arXiv:2602.16354v1 [math.SG] 18 Feb 2026

地月圆型限制性三体问题中的彗星型周期运动及其面外分岔：计算辛分析

CENGIZ AYDIN

2026年2月19日

摘要

圆型限制性三体问题（CR3BP）的彗星型周期轨道，是从主天体共同质心周围非常大的逆行和顺行圆形开普勒运动生成的周期解。本文首先采用经典的 Poincar´e 延拓方法，解析地证明彗星型周期轨道的存在性。在这一解析方法中，我们还确定了它们的 Conley–Zehnder指标，该指标被定义为使用交叉型的马斯洛夫指标。随后，通过应用标准的校正–预测技术，我们对地月圆型限制性三体问题中的两个彗星轨道族进行了数值探究。我们计算了它们的稳定性指标，确定了重数最高为六的垂直自共振轨道，研究了垂直分岔周期解，并讨论了其轨道特征。我们将主要结果以基于辛不变量的分岔图形式加以展示，从拓扑角度概述了各分岔分支之间的连接，其中包括桥族。

关键词 彗星轨道 ·地月圆型限制性三体问题 · Conley–Zehnder指标 · 分岔图**2020年数学主题分类** 70H12 · 70F07 · 70G45

目录

1 引言 **2**

2 圆型限制性三体问题动力学 **3**

2.1 运动方程.3 2.2 对称性.5 2.3 单值矩阵与稳定性指标.5 2.4 面外分岔.7

3 Conley–Zehnder指标 **8**

3.1 哈密顿轨道的横截 Conley–Zehnder 指数.8 3.2 平面解、$Sp(2)$ 的情形与指数迭代.10 3.3 分岔点处的相互作用.11

4 彗星型周期轨道的解析方法 12

5 地月圆型限制性三体问题中的数值计算结果 14

5.1 顺行与逆行彗星型周期轨道.15 5.2 面外分岔结果.17

6 结论 **24**

附录 数据表 **26**

1 引言

天体力学中最有前景的问题之一，是寻找牛顿N体问题的周期解；该问题描述N个质量为$m_i > 0$ $(i = 1,...,N)$的天体按照牛顿万有引力定律运动并相互作用的动力学。运动方程由下式给出

$$\ddot{r}_i = -\sum_{j=1, j\neq i}^{N} \frac{m_j(r_i - r_j)}{r_{ij}^3}, \quad 1 \leq i \leq N,$$

其中，时间单位选取为使引力常数为 1，$r_i \in \mathbb{R}^3$ 表示i号天体的位置，而$r_{ij} = |r_i - r_j|$ 表示i号天体与j号天体之间的欧几里得距离。尽管二体问题已得到全面理解 [43], ，但对于N体问题（$N \geq 3$），目前仍不存在一般性的解析解 [44]。一个特殊且较简单的关注情形是限制性问题，它可以方便地描述太阳系小天体的动力学。假设N 个天体中有一个远小于其他$N-1$ 个天体（称为主天体），因此对它们的运动影响可以忽略。在这一假设下，主天体的运动构成一个（$N-1$）体问题，而无穷小天体的运动则受其引力场支配。

在N体系统中，三体问题是天文学、物理学和数学领域最受瞩目的问题之一。圆型限制性三体问题（圆型限制性三体问题）假设两个主天体围绕共同质心作圆周运动，常被用作近似描述航天器在日心行星或行星卫星环境中的运动。圆型限制性三体问题的周期解为所有动力学上可能的轨道结构提供了重要框架，并有助于了解给定轨迹的稳定性和行为。尤其是，随着月球探测再度兴起而受到推动的航天任务方案和航天器轨迹设计——包括美国国家航空航天局的近月空间任务“阿耳忒弥斯” [46], 、月球门户 [21], 以及嫦娥探月任务 [27],——表明，地月圆型限制性三体问题框架中的周期轨道对于运行轨道至关重要。因此，尽可能全面地编目周期轨道至关重要。

尽管地月圆型限制性三体问题中的不同类型轨道已得到广泛研究 [10,15,18,47],，文献中仍有多种周期解鲜少受到探讨，其中包括彗星型周期轨道及其面外分岔。彗星型周期轨道是由主天体共同质心周围非常大的逆行和顺行圆形开普勒运动产生的周期解。从解析角度看，Moulton 首次证明了这类轨道在限制性三体问题中的存在性 [38] 。之后，Meyer 证明了这类轨道在（限制性）N体问题中的存在性[33–35], ，这一结果在 [29,30] 中扩展到一类更广泛的限制性N体问题。近期， [31]证明了彗星轨道在圆型限制性四体问题的一个特殊情形中的存在性，[14] 则在椭圆型空间限制性N体问题中对其进行了分析。存在性证明所采用的技术基于一种通用策略 [36]：对于依赖小参数的系统，如果未扰动系统的周期解的弗洛凯乘子均不等于 1，那么根据隐函数定理，该周期解也存在于扰动系统中。这种小参数方法源自 Poincar´e 的开创性工作 [40]，因此也称为 Poincar´e 延拓方法。

在关于数值探索的经典工作中，彗星轨道及其平面线性稳定性行为由Str¨omgren及其同事在哥本哈根问题（圆型限制性三体问题中两个主天体质量相等时的特例）中进行了研究 [45], ，由Broucke针对地月圆型限制性三体问题进行了研究 [10], ，并由Bruno针对太阳–木星系统进行了研究 [11, 12]。相应的轨道族记号为：

	圆型限制性三体问题	顺行彗星轨道	逆行彗星轨道
Str¨omgren	哥本哈根问题	l	m
Broucke	地月系统	E_1	F
Bruno	太阳–木星系统	$ID-1$	$IR-$

彗星轨道的面外分岔已在 [25] 中针对小行星(433)爱神星周围动力学的一种引力模型进行了分析，并在 [39]中针对圆型限制性四体问题的一个特例进行了分析。对于各种圆型限制性三体问题系统， [15] 仅部分描述了逆行彗星轨道的一些垂直分岔分支（标记为族$C1$）。由于除上述三篇文章外，我们尚未了解到更多关于彗星轨道面外分岔的研究，本文旨在研究逆行与顺行彗星周期轨道及其垂直多重覆盖分岔，并特别关注地月环境。在本文中，我们将逆行彗星轨道族记为 κ_- ，将顺行彗星轨道族记为 κ_+。

近年来，辛不变量（其中最重要的是Conley–Zehnder指标）已成功应用于数值分岔分析，从而从拓扑角度概述了全局网络结构，并系统地分类了周期轨道族 [4–6,22,23,26,37]。辛方法与经典计算技术的结合也是本研究的关键特征。我们的结果表明，几乎在所有情况下，分岔分支都会形成桥族。我们将两个不同分支点之间的周期轨道族称为桥族，定义见 [28]。因此，桥族是闭族，仅存在于有限的能量值区间内。我们的垂直多重覆盖分岔结果如下：

- 逆行轨道的单圈分岔和倍周期分岔 κ_- 。由 κ_- 的单圈分岔产生的解对应于$L1$晕轨道，而由 κ_- 的倍周期分岔计算得到的解则与$L2$和$L3$垂直Lyapunov轨道族相符。我们提及，这些结果也在 [15], 中有所描述，不过它们是根据平动点附近的解推导得出的。

- 逆行轨道的三倍周期分岔 κ_- 轨道。通过对 κ_- 轨道进行三倍周期分岔，得到了两个分岔分支。其中一个分支形成一个桥族，连接到一个属于地球周围逆行解族的周期解（Broucke记号中的族$A1$）；另一个分支则形成一座桥，连接到由顺行 κ_+ 轨道产生的单圈分岔。

- 逆行轨道的k重覆盖分岔 κ_- （$k=4$，5，6）。系统地说，由逆行 κ_- 轨道的k重覆盖产生的分支，会形成桥族，连接到顺行 κ_+ 轨道的$k=4$，5，6重覆盖（$k-2$）。

- 顺行轨道的单圈分岔 κ_+ 轨道。从 κ_+的一个单圈分支点出发，我们生成了一个轨道族，其成员逐渐接近与地球发生碰撞。解的大部分周期都远离地球，并在垂直方向上呈现大幅钩形延伸，因此近碰撞阶段十分短暂。在圆型限制性三体问题中，当质量较小时，这类轨道在较大主天体周围也为人所知，它们是旋转开普勒问题中垂直碰撞轨道的分岔 [7,8]。

论文结构。第 2 节回顾圆型限制性三体问题动力学。接下来的第 3 节介绍 Conley–Zehnder 指标及相关辛不变量的构造。第 4 节探讨彗星轨道的解析方法。我们讨论一种基于 Poincar´e 延拓方法的存在性证明，并确定这些轨道的 Conley–Zehnder指标。第 5 节通过数值方法研究彗星轨道族，并展示研究结果。我们计算稳定性指标，找出重数不超过六的垂直自共振轨道，分析垂直分岔分支，并讨论其轨道特征。上文简要概述的主要结果以分岔图的形式呈现，为分岔分支之间的联系（包括桥族）提供拓扑概览。第 6 节总结我们的工作并作出结论。数据汇总于附录中。

2 圆型限制性三体问题动力学

2.1 运动方程

空间圆型限制性三体问题描述的是一个无穷小质量物体的运动。该物体受两个主天体的引力场作用，而这两个主天体以恒定角速度在同一平面内沿圆周运动

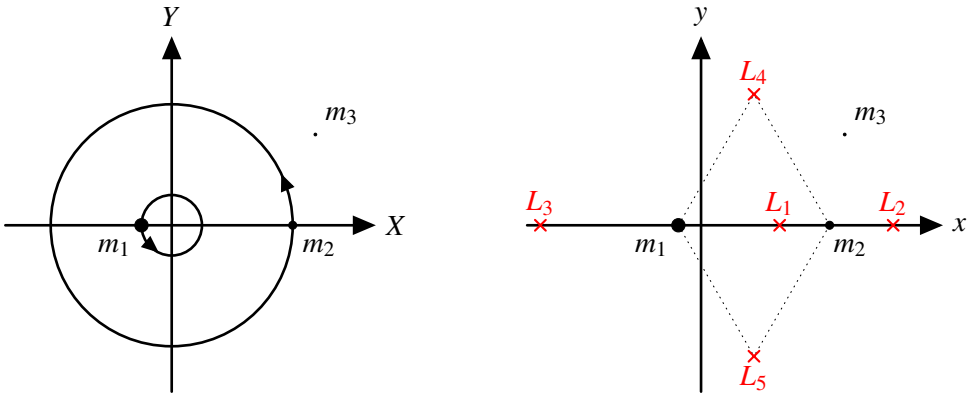


图 1：惯性参考系（X，Y）和旋转参考系（x，y）中的圆型限制性三体问题，其中主天体为 m_1 和 m_2,，无穷小天体为 m_3，平动点为 L_i（$i=1$，2，3，4，5）。

并绕它们的共同质心运行。无穷小质量物体对主天体的运动影响可忽略不计（见图 1）。采用一个以主天体的轨道角速率旋转的坐标系，并选取合适的单位后，可假设主天体的质量分别为 $1-\mu$和 μ，其中$\mu \in [0, \frac{1}{2}]$；它们分别静止于点（$-\mu$，0，0）和（$1-\mu$，0，0），并在 2π 个时间单位内完成一次惯性系中的公转。在这些假设下，无穷小质量物体的运动由以下二阶微分方程 [45,第 1] 章描述：

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= 2\dot{y} + x - (1-\mu)\frac{x+\mu}{r_1^3} - \mu\frac{x-1+\mu}{r_2^3}, \\
\ddot{y} &= -2\dot{x} + y - \left(\frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3}\right) y, \\
\ddot{z} &= -\left(\frac{1-\mu}{r_1^3} + \frac{\mu}{r_2^3}\right) z,
\end{aligned} \tag{1}$$

其中，$r_1 = \left((x+\mu)^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{1}{2}}$和 $r_2 = \left((x-1+\mu)^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{1}{2}}$表示无穷小天体到主天体的距离。圆型限制性三体问题框架具有五个平衡点，也称为平动点或拉格朗日点 [45, 第 4]章：三个共线点 L_1（位于主天体之间）、L_2 和L_3（位于连接两主天体的区间之外），以及两个等边三角形点L_4和L_5,，如图 1 所示。

将动量定义为

$$p_x = \dot{x} - y, \quad p_y = \dot{y} + x, \quad p_z = \dot{z}, \tag{2}$$

t该系统可写成哈密顿形式，其对应的哈密顿函数为

$$H(x,y,z,p_x,p_y,p_z) = \frac{1}{2}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} + p_x y - p_y x, \tag{3}$$

它是该系统的第一积分。因此，周期解构成一个光滑的一参数族，由能量参数化。一个等价的第一积分是雅可比常数 $C = -2H$。该系统的相空间为 6 维，并赋有标准辛形式 $\omega_0 = \sum dp_k \wedge dk (k = x,y,z)$。哈密顿向量场 X_H由 $dH(\cdot) = \omega_0(\cdot, X_H)$ 唯一确定，并通过方程生成哈密顿流 ϕ^t

$$\frac{d}{dt}\phi^t = X_H(\phi^t), \quad \phi^0 = \mathrm{id}, \tag{4}$$

这等价于（1）。在 ω_0的线性代数表达式中，

$$\omega_0(\cdot,\cdot) = \langle J\cdot,\cdot\rangle, \quad \text{with } J = \begin{pmatrix} 0 & I_3 \\ -I_3 & 0 \end{pmatrix},$$

其中　　括号表示欧几里得内积，我们可以表示哈密顿向量场 b　　y

$$X_H = J\nabla H,$$

其中梯度通常是相对于欧几里得内积定义的。这样，方程(1)和(4)可以等价地表示为

$$\dot{\gamma} = J\nabla H(\gamma), \quad \gamma \equiv (x, y, z, p_x, p_y, p_z). \tag{5}$$

