arXiv:2602.16324v1 [cs.LO] 18 Feb 2026

案例研究：等式理论中的饱和作为显式模型

MikolášJanota[1], Michael Rawson[2], 和 Stephan Schulz[3]

[1] 布拉格捷克理工大学，CIIRC，捷克 mikolas.janota@cvut.cz[2] 英国南安普敦大学 michael@rawsons.uk[3] 巴登-符腾堡州立合作大学斯图加特校区，德国斯图加特 schulz@eprover.org

摘要。 自动定理证明器（ATPs）可以通过使一组子句达到饱和来证伪猜想，但由此产生的饱和集是晦涩难懂的证书。事实上，在单位等式片段中，饱和集可以被解读为一个汇合重写系统，它定义了一个显式的、可能是无限的模型——然而，即使在自动定理证明器的常用者中，这一点也鲜为人知。此外，自动定理证明器不会为无限（反）模型生成这些显式证书。我们完整地介绍了这种证书构造方法，并在 Vampire 和 E 中实现了该方法，并将其应用于近期的等式理论项目 [4], ；该项目中的数百个蕴含都不存在有限反模型。所得的重写系统可使用现有的经认证工具验证其合流性和终止性，从而得到可信赖的反模型。

关键词： 模型构造 · 饱和定理证明 · 重写

1 引言

在2024年9月其博客的一篇文章中 [38], ，陶哲轩提出了等式理论项目（ETP），这是一个汇集数学家与自动推理研究者的合作项目。其目标是对单一二元运算上全称量化等式之间的22,028,942个蕴含进行分类（详见第4节）。每个此类蕴含都会产生一个可由一阶自动定理证明器（自动定理证明器）处理的公式。一项实验研究表明，自动定理证明器在此类问题上非常成功 [18]。在最初的2200万个中，由Vampire [3] 未能解决的不足1000个。

ETP 现已完成 [4], ，但付出了相当大的人力代价：报告统计了 34 位作者。使用现代自动定理证明器的一大障碍是，数学家也关心一个蕴含为何成立或不成立：也就是证明凭证。如果相关蕴含成立，自动定理证明器能够生成详细的证明。然而，如果蕴含不成立，就需要一个 反模型 。目前的自动定理证明器无法生成显式反模型，但有时可以提供一种 饱和 ，以隐式方式描述模型。借助有限模型构建器 [8,30]，可以获得有限 反模型。不过，在某些情况下，所有模型都是无限的。此外，大型有限模型往往难以构造——事实上，找到大型有限模型可能比找到无限模型更困难

由饱和表示。这是已知有限模型构造算法的组合复杂性所致：当论域大小超过约 20 时，这些算法通常会变得过于复杂。然而，代数结构分类往往需要非平凡的无限（反）模型 [29,20]。这促使我们开展本案例研究，并对现有工具进行改进，以生成此类模型。

基于饱和的自动定理证明器，如 E [32],Vampire [3],iProver [10], Zipperposition [41], Twee [33], 或 Waldmeister [15]，通过推导输入公式的结论来寻找反驳。若推导出假，则输入不可满足。另一种可能是达到饱和：无法再推导出新的非冗余结论。若所用的证明过程是完备的——也就是说，只要输入不可满足，就保证能找到假之证明——那么根据逆否命题，输入可满足。典型的自动定理证明系统至多会输出这些结论构成的饱和集，以报告输入可满足。

饱和集是难以处理的对象。与证明不同，它们不透明，极少能在数学或验证等下游应用中用作反例。随着自动定理证明系统不断改进、越来越常达到饱和，这个问题也日益突出。近期的演算改进，例如基项可合流性 [11] 和 AVATAR [40], , 结合阻塞子句消除 [19]等激进的预处理，使系统能在更多输入上达到饱和，其中包括一些传统上难以处理的输入，例如结合交换算子。

我们希望从饱和结果中提取出模型更明确的表示，使其至少能够用于计算基项。对于完整的子句逻辑，这样做非常困难 [16], ，但对于某些片段则容易得多。我们考虑单位等式片段，它只允许全称量化方程和基项不等方程。尽管如此，这一片段仍然十分强大：许多代数结构都可以表示为单位方程的集合[4]；它足以满足函数式编程中的许多应用；甚至可以将完整的一阶逻辑嵌入其中，而霍恩片段的嵌入效率很高 [7]。

