ，其中带有 $\mathcal{R} = \varnothing$，且 $i{:}\Pi := \{i{:}\varphi \mid \varphi \in \Pi\}$。这种表示是忠实的：任何定义在 1 上的映射 $[\![\cdot]\!]$，都是 $1{:}\Gamma \Rightarrow 1{:}\Delta$ 的解释，并且 $\mathcal{M}\,[\![\cdot]\!] \models 1{:}\Gamma \Rightarrow 1{:}\Delta$ 当且仅当$\mathcal{M}\ [\![1]\!] \models \bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta$。⌟

普通序列的推理规则和证明已在第2.2节中定义，因此我们将使用相同的记号。标记相继式规则的示例可见于图19–21，并将在接下来的段落中作更详细的说明。在谈论相继式、规则等时，我们通常会省略带标签一词，以指带标签版本，否则则使用无标签或普通。带标签演算的名称以**L** 为前缀，带标签规则的名称以L为前缀。

带标签序列演算通常由三组规则组成：命题规则、模态规则和特殊规则。命题规则可通过将以下修改应用于图 11（或任何其他合适的演算）中除切规则以外的每条无标签规则而得到。[2] 对于一条无标签规则，在结论中添加相同的关系部分$\mathcal{R}$ ，并

[1] 根据克里普克语义，可以使用多个关系和/或 n元关系。[2] 我们省略对切规则的处理，因为标记相继式演算通常是无切的。

$$\mathsf{L}\Box_l \frac{iRj, \mathcal{R}, j{:}\varphi, i{:}\Box\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{iRj, \mathcal{R}, i{:}\Box\varphi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \mathsf{L}\Box_r \frac{iRj, \mathcal{R}, \Gamma \Rightarrow \Delta, j{:}\varphi}{\mathcal{R}, \Gamma \Rightarrow \Delta, i{:}\Box\varphi}\ (j \notin \mathcal{R}, \Gamma \Rightarrow \Delta)$$

图 20 语言$\mathcal{L}_{\Box}$的唯一模态 $\Box$ 的标记相继式规则。

$$\mathsf{L}B \frac{jRi, iRj, \mathcal{R}, \Gamma \Rightarrow \Delta}{iRj, \mathcal{R}, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \mathsf{L}4 \frac{iRk, iRj, jRk, \mathcal{R}, \Gamma \Rightarrow \Delta}{iRj, jRk, \mathcal{R}, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \mathsf{L}D \frac{iRj, \mathcal{R}, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\mathcal{R}, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (j \notin \mathcal{R}, \Gamma \Rightarrow \Delta)$$

图 21带 注：对称性、传递性和串行性框架条件的带标签序列规则 .

对所有前提，将多重集 Γ、 Δ 等视为带标签公式的多重集，并为所有主公式和活动公式赋予相同的标签。图 11 中三个规则的结果见图19。每种模态都需要两条模态规则，且反映相应模态的克里普克语义。语言$\mathcal{L}_{\Box}$ 的两条规则见图 20。特殊规则根据具体逻辑分别确定，并且通常可以基于该逻辑的克里普克框架条件通过算法生成 [72]。例如，框架分别满足对称性、传递性和串行性时所添加的规则见图 21。

▶**定义 60。 </style}设模态逻辑L** 相对于一类克里普克模型 C 是完备的。当且仅当对每个序列**LG** 都是L 的演算 （相对于 C），即$\mathbf{LG} \vdash S \Leftrightarrow C \models S$ 对每个序列 S均成立。

图 11 中命题规则的带标签版本，即除 $(K)^*$ 之外的所有规则，连同图 20 中的规则，构成模态逻辑 K 的（无割）演算 **LG3K** （基于 $\mathcal{L}_{\Box}$）。向 **LG3K** 加入图 21 中 (LB)、(L4) 与 (LD) 的任意组合，便得到相对于相应类型框架完备的那些逻辑的演算系统。注意，其中某些逻辑（例如 B）并不存在已知的无割无标签 序列演算。关于构造无割带标签序列演算的一般方法，参见 [72]。

▶ **命题 61.** 若 **LG** 是 L 的演算，则对任意 i，$\mathsf{L} \vdash \varphi \to \psi$ 当且仅当 $\mathbf{LG} \vdash i{:}\varphi \Rightarrow i{:}\psi$ 。

5.2 带标签插值

与无标签情形一样，定理 $\varphi \to \psi$ 的插值式是根据分割序列 $i{:}\varphi;\ \Rightarrow; i{:}\psi$ 的证明得出的（对于任意标签 i）。分裂的定义与定理 11 中相同，关系原子仍置于分裂之外。分割序列 $\mathcal{R}\ \Gamma; \Gamma' \Rightarrow \Delta; \Delta'$的左侧（右侧）是 $\mathcal{R}\ \Gamma \Rightarrow \Delta$ （分别为 $\mathcal{R}\ \Gamma' \Rightarrow \Delta'$）。分裂规则的定义与无标签情形相同。对于图 20 中的模态规则， Γ 和 Δ 在前提和结论中的分裂方式相同，而前提中的 $i{:}\Box\varphi$ 和 $j{:}\varphi$ 都必须与结论中的 $i{:}\Box\varphi$ 位于分裂的同一侧。

32 证明论中的插值

由于带标签公式根据给定的解释 $[\![\cdot]\!]$,在不同的 Kripke 世界中进行解释，插值式也应如此；它们不能只是公式，而应是带标签公式的布尔组合[3]：

▶ **定义 62**（多公式）。语法 $\mho ::= i{:}\ \varphi \mid (\mho \otimes \mho) \mid (\mho \oplus \mho)$ 其中 $\varphi \in$ 形式$_{\mathcal{L}}$和 $i \in \mathbb{N}$ 定义了多重公式（基于语言 L）。$i \in \mho$ 表示标签 i 出现在 $\mho$中。

▶ 定义 *63*（多公式语义）。设 $\mho$是一个多公式，且 $[\![\cdot]\!]{:}\ X \to W$是到 $M = (W, R, V)$ 中的一个解释，其中 $X \supseteq \mathrm{L}(\mho)$。那么，$M\,[\![\cdot]\!] \models i{:}\varphi$当且仅当 $M\,[\![i]\!] \models \varphi$；而多公式的合取 $\otimes$和析取 $\oplus$按经典方式运作，即，$M\,[\![\cdot]\!] \models \mho_1 \otimes \mho_2$*(*$M\,[\![\cdot]\!] \models \mho_1 \oplus \mho_2$*)* 当且仅当 $M\,[\![\cdot]\!] \models \mho_j$，对于两个 $j = 1, 2$（分别地，至少对于一个 $j = 1, 2$）成立。我们称两个多公式 $\mho$ 和 $\mho'$ 逻辑等价，当且仅当对于任意模型 M 及任意将 $\mho$和 $\mho'$解释到 M 中的解释 $[\![\cdot]\!]$，都有 $M\,[\![\cdot]\!] \models \mho$当且仅当 $M\,[\![\cdot]\!] \models \mho'$。

$\mathrm{Var}(\mathcal{R}\ \Gamma \Rightarrow \Delta)$ 和 $\mathrm{Var}(\mho)$ 的定义忽略 $\mathcal{R}$ 以及所有标签。

▶**定义 64** (带标签的 Craig 插值)。语言 L 上的演算 $\mathbf{LG}$ 相对于克里普克模型类 C 具有带标签的 Craig 插值性质 (LCIP)，当且仅当：对于序列 $S = R\ \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'$，若$\vdash_{\mathbf{LG}} S$，则存在 L 上的多公式 $\mho$，使得

1. $\mathit{Var}(\mho) \subseteq \mathit{Var}(\Gamma, \Delta) \cap \mathit{Var}(\Gamma', \Delta')$，即 $\mho$ 中的所有原子都出现在分裂的两侧；*2.* 对于 S 到克里普克模型 $M \in C$ 的任意解释 $[\![\cdot]\!]$：*a* 若 $M\,[\![\cdot]\!] \not\models \mho$，则 $M\,[\![\cdot]\!] \models R\ \Gamma \Rightarrow \Delta$；*b* 若 $M\,[\![\cdot]\!] \models \mho$，则 $M\,[\![\cdot]\!] \models R\ \Gamma' \Rightarrow \Delta'$；*3.* $\mathrm{L}(\mho) \subseteq \mathrm{L}(R\ \Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta')$，即 $\mho$ 中的所有标签都出现在该序列中。

在这种情况下，我们写作 $\vdash_{\mathbf{LG}} R\ \Gamma; \Gamma' \overset{\mho}{\Longrightarrow} \Delta; \Delta'$，并称 $\mho$ 为分割序列 $R\ \Gamma; \Gamma' \Rightarrow \Delta; \Delta'$ 在 $\mathbf{LG}$ 中的（带标签的 *Craig*）插值式。

这里，条件 1–2 是定理 12 中两个条件的带标签类比，其中条件 2a 相对于定理 12(2) 的第一部分取逆否形式。条件 3 是带标签特有的（嵌套序列和超序列中也会用到）。对于 LIP，与定理 13 一样：

▶ 定义 *65*（带标签的 *Lyndon* 插值）。带标签的 *Lyndon* 插值性质（*LLIP*）是将定理 *64* 中的条件 *1* 替换为：*1'.* $\mathit{Var}^{+}(\mho) \subseteq \mathit{Var}^{-}(\Gamma \Rightarrow \Delta) \cap \mathit{Var}^{+}(\Gamma' \Rightarrow \Delta')$ 且 $\mathit{Var}^{-}(\mho) \subseteq \mathit{Var}^{+}(\Gamma \Rightarrow \Delta) \cap \mathit{Var}^{-}(\Gamma' \Rightarrow \Delta')$。

▶**定理 66**。设 $\mathbf{LG}$ 是关于一类克里普克模型 C 的L 演算（两者都基于 $L_{\Box}$）。如果$\mathbf{LG}$ 具有 *LCIP/LLIP*，那么L 具有 *Craig* 插值性质/*Lyndon* 插值性质。