2.2 对称性

哈　　密顿量(3)在相空间上的对合下保持不变，这些对合称为对称性，表示为　　：

$$OX := \rho_1(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = (x, -y, -z, -p_x, p_y, p_z) \text{ (π-rotation around the x-axis)}, \tag{6}$$
$$XOZ := \rho_2(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = (x, -y, z, -p_x, p_y, -p_z) \text{ (reflection at the xz-plane)}, \tag{7}$$
$$\sigma(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = (x, y, -z, p_x, p_y, -p_z) \quad \text{(reflection at the ecliptic } \{z = 0\}). \tag{8}$$

注意，$\rho_1 \circ \rho_2 = \rho_2 \circ \rho_1 = \sigma$。平面问题对应于将系统限制在不动点集 $\mathrm{Fix}(\sigma) = \{(x, y, 0, p_x, p_y, 0)\}$上，其中内在对称性由$(x, y, 0, p_x, p_y, 0) \mapsto (x - y0, -p_x, p_y, 0)$ 表征（关于x轴的反射）。此外，尽管(8)是辛的，(6)和(7)是反辛的，这意味着它们的矩阵表示

$$\Sigma_{OX} = \mathrm{diag}\{1, -1, -1, -1, 1, 1\},$$
$$\Sigma_{XOZ} = \mathrm{diag}\{1, -1, 1, -1, 1, -1\},$$
$$\Sigma_{\sigma} = \mathrm{diag}\{1, 1, -1, 1, 1, -1\},$$

满足 $\Sigma_\sigma J \Sigma_\sigma = J$，且 $\Sigma J \Sigma = -J$，其中 $\Sigma = \Sigma_{OX}$ 或 $\Sigma = \Sigma_{XOZ}$。在哈密顿系统中，辛对称性表示保时对称性，而反辛对称性表示时间反演对称性 [24]。在关于 σ 不变的情况下，哈密顿流 ϕ^t 满足

$$\sigma \circ \phi^t = \phi^t \circ \sigma, \tag{9}$$

而在关于$\rho_{1/2}$不变的情况下，有

$$\rho_i \circ \phi^{-t} = \phi^t \circ \rho_i, \quad \text{with } i \in 1, 2. \tag{10}$$

特别地，这类不变周期轨道可按对称性的数量分为不同组：

- 关于 *OX*（或 *XOZ*）对称的简单对称：轨道从与x轴（或xz平面）垂直的位置出发，并在半周期时与x轴（或xz平面）垂直相交。
- 关于 *OX-XOZ*（或 *XOZ-OX*）对称的双重对称：轨道从与x轴（或xz平面）垂直的位置出发，并在四分之一周期时与xz平面（或x轴）垂直相交。

2.3 单值矩阵与稳定性指标

设 $\gamma \equiv (x, y, z, p_x, p_y, p_z)$ 为 (5) 的T周期解。轨道 γ的重要信息由沿 γ的线性化流给出，该流表示为

$$d\phi^t =: V(t) = (v_{ij}) \in \mathbb{R}^{6\times 6},$$

鉴于 (5)，求解变分方程，

$$\dot{V}(t) = JD^2H(\gamma(t))V(t), \quad V(0) = \mathrm{id}, \tag{11}$$

其中，D^2H是哈密顿量的海森矩阵。注意，$V(-t) = V^{-1}(t)$。（11）的解也通常称为状态转移矩阵 或变分矩阵。

γ对应的单值矩阵 M 是全周期线性化，即$M = V(T)$。由于单值矩阵是辛矩阵，这意味着它满足$M^T JM = J$，或者根据（2），它与一个辛矩阵共轭，因此其特征值成倒数对出现，形式为

$$\{1, 1, \lambda_1, \lambda_1^{-1}, \lambda_2, \lambda_2^{-1}\},$$

其中，1 显然出现两次，因为能量是系统的第一积分。非平凡特征值称为弗洛凯乘子。当 1 不属于周期轨道 γ 的弗洛凯乘子时，该轨道为非退化 。对于每一对弗洛凯乘子，稳定性指标 定义为

$$s_k = \frac{1}{2}\left(\lambda_k + \lambda_k^{-1}\right), \quad \text{for } k = 1, 2.$$

它们可以属于以下类型之一：

- 椭圆型： $-1 < sk = \cos\theta < 1$。这等价于 $\lambda k = e^{i\theta}$。
- 正双曲型：$sk > 1$。这等价于 $\lambda k \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$。
- 负双曲型：$sk < -1$。这等价于 $\lambda k \in \mathbb{R}_{<0} \setminus \{-1\}$。
- 复不稳定型：四元数组情形 $\{\lambda, \lambda^{-1}, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}^{-1}\}$。

稳定周期解是同时满足 $|s_1| < 1$ 和 $|s_2| < 1$的解。通常使用公式计算稳定性指标，如 [9]后面的引理所示。

引理 2.1. 稳定性指标由下式确定：

$$s_1 = -\frac{1}{4}\left(\alpha + \sqrt{\beta}\right), \quad s_2 = -\frac{1}{4}\left(\alpha - \sqrt{\beta}\right), \tag{12}$$

其中 $\alpha = 2 - \mathrm{tr}(M)$，且 $\beta = 2\mathrm{tr}(M^2) - \alpha^2 + 4$。

证明。 M 的特征多项式形式如下：

$$\chi_M(\lambda) = (\lambda - 1)^2\left(\lambda^4 + \alpha\lambda^3 + \beta'\lambda^2 + \alpha\lambda + 1\right),$$

其中

$$\alpha = -\lambda_1 - \lambda_1^{-1} - \lambda_2 - \lambda_2^{-1}, \quad \beta' = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2^{-1} + \lambda_1^{-1}\lambda_2 + \lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1} + 2.$$

系数 α 和 β' 也可以写成

$$\alpha = 2 - \mathrm{tr}(M), \quad \beta' = \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(M^2) + 1.$$

考虑稳定性指标后， $\chi_M(\lambda)$的等价表达式为

$$\chi_M(\lambda) = (\lambda - 1)^2\left(\lambda^4 + 2(-s_1 - s_2)\lambda^3 + (4s_1s_2 + 2)\lambda^2 + 2(-s_1 - s_2)\lambda + 1\right).$$

因此，稳定性指标满足以下方程

$$-2(s_1 + s_2) = \alpha, \quad 4s_1s_2 + 2 = \beta',$$

其解对应于（12）。 □

下一个引理表明，对于对称周期轨道，只需沿轨道从一个对称点线性化到下一个对称点，即可得到单值矩阵 [9]。这实际上节省了计算工作量。

引理 2.2。 设 γ 是一个简单对称或双重对称的 T 周期轨道。根据对称类型， γ 的单值矩阵确定如下：

• *a)* 若 γ关于 *OX* 对称或具有 *XOZ* 对称性，则相应地：

$$M = \Sigma_{OX} V^{-1}(T/2)\Sigma_{OX} V(T/2), \quad \text{or} \quad M = \Sigma_{XOZ} V^{-1}(T/2)\Sigma_{XOZ} V(T/2).$$

• *b)* 如果 γ 关于 *OX-XOZ* 对称性或 *XOZ-OX* 对称性呈双重对称，则相应地：

$$M = \left[\Sigma_{OX} V^{-1}(T/4)\Sigma_{XOZ} V(T/4)\right]^2, \quad \text{or} \quad M = \left[\Sigma_{XOZ} V^{-1}(T/4)\Sigma_{OX} V(T/4)\right]^2.$$

证明。 a) 和 b) 中各自第二种情况的证明与对应的第一种情况类似，因此只需讨论相应的第一种情况。设 γ 关于*OX* 对称性呈简单对称。根据恒等式 (10)，变分矩阵满足

$$V^{-1}(t) = \Sigma_{OX} V(t)\Sigma_{OX}. \tag{13}$$

将方程 (13) 中的 $t = -T/2$，以及 $V(T/2) = V^{-1}(T/2)V(T)$ 代入，得到

$$V^{-1}(T/2)V(T) = \Sigma_{OX} V^{-1}(T/2)\Sigma_{OX},$$

这意味着 a) 中的第一种情况成立。现在设 γ 关于 *OX-XOZ* 对称性呈双重对称。由于该轨道 γ 在其半个周期内关于 *OX* 对称，根据 a) 中的第一种情况可得

$$M = \Sigma_{OX} V^{-1}(T/2)\Sigma_{OX} V(T/2). \tag{14}$$

考虑到 ， $\Sigma_{OX}\Sigma_{XOZ} = \Sigma_{XOZ}\Sigma_{OX} = \Sigma_\sigma$，根据 (9)，变分矩阵满足 at

$$V(t+T) = \Sigma_\sigma V(t)\Sigma_\sigma V(T). \tag{15}$$

将 (13) 和 (15) 结合，得到$t = -T/4$

$$V(T/2) = \Sigma_\sigma\Sigma_{OX} V^{-1}(T/4)\Sigma_{OX}\Sigma_\sigma V(T/4) = \Sigma_{XOZ} V^{-1}(T/4)\Sigma_{XOZ} V(T/4),$$

将其与逆矩阵一同代入 (14)，即可证明 b) 中的第一种情况。 □

注 2.3. 在辛坐标中，变分矩阵 $V(t)$ 满足 $V^T(t)JV(t) = J$，这意味着在引理 2.2 的公式中，求逆时可以使用恒等式 $V^{-1}(t) = J^T V^T(t)J$。

2.4 面外分岔

由于辛对称性 σ (8)，平面周期轨道具有平面稳定性指标和空间稳定性指标（也称为水平或垂直稳定性指标），分别记为s_p 和s_v。$s_v = 1$ 的情形表示发生面外分岔，产生周期相同的空间周期轨道；而$s_v = -1$ 的情形则对应倍周期分岔。垂直自共振（VSR）轨道是指弗洛凯乘子等于单位根的轨道，即当垂直稳定性指标满足

$$s_v = \cos\left(2\pi\frac{d}{k}\right), \tag{16}$$

其中 $d,k \in \mathbb{Z}(k \neq 1,2)$，且 $d < k$与 d/k为不可约分数。这样的临界轨道也称为 *d*:*k* 共振轨道。如 [42], 中所指出，周期为 kT 的 *k*-覆盖恰好产生两个空间周期轨道族的分岔，其对称性取决于重数*k*:

• 奇数重数 *k*。两个新分支的成员均为简单对称；其中一个族的轨道关于 *OX*对称，其余轨道关于 *XOZ*对称。
• 偶重数 *k*。这两个新族均由双重对称周期轨道组成；其中一族中的轨道关于*OX-XOZ*对称具有双重对称性，而另一族中的轨道关于*XOZ-OX*对称具有双重对称性。

3 Conley–Zehnder 指标

3.1 哈密顿轨道的横截 Conley–Zehnder 指数

与哈密顿周期解相关的一个重要不变量是所谓的 Conley–Zehnder指标 [13]。直观而言，它衡量沿轨道的线性化流的绕数。由于我们所研究的哈密顿框架与时间无关，我们考虑如 [1, 22, 23, 26, 37] 中提出的周期解的横截 Conley–Zehnder 指数。为此，我们仔细考察 [1, 26] 的方法，该方法基于利用交叉型 [41] 的 Robbin–Salamon 定义来定义马斯洛夫指标：令 $Sp(2n)$ 表示辛群，即，

$$Sp(2n) = \{A \in \mathrm{Mat}(2n,\mathbb{R}) \colon A^T JA = J\}, \quad \text{with } J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

设 $\Psi \colon [0,T] \to Sp(2n)$ 是一条辛矩阵路径，满足 $\Psi(0) = \mathrm{id}$。若某点t满足 $\ker(\Psi(t) - \mathrm{id}) \neq 0$，则称其为一个**交叉点**。对于交叉点$t$，**交叉型**定义为向量空间$V_t = \ker(\Psi(t) - \mathrm{id})$ 上的二次型：

$$Q_t(v,v) = \omega\left(v, \dot{\Psi}(t)v\right), \quad v \in V_t,$$

其中 ω是V_t上的辛形式。由于在辛坐标中， ω由矩阵表示为

$$\Omega := \mathrm{diag}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

交叉型可表示为$Q_t = \Omega\Psi(t)$这一对角矩阵。此外，二次型的符号差定义为 $\mathrm{sign}(Q_t) = n_+ - n_-$，其中$n_+$ 和n_- 分别表示正项和负项的数量。假设所有交叉点都是孤立且非退化的，即交叉点t 处的交叉型Q_t 作为二次型是非退化的。于是， Ψ 的**马斯洛夫指标**（也称**Robbin–Salamon 指标**）定义为

$$\mu(\Psi) = \frac{1}{2}\mathrm{sign}(Q_0) + \sum_{t \in (0,T) \text{ crossing}} \mathrm{sign}(Q_t) + \frac{1}{2}\mathrm{sign}(Q_T), \tag{17}$$

它具有以下优良性质：

1)（同伦）两条辛矩阵路径在端点固定的条件下同伦，当且仅当它们具有相同的指标。2)（拼接）若 $\Psi \colon [a,b] \to Sp(2n)$ 且 $a < c < b$，则

$$\mu(\Psi) = \mu(\Psi|_{[a,c]}) + \mu(\Psi|_{[c,b]}).$$

3)（乘积）设 $n = n' + n''$，并以显然的方式将 $Sp(2n') \times Sp(2n'')$ 视为 $Sp(2n)$ 的子群。若 Ψ', Ψ'' 分别是 $Sp(2n')$、$Sp(2n'')$ 中的路径，则

$$\mu(\Psi' \oplus \Psi'') = \mu(\Psi') + \mu(\Psi''). \tag{18}$$

现在，设 H 是相空间（例如 $\mathbb{R}^{2n}$）上的一个与时间无关的哈密顿量，且 γ是哈密顿向量场 X_H 的一条 T- 周期轨道。为了将马斯洛夫指标与轨道 γ 联系起来，我们需要一条辛矩阵路径，而这条路径实际上由沿轨道 γ的线性化流生成。首先，我们必须沿轨道 γ固定一个辛标架，或称辛平凡化。该标架由轨道 γ上每一点切空间的一组辛基组成；我们据此测量线性化流的绕转情况，如图 2 所示。根据一般理论， [32, 第 2 章保证了这种辛平凡化的存在，6] 前提是轨道 γ 是某个张成圆盘的边界，且该圆盘位于 $\mathbb{R}^{2n}$。