对于单位等式片段，可以直接将饱和集解读为潜在的无限模型（第3节），但这种解读在实践中尚未得到充分利用——部分原因在于它依赖于重写理论中的一些微妙之处，而这些对终端用户而言并不显而易见。我们的目标是弥合这一差距，让非专业人士，尤其是数学家，能够直接将饱和结果用作反模型。

2 预备知识

我们假定读者熟悉带等号的经典一阶逻辑 [34]。自动定理证明器系统接受一组公理公式 Γ 和一个猜想公式 C，并尝试完全自动地、无需人工干预地证明或证伪 C 从 Γ推出。对于单元等式情形， C 以及 Γ 中的每个公式都具有 $\forall x_1 \dots x_n.\ s \approx t$的形式。自动定理证明器通常通过反驳来进行：对 C取否定，并

[4] “可进行单位等式公理化”几乎就是 簇 的定义

尝试导出矛盾。由于 C 被取了否定，否定会向内推进，而 C 会变成一个不等方程 $s \not\approx t$，经过斯科伦化后不含变量。

因此，初始子句集 E 是 $\Gamma,\ s \not\approx t$。随后，基于饱和的自动定理证明器会穷尽地应用完备演算的推理，对 E进行推理，并将所有推论添加回 E。如果产生矛盾，C 就是 Γ的定理。然而，如果未检测到矛盾，并且无法推导出尚未包含在 E中的非冗余新子句，那么 E 就是饱和的，且 $\Gamma,\ s \not\approx t$ 是可满足的。否则，完备演算就会找到一个证明。因此，存在一个满足 $\Gamma,\ s \not\approx t$的模型（或反例），这表明 C不是 Γ的定理。在第 3 节中，我们将说明如何为使用源自完备化 [21]的演算的基于饱和的自动定理证明器，构造这个隐式表示的模型。

单元等式问题的签名是 $\Gamma,\ s \not\approx t$ 中的函数和常量组成的集合。如果项或等式不含变量，则称其为基的。我们用 $s[t]$ 表示 t 是 s 的子项，且不排除 s 是 t 的可能性。*Herbrand* 宇宙是由签名中的符号构造出的所有基项的集合。替换 σ 是从变量到项的映射。将替换应用于项 $\sigma(t)$ 时，会把其中的每个变量 x替换为 t $\sigma(x)$。等式默认视为对称的。

3 构造显式模型

假设给定一个基于无失败完备化 [17,1] 或叠加 [2]的自动定理证明器（ATP）所生成的饱和集 E，其中包含全称量化方程 [5] 。我们还给定了签名，以及其内部项序 $\prec$ 的细节；该项序在基项上是全序、良基且可判定的。现在，我们将显式构造一个等式埃尔布朗模型，使得在 $\prec$下，E 中的基项和方程都可以求值。

论域 D 是该签名的 Herbrand 宇宙，即基项仅被解释为其自身。因此，我们只需定义等号关系 $\approx$。其思路是：当项经由 E重写后具有相同的范式时，它们就相等。为此，我们定义一个可计算的规范化函数 $[\![\_]\!] : D \to D$。

定义 1（重写）。当存在方程 $l \approx r \in E$ 的一个基实例 $\sigma(l) \approx \sigma(r)$，且 $\sigma(l) \succ \sigma(r)$ 时，基项 $t[\sigma(l)]$ 可以重写为 $t[\sigma(r)]$。

请注意，重写时 $l \succ r$ 不一定成立，不过在 $\sigma(l) = t$ 的情况下确实成立，因为 $\succ$ 在基项上是全函数。寻找重写规则可以通过算法完成：将等式任一侧匹配到 t 的任意子项上，然后检查序约束。如果等式另一侧存在未绑定变量，可以将它们映射到任意满足 $\sigma(l) \succ \sigma(r)$ 的基项；在实践中，通常映射到最小的常量。