证明概要。如果 $\mho$ 是 $1{:}\varphi$；$\Rightarrow$；$1{:}\psi$ in LG 的带标签 Craig/Lyndon 插值，那么可以证明，公式 form($\mho$) 是 $\varphi \to \psi$ in L 的 Craig/Lyndon 插值，其中 form($\mho$) 定义为 form($i{:}\varphi$) $:= \varphi$，for m($\mho_1 \circledcirc \mho_2$) $:=$ form($\mho_1$) $\circ$ form($\mho_2$)，其中 $\circ \in \{\wedge, \vee\}$。◀

---

[3] 合取和析取通常已足够，必要时再添加其他联结词。

带标签公理 (Lid*)的四种分裂对应的插值式

$$LR(\mathsf{Lid}^*)\ \frac{}{\mathcal{R}, i{:}\varphi, \Gamma; \Gamma' \overset{i:\varphi}{\Longrightarrow} \Delta; \Delta', i{:}\varphi} \qquad RR(\mathsf{Lid}^*)\ \frac{}{\mathcal{R}, \Gamma; \Gamma', i{:}\varphi \overset{i:\top}{\Longrightarrow} \Delta; \Delta', i{:}\varphi}$$

$$LL(\mathsf{Lid}^*)\ \frac{}{\mathcal{R}, i{:}\varphi, \Gamma; \Gamma' \overset{i:\bot}{\Longrightarrow} i{:}\varphi, \Delta; \Delta'} \qquad RL(\mathsf{Lid}^*)\ \frac{}{\mathcal{R}, \Gamma; \Gamma', i{:}\varphi \overset{i:\neg\varphi}{\Longrightarrow} \Delta, i{:}\varphi; \Delta'}$$

一元带标签规则（$\mathsf{L}\wedge_l$）的两种分裂对应的插值式变换

$$L(\mathsf{L}\wedge_l)\ \frac{\mathcal{R}, i{:}\varphi, i{:}\psi, \Gamma; \Gamma' \overset{\mho}{\Longrightarrow} \Delta; \Delta'}{\mathcal{R}, i{:}\varphi \wedge \psi, \Gamma; \Gamma' \overset{\mho}{\Longrightarrow} \Delta; \Delta'} \qquad R(\mathsf{L}\wedge_l)\ \frac{\mathcal{R}, \Gamma; \Gamma', i{:}\varphi, i{:}\psi \overset{\mho}{\Longrightarrow} \Delta; \Delta'}{\mathcal{R}, \Gamma; \Gamma', i{:}\varphi \wedge \psi \overset{\mho}{\Longrightarrow} \Delta; \Delta'}$$

二元带标签规则（$\mathsf{L}\to_l$）的两种分裂对应的插值式变换

$$L(\mathsf{L}\to_l)\ \frac{\mathcal{R}, \Gamma; \Gamma' \overset{\mho_1}{\Longrightarrow} i{:}\varphi, \Delta; \Delta' \quad \mathcal{R}, i{:}\psi, \Gamma; \Gamma' \overset{\mho_2}{\Longrightarrow} \Delta; \Delta'}{\mathcal{R}, i{:}\varphi \to \psi, \Gamma; \Gamma' \overset{\mho_1 \circledcirc \mho_2}{\Longrightarrow} \Delta; \Delta'} \qquad R(\mathsf{L}\to_l)\ \frac{\mathcal{R}, \Gamma; \Gamma' \overset{\mho_1}{\Longrightarrow} \Delta; \Delta', i{:}\varphi \quad \mathcal{R}, \Gamma; \Gamma', i{:}\psi \overset{\mho_2}{\Longrightarrow} \Delta; \Delta'}{\mathcal{R}, \Gamma; \Gamma', i{:}\varphi \to \psi \overset{\mho_1 \circledcirc \mho_2}{\Longrightarrow} \Delta; \Delta'}$$

图 22 根据图 11 中的示例分裂规则构造 Craig/Lyndon 插值。大写的 L (R) 表示主公式位于分裂的左侧（分别为右侧）。

现在，我们转而采用一种逆向工程策略，探讨如何为各种带标签规则定义插值项变换。规则的形式将指导我们如何构造恰当的插值项变换。

对于这种新的表述，我们将根据分裂规则的形式，把带标签规则分为不同类别。不同类别需要不同的插值项变换。在阅读这些说明时，读者可能会注意到，这与图 7 中无标签规则的插值式构造有许多相似之处。事实上，图 7 中许多（隐含的）原则稍作修改后也适用于带标签情形。一个根本区别是，带标签情形中的插值式是多公式（包含标签），而不只是公式；这意味着我们在此需要 $\wedge$ 和 $\vee$ 的多公式变体 $\circledcirc$ 及 $\circledvee$ 。逆向工程策略得出了图 22 中所示的命题带标签规则的插值项变换，它们与图 7 中无标签规则的变换十分相似。

我们首先讨论三种插值式变换，它们可通过所谓的局部、合取和析取分裂规则来分类。这些类别在 [58]，中有精确定义，但其本质是由以下三个引理中提到的三个条件所界定的。具体而言，局部分裂规则是保留局部逻辑后承的单前提规则（如果某个解释使前提为真，那么同一解释也必定使结论为真），因此结论的插值式与前提的插值式相同。对于合取型（分别为析取型）二元分裂规则，插值式

结论的　　是各前提的插值式的合取（分别为析取）　　.

▶ 引理 *67*（局部分裂规则，[58]）。设 *C* 是一类克里普克模型。假设如下：*(i)* $\mathrm{L}(R^*, \Gamma;\ \Gamma' \Rightarrow \Delta;\ \Delta') \subseteq \mathrm{L}(R\ \Pi;\ \Pi' \Rightarrow \Sigma;\ \Sigma')$; *(ii)* $Var(\Gamma, \Delta) \subseteq Var(\Pi, \Sigma)$ 且 $Var(\Gamma', \Delta') \subseteq Var(\Pi', \Sigma')$; *(iii)* 对所有 $M \in C$ 以及将 $R\ \Pi;\ \Pi' \Rightarrow \Sigma;\ \Sigma'$ 解释 $[\![\cdot]\!]$ 到 M 中的解释：

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{M}[\![\cdot]\!] \models \mathcal{R}^*, \Gamma \Rightarrow \Delta & \Longrightarrow & \mathcal{M}[\![\cdot]\!] \models \mathcal{R}, \Pi \Rightarrow \Sigma,\ and \\ \mathcal{M}[\![\cdot]\!] \models \mathcal{R}^*, \Gamma' \Rightarrow \Delta' & \Longrightarrow & \mathcal{M}[\![\cdot]\!] \models \mathcal{R}, \Pi' \Rightarrow \Sigma'. \end{array}$$

那么，以下插值项变换适用于 *LCIP*：

$$\frac{\mathcal{R}^*, \Gamma; \Gamma' \overset{\mho}{\Longrightarrow} \Delta; \Delta'}{\mathcal{R}, \Pi; \Pi' \overset{\mho}{\Longrightarrow} \Sigma; \Sigma'},$$

也就是说，若 $\mho$ 是 $R^*, \Gamma; \Gamma' \Rightarrow \Delta;\ \Delta'$ 的带标签的 *Craig* 插值式，则 $\mho$ 也是 $R\ \Pi;\ \Pi' \Rightarrow \Sigma;\ \Sigma'$ 的带标签的 *Craig* 插值式。

▶**引理 68**（合取分裂规则，[58]）。设 *C* 为一类 *Kripke* 模型。假设：
(i) $\mathrm{L}(R_a, \Gamma_a;\ \Gamma'_a \Rightarrow \Delta_a;\ \Delta'_a) \subseteq \mathrm{L}(R\ \Pi;\ \Pi' \Rightarrow \Sigma;\ \Sigma')$ 对 $a \in \{1, 2\}$ 两者均成立；*(ii)* $Var(\Gamma_a, \Delta_a) \subseteq Var(\Pi, \Sigma)$ 且 $Var(\Gamma'_a, \Delta'_a) \subseteq Var(\Pi', \Sigma')$ 对 $a \in \{1,2\}$ 两者均成立；*(iii)* 对所有 $M \in C$ 以及将 $R\ \Pi;\ \Pi' \Rightarrow \Sigma;\ \Sigma'$ 解释到 M 中的解释 $[\![\cdot]\!]$：

$$\begin{array}{rcl} & \mathcal{M}[\![\cdot]\!] \models \mathcal{R}_1, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 & \Longrightarrow \quad \mathcal{M}[\![\cdot]\!] \models \mathcal{R}, \Pi \Rightarrow \Sigma, \\ & \mathcal{M}[\![\cdot]\!] \models \mathcal{R}_2, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2 & \Longrightarrow \quad \mathcal{M}[\![\cdot]\!] \models \mathcal{R}, \Pi \Rightarrow \Sigma,\ and \\ \mathcal{M}[\![\cdot]\!] \models \mathcal{R}_1, \Gamma'_1 \Rightarrow \Delta'_1\ , & \mathcal{M}[\![\cdot]\!] \models \mathcal{R}_2, \Gamma'_2 \Rightarrow \Delta'_2 & \Longrightarrow \quad \mathcal{M}[\![\cdot]\!] \models \mathcal{R}, \Pi' \Rightarrow \Sigma'. \end{array}$$

则下列插值项变换对 *LCIP* 成立：

$$\frac{\mathcal{R}_1, \Gamma_1; \Gamma'_1 \overset{\mho_1}{\Longrightarrow} \Delta_1; \Delta'_1 \quad \mathcal{R}_2, \Gamma_2; \Gamma'_2 \overset{\mho_2}{\Longrightarrow} \Delta_2; \Delta'_2}{\mathcal{R}, \Pi; \Pi' \overset{\mho_1 \mathbin{@} \mho_2}{\Longrightarrow} \Sigma; \Sigma'}.$$

▶ **引理 69**（析取分裂规则，[58]）。设 *C* 为一类 *Kripke* 模型。假设（i）与（ii）（出自定理 *68*）成立，并假设：
(iii) 对于所有 $\mathcal{M} \in \mathcal{C}$ 以及解释 $[\![\cdot]\!]$ 的 $\mathcal{R}\ \Pi;\ \Pi' \Rightarrow \Sigma;\ \Sigma'$ 到 $\mathcal{M}$：