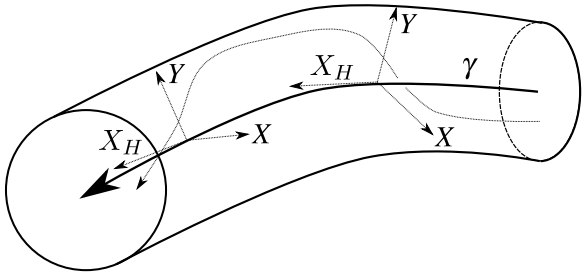


图 2：Conley–Zehnder指标衡量轨道 γ上线性化流相对于标架的扭转。

由于系统的能量守恒，我们首先在周期轨道 γ上的每一点考虑一个二维辛向量空间，其定义为

$$L := \langle Z, X_H \rangle, \quad \text{with } Z = \frac{1}{||\nabla H||^2} \nabla H.$$

对向量 Z进行归一化可确保 $\omega(Z, X_H) = 1$。因此， $\{Z, X_H\}$构成标架 L的辛基。为了生成由线性化流诱导的辛矩阵路径，我们必须为L的 $(2n-2)$ 维辛补空间选取一个辛基 $\{X1,...,X_{n-1}, Y1,...,Y_{n-1}\}$，其定义如下：

$$L^{\omega} = \{Y : \omega(X,Y) = 0 \text{ for } X \in L\}. \tag{19}$$

例如，可以通过辛 Gram–Schmidt 过程得到这样的辛基。这样，在能级集 $\Sigma = H^{-1}(c)$ 上，其中 $c \in \mathbb{R}$，轨道 γ上的每个点 p 处，L^{ω}的辛基构成一个横截于哈密顿向量场 X_H的 $(2n-2)$ 维标架。该标架确定一个辛平凡化：

$$\Phi : \Sigma \times \mathbb{R}^{2n-2} \to L^{\omega}, \quad (p, u_1, ..., u_{n-1}, v_1, ..., v_{n-1}) \mapsto \sum_{i=1}^{n-1} u_i \cdot X_i(p) + \sum_{i=1}^{n-1} v_i \cdot Y_i(p).$$

结合投影映射，

$$pr_{L^{\omega}} : T\mathbb{R}^{2n} \to L^{\omega}, \quad aZ + \sum_{i=1}^{n-1} u_i X_i + bX_H + \sum_{i=1}^{n-1} v_i Y_i \mapsto \sum_{i=1}^{n-1} u_i X_i + \sum_{i=1}^{n-1} v_i Y_i,$$

一条表示横向线性化流的辛矩阵路径 Ψ_{γ}: $[0,T] \to Sp(2n-2)$，现在由以下内容生成：

$$\Psi_{\gamma}(t) := (\Phi(\gamma(t), \cdot))^{-1} \circ pr_{L^{\omega}} \circ d\phi^t(\gamma(0)) \circ \Phi(\gamma(0), \cdot), \tag{20}$$

其特征由交换图描述：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{2n-2} & \xrightarrow{\quad \Psi_{\gamma}(t) \quad} & \mathbb{R}^{2n-2} \\ {\scriptstyle \Phi(\gamma(0),\cdot)}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle (\Phi(\gamma(t),\cdot))^{-1}} \\ L^{\omega}_{\gamma(0)} & \xrightarrow{\quad pr_{L^{\omega}} \circ d\phi^t(\gamma(0)) \quad} & L^{\omega}_{\gamma(t)} \end{array}$$

于是，轨道 γ的**横截 Conley–Zehnder 指数**定义为路径 Ψ_{γ}的马斯洛夫指标，记作

$$\mu_{CZ}(\gamma) := \mu(\Psi_{\gamma}),$$

该量在平凡化的连续变形下保持不变。

3.2 平面解：$Sp(2)$的情形与指数迭代

现在，设 $\gamma\equiv(x,\ y,\ 0,\ p_x,\ p_y,\ 0)$ 是空间哈密顿系统的一个平面T周期解，其中平面系统可视为该系统在辛对称性 σ(8) 的不动点集上的限制，例如在空间圆型限制性三体问题框架中。于是，与平面轨道 γ相关的四维横截标架在辛意义下分解为二维平面标架和空间标架，分别记为 $[X_p\ Y_p]$ 和 $[X_sY_s]$。在此情形下，可以相当简便且明确地选取整体平凡化：对于空间标架，面外方向，

$$X_s=\partial_{p_z},\quad Y_s=\partial_z, \tag{21}$$

构成一个辛基，因为 $\omega(X_s,\ Y_s)=1$。对于平面标架，使用四元数矩阵 [23, 37], 较为方便；将其限制在平面变量上，可得

$$J=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix},\quad K_1=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\quad K_2=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

这些向量

$$X_p=\frac{1}{||\nabla H||}K_1\nabla H,\quad Y_p=\frac{1}{||\nabla H||}K_2\nabla H \tag{22}$$

满足 $\omega(X_p,\ Y_p)=1$，并构成辛补空间 (19) 的一个辛基；该辛补空间与能级集上哈密顿向量场 $X_H=J\nabla H$ 横截。

此外，路径 (20) 在辛意义下分解为平面块与空间块：

$$\Psi_\gamma(t)=\begin{pmatrix}\Psi^p_\gamma(t)&0\\0&\Psi^s_\gamma(t)\end{pmatrix},\quad \Psi^p_\gamma(t),\Psi^s_\gamma(t)\colon[0,T]\to Sp(2)=SL(2,\mathbb{R}).$$

根据马斯洛夫指标 (18) 的乘积性质，平面轨道 γ的 Conley–Zehnder指标可加地分解为平面指标与空间指标，记作

$$\mu_{CZ}(\gamma)=\mu^p_{CZ}(\gamma)+\mu^s_{CZ}(\gamma).$$

如果 γ是非退化的，那么各个指标的定义与 Hofer–Wysocki– Zehnder [20]的构造一致：设 γ^k 是 γ的k重覆盖，并假设对于所有$k\geqslant 1$，γ^k 都是非退化的。Conley–Zehnder指标衡量相应特征向量的旋转，其旋转角以实数而非模 2π的形式度量；由单值矩阵和弗洛凯乘子计算得到的旋转角则采用模 2π的形式。在椭圆情形下，我们用 φ_p 和 φ_s 表示底层单圈轨道 γ对应的实数旋转角。于是，每个指标由

$$\mu^p_{CZ}(\gamma^k)=1+2\cdot\lfloor k\cdot\varphi_p/(2\pi)\rfloor,\quad \mu^s_{CZ}(\gamma^k)=1+2\cdot\lfloor k\cdot\varphi_s/(2\pi)\rfloor,$$

也就是说，每个指标衡量特征值沿整个轨道 γ^k穿过 1 的次数；每当穿过 1 时，指标就跳增 2，且为奇数。值得一提的是，在 [3] 中，我们使用了这种 Conley–Zehnder指标构造，数值计算出天文观测已知的月球周期。

在双曲情形中，相应的特征向量旋转了$n\pi$ （对某个整数n），相应的指标等于

$$\mu^{p/s}_{CZ}(\gamma^k)=kn,\quad n\in\begin{cases}2\mathbb{Z} & \text{for the pos. hyperbolic case}\\ 2\mathbb{Z}+1 & \text{for the neg. hyperbolic case.}\end{cases}$$

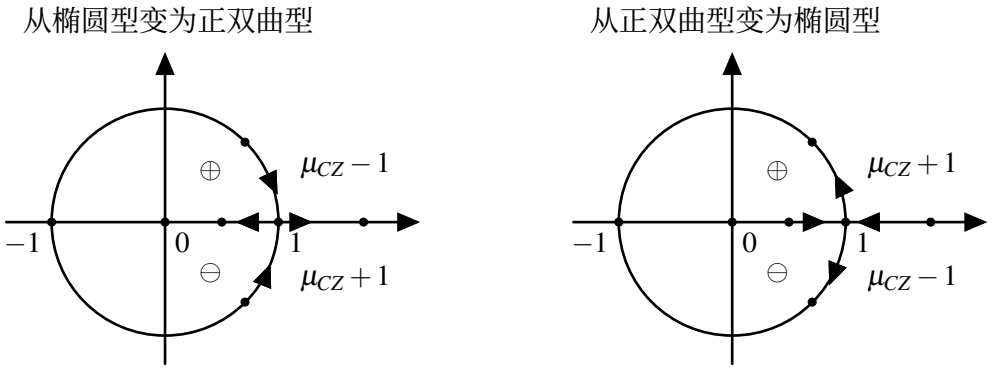


图 3：指标跳跃。左：当特征值 1 从上方（或下方）穿越时，指标减小（或增大）1。右：当弗洛凯乘子在穿越特征值 1 后增大（或减小）时，指标增大（或减小）1。穿越方向由 $\pm$克莱因符号决定。

3.3 分岔点处的相互作用

沿轨道族的延拓，当到达从椭圆型到正双曲型（或反之）转变中的分岔点时，相应指标根据穿越特征值1的方向跳跃 ± 1，如图3所示。当与特征值1相切时，指标跳跃 ± 2，由旋转角的方向决定。为确定该旋转方向，我们考虑**克莱因符号** [2, 附录 29]，它将一个 $\pm$符号与每一对椭圆型Floquet乘子相关联：设 $M \in Sp(2n)$，并设 $\{\lambda, \lambda\}$ 为 M 的一对形如 $\lambda = e^{i\theta}$，$\lambda = e^{-i\theta}$ 且满足 $\lambda\lambda \neq 1$ 的椭圆型特征值。在实二维平面 $P := \langle \mathrm{Re}(v),\ \mathrm{Im}(v) \rangle$ 上，其中 v 是 M 对应于特征值 λ 的特征向量，二次型定义为

$$Q(\xi, \xi) := \omega(\xi, M\xi), \quad \xi \in P, \tag{23}$$

其矩阵形式表示为

$$Q = B^T J^T M B, \tag{24}$$

其中 $B = [\mathrm{Re}(v)\ \mathrm{Im}(v)] \in \mathrm{Mat}(2n \times 2, \mathbb{R})$。该二次型是非退化的，且为正定或负定。与椭圆型乘子对 $\{\lambda, \lambda\}$ 相关联的**克莱因符号** 定义为二次型 Q 的符号差；由于其不依赖于特征向量的选取，因此是一个辛不变量。特别地，若符号差为正，则旋转由 $\theta \in (0, \pi)$ 决定；若符号差为负，则旋转由 $-\theta$ 在 $(\pi, 2\pi)$ 范围内决定。克莱因的主要结论是，单位圆上具有不同符号差的两对椭圆型弗洛凯乘子发生碰撞，可能引发复不稳定型；而符号差相同的乘子发生碰撞，则不会导致其离开单位圆。为此，我们使用克莱因符号来确定指标跳跃，如图 3 所示。此外，对于垂直稳定性共振轨道，我们根据克莱因符号推导出式 (16) 中整数 d 的具体值。

在一族非退化周期轨道附近进行局部研究时，存在一个引人注目的拓扑分岔不变量，它基于全纯曲线 [19]：即**局部弗洛尔同调**及其**欧拉示性数**，也就是同调群秩的交错和。生成元是周期轨道，而且重要的是，指标会在局部同调群上诱导一个分次。因此，指标提供了重要信息，说明不同的族如何在分支点处彼此关联。在我们的计算中，通过在分岔点处局部地按指标计数周期轨道来检验欧拉示性数的不变性至关重要。此外，在SFT [16], 对平面轨道 γ 的意义下，如果

$$\mu_{CZ}^{p}(\gamma^k) \equiv \mu_{CZ}^{p}(\gamma) \bmod 2, \quad \mu_{CZ}^{s}(\gamma^k) \equiv \mu_{CZ}^{s}(\gamma) \bmod 2, \tag{25}$$

或者（25）中的两个方程不同时成立，那么 γ^k 就称为好轨道。否则，γ^k 就称为坏轨道，在局部弗洛尔同调中将其忽略。因此，在分支点附近

只对好轨道计入指标。请注意，所有单圈周期轨道都是好轨道，而坏轨道则是某些轨道的k重覆盖，其中恰有一对弗洛凯乘子属于负双曲型，且k 为偶数。对于空间解，我们以与前文所述相同的方式处理每对弗洛凯乘子及其在分岔点处与Conley–Zehnder指标的相互作用。

4 彗星型周期轨道的解析方法

本节将对圆型限制性三体问题（CR3BP）中两个单参数族的平面近圆形周期轨道进行解析研究。这些轨道远离主天体的共同质心，称为彗星型周期轨道。我们首先采用经典的庞加莱延拓法证明它们的存在，该方法如 [36, 第 9]章所述。随后，我们应用上一节中的构造方法确定它们的Conley–Zehnder指标。本节的结果适用于圆型限制性三体问题（CR3BP）的所有质量比 $\mu \in (0, \frac{1}{2}]$。

定理 4.1. 圆型限制性三体问题（*CR3BP*）中存在两个单参数族的平面近圆形周期轨道，它们与主天体的共同质心相距甚远。其中一族对应较低的雅可比常数，其成员记为 κ_-；另一族对应较高的雅可比常数，其轨道记为 κ_+。此外，两族轨道均为椭圆型，其 *Conley–Zehnder*指标为

$$\mu_{CZ}(\kappa_\pm) = \mu_{CZ}^{p}(\kappa_\pm) + \mu_{CZ}^{s}(\kappa_\pm) = 2 = 1 + 1, \tag{26}$$

并且它们的平面和空间克莱因符号均为正。

与 κ_+ 相关的周期解称为顺行彗星型周期轨道，与 κ_- 相关的周期解称为逆行彗星型周期轨道。在证明定理 4.1 之前，我们先在下一个定理中讨论圆型限制性三体问题的哈密顿量 (3)，并引入一个小尺度参数 ε，以此近似半径极大的彗星轨道。