[5] 就我们的目的而言，饱和中的不等式可以忽略。

定义 2（规范化）。项 t 在 E 下的范式 $[\![t]\!]$ 是对 t 进行重写直至不动点的结果。

任何此类计算都会终止，因为 $\prec$是良基的。此外，特定规范化函数所采用的重写顺序并不重要，因为如果无失败完备化过程终止，所得等式集在基项上是合流的 [1]。

例 *1*。考虑一个二元函数 f，以及带有 $f \succ b \succ a$ 的字典序路径排序。 f是交换的，因此得到饱和集 $f(x,y) \approx f(y,x)$。将 $f(f(b,a)\ a)$ 规范化的一种可能计算是

$$[\![f(f(b,a),a)]\!] = [\![f(f(a,b),a)]\!] = [\![f(a,f(a,b))]\!] = f(a,f(a,b))$$

现在我们可以将 $s \approx t$ 定义为等价关系 $\{(s,t) \mid [\![s]\!] = [\![t]\!]\}$，于是便得到了模型。接下来要证明这是输入的一个模型。输入不等式 $s \not\approx t$ 满足 $[\![s]\!] \neq [\![t]\!]$，否则自动定理证明器就会推导出假。因此该不等式成立。根据原始等式理论的假设，输入等式 $l \approx r$ 为真，而该理论在（无失败）完备化过程中保持不变。因此，在饱和系统中存在 $l \approx r$ 的证明；根据 Church-Rosser 性与合流性的等价性，对它的任意基实例都存在重写证明。因此，对于任意基化代换 σ，$[\![\sigma(l)]\!] = [\![\sigma(r)]\!]$。

在这类模型中，基项可以轻松求值为其范式，而基等式也可以通过规范化来判定。我们指出，每个饱和子句集和 $\prec$ 都会导出唯一的模型。这种方法的一个局限是，尚无明显的方法来判定两个模型是否等价，也无法对非基项或非基（不）等式求值。

4 案例研究：等式理论的反模型

ETP 研究的是关于单个二元运算 $*$的全称量化等式之间的蕴含，以下示例将说明其动机。

$$(x*y)*z \approx x*(y*z) \implies x*y \approx y*x \tag{1}$$
$$x*y \approx y*x \implies (x*y)*z \approx x*(y*z) \tag{2}$$
$$x*y \approx u*w \implies x*y \approx y*x \tag{3}$$

蕴含（1）询问结合性是否蕴含交换性；事实并非如此，例如，矩阵乘法满足结合律，但不满足交换律。同样，（2）询问交换性是否蕴含结合性；事实并非如此，因为，例如，$\frac{x+y}{2}$ 满足交换律，但不满足结合律。相比之下，蕴含（3）成立：左侧迫使 $*$ 成为常值函数，而常值函数必然满足交换律。ETP 考察了所有运算 $*$ 至多应用 4 次的等式。共有 $n = 4{,}694$个方程，按顺序编号从1 到 4694，由此得到 $n^2 - n = 22{,}028{,}942$ 种可能的蕴含。ETP 已成功判定所有考察的蕴含，结果可在项目网站 [37]上查看。

$$
\begin{aligned}
f_2 * f_4 &\to f_0(b, f_4) & f_4 * b &\to f_0(f_3, b)\\
f_0(f_0(f_0(x,x),x),x) &\to x & b * a &\to f_2\\
f_2 * a &\to f_0(b, a) & f_3 * b &\to f_4\\
f_0(f_2, b) &\to f_4 & f_1(y, x) &\to x\\
y * f_0(x, y) &\to x & f_2 * b &\to f_3\\
f_0(x, f_0(x, x)) &\to x & f_0(x, y) * y &\to f_0(x * y, y)\\
x * f_0(x, y) &\to f_0(y, f_0(x, y)) & b * f_4 &\to f_2\\
(x * y) * y &\to f_0(x, y) & x * x &\to f_0(f_0(x, x), x)
\end{aligned}
$$