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{M}[\![\cdot]\!] \models \mathcal{R}_1, \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1\ , \ \mathcal{M}[\![\cdot]\!] \models \mathcal{R}_2, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2 & \Longrightarrow & \mathcal{M}[\![\cdot]\!] \models \mathcal{R}, \Pi \Rightarrow \Sigma, \\ \mathcal{M}[\![\cdot]\!] \models \mathcal{R}_1, \Gamma'_1 \Rightarrow \Delta'_1 & \Longrightarrow & \mathcal{M}[\![\cdot]\!] \models \mathcal{R}, \Pi' \Rightarrow \Sigma',\ and \\ \mathcal{M}[\![\cdot]\!] \models \mathcal{R}_2, \Gamma'_2 \Rightarrow \Delta'_2 & \Longrightarrow & \mathcal{M}[\![\cdot]\!] \models \mathcal{R}, \Pi' \Rightarrow \Sigma'. \end{array}$$

那么，以下插值项变换适用于 *LCIP*：

$$\frac{\mathcal{R}_1, \Gamma_1; \Gamma_1' \overset{\mho_1}{\Longrightarrow} \Delta_1; \Delta_1' \quad \mathcal{R}_2, \Gamma_2; \Gamma_2' \overset{\mho_2}{\Longrightarrow} \Delta_2; \Delta_2'}{\mathcal{R}, \Pi; \Pi' \overset{\mho_1 @ \mho_2}{\Longrightarrow} \Sigma; \Sigma'}.$$

定理 67–69 中的变换也适用于 LLIP，前提是将假设 (ii) 加强为满足定理 65(1′)，同时考虑极性（详情见 [58]）。

在给出带标签的局部、合取和析取分裂规则的示例之前，我们注意到，这些概念在无标签情形中也已可见。

▶ **例 70** （无标签情形）。回顾定理 59，普通序列可视为只有一个标签的带标签序列。将定理 67–69 的条件应用于图 7 中的规则，可见 $R(\wedge_l^i)$、$R(\to_r)$ 和 $L(\mathsf{c}_r)$ 是局部分裂规则，$L(\vee_l)$、$L(\wedge_r)$ 和 $L(\to_l)$ 是析取分裂规则，而 $R(\vee_l)$、$R(\wedge_r)$ 和 $R(\to_l)$ 是合取分裂规则。请注意，规则的左/右分裂与插值项构造的析取/合取行为之间往往呈现对称性。在定理 23 的证明中，解析切规则的插值项变换也呈现出类似的模式。

对于模态无标签规则，考虑图5。规则 (T) 的任意分裂相对于任意自反模型类 $\mathcal{C}$ 都是局部的：如果命题在自反世界中不成立，那么也蕴涵命题不成立。这解释了图 8 中 (T) 的插值项保持。相比之下，图5中的其他规则都不是局部的，因此需要图 8 中的非平凡变换。」

现在来考察定理 70 的带标签类比。

▶ **例 71** （带标签情形）。对于图 22 中的命题规则，我们可以根据与定理 70 基本相同的论证，识别出局部、合取和析取分裂规则。对于模态带标签规则，其论证不同于无标签情形。图 20 中 ($\mathsf{L}\Box_l$) 的标准分裂版本是局部的（相对于任意模型类），因为 $\mathcal{M}\ [\![j]\!] \not\models \varphi$和 $[\![i]\!]R[\![j]\!]$蕴涵 $\mathcal{M}\ [\![i]\!] \not\models \Box\varphi$。因此，以下插值变换适用于相对于任意模型类的 LCIP/LLIP：

$$L(\mathsf{L}\Box_l)\ \frac{iRj, \mathcal{R}, j{:}\varphi, i{:}\Box\varphi, \Gamma; \Gamma' \overset{\mho}{\Longrightarrow} \Delta; \Delta'}{iRj, \mathcal{R}, i{:}\Box\varphi, \Gamma; \Gamma' \overset{\mho}{\Longrightarrow} \Delta; \Delta'} \qquad R(\mathsf{L}\Box_l)\ \frac{iRj, \mathcal{R}, \Gamma; \Gamma', i{:}\Box\varphi, j{:}\varphi \overset{\mho}{\Longrightarrow} \Delta; \Delta'}{iRj, \mathcal{R}, \Gamma; \Gamma', i{:}\Box\varphi \overset{\mho}{\Longrightarrow} \Delta; \Delta'}$$

然而，($\mathsf{L}\Box_r$) 的左分裂和右分裂版本无法归类为局部、合取或析取，因而需要采用不同的处理方式，具体讨论见定理 80。」

此外，许多一元特殊带标签规则都是局部的，因此无需更改插值式。许多特殊规则可由所谓的霍恩子句得到。用形如 $i_1Rj_1 \wedge \cdots \wedge i_mRj_m \to kRl$ 的霍恩子句限制框架类，相当于在带标签演算中加入规则

$$\frac{kRl, i_1Rj_1, \ldots, i_mRj_m, \mathcal{R}, \Gamma \Rightarrow \Delta}{i_1Rj_1, \ldots, i_mRj_m, \mathcal{R}, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (k,l \in i_1Rj_1, \ldots, i_mRj_m, \mathcal{R}, \Gamma \Rightarrow \Delta) \tag{2}$$

以及由其通过闭包条件得到的规则；也就是说，对于包含相同关系原子 [72, 的那些规则实例，将结论中的相同关系原子 i_aRj_a 和 i_bRj_b 同时从前提和结论中收缩。定理 11.27，推论 11.29]。请注意，由于没有主公式，此类规则只有一个对应的分裂规则（而不是左分裂版本和右分裂版本）。

▶ **例 72**（Horn 框架条件， [57]）。对于（2）或其收缩的任意分裂，针对满足条件 $i_1Rj_1 \wedge \cdots \wedge i_mRj_m \to kRl$ 的任意模型类，以下插值项变换适用于 LCIP/LLIP：

$$\frac{kRl, i_1Rj_1, \ldots, i_mRj_m, \mathcal{R}, \Gamma; \Gamma' \overset{\mho}{\Longrightarrow} \Delta; \Delta'}{i_1Rj_1, \ldots, i_mRj_m, \mathcal{R}, \Gamma; \Gamma' \overset{\mho}{\Longrightarrow} \Delta; \Delta'}$$

因此，图 21 中适用于任意对称框架模型类的规则（LB）的分裂版本，以及适用于任意传递框架模型类的规则（L4）的分裂版本，都是局部的，因此，上述插值项变换适用于 LCIP/LLIP。」

图 20 和图 21 中有两条规则不符合迄今所述的任何模式：（L$\Box_r$）和（LD）的前提中都包含一个未出现在结论中的新标签。这类规则需要更复杂的变换，以从前提插值式中移除多余标签。为此，我们引入用于修改解释的额外记号。

▶**定义 73.** 设 $M = (W, R, V)$ 为一个克里普克模型，且 $[\![\cdot]\!]\colon X \to W$ 将标签从 $X \subseteq \mathbb{N}$ 映射到 M 的世界。对于 $v \in W$ 和 $j \in \mathbb{N}$，我们定义 $[\![\cdot]\!]^v_j := \big([\![\cdot]\!] \setminus (\{j\} \times W)\big) \sqcup \{(j, v)\}$，其中 $\sqcup$ 用于强调这是不相交集合的并。

$[\![\cdot]\!]^v_j$ 的定义域是 $X \cup \{j\}$。注意，$[\![\cdot]\!]^v_j$ 与 $[\![\cdot]\!]$ 之间唯一可能的差别在于前者将 j 映射到 v。还要注意，若对于带标签序列 S 有 $j \notin \mathrm{L}(S)$，则 $[\![\cdot]\!]$ 是 S 的解释当且仅当 $[\![\cdot]\!]^v_j$ 是其解释，并且若二者皆是，则对任意 $v \in W$ 有 $\mathcal{M}[\![\cdot]\!] \models S$ 当且仅当 $\mathcal{M}[\![\cdot]\!]^v_j \models S$。多重公式同样适用。

▶**定义 74**。设 $M = (W, R, V)$ 是一个克里普克模型，且 $[\![\cdot]\!]\colon X \to W$ 是序列 S 到 M 中的一个解释。对于 $i \in X$ 和 $j \neq i$，我们记作

$$\mathcal{M}[\![\cdot]\!]^{iR\forall}_j \models S \quad \textit{whenever} \quad \forall v \in W \textit{ such that } [\![i]\!]Rv, \textit{ we have } \mathcal{M}[\![\cdot]\!]^v_j \models S$$
$$\mathcal{M}[\![\cdot]\!]^{iR\exists}_j \models S \quad \textit{whenever} \quad \exists v \in W \textit{ such that } [\![i]\!]Rv \textit{ and } \mathcal{M}[\![\cdot]\!]^v_j \models S.$$

▶**定义 75**。如果对于某些公式 B_1、……、B_m 和多重公式 $\mho_1$、……、$\mho_m$，满足 $j \notin \mathrm{L}(\mho_k)$，并且对于任意 $1 \leq k \leq m$、m 都有 $\mho = \bigwedge_{k=1}^{m}(j{:}B_k \otimes \mho_k)$（分别为 $\mho = \bigvee_{k=1}^{m}(j{:}B_k \oplus \mho_k)$），则多公式 $\mho$ 中的标签 j 是 $\otimes\oplus$-分离的（分别为 $\oplus\otimes$-分离的）。

▶**命题76**。设 $j \in \mathbb{N}$。对于任意多公式 $\mho$，存在一个与其逻辑等价的多公式 $\mho'$，使得 j 在 $\mho'$ 中是 $\otimes\oplus$-分离的（分别为 $\oplus\otimes$-分离的）。

证明。 $\mathcal{U}'$ 可以通过类似于用于合取范式（分别为析取范式）的重写来构造，这是基于以下逻辑等价式 $j\colon \varphi \mathbin{⍀} j\colon \psi$ 到 $j\colon \varphi \wedge \psi$ 以及 $j\colon \varphi \mathbin{⍁} j\colon \psi$ 到 $j\colon \varphi \vee \psi$。如果 $j\colon B_k$ 对于某个 k缺失，则添加 $j\colon \top\!⍀$ 或 $j\colon \bot\!⍁$，选择其中与之逻辑等价的一个。◀