定理 4.2。 设 $\varepsilon > 0$ 为一个小参数。经过共形辛缩放

$$(x, y, z, p_x, p_y, p_z) \mapsto \left(\varepsilon^{-2}x, \varepsilon^{-2}y, \varepsilon^{-2}z, \varepsilon p_x, \varepsilon p_y, \varepsilon p_z\right), \tag{27}$$

圆型限制性三体问题 *(3)* 的哈密顿量变为

$$H = p_x y - p_y x + \varepsilon^3 \left(\frac{1}{2}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) - \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} \right) + O(\varepsilon^5). \tag{28}$$

由 (28) 可知，当 ε 非常小时，根据缩放 (27)，这意味着无穷小物体距离主天体很远，此时起主导作用的力是科里奥利力，而次重要的力看起来类似于一个两个点质量都位于原点的开普勒问题。

定理 *4.2* 的证明。 我们首先注意到，缩放变换 (27) 是共形辛变换，其共形因子为常数 ε^{-1}。为纳入这一放大效应，我们考虑对哈密顿量 (3) 作如下变换：$H \to \varepsilon H\left(\varepsilon^{-2}x\ \varepsilon^{-2}y\ \varepsilon^{-2}z\ \varepsilon p_x, \varepsilon p_y, \varepsilon p_z\right)$，即

$$p_x y - p_y x + \frac{1}{2}\varepsilon^3\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) - \varepsilon\left(U_1^\varepsilon(x,y,z) + U_2^\varepsilon(x,y,z)\right), \tag{29}$$

其中

$$U_1^\varepsilon(x,y,z) = \frac{1-\mu}{\left(\tilde{r} + \mu^2 + 2\mu x/\varepsilon^2\right)^{1/2}}, \quad U_2^\varepsilon(x,y,z) = \frac{\mu}{\left(\tilde{r} + (1-\mu)^2 - 2(1-\mu)x/\varepsilon^2\right)^{1/2}}, \tag{30}$$

以及 $\tilde{r} := \left(x^2+y^2+z^2\right)/\varepsilon^4$。接下来，我们通过勒让德展开简化（30）。为此，我们写作

$$U_1^\varepsilon(x,y,z) = \varepsilon^2 \frac{1-\mu}{r\left(1 - 2\mathbf{x}\mathbf{t} + \mathbf{t}^2\right)^{1/2}}, \quad U_2^\varepsilon(x,y,z) = \varepsilon^2 \frac{\mu}{r\left(1 - 2\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{t}} + \tilde{\mathbf{t}}^2\right)^{1/2}}, \tag{31}$$

其中

$$\mathbf{x}=-x/r,\quad \mathbf{t}=\varepsilon^2\mu/r,\quad \tilde{\mathbf{x}}=x/r,\quad \tilde{\mathbf{t}}=\varepsilon^2(1-\mu)/r,\quad r=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}. \tag{32}$$

由于 $|\mathbf{x}|<1$ 和 $|\tilde{}\mathbf{x}|<1$，式 (31) 的相应勒让德多项式展开式为

$$U_1^{\varepsilon}(x,y,z)=\varepsilon^2\frac{1-\mu}{r}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\mathbf{x})\mathbf{t}^n,\quad P_0(\mathbf{x})=1,\quad P_1(\mathbf{x})=\mathbf{x}, \tag{33}$$

and

$$U_2^{\varepsilon}(x,y,z)=\varepsilon^2\frac{\mu}{r}\sum_{m=0}^{\infty}P_m(\tilde{\mathbf{x}})\tilde{\mathbf{t}}^m,\quad P_0(\tilde{\mathbf{x}})=1,\quad P_1(\tilde{\mathbf{x}})=\tilde{\mathbf{x}}. \tag{34}$$

利用表达式 (33) 和 (34)，结合式 (32)，可得

$$U_1^{\varepsilon}(x,y,z)+U_2^{\varepsilon}(x,y,z)=\varepsilon^2\left(\frac{1}{r}-\frac{x(1-2\mu)}{r^2}+\frac{1-\mu}{r}\sum_{n=2}^{\infty}P_n(\mathbf{x})\mathbf{t}^n+\frac{\mu}{r}\sum_{m=2}^{\infty}P_m(\tilde{\mathbf{x}})\tilde{\mathbf{t}}^m\right),$$

将其代入式 (29)，即可证明该定理。 □

定理 *4.1* 的证明。在如下引入的柱面辛坐标 (r θ，z，p_r，p_θ，p_z) 中，

$$\begin{aligned}
&x=r\cos\theta, && p_x=p_r\cos\theta-\frac{p_\theta}{r}\sin\theta,\\
&y=r\sin\theta, && p_y=p_r\sin\theta+\frac{p_\theta}{r}\cos\theta,\\
&z=z, && p_z=p_z,
\end{aligned}$$

哈密顿量 (28) 变为

$$H=-p_\theta+\varepsilon^3\left(\frac{1}{2}\left(p_r^2+p_\theta^2/r^2+p_z^2\right)-\frac{1}{(r^2+z^2)^{1/2}}\right)+O(\varepsilon^5). \tag{35}$$

运动方程为

$$\begin{aligned}
&\dot{r}=\varepsilon^3 p_r, && \dot{p}_r=\varepsilon^3\left(\frac{p_\theta^2}{r^3}-\frac{r}{(r^2+z^2)^{3/2}}\right),\\
&\dot{\theta}=\varepsilon^3\frac{p_\theta}{r^2}-1, && \dot{p}_\theta=0,\\
&\dot{z}=\varepsilon^3 p_z, && \dot{p}_z=-\varepsilon^3\frac{z}{(r^2+z^2)^{3/2}},
\end{aligned} \tag{36}$$

其中省略了阶数为 ε^5 的项。在此近似阶次下，p_θ 是一个积分。现在，我们将在黄道面 $\{z=p_z=0\}$上寻找方程（36）的圆形周期解。我们发现，系统（36）存在一对由以下条件确定的圆形周期解

$$r=1,\quad p_r=0,\quad p_\theta=\pm1, \tag{37}$$

其周期为$T=2\pi/(1\mp\varepsilon^3)$。为了在圆形解（37）附近将方程（36）线性化，我们对（$r+\Delta r$ $\theta+\Delta\theta$,$z+\Delta z$,$p_r+\Delta p_r$,$p_\theta+\Delta p_\theta$,$p_z+\Delta p_z$）在（37）附近展开，由此得到自治线性化方程，它分为四维平面分量和二维空间分量:

$$\begin{pmatrix}\Delta\dot{r}\\ \Delta\dot{\theta}\\ \Delta\dot{p}_r\\ \Delta\dot{p}_\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&\varepsilon^3&0\\ \mp2\varepsilon^3&0&0&\varepsilon^3\\ -\varepsilon^3&0&0&\pm2\varepsilon^3\\ 0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta r\\ \Delta\theta\\ \Delta p_r\\ \Delta p_\theta\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\Delta\dot{z}\\ \Delta\dot{p}_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\varepsilon^3\\ -\varepsilon^3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta z\\ \Delta p_z\end{pmatrix}. \tag{38}$$

相应矩阵指数的若尔当标准形为

$$\operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}e^{i\varepsilon^3 t}&0\\0&e^{-i\varepsilon^3 t}\end{pmatrix}\right\},\quad \begin{pmatrix}e^{i\varepsilon^3 t}&0\\0&e^{-i\varepsilon^3 t}\end{pmatrix}.$$

注意，左上角的 2×2块之所以出现，是因为当能量（或周期）变化时，周期（或能量）也会随之变化。此外，在首次返回时间$T = 2\pi/(1\mp\varepsilon^3)$处，我们得到平面弗洛凯乘子与空间弗洛凯乘子，二者均具有如下形式

$$e^{\pm i\varepsilon^3 2\pi/(1\mp\varepsilon^3)} = 1\pm\varepsilon^3 2\pi i + O(\varepsilon^6). \tag{39}$$

关于平面弗洛凯乘子，利用Poincar´e延拓方法 [36, Chapter 9],，我们得出：方程(36)的两个解(37)可以延拓到与(35)相关的完整方程，其中包含$O(\varepsilon^5)$项。这证明了定理中关于存在性的论断。我们用 κ_+ 表示与$p_\theta = 1$相关联的周期解，用 κ_- 表示与$p_\theta = -1$相关的那些周期解。为计算它们的Conley–Zehnder指标，我们首先注意到，解(37)处的哈密顿向量场具有$X_H = (\pm\varepsilon^3 - 1)\partial_\theta$的形式。考虑到平凡化(22)和(21)，平面标架与空间标架 $[X_p, Y_p]$和 $[X_s, Y_s]$由下列向量构成

$$X_p = \partial_{p_r},\quad Y_p = \partial_r,\quad X_s = \partial_{p_z},\quad Y_s = \partial_z.$$

根据式（38），相对于这些标架的横向线性化流为

$$\operatorname{diag}\left\{\begin{pmatrix}0&-\varepsilon^3\\\varepsilon^3&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-\varepsilon^3\\\varepsilon^3&0\end{pmatrix}\right\},$$

其矩阵指数给出一条辛矩阵路径,

$$\Psi_{\kappa_\pm}(t) = \begin{pmatrix}\Psi^p_{\kappa_\pm}(t)&0\\0&\Psi^s_{\kappa_\pm}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(t\varepsilon^3)&-\sin(t\varepsilon^3)&0&0\\\sin(t\varepsilon^3)&\cos(t\varepsilon^3)&0&0\\0&0&\cos(t\varepsilon^3)&-\sin(t\varepsilon^3)\\0&0&\sin(t\varepsilon^3)&\cos(t\varepsilon^3)\end{pmatrix}, \tag{40}$$

该路径在$t \in 2\pi\mathbb{Z}/\varepsilon^3$处有交叉。此外，交叉型

$$Q_t = \begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\dot\Psi_{\kappa_\pm}(t) = \begin{pmatrix}\varepsilon^3&0&0&0\\0&\varepsilon^3&0&0\\0&0&\varepsilon^3&0\\0&0&0&\varepsilon^3\end{pmatrix},$$

其平面符号差和空间符号差始终为 2。我们观察到，路径（40）旋转极其缓慢，其周期长达 $2\pi/\varepsilon^3$。显然，在解（37）的一个周期内没有交叉；结合马斯洛夫指标的定义（17），这证明了式（26）中所述的 Conley–Zehnder指标。此外，弗洛凯乘子（39）对应的特征向量具有如下形式：$[\pm i\ \ 1]^T$。利用式（24）可直接计算得出，在平面$P = \langle [0\ 1]^T, [1\ 0]^T\rangle$ 上，二次型（23）正定，这意味着这些轨道 $\kappa_\pm$ 具有平面和空间正 Krein 符号。 □

5 地月圆型限制性三体问题中的数值计算结果

本节的结果通过数值积分运动方程 (1) 及其变分方程 (11) 得到。我们采用了十二阶显式龙格-库塔方法，例如 [17], 中提出的方法，并用 Python 对其进行了编码。所有周期解均通过经典的校正器–预测器延拓方法 [42] 获得，计算精度为 10^{-8}。地月环境采用的质量比为 $\mu = 1/82.27 \approx 0.0121550991$。

5.1 逆行与顺行彗星型周期轨道

为了数值探索彗星轨道，我们首先以围绕原点的大型圆形开普勒运动作为较为合理的初始猜测。旋转开普勒问题中的平面圆形周期解是 CR3BP 的一个特殊情形（当 $\mu = 0$ 时），其初始数据形式如下：

$$(x_0, 0, 0, 0, \dot{y}_0, 0), \quad \dot{y}_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{x_0}} - x_0, \tag{41}$$

其中，$x_0 > 0$ 为开普勒半长轴，$\pm$ 分别表示顺行和逆行运动。相应的能量值等于 $-1/(2x_0) \mp \sqrt{x_0}$。当半长轴x_0,较大时，这些轨道具有以下性质：

- 开普勒周期等于$T_\pm = 2\pi/(1 \mp x_0^{-3/2})$，顺行轨道的周期略大于 2π，而逆行轨道的周期略小于 2π；
- 顺行轨道的能量值很低，而逆行轨道的能量值很高；并且
- 逆行轨道在旋转坐标系和惯性坐标系中均为逆行，而顺行轨道在惯性坐标系中为顺行，在旋转坐标系中则为逆行。

此外，这些解是简单对称的，每个周期内仅与x轴垂直相交两次。因此，选取形式为(41)的初始猜测并对运动方程(1)进行积分后，若对称轨道在$t = T/2$ 时满足以下周期性条件，则该轨道为周期轨道：

$$y(x_0, 0, 0, 0, \dot{y}_0, 0) = 0, \quad \dot{x}(x_0, 0, 0, 0, \dot{y}_0, 0) = 0. \tag{42}$$

由于这些条件仅近似满足，我们需要对 $\delta x0, \delta \dot{y}0, \delta t$进行适当修正，以使这些条件达到指定精度。为此，我们对式（42）作一阶泰勒展开，得到

$$\begin{aligned} y + v_{21}\delta x_0 + v_{25}\delta\dot{y}_0 + \dot{y}(t)\delta t = 0, \\ \dot{x} + v_{41}\delta x_0 + v_{45}\delta\dot{y}_0 + \ddot{x}(t)\delta t = 0, \end{aligned} \tag{43}$$

其中，$v_{21} = \partial y/\partial x_0, v_{25} = \partial y/\partial \dot{y}_0, v_{41} = \partial \dot{x}/\partial x_0$和 $v_{45} = \partial \dot{x}/\partial \dot{y}_0$是由式（11）确定的变分矩阵 $V(t) = (v_{ij}) \in \mathbb{R}^{6\times 6}$中相应的元素。将式（43）中的三个未知数之一固定后，我们求解式（43）以确定其余两个未知数，并用修正后的初始数据重新积分方程（1）。我们以迭代方式重复修正步骤，直至达到指定精度。确定对称周期轨道后，我们选取一个在修正步骤中固定的初始参数步长，并像之前一样为延拓构造预测格式。选择固定哪个参数会显著影响解的收敛性。如果固定参数达到极值，算法将中断，此时必须重新选择参数。