图 1. $118 \wedge \neg 274$的合流且终止的系统

Janota 之前的实验 [18] 表明，Vampire 能够证明所有成立的蕴含。这些蕴含已经有了超位置证明形式的证书。另一方面，Vampire 的有限模型构建器（FMB）证明了 13,854,015 个问题不成立，并且会生成可检验证书 [8,30], 。饱和还检测出了另外 817 个非定理。我们对这 817 个问题运行有限模型构建器，并延长超时时间；最终还剩下 304 个只能由饱和反驳的非定理。其中，Infinox 将 196 个标记为有限不可满足的 [6], ，因此不存在有限反模型。这意味着剩下的 108 个可能存在有限反模型，但我们未能通过 FMB 找到它。详细实验数据表可在作者网站上查阅[6]。通过识别对偶还可以进一步简化：这类蕴含通过交换参数顺序即可相互推得。为清晰起见，我们在此不作此处理。相关数字汇总于下表。

	¬有限。不可满足	有限。不可满足	总计
¬FMB	108	196	**304**
FMB	513	0	513

例如，考虑证明方程 118 和 274 之间的蕴含关系不成立： $\forall xy.\, x \approx y((xy)y) \implies \forall xy.\, x \approx ((yx)y)y$。取否定并进行斯科伦化后，我们得到输入子句集

$$x \approx y((xy)y) \qquad a \not\approx ((ba)b)b$$

该命题可满足，但只有无限模型。[7] 反模型的重写系统如图 1所示。请注意，Vampire引入了定义

$$f_0(x, y) \triangleq (x * y) * y \qquad f_1(x, y) \triangleq x * f_0(y, x)$$

$$f_2 \triangleq b * a \qquad f_3 \triangleq f_2 * b \qquad f_4 \triangleq f_3 * b$$

[6] https://people.ciirc.cvut.cz/~janotmik/stamp [7] 感兴趣的读者可参见附录 A。

以实现饱和。这些定义无法轻易从饱和集中直接看出，但定义模型并不需要它们。或许令人惊讶的是，在某些情况下，原始问题已经饱和。477 与 1426 之间的蕴含关系就是这种情况，它也只有无限反模型。[8]

$$x \approx (y(x(y(yy)))) \qquad\qquad a \not\approx (aa)(a(aa))$$

此处正等式被预先定向为从右到左，并且演算中的任一子句都不会产生推论。

5 已检查的模型

理想情况下，模型应可在外部进行检验。像 E 或 Vampire 这样的系统是庞大而复杂的软件，甚至其底层理论也可能颇为棘手 [31]。我们设想的一条增强可信度的途径，是导出适合在证明助手中检验的模型，例如 ETP 中所采用的 Lean 形式化。这将需要：

1. 将论域定义为 Herbrand 宇宙。在大多数系统中，这是一个直接的归纳定义。
2. 定义规范化函数。许多系统要求所有用户定义函数都终止，这通常需要证明 $\prec$是良基的。这可能并非易事，并且取决于项序的细节。3. 证明所得模型是输入的模型。对于基不等式，这应当是平凡的，但全称量化等式将需要更为复杂的论证。
4. 因此，我们也很可能需要证明重写系统的合流性。这在理论上是有保证的，但仍需重新证明，或许可以使用合流性检查器。

这类系统会相当复杂。不过，为了展示这一概念，我们修改了 Vampire 和 E，使其在饱和时输出重写系统，前提是每个方程 $l \approx r$ 都是“预排序的”，即 $l \succ r$。在我们关注的 304 次饱和中，令我们惊讶的是，有 261 次是预排序的。我们使用工具 CSI [24,42]检查重写系统的（基项）合流性，并使用 TTT_2 [22] 检查终止性。两个工具都会生成证书，可由工具 CeTA [39], 独立验证；CeTA 本身依赖于 IsaFoR Isabelle 库。CSI 和 TTT2 为全部 261 个预排序重写系统生成了合流且终止的证书。在另外 43 种情况下，仍然可以构造模型，但我们尚不清楚如何自动检查（基项）合流性和终止性。

6 相关工作

Bachmair-Ganzinger 模型构造 [2]通过从所谓的 生产性子句生成重写规则，从一个饱和集构造 Herbrand 模型。更多

[8] 根据相同的论证

最近，Lynch [23] 重新审视了模型构造，给出了更明确且算法化的论述。第3 节中的构造是将该框架专门应用于单位等式片段：在此片段中，饱和方程集直接构成一个收敛地面重写系统，而模型则是 Herbrand 宇宙按规范化取商所得的结构。单位方程使我们能够省去子句级机制，并直接使用无失败完备化 [1] 的结果。