定理76并不保证 $\mathcal{U}'$的唯一性，但给定 $\mathcal{U}$，我们知道至少存在一个与之逻辑等价的多公式 $\mathcal{U}'$，其中含有 j ⍀⍁-分离的（分别为 ⍁⍀-分离的）部分。从现在起，给定一个多公式 $\mathcal{U}$，我们允许选取这样一个 $\mathcal{U}'$，并将其记为 $\mathcal{U}_{⍀j⍁}$（分别记为 $\mathcal{U}_{⍁j⍀}$）。对于多公式 $\mathcal{U}$，我们进一步用 $\mathcal{U}^{j\mapsto i\Box}$（分别用 $\mathcal{U}^{j\mapsto i\Diamond}$）表示将 $\mathcal{U}$ 中每个 j:替换为 i:□（分别替换为 i:◇）后的结果。

^{m} ^{m}▶ **例77.** 假设 $\mathcal{U}_{⍀j⍁} = \bigwedge_{k=1} (j\!:\!B_k \mathbin{⍁} \mathcal{U}_k)$（分别为 $\mathcal{U}_{⍁j⍀} = \bigvee_{k=1} (j\!:\!B_k \mathbin{⍀} \mathcal{U}_k)$），且对任意 $1 \le k \le m$都有$j \notin \mathtt{L}(\mathcal{U}_k)$。那么，

$$\mathcal{U}^{j\mapsto i\Box}_{⍀j⍁} = \bigwedge_{k=1}^{m} (i\!:\!\Box B_k \mathbin{⍁} \mathcal{U}_k) \qquad \big(\text{respectively} \qquad \mathcal{U}^{j\mapsto i\Diamond}_{⍁j⍀} = \bigvee_{k=1}^{m} (i\!:\!\Diamond B_k \mathbin{⍀} \mathcal{U}_k)\big).$$

显然，$j \notin \mathtt{L}(\mathcal{U}^{j\mapsto i\Box}_{⍀j⍁})$（分别为 $j \notin \mathtt{L}(\mathcal{U}^{j\mapsto i\Diamond}_{⍁j⍀})$）. ⌟

适用于规则 (L□$_r$) 和 (LD) 的一般变换还利用了这样一个事实：新标签 j 仅通过一个关系原子 iRj与一个已有标签 i 相连。

▶**引理78** (□-类规则，[58]). 设 $\mathcal{C}$ 是一个克里普克模型类。假设：
(i) $\mathit{Var}(\Gamma, \Delta) \subseteq \mathit{Var}(\Pi, \Sigma)$ 且 $\mathit{Var}(\Gamma', \Delta') \subseteq \mathit{Var}(\Pi', \Sigma')$, *(ii)* $j \notin \mathtt{L}(R\ \Pi; \Pi' \Rightarrow \Sigma; \Sigma')$ 且 $\{i\} \cup \mathtt{L}(R^*) \subseteq \mathtt{L}(R\ \Pi; \Pi' \Rightarrow \Sigma; \Sigma')$, *(iii)* $\mathtt{L}(\Gamma; \Gamma' \Rightarrow \Delta; \Delta') \subseteq \{j\} \sqcup \mathtt{L}(R\ \Pi; \Pi' \Rightarrow \Sigma; \Sigma')$, *(iv)* 对所有 $\mathcal{M} \in \mathcal{C}$ 以及将 $R\ \Pi; \Pi' \Rightarrow \Sigma; \Sigma'$ 解释为 $\mathcal{M}$ 中的 $[\![\cdot]\!]$：

$$\mathcal{M}[\![\cdot]\!]^{iR\exists}_{j} \models iRj, \mathcal{R}^*, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{M}[\![\cdot]\!] \models \mathcal{R}, \Pi \Rightarrow \Sigma, \ \mathit{and}$$
$$\mathcal{M}[\![\cdot]\!]^{iR\forall}_{j} \models iRj, \mathcal{R}^*, \Gamma' \Rightarrow \Delta' \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{M}[\![\cdot]\!] \models \mathcal{R}, \Pi' \Rightarrow \Sigma'.$$

那么，以下插值项变换适用于 *LCIP*：

$$\frac{iRj, \mathcal{R}^*, \Gamma; \Gamma' \overset{\mathcal{U}}{\Longrightarrow} \Delta; \Delta'}{\mathcal{R}, \Pi; \Pi' \overset{\mathcal{U}^{j\mapsto \Box i}_{⍀j⍁}}{\Longrightarrow} \Sigma; \Sigma'}.$$

▶**引理 79** (◇类似规则，[58])。 设 $\mathcal{C}$ 是一类 *Kripke* 模型。假设定理 *78* 中的(i)、(ii)和(iii)成立。此外，假设：
(iv) 对于所有$\mathcal{M} \in \mathcal{C}$以及解释 $[\![\cdot]\!]$的$\mathcal{R}\ \Pi;\ \Pi' \Rightarrow \Sigma;\ \Sigma'$到$\mathcal{M}$：

$$\mathcal{M}[\![\cdot]\!]^{iR\forall}_{j} \models iRj, \mathcal{R}^*, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{M}[\![\cdot]\!] \models \mathcal{R}, \Pi \Rightarrow \Sigma, \ \mathit{and}$$
$$\mathcal{M}[\![\cdot]\!]^{iR\exists}_{j} \models iRj, \mathcal{R}^*, \Gamma' \Rightarrow \Delta' \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{M}[\![\cdot]\!] \models \mathcal{R}, \Pi' \Rightarrow \Sigma'.$$

那么，以下插值项变换适用于 *LCIP*：

$$\frac{iRj, \mathcal{R}^*, \Gamma; \Gamma' \overset{\mho}{\Longrightarrow} \Delta; \Delta'}{\mathcal{R}, \Pi; \Pi' \overset{\mho^{j\mapsto\Diamond i}_{\circledcirc j\circledcirc}}{\Longrightarrow} \Sigma; \Sigma'}\,.$$

定理78和定理79中的变换对于 LLIP 也适用，只需将假设 (i) 加强为满足定理 65(1′)，并考虑极性（详情见 [58]）。

证明。我们处理定理79（定理78是对偶情形）。这里仅证明定理 64 的性质 2。令 $[\![\cdot]\!]$ 是 R Π; $\Pi' \Rightarrow \Sigma$; Σ' 的一个解释。假设 M $[\![\cdot]\!] \not\models \mho^{j\mapsto\Diamond i}_{\circledcirc j\circledcirc}$，其中多公式 $\mho_{\circledcirc j\circledcirc}$ 和 $\mho^{j\mapsto\Diamond i}_{\circledcirc j\circledcirc}$ 如定理77所述。那么，对于每个 $1 \leq k \leq m$，要么 M $[\![i]\!] \not\models \Diamond B_k$，要么 M $[\![\cdot]\!] \not\models \mho_k$。因此，对于所有满足 $[\![i]\!]Rv$ 的 v，要么 M $v \not\models B_k$，要么 M $[\![\cdot]\!]^v_j \not\models \mho_k$（因为 $j \notin \mathrm{L}(\mho_k)$）。由此，M $[\![\cdot]\!]^v_j \not\models \mho_{\circledcirc j\circledcirc}$，即对于所有满足 $[\![i]\!]Rv$ 的 v，M $[\![\cdot]\!]^v_j \not\models \mho$。鉴于 $\mho$ 是前提的插值式，M $[\![\cdot]\!]^{iR\forall}_j \models iRj$，R*, $\Gamma \Rightarrow \Delta$，由此根据第一个假定的有效性可得 M $[\![\cdot]\!] \models$R $\Pi \Rightarrow \Sigma$。

现在假设 M $[\![\cdot]\!] \models \mho^{j\mapsto\Diamond i}_{\circledcirc j\circledcirc}$。那么，存在某个 $1 \leq k \leq m$，使得 M $[\![i]\!] \models \Diamond B_k$ 且 M $[\![\cdot]\!] \models \mho_k$。由前者可得某个 v，使得 $[\![i]\!]Rv$，且 M $v \models B_k$，并且 M $[\![\cdot]\!]^v_j \models \mho_k$。因此，M $[\![\cdot]\!]^v_j \models \mho_{\circledcirc j\circledcirc}$，也就是说，对于这个 v，M $[\![\cdot]\!]^v_j \models \mho$。鉴于 $\mho$ 是前提的插值式，我们得到 M $[\![\cdot]\!]^{iR\exists}_j \models iRj$，R*, $\Gamma' \Rightarrow \Delta'$；根据第二个假定的有效性，这就推出了所需的 M $[\![\cdot]\!] \models$R $\Pi' \Rightarrow \Sigma'$。◀

▶ **例80**（$\Box$-类规则和 $\Diamond$-类规则）。对于任意模型类，当 $\Box\varphi$ 位于分裂的右侧（分别为左侧）时，(L$\Box_r$) 的分裂版本是 $\Box$-类（分别为 $\Diamond$-类）的。因此，对于任意模型类，以下插值式变换适用于 LCIP/LLIP：

$$L(\mathrm{L}\Box_r)\ \frac{iRj, \mathcal{R}, \Gamma; \Gamma' \overset{\mho}{\Longrightarrow} j{:}\varphi, \Delta; \Delta'}{\mathcal{R}, \Gamma; \Gamma' \overset{\mho^{j\mapsto\Diamond i}_{\circledcirc j\circledcirc}}{\Longrightarrow} i{:}\Box\varphi, \Delta; \Delta'} \qquad R(\mathrm{L}\Box_r)\ \frac{iRj, \mathcal{R}, \Gamma; \Gamma' \overset{\mho}{\Longrightarrow} \Delta; \Delta', j{:}\varphi}{\mathcal{R}, \Gamma; \Gamma' \overset{\mho^{j\mapsto\Box i}_{\circledcirc j\circledcirc}}{\Longrightarrow} \Delta; \Delta', i{:}\Box\varphi}$$