使用上述正确的校正–预测算法，我们计算了顺行和逆行彗星型周期轨道的两个族 $\kappa_\pm$。图 4 和图 5 展示了若干雅可比常数值下的周期轨道图，并给出了平面和垂直稳定性图。我们还识别出垂直自共振（VSR）轨道；在椭圆情形下，当 $s_v = \cos(2\pi d/k)$ 时，根据垂直稳定性指标，我们将其标记为 $d{:}k$。相关数据汇总于表A1。

逆行 κ_- 轨道。沿着逆行彗星解的延拓，轨道的几何形状平滑地从圆形类型转变为围绕两个主天体的椭圆型轨道，如图 4 所示。雅可比常数值不断增大，在 $C \approx -0.412925$ 处达到最大值（对应于出生–死亡分岔或鞍结分岔；也就是说，这是一个分支点，两个族从该点沿相同的能量方向分岔，且指标差为 1），随后继续减小至很低的值。在极限情况下，两个主天体之间存在一条具有无限速度和无限能量 [10] 的直线轨道。

我们由定理 4.1 回顾，这些轨道起初为椭圆型，具有正 Krein 符号和 Conley–Zehnder指标

$$\mu_{CZ}(\kappa_-) = 2 = \mu_{CZ}^{p}(\kappa_-) + \mu_{CZ}^{s}(\kappa_-) = 1 + 1.$$

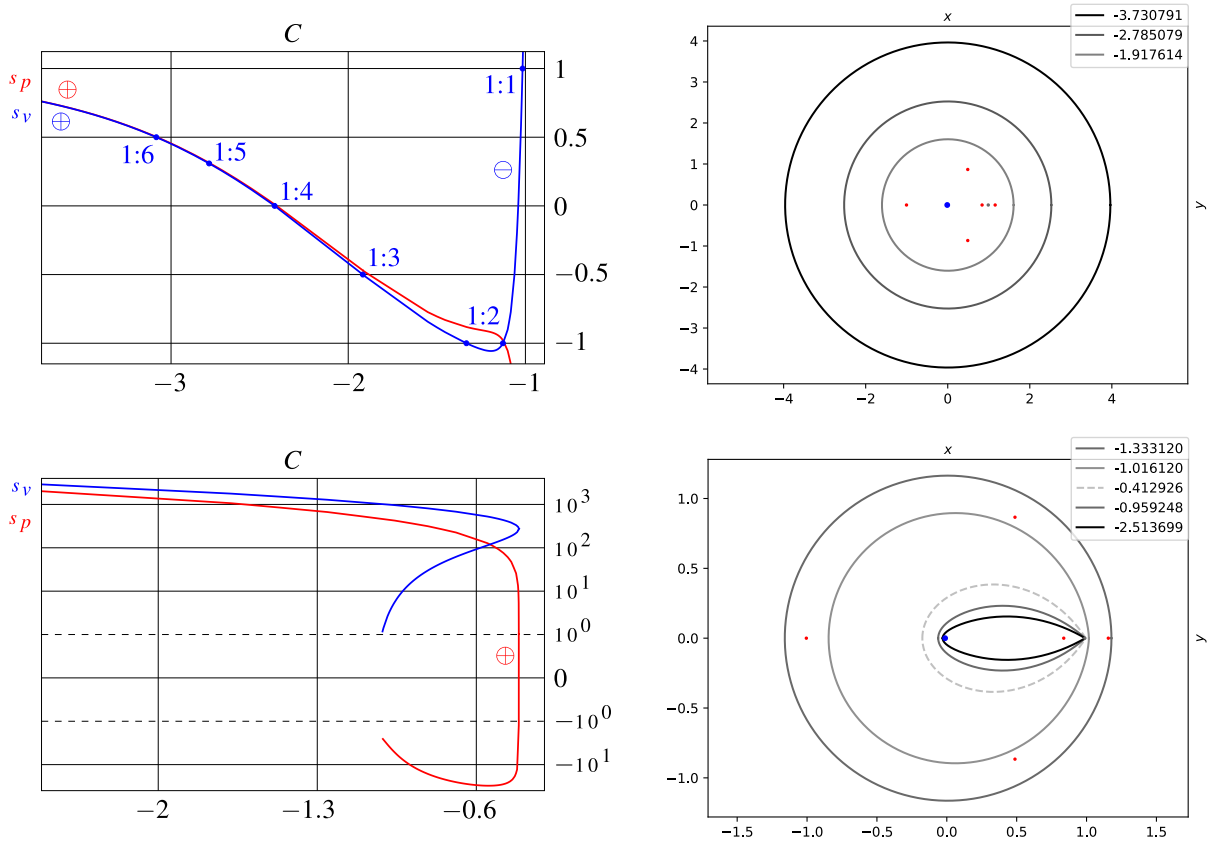


图 4：逆行彗星型周期轨道族 κ_-。右上图显示从低雅可比常数开始的 κ_- 轨道；颜色由深到浅（或由浅到深）表示能量值递减（或递增）。右下图显示 κ_- 轨道的延拓；灰色虚线表示一条生灭型轨道。左上图显示平面和垂直稳定性图，s_p 和s_v，并在左下图中继续绘制，其中使用了对数刻度。左上图的椭圆区间内，d:k 垂直稳定性共振轨道以$s_v = \cos(2\pi d/k)$表示。±表示克莱因符号。

从图 4 的稳定性交换图中可以看出，平面稳定性指标与垂直稳定性指数s_p 和s_v均下降，其中s_v略低于s_p。在雅可比常数值$C \approx -1.333119$ 处，垂直稳定性指标s_v 穿过 -1，经过短暂的负双曲阶段后，在$C \approx -1.126762$处再次变为椭圆型，并具有负克莱因符号。此后，垂直指标急剧增大，在$C \approx -1.016119$ 处穿过 $+1$ 并变为正双曲型，同时沿正双曲方向强烈增长。在后一次转变中，由于负克莱因符号，空间康利–岑德指数从1跳到2。在图 4 的垂直稳定性交换图上，我们已识别出相对于垂直稳定性指标、重数至多为六的最先出现的垂直稳定性共振轨道，记为1:6、1:5、1:4、1:3、1:2（两次）和1:1，如图 4 所示。初始数据列于表A1。在垂直稳定性指标s_v 第二次穿过 -1 之后不久（s_v 由负双曲型转变为椭圆型），平面稳定性指标s_p 也穿过 -1。此后，s_p 在一段时间内保持负双曲型，随后迅速增大，变为具有正 Krein 符号的椭圆型，穿过 $+1$，对应于生灭分岔，并继续沿正双曲方向增大，紧贴在垂直稳定性指标下方移动。在生灭分支点处，由于克莱因符号为正，平面康利–岑德指数从1跳到0。

顺行 κ_+ 轨道。该族轨道在雅可比常数较高时生成，其延拓沿雅可比常数递减的方向进行。如图5所示，轨迹上的一个对称点逐渐靠近平动点L_3，并形成一个环路，使得轨迹只有在第二次穿过x轴时才会与其垂直相交。随后，该环路演化为与地球相撞，此时我们停止延拓。与逆行彗星轨道相同，我们知道

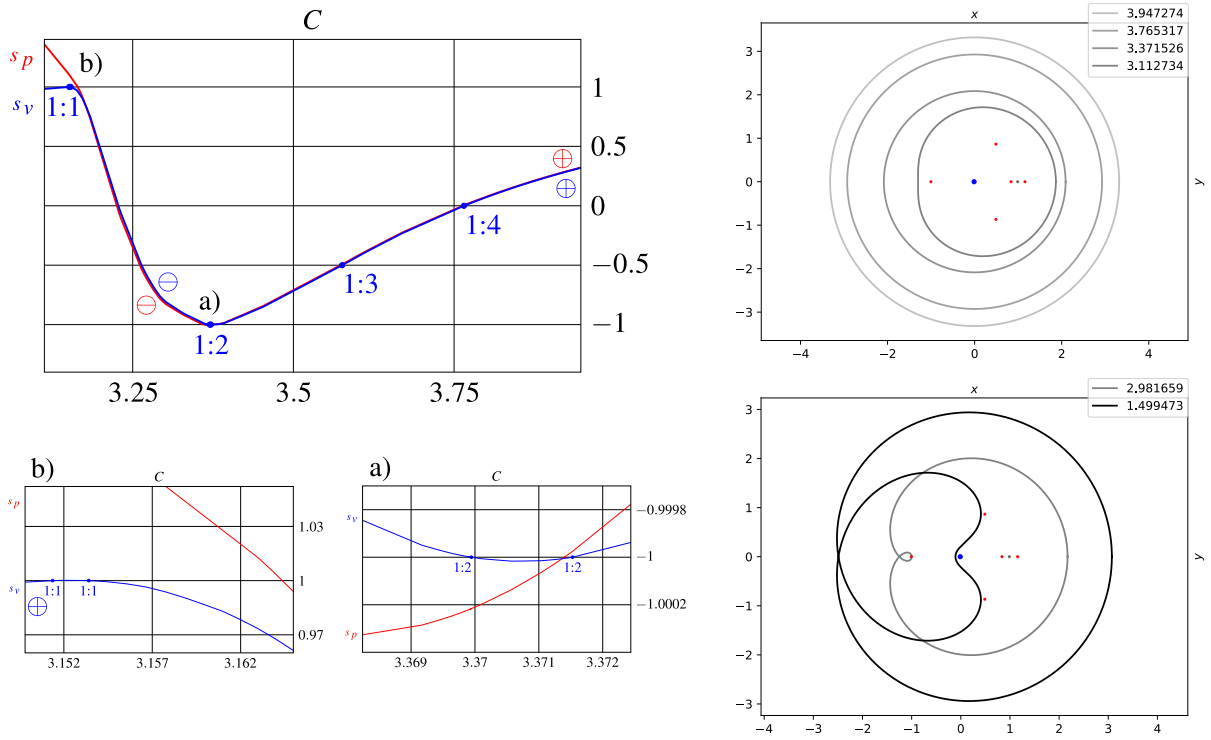


图5： κ_+ 顺行彗星型周期轨道族，延拓至接近与地球发生碰撞。右上图显示从较高雅可比常数出发的 κ_+ 轨道；颜色由浅至深表示能量值递增。右下图显示 κ_+ 轨道的延拓。左上图显示平面和垂直稳定性图，s_p 和s_v。左下图为放大区域：a）对应于穿过 -1，b）对应于穿过1。左上图的椭圆区间中，d:k 垂直稳定性共振轨道根据s_v =cos$(2\pi d/k)$标记。 $\pm$ 符号表示克莱因符号。

根据定理 4.1，顺行彗星轨道起初也呈椭圆型，具有正 Krein 符号和 Conley–Zehnder指标

$$\mu_{CZ}(\kappa_+) = 2 = \mu^p_{CZ}(\kappa_+) + \mu^s_{CZ}(\kappa_+) = 1 + 1.$$

如图5所示，平面和垂直稳定性指标的变化趋势相似，其中平面指标略高于垂直指标。二者均逐渐减小，短暂进入负双曲型后，又变为具有负 Krein 符号的椭圆型。此后，两个稳定性指标均穿过 $+1$；在这一转变处，由于克莱因符号为负，两个 Conley–Zehnder指标均从1跳至2。随后，平面稳定性指标保持正双曲型；垂直稳定性指标在正双曲型区域内短暂停留后，再次变为具有正 Krein 符号的椭圆型，此时空间康利–岑德指数从2跳至3。为了更清楚地显示持续时间极短的负双曲相位和正双曲相位，如图5所示，我们在校正–预测算法（43）中采用了非常小的步长。此外，根据图5中的垂直稳定性图，我们识别出重数最高为四的垂直稳定性共振轨道，分别标记为1:4、1:3、1:2（两次）和1:1（两次）。

5.2 平面外分岔结果

通过将校正–预测法（43）应用于空间解，并结合第3节中Conley–Zehnder指标的计算技术，我们分析了由上述已识别的垂直稳定性共振轨道发出的所有垂直分岔。我们以分岔图的形式展示主要结果，这些分岔图提供了一种拓扑视角，其构造方式如下。顶点是分支点，边是轨道族，并标注Conley–Zehnder指标。我们自下而上沿雅可比常数递减的方向绘制。粗体雅可比常数对应于临界分支点。粗