Peltier [28] 提出了从经有序归结饱和的子句集中提取 Herbrand 模型的方法，并将这些方法扩展到超归结等改进形式 [27], ，Fermüller 和 Leitsch [13]也做了类似工作。Peltier 还从等式饱和集中构造无限模型，并定义了无歧义公式，使模型构造具有良好定义性 [26]。在我们的单元等式设定中，由饱和得到的重写系统的收敛性保证了无歧义性。Horbach 和 Weidenbach 研究了完整一阶逻辑中基于饱和的模型构造的可判定性结果 [16]。此外，还可以通过寻找固定模板的模型 [5,12], 、识别公式的特定形式 [14], 或进行枚举 [25]来构造无限模型。

近期，ATP求解结果的 TSTP格式已扩展 [36,35] ，可以报告有限模型和无限模型。原则上，我们构造的模型也可以按此格式报告。

7 总结与未来工作

我们证明了，自动定理证明器在单位等式片段中生成的饱和集，可以视为定义显式且可能无限的模型的（基项）汇合重写系统。这一构造依赖于重写领域的已知结果，但自动定理证明器的用户此前难以接触到这些结果；本文对此进行了详细介绍。将这一构造应用于等式理论项目后，我们修改了基于饱和的自动定理证明器 Vampire 和 E，使其能够以基项汇合重写系统的形式输出模型，即使对于不存在有限反模型的问题也如此。我们展示了，所有带有预有序方程的饱和结果都可以通过经认证工具验证其合流性和终止性，从而得到 261 个经过完整验证的反模型。这种独立验证也证实了自动定理证明器输出的饱和结果是正确的，即使对于目前超出我们验证方法适用范围的 43 个含无定向方程的问题也成立。

将这一方法从单位等式片段扩展到更丰富的子句逻辑，是一项具有挑战性但十分重要的目标。至少对于 Horn 情形，可以通过将 Horn 问题嵌入 UEQ [7], 来实现，也可以按照 Dershowitz [9]的思路，将公理视为条件重写规则。另一个问题是，能否从汇合重写系统中显式构造（可能很大的）有限模型。