其中 i 在结论中出现，而 j 没有出现。规则 (LD) 很有意思，因为它无法区分右分裂变体和左分裂变体。只要框架是串行的，它唯一的分裂版本既具有 $\Box$式的特征，也具有$\Diamond$式的特征。（串行性是为了避免定理78和79中的$\mathcal{M}[\![\cdot]\!]^{iR\forall}_j \models$部分被空泛地满足。）因此，对于在结论中出现的 i 和未在结论中出现的 j，相对于任意串行框架类 $\mathcal{C}$，这两种变换都有效：

$$(\mathrm{L}D)\ \frac{iRj, \mathcal{R}, \Gamma; \Gamma' \overset{\mho}{\Longrightarrow} \Delta; \Delta'}{\mathcal{R}, \Gamma; \Gamma' \overset{\mho^{j\mapsto\Diamond i}_{\circledcirc j\circledcirc}}{\Longrightarrow} \Delta; \Delta'} \qquad (\mathrm{L}D)\ \frac{iRj, \mathcal{R}, \Gamma; \Gamma' \overset{\mho}{\Longrightarrow} \Delta; \Delta'}{\mathcal{R}, \Gamma; \Gamma' \overset{\mho^{j\mapsto\Box i}_{\circledcirc j\circledcirc}}{\Longrightarrow} \Delta; \Delta'}\,.$$

请注意，图 8 中的 $\Box\theta$ 和 $\Diamond\theta$ 变换是类似于$\Box$和 $\Diamond$规则的无标签表现形式。

⌟

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{3R2, 2R3, 1R2, 2{:}q, 3{:}p, 3{:}\Box q, 2{:}\Box(p \wedge \Box q), 1{:}\Box\Box(p \wedge \Box q);\ \overset{2:q}{\Longrightarrow}\ ; 2{:}q, 2{:}r}\, R(\mathsf{L}\vee_r)}{3R2, 2R3, 1R2, 2{:}q, 3{:}p, 3{:}\Box q, 2{:}\Box(p \wedge \Box q), 1{:}\Box\Box(p \wedge \Box q);\ \overset{2:q}{\Longrightarrow}\ ; 2{:}(q \vee r)}\, L(\mathsf{L}\Box_l)}{3R2, 2R3, 1R2, 3{:}p, 3{:}\Box q, 2{:}\Box(p \wedge \Box q), 1{:}\Box\Box(p \wedge \Box q);\ \overset{2:q}{\Longrightarrow}\ ; 2{:}(q \vee r)}\, \mathsf{L}B}{2R3, 1R2, 3{:}p, 3{:}\Box q, 2{:}\Box(p \wedge \Box q), 1{:}\Box\Box(p \wedge \Box q);\ \overset{2:q}{\Longrightarrow}\ ; 2{:}(q \vee r)}\, L(\mathsf{L}\wedge_l)}{2R3, 1R2, 3{:}(p \wedge \Box q), 2{:}\Box(p \wedge \Box q), 1{:}\Box\Box(p \wedge \Box q);\ \overset{2:q}{\Longrightarrow}\ ; 2{:}(q \vee r)}\, L(\mathsf{L}\Box_l)}{2R3, 1R2, 2{:}\Box(p \wedge \Box q), 1{:}\Box\Box(p \wedge \Box q);\ \overset{2:q \equiv 3:\top \oslash 2:q}{\Longrightarrow}\ ; 2{:}(q \vee r)}\, \mathsf{L}D}{1R2, 2{:}\Box(p \wedge \Box q), 1{:}\Box\Box(p \wedge \Box q);\ \overset{2:\Diamond\top \oslash 2:q}{\Longrightarrow}\ ; 2{:}(q \vee r)}\, L(\mathsf{L}\Box_l)}{1R2, 1{:}\Box\Box(p \wedge \Box q);\ \overset{2:\Diamond\top \oslash 2:q \equiv 2:q \otimes 1:\bot}{\Longrightarrow}\ ; 2{:}(q \vee r)}\, R(\mathsf{L}\Box_r)}{1{:}\Box\Box(p \wedge \Box q);\ \overset{1:\Box q \otimes 1:\bot}{\Longrightarrow}\ ; 1{:}\Box(q \vee r)}
$$

图23 定理81中的带标签插值式计算。

▶ **例81.** 设 $\varphi = \Box\Box(p \wedge \Box q)$ 和 $\psi = \Box(q \vee r)$。在图23中，我们使用逻辑DB（即对称串行框架的逻辑）的分裂带标签演算，找到了 $\varphi \to \psi$ 的一个插值式；该逻辑没有无切相继演算。因此，form(1:$\Box q \otimes 1{:}\bot$) $= \Box q \vee \bot$，或等价地说 $\Box q$，是逻辑DB中 $\varphi \to \psi = \Box\Box(p \wedge \Box q) \to \Box(q \vee r)$ 的一个林登插值式。这里，规则 (LD) 被视为类似于 $\Diamond$的规则，其中标签 3 在 3:$\top \oslash 2{:}q \equiv 2{:}q$ 中与 $\otimes\oslash$分离。类似地，标签 2 在 2:$q \otimes 1{:}\bot \equiv 2{:}\Diamond\top \oslash 2{:}q$ 中与$\oslash\otimes$分离。（对于此逻辑，由于串行性，可以省略 $\Diamond\top$。例如，在模态逻辑K 中，则会改用 2:$(\Diamond\top \wedge q) \otimes 1{:}\bot$。）」

在下一节中, 我们将看到这些技术如何带来强有力的插值结果 .

5.3 带标签、超序列和嵌套序列的插值结果

上一节介绍的通用方法通过考察带标签分裂规则的形式来定义插值式，具有两项优势。首先，它能为一系列逻辑带来插值结果（包括林登插值）。其次，这些技术可以调整以适用于其他类型的序列，例如嵌套序列和超序列。本节将讨论这两个方面的结果，并指出相关文献以供进一步了解。

将生成无割带标签序列演算规则的算法 [72]与第 5.2 节讨论的构造插值式变换的算法结合起来，可以得到如下的一般定理:

▶**定理82** ([58])。 由霍恩子句形式的框架条件集 $i_1Rj_1 \wedge \cdots \wedge i_mRj_m \to kRl$ 定义的任意框架类 $\mathcal{C}$，其模态逻辑$\mathsf{L}_{\mathcal{C}}$ 都具有 *Lyndon* 插值性质。

▶**推论 83**。 在 *[31,* 第 *8],* 节列出的框架条件中，串行性、自反性、传递性、对称性、欧几里得性和移位自反性的任意组合都会产生具有 *Lyndon* 插值性质的逻辑。这包括所谓模态立方体 *[31,* 第 *8],* 节中的全部 *15* 种模态逻辑，其中有模态逻辑K、T、D、K4、S4和S5 （见图 *3*）。

保证具有林登插值性质的 Kripke 框架类范围还可以进一步扩展，特别是可以处理收敛限制 [31, Sect. 8] 和 $hijk$-收敛 [31,Sect. 9], ，从而得到通常以 Scott–Lemon 或 Geach 命名的逻辑。详情请参阅 [58]。

借助定理 83，我们可以说明，与带有某种形式切规则的普通序列演算相比，标记相继式演算可能更适合用来获得林登插值。例如，在定理 23 中，我们使用前原方法，通过解析切规则证明了逻辑 S5 具有克雷格插值。然而，解析切规则不能保持极性，因此无法获得林登插值。相比之下，定理 83 运用带标签序列的技术，证明了 S5 具有林登插值性质。

现在我们转向通过超序列和嵌套序列得到的插值结果。嵌套序列和超序列与带标签序列密切相关。带标签序列$S = \mathcal{R}\ \Gamma \Rightarrow \Delta$ 可以看作由普通的、无标签的序列 $\{\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i\}^{i\in \mathrm{L}(S)}$组成，其中多重集 $\Gamma_i := \{\varphi \mid i{:}\varphi \in \Gamma\}$ 和 $\Delta_i := \{\varphi \mid i{:}\varphi \in \Delta\}$ 包含（无标签的）公式。从这一视角看，每个序列 $\Gamma_i \Rightarrow \Delta_i$ 都是 S 的序列分量，而来自$\mathcal{R}$的关系原子则描述这些序列分量之间的关系。关系原子具有足够的表达能力，可以表示任意（类似 Kripke 的）关系。如果某种特定关系足够规则，就可以用结构联结词对其进行编码，从而避免使用显式标签。

超序列是指由有限多重集（也可以是集合或列表）序列分量组成的集合，通常写作 $\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 \mid \cdots \mid \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$。例如，S5 模态逻辑存在一种超序列演算，其中超序列可以看作带标签序列，$\mathcal{R}$ 描述的是全关系（例如，对所有 $1 \le i, j \le n$，都有 $iRj \in \mathcal{R}$ ）。尽管超序列早于带标签序列出现，但 [9, 69, 78], 对超序列的带标签视角意味着，只要满足条件，就可以使用第 5.2 节中的任意插值项变换。要使用插值算法，必须为证明中每个超序列的每个序列分量分配标签。分配标签时可能需要谨慎，具体取决于某条规则是修改序列分量，还是将其替换为另一个分量。后一种情况需要使用不同的标签，例如，可以如下理解 Avron 的（$\Rightarrow \Box$）规则的适当标记： [9]

$$\Rightarrow\!\Box\ \frac{G \mid \Box\Gamma \Rightarrow \varphi}{G \mid \Box\Gamma \Rightarrow \Box\varphi} \quad\rightsquigarrow\quad \frac{G \mid \overbrace{}^{i} \mid \overbrace{\Box\Gamma \Rightarrow \varphi}^{j}}{G \mid \underbrace{\Box\Gamma \Rightarrow \Box\varphi}_{i}} \quad\rightsquigarrow\quad \mathrm{L}\!\Rightarrow\!\Box\ \frac{\Pi, j\colon\ \Box\Gamma \Rightarrow \Sigma, j\colon\ \varphi}{\Pi, i{:}\Box\Gamma \Rightarrow \Sigma, i{:}\Box\varphi}\ j \notin X \sqcup \{i\}$$

其中， $X = \mathrm{L}(G)$ 是分配给 G 中侧组件的标签集合。因此，j 是需要从前提插值式中移除的标签，而该规则的两个分裂版本

分别是类 $\Box$ 和类 $\Diamond$，而非局部规则。更多详情以及其他规则的插值式变换，参见 [55] 和 [58, 第 3] 节。[55, 58] 中通过超序列直接证明 Lyndon 插值性质的证明论方法已应用于 S5 和模态逻辑 S4.2。