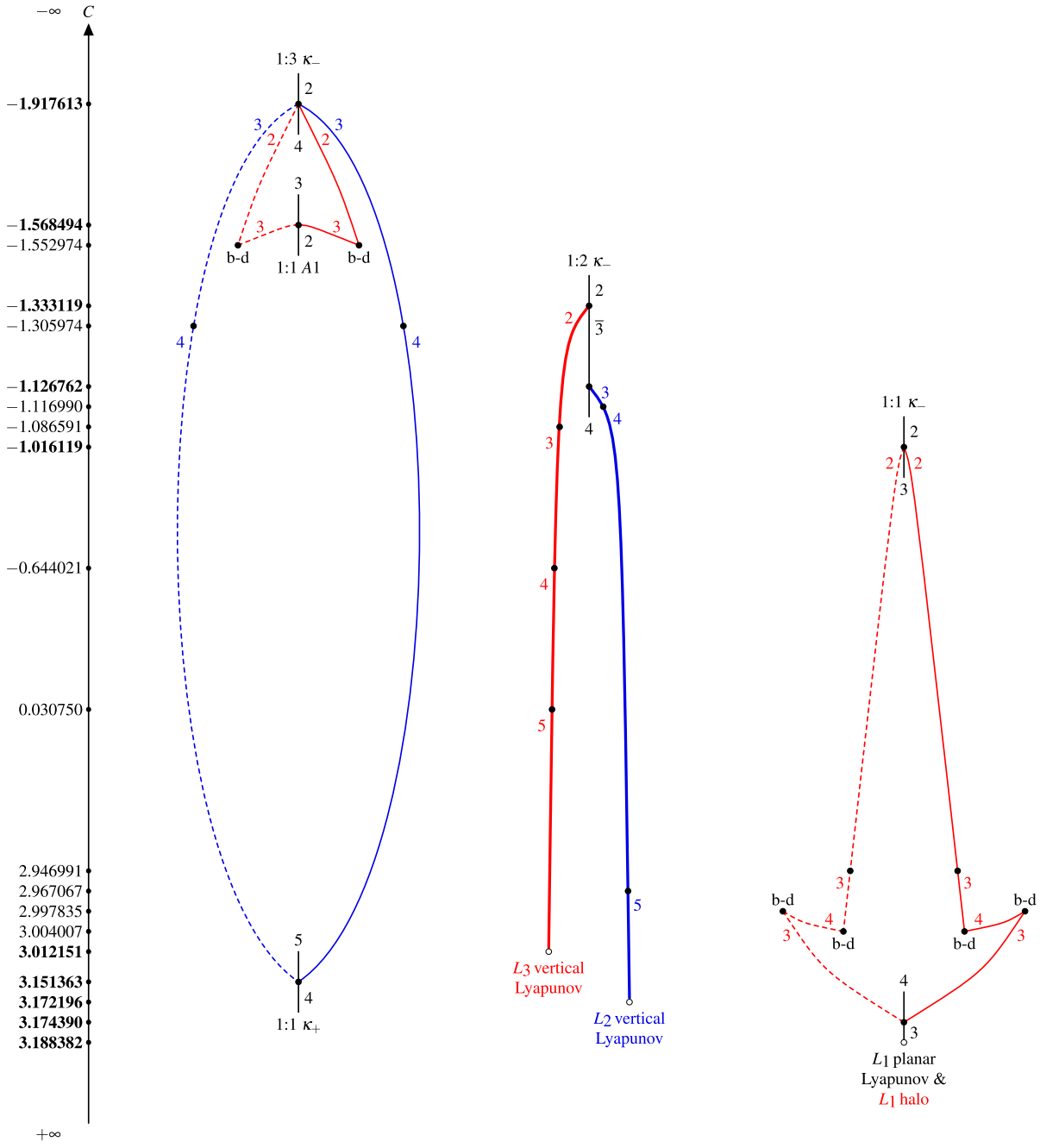


图 6：与垂直分岔分支相关的分岔图：这些分支源自 1:1 κ_-，对应于L_1 晕轨道族（右）；源自 1:2 κ_-，对应于L_2 和L_3 垂直李雅普诺夫分支（中）；以及源自 1:3 κ_-，构成通往 1:1*A*1 和 1:1 κ_+ 的桥族（左）。

线族与细线族分别表示二重对称解和简单对称解。与平面轨道相关的分支点处的边，我们用黑色绘制，并在分岔前后沿竖直方向短距离画出。垂直分岔的边我们用红色或蓝色绘制：若分岔出的分支在分岔前与底层彗星轨道具有相同的指标，则该分岔分支为红色分支，否则为蓝色分支。由 σ对称（关于黄道面的反射）得到的对称分支颜色相同，并以虚线表示。标注有上划线指标的族表示不良轨道。我们用“b-d”表示生灭分岔，其局部弗洛尔同调及其欧拉示性数均为零。

(1) 从 *1:1* 和 *1:2* 逆行轨道产生的分岔 κ_-。从 1:1 和 1:2 逆行 κ_- 轨道产生的平面外分岔分支广为人知：从 1:1 κ_- 分岔出的轨道对应于

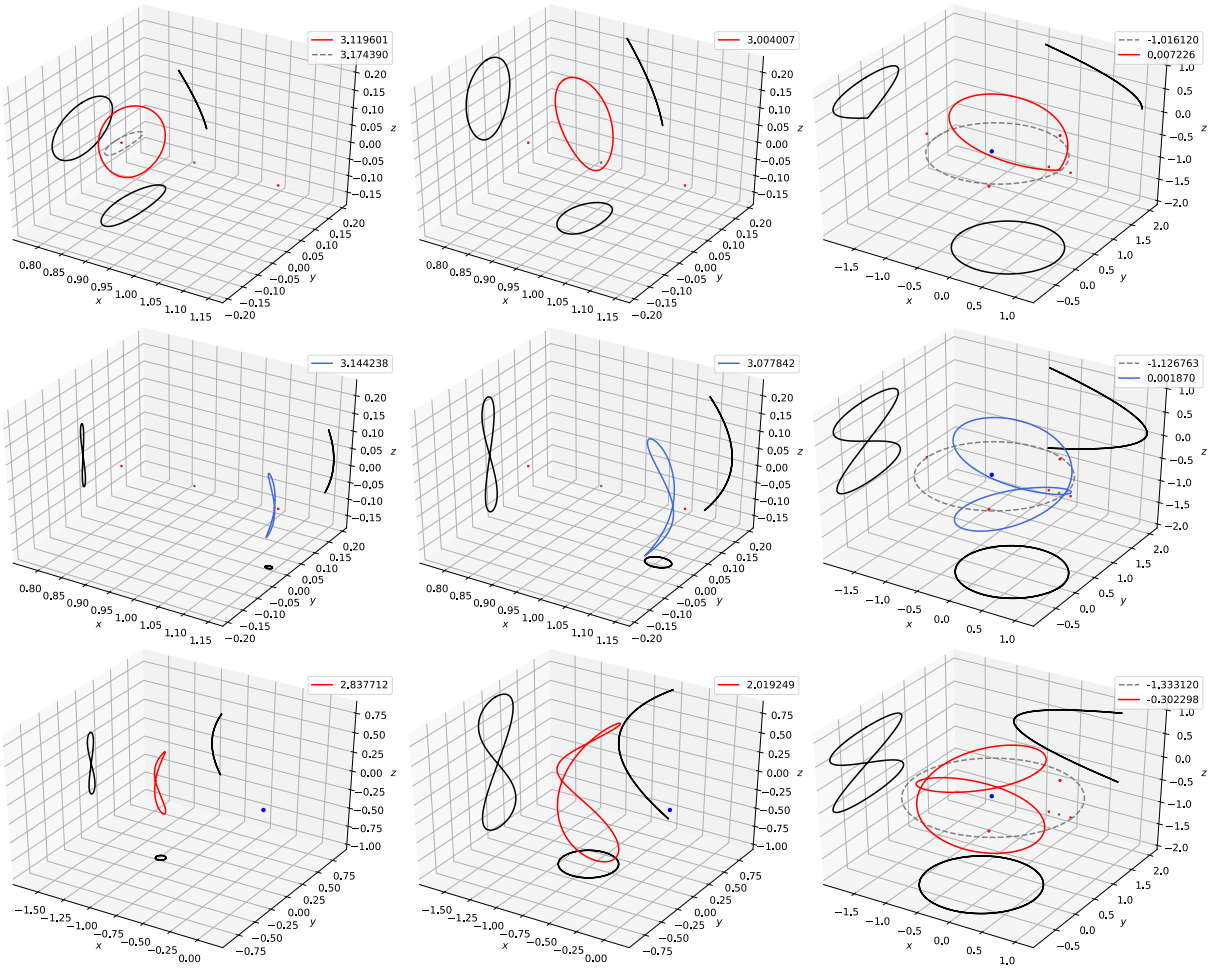


图 7：上图从右至左展示了L_1 晕分支上的部分轨道。该分支由 1:1 逆行彗星 κ_- 轨道（右侧灰色虚线）生成，并终止于L_1 平面李雅普诺夫轨道（左侧灰色虚线）。中图从右至左展示了L_2 垂直李雅普诺夫分支上的部分轨道，该分支由 1:2κ_- （右侧灰色虚线）生成，并终止于L_2。下图从右至左展示了L_3 垂直李雅普诺夫轨道中的部分轨道，这些轨道由 1:2 κ_- （右侧灰色虚线）生成，并终止于L_3。

一族L_1 晕轨道，通常由L_1 平面Lyapunov轨道计算得到；而从两个临界 1:2 κ_- 轨道分岔出的轨道，则对应于L_2 和L_3 垂直Lyapunov轨道分支。这些轨道呈八字形，通常在相应的平动点附近生成。展示这些分岔结果的分岔图见图 6，图 7 绘制了若干雅可比常数取特定值时的轨道，数据汇总于表 A2。接下来讨论彗星轨道的分岔与欧拉示性数的关系。对于 1:1 κ_- 轨道，在分支点之前，只有指标为 2 的彗星轨道；在分支点之后，彗星轨道的指标为 3，而两个L_1 晕轨道分支的指标均为 2。因此，分岔点前后的欧拉示性数分别为

$$(-1)^2 = 1, \quad 2\cdot(-1)^2 + (-1)^3 = 1.$$

在从两个 1:2 κ_- 轨道分支出的倍周期分支中，我们得到了出现坏轨道的第一个例子。这些坏轨道表现为逆行彗星轨道的倍周期轨道；在雅可比常数范围（-1.333119，-1.126762）内，这些逆行彗星轨道是垂直负双曲型且平面椭圆型，见图 4。正如图 6 中间的分岔图所示，它们的指标为 3。因此，在 1:2 κ_- 轨道的第一个分支点处，分岔前的倍周期彗星轨道指标为 2，分岔后指标为 3，而分岔出的 L_3 垂直李雅普诺夫轨道 [–]

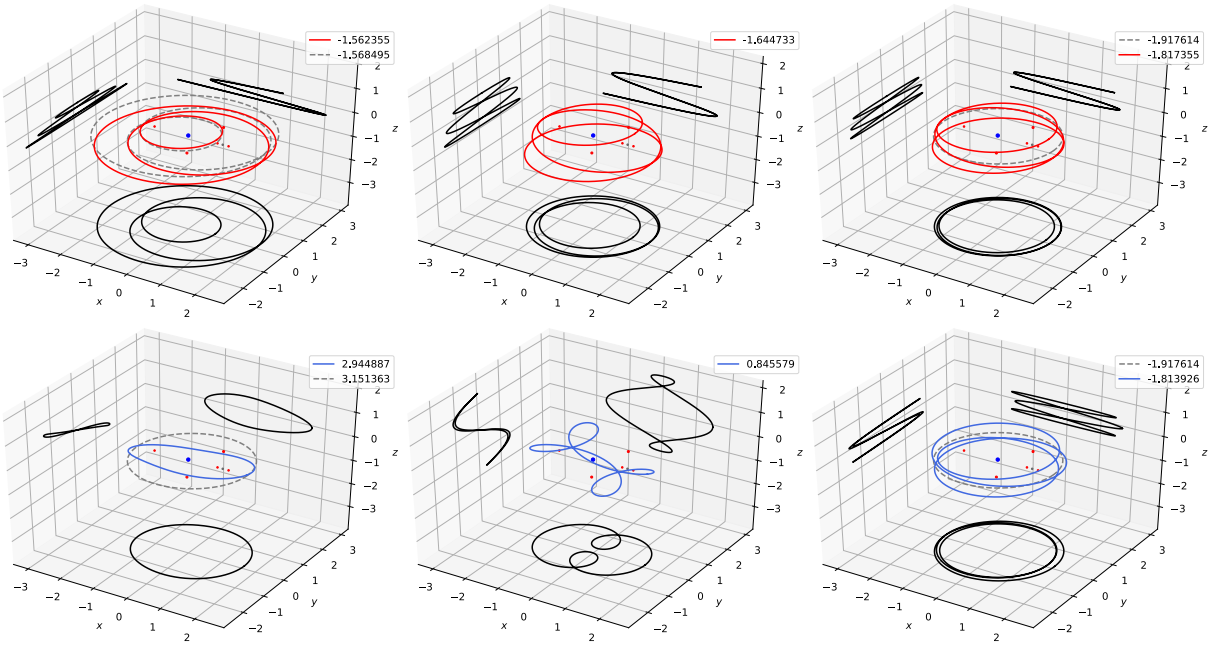


图 8：上排和下排均从右向左展示了从 1:3 κ_-（右侧灰色虚线）分岔出的红色分支和蓝色分支上的部分轨道。红色分支形成一座通往 1:1 $A1$（左侧灰色虚线）的桥，蓝色分支则形成一座通往 1:1 κ_+（左侧灰色虚线）的桥。

的指标为 2。因此，分岔前后的欧拉示性数在两种情况下均为 $(-1)^2 = 1$。此外，在 1:2 κ_- 轨道的第二个分支点处，分岔前只有指标为 3 的坏彗星轨道；分岔后，倍周期彗星轨道的指标为 4，而分岔出的 L_2 垂直李雅普诺夫轨道的指标为 3。因此，分支点前后的欧拉示性数均为零。

(2) 从 *1:3* 逆行 κ_- 轨道分岔。在雅可比常数 $C \approx -1.917613$ 处，周期为 $T \approx 12.619274$ 的 1:3 κ_- 轨道的 3重覆盖的 Conley–Zehnder指标从 2 跳变为 4。红色分支上的成员（其指标始于 2）关于 XOZ 对称性是简单对称的；蓝色分支上的轨道（其指标始于 3）关于 OX 对称性是简单对称的。利用 σ 对称性（关于黄道面的反射），这两个分支各自都有一个对称分支；它们对应于图 6 分岔图中的虚线族。图 8 绘出了一些轨道，数据见表 A3。随着 z 增大至 $z \approx 0.535093$（对应 $C \approx -1.644732$），红色分支不断延伸，随后初始参数 z 减小。接着，在 $C \approx -1.552974$处发生一次生灭分岔后，该分支于 $C \approx -1.568494$ 处在平面内终止于一条垂直临界轨道上；这条轨道属于地球周围逆行周期解族，在 Broucke记号 [10]中记为 $A1$。红色族中所有 Conley–Zehnder指标为 2 的周期轨道均稳定。蓝色分支延伸至 $z \approx 0.808557$（对应 $C \approx 0.845579$），随后下降至平面，并在 $C \approx 3.151363$处到达第二条临界 1:1 顺行 κ_+轨道。这是我们发现的第一个由空间周期解构成、连接逆行与顺行彗星轨道的桥族。沿蓝色分支延拓时，轨道上会出现并消失一些环，如图 8 所示。蓝色轨道全都不稳定，呈椭圆型和正双曲型（指标为 3），或纯正双曲型（指标为 4）。