利益披露。 作者声明不存在与本文内容相关的竞争性利益。

参考文献

1. Bachmair, L., Dershowitz, N., Plaisted, D.：无失败完备化。载于：Ait- Kaci, H., Nivat, M.（编）《代数结构中的方程求解》。第2卷，第1–30页。Academic Press（1989）。https://doi.org/10.1016/B978-0-12- 046371-8.50007-9 2. Bachmair, L., Ganzinger, H.：基于重写的等式定理证明：选择与化简。《逻辑与计算杂志》4(3)，217–247（1994）。https://doi.org/10.1093/logcom/4.3.217，报告：https://pure.mpg.de/rest/items/ item _1834970/component/file _1857487/content 3. Bártek, F., Bhayat, A., Coutelier, R., Hajdú, M., Hetzenberger, M., Hozzová, P., Kovács, L., Rath, J., Rawson, M., Reger, G., Suda, M., Schoisswohl, J., Voronkov, A.：Vampire 日志。载于：Piskac, R., Rakamaric, Z.（编）《计算机辅助验证——第37届国际会议，CAV 2025，克罗地亚萨格勒布，2025年7月23–25日，会议论文集，第三部分》。计算机科学讲义，第15933卷，第 57 71 2025 978 3 031 98682 6 _4 –页。施普林格（ ）。https://doi.org/10.1007/ - - - -。Bolan, M., Breitner, J., Brox, J., Carlini, N., Carneiro, M., van Doorn, F., Dvorak, M., Goens, A., Hill, A., Husum, H., Mejia, H.I., Kocsis, Z.A., Floch, B.L., Bar-on, A.L., Luccioli, L., McNeil, D., Meiburg, A., Monticone, P., Nielsen, P.P., Osazuwa, E.O., Paolini, G., Petracci, M., Reinke, B., Renshaw, D., Rossel, M., Roux, C., Scanvic, J., Srinivas, S., Tadipatri, A.R., Tao, T., Tsyrklevich, V., Vaquerizo-Villar, F., Weber, D., Zheng, F.：等式理论项目：大规模推进协作数学研究（ 2025 2512.07087 5 . ），https://arxiv org/abs/ 。Brown, C.E., Janota, M., Kaliszyk, C.：摘要：高阶 SMT 证明的挑战与解决方案。载于：Déharbe, D., Hyvärinen, A.E.J.（编）《第20届可满足性模理论内部研讨会会议论文集》，与第11届自动推理国际联合会议（IJCAR 2022）同期举办，后者为第8届联合逻辑会议（FLoC 2022）的一部分，以色列海法，2022年8月11–12日。CEUR 研讨会论文集，第3185卷，第128页。CEUR-WS.org（2022），https://ceur-ws.org/Vol-3185/abstract697.pdf 6. Claessen, K., Lillieström, A.：有限不可满足性的自动推理。《自动推理杂志》47(2)，111–132（2011年1月）。https://doi.org/10.1007/ s10817-010-9216-8 7. Claessen, K., Smallbone, N.：等式逻辑中一阶霍恩公式的高效编码。载于：Galmiche, D., Schulz, S., Sebastiani, R.（编）《自动推理——第9届国际联合会议，IJCAR 2018，作为联合逻辑会议 FloC 2018 的一部分在英国牛津举行，2018年7月14–17日，会议论文集》。计算机科学讲义，第10900卷，第388–404页。施普林格（2018）。https://doi.org/10.1007/ 978 3 319 94205 6 _26 - - - - 。Claessen, K., Sörensson, N.：改进 MACE 风格模型查找的新技术。载于：模型计算研讨会（MODEL）会议论文集（2003） 9. Dershowitz, N.：基于序的霍恩子句策略。载于：Mylopoulos, J.（编）第12届 IJCAI 会议论文集，悉尼。第1卷，第118–124页。Morgan Kaufmann（1991），https://www.ijcai.org/Proceedings/91-1/Papers/020.pdf 10. Duarte, A., Korovin, K.：在 iProver 中实现叠加（系统描述）。载于：Peltier, N., Sofronie-Stokkermans, V.（编）第10届 IJCAR 会议论文集，巴黎（第二部分）。人工智能讲义，第12167卷，第158–166页。施普林格（2020）。https://doi.org/ 10.1007/ 978 3 030 51054 1 _24 - - - -。Duarte, A., Korovin, K.：超位置演算中的基项可合流性与连通性。载于：Blanchette, J., Kovács, L., Pattinson, D.（编）《自动推理》