嵌套序列，或树超相继式另一种常用的序列分量配置是由序列分量构成的树 [16, 61, 77], ，通常称为嵌套序列或树超相继式。树结构可以方便地用由整数序列组成的标签表示，因此，带前缀的语义树与嵌套序列之间的关系，正如普通语义树与普通序列之间的关系一样，也就不足为奇了 [26]。在这种情况下，隐含的关系原子形式为 $\sigma R \sigma.n$，其中 σ 是一个整数序列，而 $\sigma.n$ 则由它附加整数 n得到。所有细节见 [27] 和 [58, 第 5]节。这里，我们仅展示一个嵌套规则实例，其分裂分别类似于 $\Box$规则和 $\Diamond$规则：

$$\frac{\Pi\{\Gamma \Rightarrow \Delta, [\varphi]\}}{\Pi\{\Gamma \Rightarrow \Delta, \Box\varphi\}} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\sigma R \sigma.j, \mathcal{R}, \Pi^{\ell}, \sigma{:}\Gamma \Rightarrow \sigma{:}\Delta, \sigma.j{:}\varphi}{\mathcal{R}, \Pi^{\ell}, \sigma{:}\Gamma \Rightarrow \sigma{:}\Delta, \sigma{:}\Box\varphi}\, \sigma.j \notin \mathcal{R}, \Pi^{\ell}, \sigma{:}\Gamma \Rightarrow \sigma{:}\Delta, \sigma{:}\Box\varphi$$

其中， Π^{ℓ} 是嵌套上下文 $\Pi\{\ \}$的带标签翻译，序列 $\Gamma \Rightarrow \Delta, \Box\varphi$ 是一个带有整数序列标签 σ 的普通序列，而$\mathcal{R}$ 描述了嵌套树 $\Pi\{\}$的树结构。这里，标签 $\sigma.j$ 是要从前提插值式中删除的标签。通过嵌套序列直接证明 Lyndon 插值性质的证明论方法，已应用于模态立方体中的全部15种逻辑，见 [31, 第 8]节 [27, 58] 。

中间逻辑第5节迄今讨论的所有形式系统都涉及基于经典命题演算的模态逻辑。这种方法也可应用于中间逻辑，其中直觉主义蕴涵和否定发挥着模态逻辑中模态的作用。在大多数情况下，这需要使用专门的受限类型嵌套序列和／或超序列（详情见 [59, 60] ）。所有七种可插值中间逻辑都可以用一种或另一种演算来处理。此外，哥德尔–杜梅特逻辑（即线性直觉主义克里普克框架的逻辑）的 LIP 首次通过这种方法得到证明 [59]。

一**致插值**超序列和嵌套序列也可用于证明 UIP／ULIP。人们已用这种方法重新证明了 K、D 和 T 逻辑的一致插值性质，并首次给出了逻辑 K 的统一局部插值性质的证明论证明 5 [38, 39]。类似于克雷格插值的带标签序列定义（定理 64），一致插值的带标签版本融入了基于双模拟量词的语义概念。

6 结论

本章介绍了证明插值结果的方法，这些方法同时也提供了基于各种（广义）序列演算构造插值式的算法。针对每种算法，文中给出了适用于常见规则类型的标准插值式变换，

这些规则类型涵盖了范围广泛的逻辑。因此，本章可用作一份手册：若要证明由给定演算表示的某个逻辑具有特定的插值性质，应将该演算的规则与常见规则类型逐一对照。若演算中的每条规则都属于其中一种类型，则可直接得出该插值性质。否则，要证明插值性质，只需针对未被常见类型涵盖的规则设计插值式变换。针对序列演算的证明论技术还被纳入普遍证明论框架之中，该框架系统地揭示了插值性质与良性证明系统的存在之间的联系。

一种常见的误解是：一种逻辑若存在无切（序列）演算，就必然具有插值性质。对于某一特定规则，即便它是解析规则，也可能无法给出插值项变换。哥德尔–杜梅特逻辑中此类不可插值超序列规则的一个例子，可见于 [59,定理 4.6]的证明。请注意，该逻辑确实具有插值性质，既有克雷格插值，也有林登插值。因此，尽管已存在无切的序列演算，仍可能需要更为复杂的演算系统。

文献指引 关于本章所讨论内容的相关阅读，我们为读者提供一些文献指引：

- 前原方法： Maehara 的原始工作 [64]。证明论教材中，借助相继式为经典/直觉主义命题逻辑以及经典/直觉主义一阶逻辑给出克雷格插值证明 [81, 84, 87]。另见 [37] 中的讲义，第3节即以此为基础。语义树方法： 借助语义树为模态逻辑与直觉主义逻辑给出的插值证明 [25]。*Pitts* 方法： Pitts 关于直觉主义命题逻辑一致插值证明的原始论文 [76]。模态逻辑一致插值的证明论方法 [11]。普遍证明论： 半解析规则，以及通过考察插值确立表现良好的序列演算之存在性 [2–5, 7, 44, 45]。另见 [47] 中已发表的讲义，第4节即以此为基础。经由超序列的插值： 模态逻辑的克雷格/林登插值 [55, 58] 以及中间逻辑的克雷格/林登插值 [59]。模态一致插值 [39]。经由嵌套序列的插值： 模态逻辑的克雷格/林登插值 [27, 58] 以及一种中间逻辑的克雷格/林登插值 [59]，其中使用线性嵌套序列。该方法的纯句法表述 [63]。模态逻辑的一致插值 [13, 39]。经由带标签序列的插值： 模态逻辑的克雷格/林登插值 [57, 58]。经由定制序列推广的插值： 带有额外指定根分量的超序列 [38]。对深度和/或分支加以限制的嵌套序列 [59, 60]。

相关主题 下面我们将介绍一些与插值证明论方法相关、但超出本章范围的研究方向：

- 作为割引入的插值：在 [80], 中，线性逻辑里的前原方法以一种与证明相关的 视角呈现：给定一个关于 $\varphi \Rightarrow \psi$ 的无割序列证明 π，存在一个公式 θ，它属于 φ 和 ψ 的公共签名；并且存在分别关于 $\varphi \Rightarrow \theta$ 和 $\theta \Rightarrow \psi$ 的序列证明 π_1、π_2，使得 π_1 与 π_2 组合后可割约化为 π。由此，通过综合插值式来引入切规则。
- 通过循环证明和非良基证明进行插值：本书第11章讨论了 Maehara 型方法，用于通过可能包含无限分支的序列证明，为不动点逻辑构造插值式。
- 插值与证明复杂性：人们也在归结和割平面等证明系统中广泛研究插值，其中插值在证明复杂性中发挥着核心作用。具体而言，可行插值 研究如何从证明中高效提取插值式，从而将短证明与小型插值电路联系起来。这种联系为证明复杂性与电路复杂性搭建了一座强有力的桥梁，使电路规模下界能够转化为证明长度下界，并有助于对证明系统进行分类以及确立指数分离。本书第6章将详细讨论这些主题。

致谢

作者谨向 Patrick Koopmann、Rosalie Iemhoff 和 Sam van Gool 致以诚挚谢意，感谢他们仔细阅读本稿的早期版本并提出富有见地的意见；同时也感谢 Marianna Girlando 参与有益的讨论。Iris van der Giessen 感谢荷兰研究理事会（NWO）通过研究项目 Veni 提供资助，该项目隶属研究计划 Veni，项目名称为寻找插值项：证明在行动，项目编号为 VI.Veni.232.369。Roman Kuznets 获得了捷克科学基金会第 22-06414L 号资助。

参考文献

1 Bahareh Afshari、Graham E. Leigh 和 Guillermo Menéndez Turata。模态 μ 演算中基于循环证明的统一插值。在 Anupam Das 和 Sara Ne- gri 主编的《基于解析式语义树及相关方法的自动推理：第 *30* 届国际会议 *TABLEAUX 2021*，英国伯明翰，*2021* 年 *9* 月 *6–9* 日，论文集》，第 12842 卷，人工智能讲义，第 335–353 页。施普林格，2021 年。doi:10.1007/978-3-030-86059-2_20。

2 Amirhossein Akbar Tabatabai、Rosalie Iemhoff 和 Raheleh Jalali。基本非正规模态逻辑的一致 Lyndon 插值。载于 Alexandra Silva、Renata Wassermann 和 Ruy de Queiroz 编，《逻辑、语言、信息与计算：第*27*届国际研讨会 *WoLLIC 2021*，线上活动，*2021*年*10*月*5*日至*8*日，论文集》，第计算机科学讲义第13038卷，第287–301页。施普林格，2021年。 doi: 10.1007/978-3-030-88853-4_18。