(3) 从 *1:k* 逆行轨道分岔 κ_- 轨道（$k = 4$、5、6）。1:k逆行 κ_-轨道的垂直自共振分岔均产生相同的结果，适用于$k = 4$、5、6。对于每个k，所有垂直方向上分岔出的分支最终都会在 1:k 顺行 κ_+ 轨道的k重覆盖处回归平面，且$k = k - 2$。因此~，对于每个k，我们都得到连接 1:k 逆行 κ_- 轨道与 1:k 顺行 κ_+ 轨道的桥族。分岔图见图 9，轨道图见图 10、图 11 和图 12。分岔分支轨道的几何形状相似：轨道上会出现和消失各种环。此外，对于每个k，1:k 逆行轨道的k重覆盖的 Conley–Zehnder指标

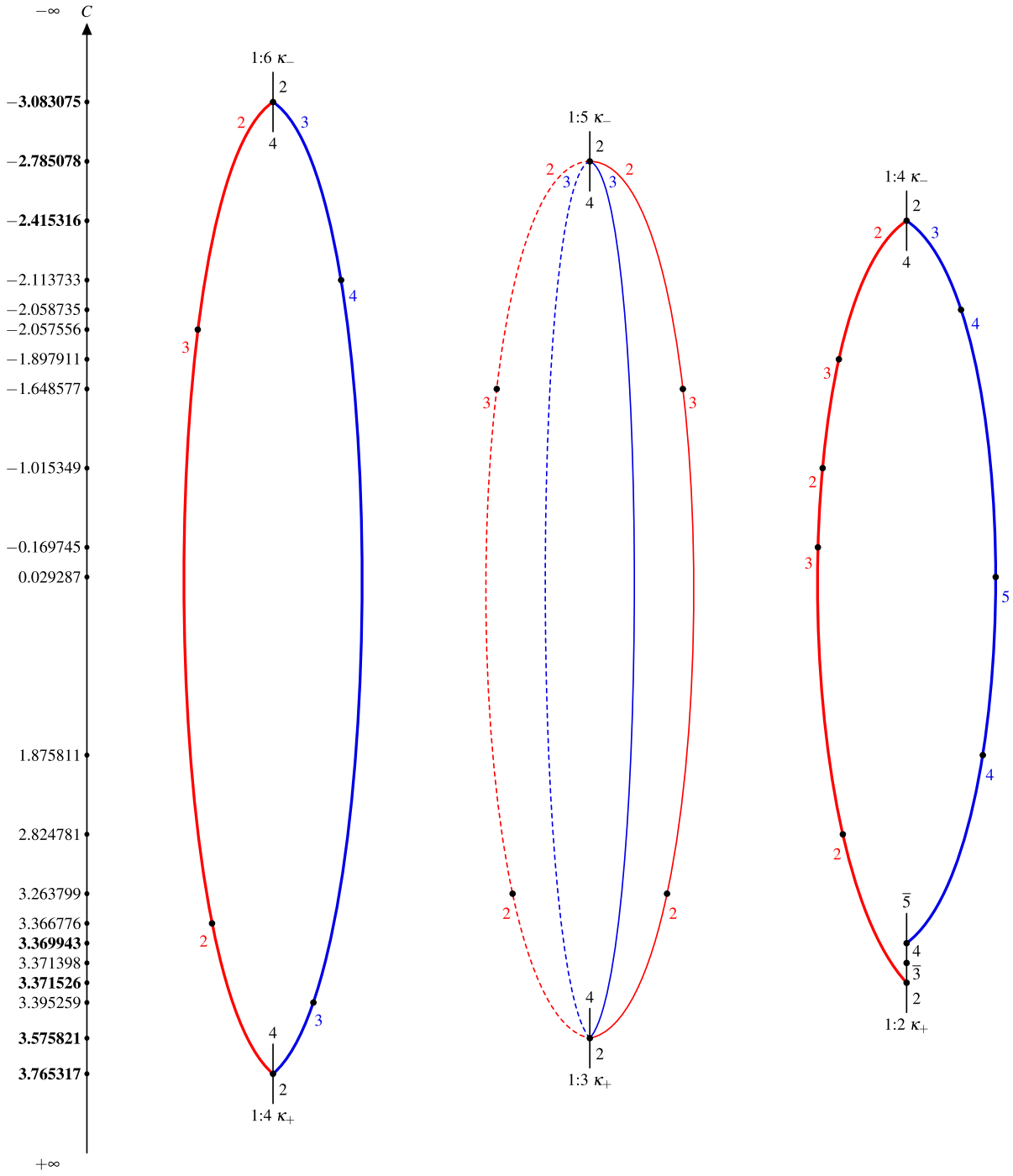


图 9：与 1:k逆行 κ_-和 1:$(k-2)$ 顺行 κ_+轨道之间的桥族相关的分岔图，其中 $k=4,5,6$。

κ_- 轨道的指标从 2 跳至 4。这是因为沿彗星轨道的线性化流旋转得相当˜慢，而且垂直方向略快于平面方向。对于 1:k 顺行 κ_+ 轨道，k重覆盖的指标也从 2 跳至 4，适用于$k=4$、3。若 $k=2$，则由于平面和垂直稳定性指标存在各种负双曲相位（见图5），1:2 顺行 κ_+ 轨道倍周期后的 Conley–Zehnder指标先从 2 变为 3（坏轨道）,–再从 3 变为 4，随后从 4 变为 5（再次为坏轨道）。逆行和顺行彗星轨道的这一指标行为，与我们所了解并研究过的、由主天体附近极小的开普勒解产生的逆行和顺行周期轨道形成鲜明对比 [3–6, 37]。

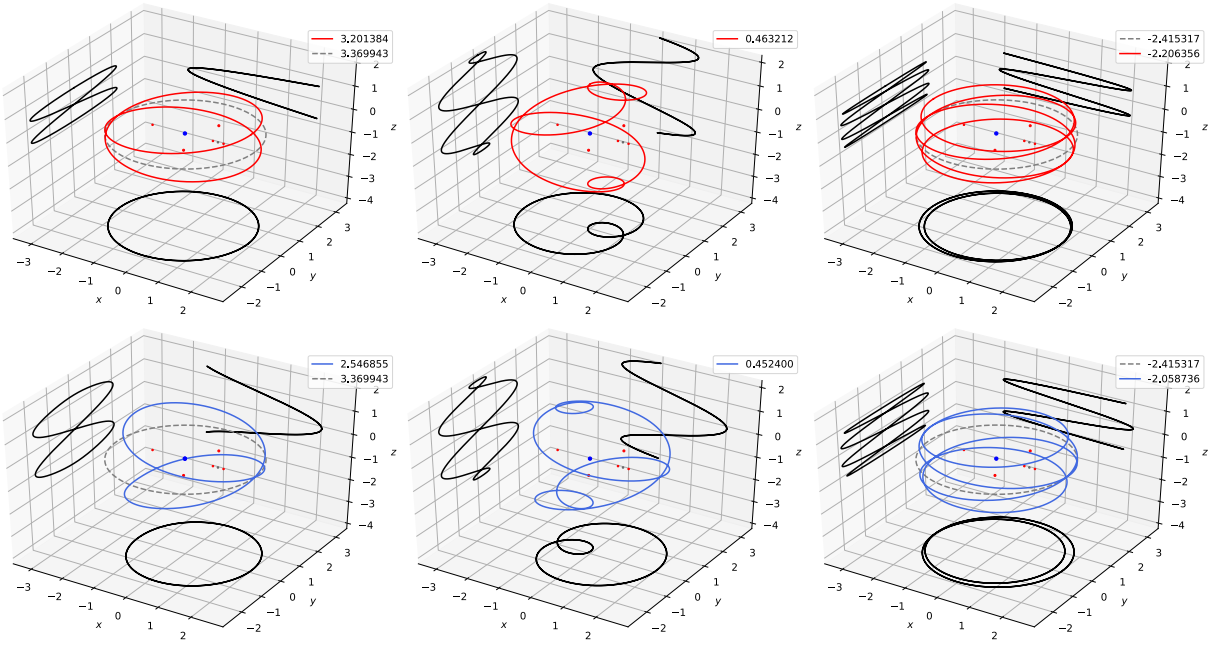


图 10：红色分支和蓝色分支的轨道形成一座桥，从右至左连接 1:4 逆行 κ_-（右侧灰色虚线）与 1:2 顺行 κ_+ 轨道（左侧灰色虚线）。

(3a) 1:4 逆行轨道与 κ_- *1:2* 顺行轨道之间的桥 κ_+。由 1:4 逆行 κ_- 轨道的 4重覆盖生成的红色和蓝色分支上的轨道，周期为$T \approx 18.870232$，在$C \approx -2.415316$处，分别关于 *XOZ-OX* 和 *OX-XOZ*对称。部分轨道见图 10，数据列于表 A4。观察图 10 中的轨道图，似乎存在关于原点的*YOZ*对称性，它将红色族与蓝色族联系起来。沿红色分支延拓时，Conley–Zehnder指标在 2 和 3 之间多次变化（见图 9），其中所有指标为 2 的轨道均稳定。初始参数z 达到最大值$z \approx 2.077839$，位于$C \approx 0.463212$处；随后递减，并在$C \approx 3.371526$处，终止于 1:2 顺行 κ_+ 轨道的第一个倍周期分支点，回到平面。对于蓝色分支，初始参数 $\dot{z}$ 在 $\dot{z} \approx 0.693535$ 处达到峰值，位于$C \approx 0.452400$处；之后下降，并在$C \approx 3.369943$处，沿 1:2 顺行 κ_+ 轨道的第二个倍周期分岔点回到平面。蓝色分支上的轨道的 Conley– Zehnder 指标为 3、4 或 5（见图 9），且全部不稳定。指标为 3 和 5 的周期轨道分别为椭圆型和正双曲型，而指标为 4 的轨道为纯正双曲型。

(3b) 1:5 逆行与 *1:3* 顺行轨道之间的桥 κ_- κ_+ 轨道。从周期为$T \approx 25.572403$、位于$C \approx -2.785078$的 1:5 逆行轨道的 5重覆盖出发，红色分支和蓝色分支上的轨道分别关于*OX*对称和*XOZ*对称，且均为简单对称。通过施加 σ对称（关于黄道面的反射），这两个分支各自都有一个对称分支（图 9 中以虚线表示）。部分轨道图示于图 11，数据可见表 A5。两个分支均终止于$C \approx 3.575821$处 1:3 顺行轨道的 3重覆盖。蓝色分支完全由椭圆型和正双曲型轨道组成，且 Conley–Zehnder指标恒为 3。初始参数z 的最大值为$z \approx 1.735593$，位于$C \approx -0.817202$。沿红色分支延拓时，轨道起初的指标为 2，随后指标跳跃至 3，再跳回 2。指标为 2 的轨道均稳定，而指标为 3 的轨道属于椭圆型和正双曲型。垂直初始参数 $\dot{z}$ 达到最大值 $\dot{z} \approx 0.812872$，位于$C \approx -0.192251$。

(3c) 1:6 逆行轨道与 *1:4* 顺行轨道之间的桥 κ_- 与 *1:4* 顺行 κ_+ 轨道。垂直临界 1:6 逆行 κ_- 轨道在$C \approx -3.083075$ 处的六重覆盖，其周期为$T \approx 31.424192$。在此分支点，红色分支和蓝色分支的分岔轨道关于*OX-XOZ*对称性呈双重对称。部分轨道绘于图 12 中，相关数据列于表 A6。两个族均在$C \approx 3.765317$处终止于 1:4 顺行 κ_+ 轨道所在的一个平面上。与情形 (3a) 类似，根据轨道的几何形状