- 11 10, 2022, 2022, 8 13385, 169 187 第 th 国际联合会议，IJCAR 海法，以色列，8月——会议论文集。计算机科学讲义，第 卷，第 页–页。施普林格（ 2022 978 3 031 10769 6_11 ）。
12 https://doi.org/10.1007/ - - - - 。Elad, N., Padon, O., Shoham, S.：有限干草堆中的无限针：在演绎验证中查找无限反模型。美国计算机协会编程语言论文集 8(POPL)，970–1000（2024）。https://doi.org/https: //doi.org/10.1145/3632875 13。Fermüller, C.G., Leitsch, A.：超归结与自动模型构造。《逻辑计算期刊》6 6.2.173 14 2 173 203 1996 。10.1093 ( )，– （）。https://doi org/ /LOGCOM/ 。Ge, Y., de Moura, L.M.：可满足性模理论中量化公式的完全实例化。载于：计算机辅助验证，第21届国际会议，CAV。第 页。 306 320 2009 978 3 642 02658 4_25 – （）。
15 https://doi.org/10.1007/ - - - - 。Hillenbrand, T., Löchner, B.：下一个 Waldmeister 循环。载于：Voronkov, A.（编）自动演绎——CADE-18，第18届自动演绎国际会议。计算机科学讲义，第2392卷，第486–500页（2002）。https://doi.org/10.1007/ 978 3 540 45085 6_27 - - - - 。Horbach, M., Weidenbach, C.：基于饱和的模型构造的可判定性结果。载于：Schmidt, R.A.（编）自动演绎——CADE-22，第22届自动演绎国际会议，加拿大蒙特利尔，2009年8月2日至7日。会议论文集。计算机科学讲义，第5663卷，第404–420页。施普林格（ 2009 978 3 642 02959 2_30 ）。
16 https://doi.org/10.1007/ - - - - 。Hsiang, J., Rusinowitch, M.：等式理论中的字问题。载于：第14届 ICALP 会议论文集，卡尔斯鲁厄。LNCS，第267卷，第54–71页（1987）18。Janota, M.：Vampire 在等式理论项目上的实验结果（2025 2508.15856 19 .），https://arxiv org/abs/ 。Kiesl, B., Suda, M., Seidl, M., Tompits, H., Biere, A.：一阶逻辑中的阻塞子句。载于：Eiter, T., Sands, D.（编）LPAR-21，第21届程序设计、人工智能与推理逻辑国际会议，毛恩，博茨瓦纳，2017年5月7日至12日。计算领域 EPiC 系列，第46卷，第31–48页。EasyChair（2017）。https://doi.org/10.29007/C3WQ 20。Kinyon, M., Veroff, R., Vojtěchovský, P.：内映射群为阿贝尔群的环：自动演绎的应用，第151–164页。Springer Berlin Heidelberg（ 2013 978 3 642 36675 8_8 ）。
21 https://doi.org/10.1007/ - - - - 。Knuth, D., Bendix, P.：泛代数中的简单字问题。载于：Leech, J.（编）计算代数，第263–297页。培格曼出版社（1970）22。Korp, M., Sternagel, C., Zankl, H., Middeldorp, A.：蒂罗尔终止工具 2，第295–304页。Springer Berlin Heidelberg（2009）。https://doi.org/10.1007/978-3- 642-02348-4_21，预印本 http://cl-informatik.uibk.ac.at/users/mkorp/research/ papers/KSZM09.pdf 23。Lynch, C.：构造 Bachmair-Ganzinger 模型。载于：Voronkov, A., Weiden- bach, C.（编）程序逻辑——纪念 Harald Ganzinger 的论文集。计算机科学讲义，第7797卷，第285–301页。施普林格（2013）。https://doi.org/10.1007/ 978 3 642 37651 1_12 - - - - 。Nagele, J., Felgenhauer, B., Middeldorp, A.：CSI：新证据——进展报告，第385–397页。施普林格国际出版（2017）。https://doi.org/ 10.1007/ 978 3 319 63046 5_24 - - - - 。Parsert, J., Brown, C.E., Janota, M., Kaliszyk, C.：SMT 求解中的无限模型查找实验。载于：Piskac, R., Voronkov, A.（编）LPAR 2023：第24届程序设计、人工智能与推理逻辑国际会议论文集，哥伦比亚马尼萨莱斯，2023年6月4日至9日。计算领域 EPiC 系列，第94卷，第317–328页。EasyChair（2023）。https://doi.org/10.29007/SLRM