44 证明论中的插值

3 Amirhossein Akbar Tabatabai、Rosalie Iemhoff 和 Raheleh Jalali。直觉主义单调模态逻辑的一致 Lyndon 插值。预印本 2208.04607，arXiv，2022年。doi:10.48550/arXiv.2208.04607。4 Amirhossein Akbar Tabatabai、Rosalie Iemhoff 和 Raheleh Jalali。基本非正规模态逻辑与条件逻辑的一致 Lyndon 插值。《逻辑与计算杂志》，35(6)，2025年9月。doi:10.1093/logcom/exae057。5 Amirhossein Akbar Tabatabai 和 Raheleh Jalali。普遍证明论：半解析规则与一致插值。预印本 1808.06258，arXiv，2018年。 doi:10.48550/arXiv.1808.06258。6 Amirhossein Akbar Tabatabai 和 Raheleh Jalali。普遍证明论：直觉主义模态逻辑中的可行可容许性。《纯粹与应用逻辑年刊》，176(2):103526，2025年2月。doi:10.1016/j.apal.2024.103526。7 Amirhossein Akbar Tabatabai 和 Raheleh Jalali。普遍证明论：半解析规则与克雷格插值。《纯粹与应用逻辑年刊》，176(1):103509，2025年1月。doi:10.1016/j.apal.2024.103509。8 Majid Alizadeh、Farzaneh Derakhshan 和 Hiroakira Ono。子结构逻辑中的一致插值。《符号逻辑评论》，7(3):455–483，2014年9月。 doi:10.1017/S175502031400015X。9 Arnon Avron。超序列方法在命题非经典逻辑证明论中的应用。载于 Wilfrid Hodges、Martin Hyland、Charles Steinhorn 和 John Truss 编，《逻辑：从基础到应用：欧洲逻辑研讨会》，第1–32页。克拉伦登出版社，1996年。doi:10.1093/oso/9780198538622.003.0001。10 Matthias Baaz 和 Helmut Veith。模糊逻辑中的插值。《数学逻辑档案》，38(7):461–489，1999年10月。 doi:10.1007/s001530050151。11 Marta Bílková。《模态逻辑中的插值》。博士论文，查理大学，捷克共和国布拉格，2006年。网址：http://hdl.handle.net/20.500.11956/15732。12 Marta Bílková。模态逻辑中的一致插值与命题量词。《逻辑研究》，85(1):1–31，2007年2月。 doi:10.1007/s11225-007-9021-5。13 Marta Bílková。关于模态深度推理演算中一致插值证明的一则札记。载于 Nick Bezhanishvili、Sebastian Löbner、Kerstin Schwabe 和 Luca Spada 编，《逻辑、语言与计算：第八届第比利斯逻辑、语言与计算国际研讨会，TbiLLC 2009，格鲁吉亚巴库里阿尼，2009年9月，修订精选论文》，人工智能讲义第6618卷，第30–45页。施普林格，2011年。 doi:10.1007/978-3-642-22303-7_3。14 Patrick Blackburn、Maarten de Rijke 和 Yde Venema。《模态逻辑》，《剑桥理论计算机科学论丛》第53卷。剑桥大学出版社，2001年。 doi:10.1017/CBO9781107050884。15 Branislav R. Boričić。弱排中律逻辑的无切割根岑型系统。《逻辑研究》，45(1):39–53，1986年3月。doi:10.1007/BF01881548。16 Kai Brünnler。模态逻辑的深度序列系统。《数学逻辑档案》，48(6):551–577，2009年7月。 doi:10.1007/s00153-009-0137-3。17 A. Carbone。命题演算中的插值式、切消去与流图。《纯粹与应用逻辑年刊》，83(3):249–299，1997年2月。doi:10.1016/S0168-0072(96)00019-X。

18 Alexander Chagrov 与 Michael Zakharyaschev。《模态逻辑》，牛津逻辑指南丛书第35卷。克拉伦登出版社，1997年。 doi:10.1093/oso/9780198537793.001.0001。19 William Craig。线性推理：Herbrand–Gentzen 定理的一种新形式。《符号逻辑杂志》，22(3):250–268，1957年9月。 doi:10.2307/2963593。20 Kosta Došen。序列系统与群胚模型（I）。《逻辑研究》，47(4):353–385，1988年12月。 doi:10.1007/BF00671566。21 Kosta Došen。次结构逻辑中的模态翻译。《哲学逻辑期刊》，21(3):283–336，1992年8月。 doi:10.1007/BF00260931。22 Roy Dyckhoff。直觉主义逻辑的无收缩序列演算。《符号逻辑杂志》，57(3):795–807，1992年9月。 doi:10.2307/2275431。23 Hugo Férée、Iris van der Giessen、Sam van Gool 与 Ian Shillito。模态逻辑 K、GL 和 iSL 的机械化一致插值。见 Christoph Benzmüller、Marijn J. H. Heule 与 Renate A. Schmidt 编，《自动推理：第12届国际联合会议，IJCAR 2024，法国南锡，2024年7月3日至6日，论文集，第二部分》，人工智能讲义第14740卷，第43–60页。施普林格，2024年。 doi:10.1007/978-3-031-63501-4_3。24 Hugo Férée 与 Sam van Gool。命题量词的形式化与计算。见 Robbert Krebbers、Dmitriy Traytel、Brigitte Pientka 与 Steve Zdancewic 编，CPP'23：第12届ACM SIGPLAN 国际认证程序与证明会议论文集，第148–158页。计算机协会，2023年。 doi:10.1145/3573105.3575668。25 Melvin Fitting。《模态逻辑与直觉主义逻辑的证明方法》，Synthese 丛书第169卷。D. Reidel 出版公司，1983年。 doi:10.1007/978-94-017-2794-5。26 Melvin Fitting。带前缀语义树与嵌套序列。《纯粹与应用逻辑年刊》，163(3):291–313，2012年3月。 doi:10.1016/j.apal.2011.09.004。27 Melvin Fitting 与 Roman Kuznets。经由嵌套序列的模态插值。《纯粹与应用逻辑年刊》，166(3):274–305，2015年3月。 doi:10.1016/j.apal.2014.11.002。28 Wesley Fussner 与 Simon Santschi。线性逻辑中的插值及相关系统。《ACM 计算逻辑汇刊》，25(4):20:1–20:19，2024年10月。 doi:10.1145/3680284。29 Dov M. Gabbay 与 Larisa Maksimova。《插值与可定义性：模态逻辑与直觉主义逻辑》，牛津逻辑指南丛书第46卷。克拉伦登出版社，2005年。 doi:10.1093/acprof:oso/9780198511748.001.0001。30 N. Galatos、P. Jipsen、T. Kowalski 与 H. Ono。《剩余格：次结构逻辑的代数一瞥》，《逻辑与数学基础研究》第151卷。爱思唯尔，2007年。URL: https://www.sciencedirect.com/bookseries/studies-in-logic-and-the-foundations-of-mathematics/vol/151/suppl/C。31 James Garson。模态逻辑。见 Edward N. Zalta 与 Uri Nodelman 编，《斯坦福哲学百科全书》。形而上学研究实验室，斯坦福大学，2024年春季版，2024年。URL: https://plato.stanford.edu/archives/spr2024/entries/logic-modal/。32 Gerhard Gentzen。《关于逻辑推理的研究》（I）。《数学杂志》，39:176–210，1935年。 doi:10.1007/BF01201353。33 Gerhard Gentzen。《关于逻辑推理的研究》（II）。《数学杂志》，39:405–431，1935年。 doi:10.1007/BF01201363。34 Silvio Ghilardi 与 Marek Zawadowski。模态系统 S4 中命题量词的不可定义性。《逻辑研究》，55(2):259–271，1995年6月。 doi:10.1007/BF01061237。

46 证明论中的插值

35 Silvio Ghilardi 与 Marek Zawadowski。《层、博弈与模型完备化：非经典命题逻辑的范畴论方法》，逻辑趋势第14卷。施普林格，2002年。doi:10.1007/978-94-015-9936-8。36 Iris van der Giessen。《一致插值与可容许规则：对（直觉主义）模态逻辑的证明论研究》。博士论文，乌得勒支大学，荷兰乌得勒支，2022年。doi:10.33540/1486。37 Iris van der Giessen。证明论视角下的插值：澳大利亚国立大学2024年逻辑暑期学校讲义。电子预印本 X-2025-05，ILLC预印本与出版物，2025年12月。URL: https://eprints.illc.uva.nl/id/eprint/2403。38 Iris van der Giessen、Raheleh Jalali 与 Roman Kuznets。K5的扩展：证明论与一致 Lyndon 插值。见 Revantha Ramanayake 与 Josef Urban 编，《基于解析式语义树及相关方法的自动推理：第32届国际会议，TABLEAUX 2023，捷克共和国布拉格，2023年9月18日至21日，论文集》，人工智能讲义第14278卷，第263–282页。施普林格，2023年。doi:10.1007/978-3-031-43513-3_15。39 Iris van der Giessen、Raheleh Jalali 与 Roman Kuznets。经由嵌套序列与超序列的一致插值。逻辑与计算杂志，35(6)，2025年9月。doi:10.1093/logcom/exae053。40 J.-Y. Girard。线性逻辑：其句法与语义。见 Jean-Yves Girard、Yves Lafont 与 Laurent Regnier 编，《线性逻辑进展》，伦敦数学学会讲义丛书第222卷，第1–42页。剑桥大学出版社，1995年。 doi:10.1017/CBO9780511629150.002。41 Jean-Yves Girard。轻量线性逻辑。见 Daniel Leivant 编，《逻辑与计算复杂性：LCC '94国际研讨会，美国印第安纳州印第安纳波利斯，1994年10月，精选论文》，计算机科学讲义第960卷，第145–176页。施普林格，1995年。doi:10.1007/3-540-60178-3_83。42 Stefan Hetzl 与 Raheleh Jalali。论插值算法的完全性。见第39届ACM/IEEE计算机科学逻辑年度研讨会论文集。计算机协会，2024年。 doi:10.1145/3661814.3662112。43 Jörg Hudelmaier。一种用于直觉主义命题逻辑的 $O(n \log\, n)$ 空间判定程序。逻辑与计算杂志，3(1):63–75，1993年2月。 doi:10.1093/logcom/3.1.63。44 Rosalie Iemhoff。模态逻辑中的一致插值与序列演算。《数学逻辑档案》，58(1–2):155–181，2019年2月。 doi:10.1007/s00153-018-0629-0。45 Rosalie Iemhoff。一致插值与序列演算的存在性。《纯粹与应用逻辑年刊》，170(11):102711，2019年11月。 doi:10.1016/j.apal.2019.05.008。46 Rosalie Iemhoff。G3i序列演算的G4i类比系统。《逻辑研究》，110(6):1493–1506，2022年12月。 doi:10.1007/s11225-022-10008-3。47 Rosalie Iemhoff 与 Raheleh Jalali。普遍证明论。见 Maria Manuel Clementino、Mai Gehrke 与 Jorge Picado 编，《逻辑中的拓扑、代数与范畴：科英布拉TACL暑期学校讲义，2022年6月14日至18日》，科英布拉数学文库第5卷。施普林格，2026年。即将出版。48 Max Kanovich、Stepan Kuznetsov、Vivek Nigam 与 Andre Scedrov。非交换线性逻辑中的次指数。计算机科学中的数学结构，29(8):1217–1249，2019年9月。 doi:10.1017/S0960129518000117。

49 Eiji Kiriyama 和 Hiroakira Ono。《无结构规则逻辑中的收缩规则与判定问题》。《逻辑研究》，50(2):299–319，1991年6月。 doi:10.1007/BF00370189。50 Zoltan A. Kocsis。《无量词可定义性中的证明论方法》。《纯粹与应用逻辑年刊》，176(4):103555，2025年4月。 doi:10.1016/j.apal.2025.103555。51 Yuichi Komori。《超卢卡西维茨命题逻辑》。《名古屋数学杂志》，84:119–133，1981年12月。 doi:10.1017/S0027763000019577。52 Tomasz Kowalski 和 Hiroakira Ono。《双直觉主义逻辑中的解析切规则与插值》。《符号逻辑评论》，10(2):259–283，2017年6月。 doi:10.1017/S175502031600040X。53 P.S. Krzystek 和 S. Zachorowski。《卢卡西维茨逻辑不具有插值性质》。《数理逻辑报告》，9:39–40，1977年。54 Taishi Kurahashi。《命题模态逻辑中的一致 Lyndon 插值性质》。《数学逻辑档案》，59(5–6):659–678，2020年8月。 doi:10.1007/s00153-020-00713-y。55 Roman Kuznets。《通过超序列实现克雷格插值》。载于 Dieter Probst 和 Peter Schuster 编，《数学、哲学与计算机科学中的证明概念》，《Ontos Mathematical Logic》第6卷，第193–214页。De Gruyter，2016年。 doi:10.1515/9781501502620-012。56 Roman Kuznets。《多分量相继式演算的插值方法》。载于 Sergei Artemov 和 Anil Nerode 编，《计算机科学的逻辑基础：LFCS 2016 国际研讨会，2016 年1月4日至7日，美国佛罗里达州迪尔菲尔德海滩，论文集》，《计算机科学讲义》第9537卷，第202–218页。施普林格，2016年。 doi:10.1007/978-3-319-27683-0_15。57 Roman Kuznets。《使用标记相继式演算证明克雷格插值与林登插值》。载于 Loizos Michael 和 Antonis Kakas 编，《人工智能中的逻辑：第15届欧洲会议 JELIA 2016，2016年11月9日至11日，塞浦路斯拉纳卡，论文集》，《人工智能讲义》第10021卷，第320–335页。施普林格，2016年。 doi:10.1007/978-3-319-48758-8_21。58 Roman Kuznets。《用于证明插值性质的多分量证明论方法》。《纯粹与应用逻辑年刊》，169(12):1369–1418，2018年12月。 doi:10.1016/j.apal.2018.08.007。59 Roman Kuznets 和 Björn Lellmann。《通过超序列与线性嵌套序列研究中间逻辑的插值》。《模态逻辑进展》，Guram Bezhanishvili、Giovanna D’Agostino、George Metcalfe 和 Thomas Studer 编，第12卷，第473–492页。College Publications，2018年。网址：http://www.aiml.net/volumes/volume12/Kuznets-Lellmann.pdf。60 Roman Kuznets 和 Björn Lellmann。《通过内射嵌套序列研究中间逻辑的插值》。《逻辑与计算杂志》，31(3):797–831，2021年4月。 doi:10.1093/logcom/exab015。61 Björn Lellmann 和 Francesca Poggiolesi。《嵌套序列还是树超相继式——综述》。载于 Yale Weiss 和 Romina Birman 编，《索尔·克里普克论模态逻辑》，《逻辑学杰出贡献》第30卷，第243–301页。施普林格，2024年。 doi:10.1007/978-3-031-57635-5_11。62 Chuck Liang 和 Dale Miller。《线性逻辑、直觉主义逻辑与经典逻辑中的聚焦和极化》。《理论计算机科学》，410(46):4747–4768，2009年11月。 doi:10.1016/j.tcs.2009.07.041。63 Tim Lyon、Alwen Tiu、Rajeev Goré 和 Ranald Clouston。《通过嵌套序列实现时态逻辑与双直觉主义逻辑的句法插值》。载于 Maribel Fernández 和 Anca Muscholl 编，《第28届 EACSL 计算机科学逻辑年会，CSL 2020，1月13日至16日，

48 证明论中的插值

2020年，西班牙巴塞罗那，《莱布尼茨国际信息学论文集》（LIPIcs）第152卷，第28:1–28:16页。达格施图尔宫-莱布尼茨信息学中心，2020年。 doi:10.4230/LIPIcs.CSL.2020.28。64 前原昭二。《论克雷格插值定理》。《数学》，12(4):235–237，1961年5月。日文。 doi:10.11429/sugaku1947.12.235。65 L. L. Maksimova。《超直觉主义逻辑中的克雷格定理与伪布尔代数的可合并簇》。《代数与逻辑》，16(6):427–455，1977年11月。 doi:10.1007/BF01670006。66 Larisa Maksimova。《正规模态逻辑中的合并与插值》。《逻辑研究》，50(3–4):457–471，1991年9月。 doi:10.1007/BF00370682。67 Enrico Marchioni 和 George Metcalfe。《半线性子结构逻辑中的克雷格插值》。《数理逻辑季刊》，58(6):468–481，2012年11月。 doi:10.1002/malq.201200004。68 Dale Miller、Gopalan Nadathur、Frank Pfenning 和 Andre Scedrov。《作为逻辑编程基础的统一证明》。《纯粹与应用逻辑年刊》，51(1–2):125–157，1991年3月。 doi:10.1016/0168-0072(91)90068-W。69 G. E. Minc。《关于一些模态逻辑演算系统》。载于 V. P. Orevkov 编，《符号逻辑演算 I》，《斯捷克洛夫数学研究所论文集》第98号（1968年），第97–124页。美国数学会，1971年。网址： https://www.mathnet.ru/eng/tm/v98/p88。70 Franco Montagna。《命题多值逻辑中的插值与贝思性质：语义研究》。《纯粹与应用逻辑年刊》，141(1–2):148–179，2006年8月。doi:10.1016/j.apal.2005.11.001。71 Sara Negri。《模态逻辑中的证明分析》。《哲学逻辑期刊》，34(5–6):507–544，2005年10月。 doi:10.1007/s10992-005-2267-3。72 Sara Negri 和 Jan von Plato。《证明分析：对希尔伯特最后一个问题的贡献》。剑桥大学出版社，2011年。 doi:10.1017/CBO9781139003513。73 Hiroakira Ono。《结构规则与逻辑层次》。载于 Petio Petrov Petkov 编，《数理逻辑》，第95–104页。普莱纳姆出版社，1990年。 doi:10.1007/978-1-4613-0609-2_8。74 Hiroakira Ono。《非经典逻辑中的证明论方法——导论》。载于 Masako Takahashi、Mitsuhiro Okada 和 Mariangiola Dezani-Ciancaglini 编，《类型与证明理论》，日本数学会纪要第2卷，第207–254页。日本数学会，1998年。doi:10.2969/msjmemoirs/00201C060。75 Hiroakira Ono 和 Yuichi Komori。《不含收缩规则的逻辑》。《符号逻辑杂志》，50(1):169–201，1985年3月。 doi:10.2307/2273798。76 Andrew M. Pitts。《一阶直觉主义命题逻辑中二阶量化的一种解释》。《符号逻辑杂志》，57(1):33–52，1992年3月。 doi:10.2307/2275175。77 F. Poggiolesi。《用于模态命题逻辑的树超相继式方法》。载于 David Makinson、Jacek Malinowski 和 Heinrich Wansing 编，《走向数理哲学：〈逻辑研究〉会议“逻辑趋势 IV”论文集》，《逻辑趋势》第28卷，第31–51页。施普林格，2009年。 doi:10.1007/978-1-4020-9084-4_3。78 Garrel Pottinger。《T、S_4 和 S_5 的一致无切规则表述》。《符号逻辑杂志》，48(3):900，1983年9月。摘要。 doi:10.2307/2273495。79 Dirk Roorda。《经典线性逻辑片段中的插值》。《符号逻辑杂志》，59(2):419–444，1994年6月。 doi:10.2307/2275398。

80 Alexis Saurin. 作为割引入的插值：论 Craig–Lyndon 插值的计算内容。载于 Maribel Fernández 编，计算与演绎的形式结构第 10 届国际会议：FSCD 2025，2025年7月14–20日，英国伯明翰，第 337 卷，莱布尼茨国际信息学论文集（LIPIcs），第 32:1–32:21 页。达格施塔尔宫-莱布尼茨信息学中心，2025年。 doi:10.4230/LIPIcs.FSCD.2025.32。81 K. Schütte. 证明论，数学科学基础第 225 卷。施普林格，1977年。 doi:10.1007/978-3-642-66473-1。82 D. S. Shamkanov. 哥德尔-勒布可证性逻辑的循环证明。《数学札记》，96(3–4):575–585，2014年9月。 doi:10.1134/S0001434614090326。83 Daniyar S. Shamkanov. 可证性逻辑 GL 和 GLP 的插值性质。《斯捷克洛夫数学研究所论文集》，274(1):303–316，2011年10月。doi:10.1134/S0081543811060198。84 Gaisi Takeuti. 证明论，《逻辑与数学基础研究》第 81 卷。北荷兰出版社，1975年。URL: https://www.sciencedirect.com/bookseries/studies-in-logic-and-the-foundations-of-mathematics/vol/81/suppl/C。85 A. S. Troelstra. 线性逻辑讲义，CSLI讲义第 29 卷。CSLI出版社，1992年。URL: https://archive.org/details/lecturesonlinear0000troe。86 A. S. Troelstra 和 D. van Dalen. 数学中的构造主义：导论，第一卷，《逻辑与数学基础研究》第 121 卷。北荷兰出版社，1988年。URL: https://www.sciencedirect.com/bookseries/studies-in-logic-and-the-foundations-of-mathematics/vol/121/suppl/C。87 A. S. Troelstra 和 H. Scwichtenberg. 基础证明论，《剑桥理论计算机科学论丛》第 43 卷。剑桥大学出版社，第 2 版，2000年。 doi:10.1017/CBO9781139168717。88 Alasdair Urquhart. 相干逻辑中的插值失效。《哲学逻辑期刊》，22(5):449–479，1993年10月。 doi:10.1007/BF01349560。89 N. N. Vorob’ev. 带强否定的构造性命题演算中的可推导性问题。《苏联科学院报告》，85(4):689–692，1952年。俄语。90 N. N. Vorob’ev. 构造性命题演算中可推导性的新算法。载于《逻辑与代数论文十六篇》，美国数学会译丛第 2 辑第 94 卷，第 37–71 页。美国数学会，1970年。 doi:10.1090/trans2/094。