26。Peltier, N.：为等式子句集构造无限模型：构造无歧义公式。IGPL逻辑期刊 11(1)，97–129（2003）。https:// doi。11.1.97 27 10.1093org/ /jigpal/ 。Peltier, N.：从在归结规则的语义细化下饱和的子句集中提取模型。《信息与计算》181(2)，99–130（2003）。https://doi.org/ 10.1016/S0890 6 28 5401 03 00016 - ( ) - 。Peltier, N.：使用有序归结进行模型构造：从饱和子句集中提取模型。《符号计算杂志》36(1-2)，5–24（2003）。https://doi.org/10.1016/ S0747 2 29 7171 03 00028 - ( ) - 。Phillips, J.D., Vojtěchovský, P.：Bol-Moufang型环路簇。普适代数 54 1 30 3 259 271 2005 00012 005 1941 ( )，–（2005年10月）。https://doi.org/10.1007/s - - - 。Reger, G., Riener, M., Suda, M.：MACE风格有限模型查找中的对称性规避。载于：Herzig, A., Popescu, A.（编）组合系统前沿——第12届国际研讨会，FroCoS 2019，英国伦敦，2019年9月4日至6日，会议论文集。计算机科学讲义，第11715卷，第3–21页。施普林格（2019）。https://doi.org/10.1007/978 3 030 29007 8_1 - - - - 。Schlichtkrull, A., Blanchette, J.C., Traytel, D., Waldmann, U.：形式化 Bachmair 和 Ganzinger 的有序归结证明器。载于：Galmiche, D., Schulz, S., Sebastiani, R.（编）自动推理——第9届国际联合会议，IJCAR 2018，作为联合逻辑会议 FloC 2018 的一部分举行，英国牛津，2018年7月14日至17日，会议论文集。计算机科学讲义，第10900卷，第89 107 2018 978 3 319 94205 6_7 – 页。施普林格（）。https://doi.org/10.1007/ - - - - 。Schulz, S., Cruanes, S., Vukmirović, P.：更快、更高、更强：E . . 载于：Fontaine, P.（编）第27届 CADE 会议论文集，巴西纳塔尔。第495–507页。人工智能讲义第11716号，施普林格（2019 978 3 030 29436 6_29 ）。https://doi.org/10.1007/ - - - - 。Smallbone, N.：Twee：等式定理证明器。载于：自动演绎——CADE 28：第28届自动演绎国际会议，线上活动，2021年7月12日至15日，会议论文集。第602–613页。Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg（2021 978 3 030 79876 5_35 ）。https://doi.org/10.1007/ - - - - 。Smullyan, R.M.：一阶逻辑。Springer Berlin Heidelberg （1968 ）。https://doi.org/10.1007/978 7 35 3 642 86718- - - - 。Steen, A., Sutcliffe, G., Fontaine, P., McKeown, J.：类型化一阶逻辑的塔斯基解释的表示、验证与可视化。载于：Piskac, R., Voronkov, A.（编）LPAR 2023：第24届程序设计、人工智能与推理逻辑国际会议论文集。计算领域 EPiC 系列，第94卷，第369–385页。EasyChair（2023）。https://doi.org/10.29007/ 1RHX 36。Sutcliffe, G., Steen, A., Fontaine, P.：用于解释的新版 TPTP 格式。CoRR abs/2406 .2406.06108 37 06108 2024。10.48550。 . .（）。https://doi org/ /ARXIV 。Tao, T.：等式理论项目，https://teorth github io/ equational_theories/dashboard/ 38。Tao, T.：泛代数试点项目：探索协作和使用机器辅助的新方式?（2024），https://terrytao.wordpress.com/2024/09/25/a-pilot-project-in-universal-algebra-to-explore-new-ways-to-collaborate-and-use-machine-assistance/ 39。Thiemann, R., Sternagel, C.：使用 CeTA 认证终止性证明，第452–468页。Springer Berlin Heidelberg（2009）。https://doi.org/10.1007/978-3-642-03359-9 3140 。Voronkov, A.：AVATAR：一阶定理证明器的架构。载于：Biere, A., Bloem, R.（编）计算机辅助验证——第26届国际会议，

CAV 2014，作为维也纳逻辑夏季会议VSL 2014的一部分，于奥地利维也纳举行，2014年7月18日至22日。会议论文集。计算机科学讲义，第8559卷，第696–710页。施普林格（2014）。https://doi.org/10.1007/978-3-319-08867-9_46

41. Vukmirovic, P., Bentkamp, A., Blanchette, J., Cruanes, S., Nummelin, V.：Tour-ret, S.：让高阶超位置发挥作用。自动推理杂志 66(4), 541–564（2022年1月）。https://doi.org/10.1007/s10817-021-09613-z

42. Zankl, H., Felgenhauer, B., Middeldorp, A.：CSI——合流性工具，p. 499–505. 施普林格 Berlin Heidelberg（2011）。https://doi.org/10.1007/978-3-642-22438-6_38

一个从 118 无法推出的有限反例 118 $\implies$ 274

以下子句集没有有限模型。

$$x \approx y * ((x * y) * y) \tag{4}$$

$$a \not\approx (((b * a) * b) * b) \tag{5}$$

证明。假设存在有限模型，以导出矛盾。首先注意，左乘是满射：根据（4），每个 x 都可以写成 $y * z$，其中 z 是$(x * y) * y$。有限集上的满射函数是单射。现在考虑（4）的以下一个实例：

$$b * a \approx b * (((b * a) * b) * b),$$

并得到

$$a \approx ((b * a) * b) * b,$$

根据单射性。 □