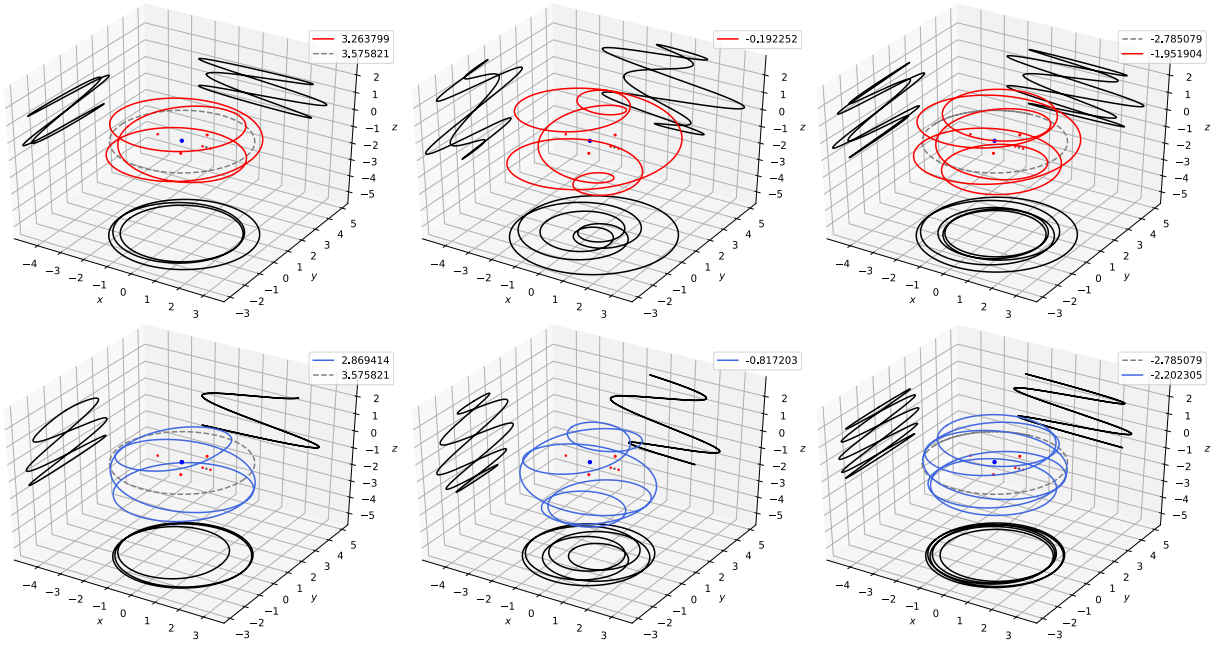


图 11：红色和蓝色分支的轨道从右向左形成一座桥，连接 1:5 逆行 κ_-（右侧灰色虚线）和 1:3 顺行 κ_+ 轨道（左侧灰色虚线）。

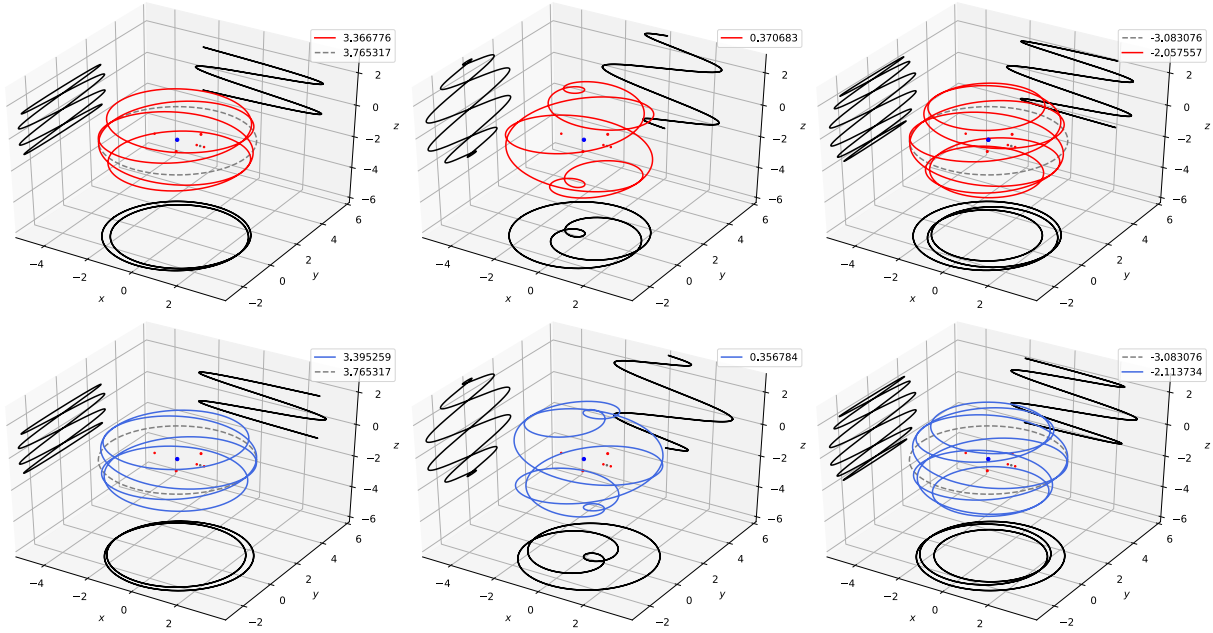


图 12：红色和蓝色分支的轨道从右向左形成一座桥，连接 1:6 逆行 κ_-（右侧灰色虚线）和 1:4 顺行 κ_+ 轨道（左侧灰色虚线）。

从图 12 中可以看出，似乎存在一种关于原点的*YOZ*对称性，将两个分支连接起来。与之前一样，红色分支中的轨道起始时 Conley–Zehnder指标为 2，随后跃升至 3，再降回 2，然后到达 1:4 顺行 κ_+ 轨道。所有指标为 2 的轨道都稳定，而指标为 3 的轨道则属于椭圆型和正双曲型。面外初始参数 $\dot{z}$ 在$C \approx 0.370683$处达到最大值 $\dot{z} \approx 0.585070$。蓝色分支中的轨道起始时指标为 3，随后升至 4，再降回 3。所有轨道均不稳定；其中指标为 3 的轨道属于椭圆型和正双曲型，指标为 4 的轨道则属于纯正双曲型。初始参数 $\dot{z}$ 的最大值为 $\dot{z} \approx 0.584669$，出现在$C \approx 0.356784$处。

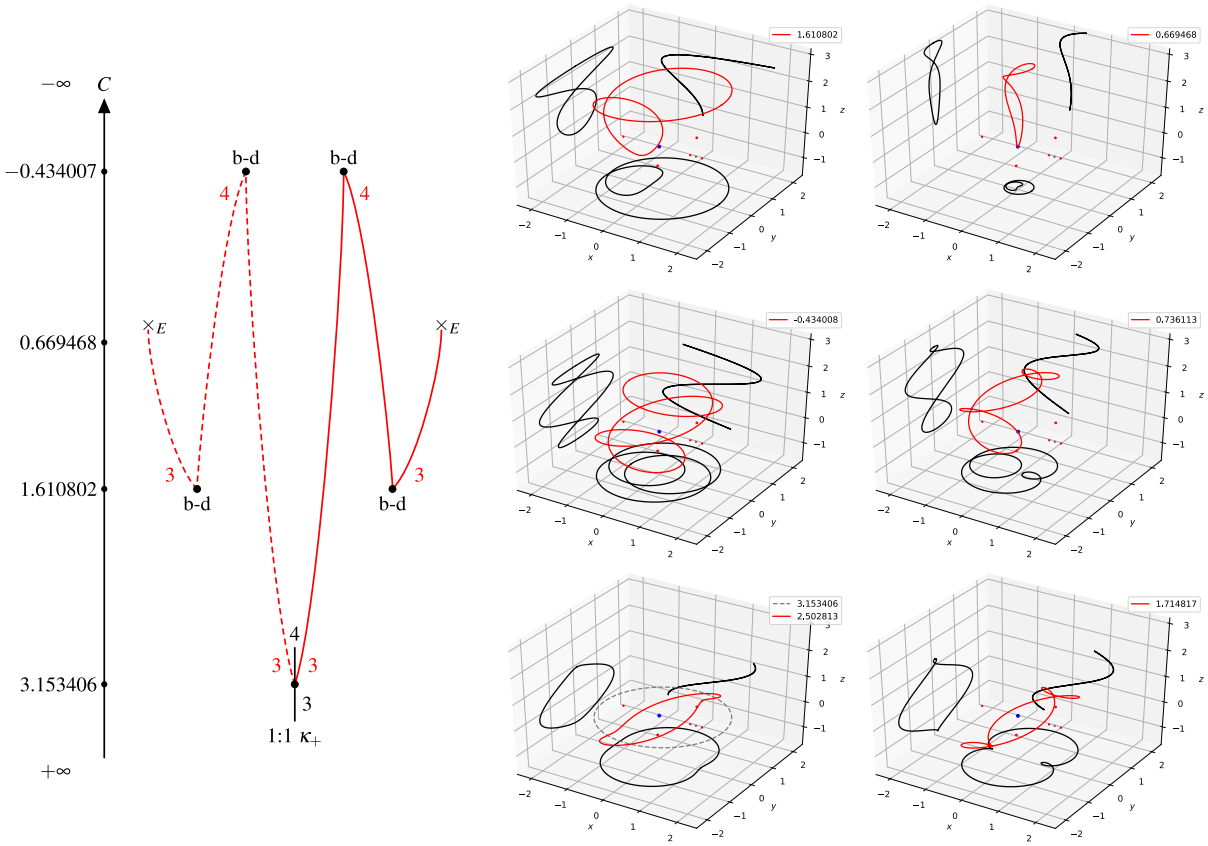


图13：左：从 1:1 κ_+ 出发的垂直分岔支所对应的分岔图，该分支经延拓直至接近与地球碰撞，碰撞位置由 $\times_E$ 标示。右：轨道图按行排列，从左下方（灰色虚线对应 1:1 κ_+）到右上方。

(4) 从 *1:1* 顺行 κ_+ 轨道分岔。从第二个垂直临界 1:1 顺行 κ_+ 轨道出发，在$C \approx 3.153406$处生成一条分支，其轨道关于XOZ对称性呈简单对称。由于面外初始参数z可以增大或减小，利用 σ 对称性（关于黄道面的反射）可得到一条对称分支。所得分岔图及部分轨道图见图13，相关数据列于表 A7。在 1:1 κ_+ 轨道处，康利–曾德指数从 3 跳跃至 4；沿雅可比常数减小方向，分岔支上的轨道以指数为 3 的椭圆型和正双曲型轨道起始。经过长时间延拓后，该分支在$C \approx -0.434007$处发生生灭分岔，此后轨道为纯正双曲型，指数为 4。随后，该族可继续延拓，直至$C \approx 1.610802$ 处遇到第二个生灭分岔点，此后轨道再次呈椭圆型和正双曲型。如图13所示，在延拓过程中，轨道上有若干环路生成又消失；这些环路在$C \approx 0.669468$ 处接近与地球碰撞，我们在此停止延拓。最后一个计算所得轨道的初始参数z 的值为$z \approx 3.099295$。近碰撞阶段的轨道几何形态颇为特殊：在周期的大部分时间里，轨道都远离地球，并在垂直方向上形成大幅度的钩形偏转，因此近碰撞时刻极为短暂，如图13右上方所示。目前，这类轨道仅在小质量值情况下已知，它们是旋转开普勒问题中垂直碰撞轨道分岔产生的轨道 [7,8]。

6 结论

我们研究了圆型限制性三体问题动力学中的彗星型周期轨道及其面外自共振分岔。彗星轨道是由主天体共同质心周围周期极长的逆行和顺行开普勒运动产生的。由逆行运动产生的彗星轨道

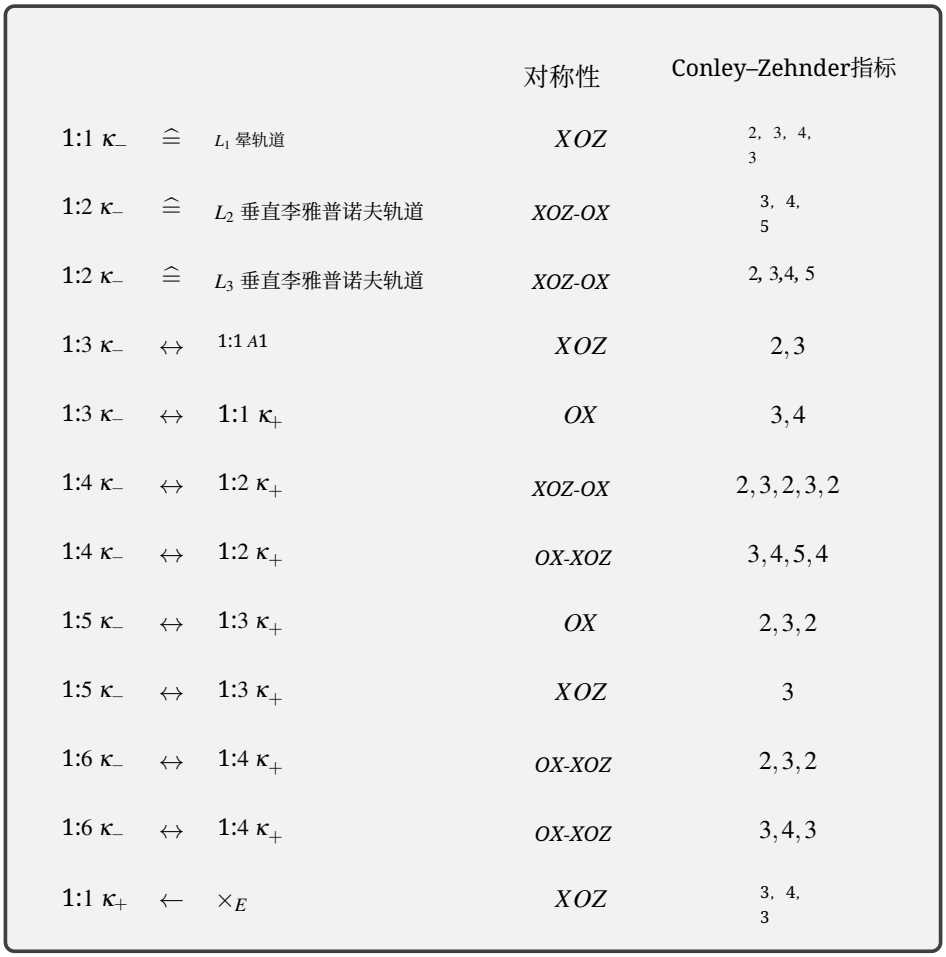


图14：分岔结果。“≙”表示从左侧临界轨道分岔出的分支与右侧分支之间的对应关系。双箭头表示左、右临界轨道之间具有相应 1:k 自共振的桥族。底部的左箭头表示一条非闭合分支，该分支趋近于与地球碰撞，以 $\times_E$ 表示。Conley–Zehnder指标为 2 的轨道对应稳定解。

记为 κ_-，由顺行运动产生的彗星轨道记为 κ_+。我们首先在定理 4.1 中基于经典的庞加莱延拓方法，讨论了它们存在性的解析证明。在这一解析方法中，我们还确定了 Conley–Zehnder指标，它是利用交叉型定义的马斯洛夫指标。由于 Conley–Zehnder指标为拓扑分岔不变量赋予分次，而该不变量包括局部弗洛尔同调及其欧拉示性数，因此计算 Conley–Zehnder指标能够为分岔分析提供系统的方法。在地球–月球圆型限制性三体问题框架下，我们对这两个族 $\kappa_\pm$ 及其垂直自共振分岔进行了数值探索。我们计算了彗星轨道 κ_+的平面和垂直稳定性指标，识别出重数最高达六的垂直自共振轨道，分析了垂直分岔出的分支和桥族，并讨论了它们的轨道特征。第5节提供了详细描述，以及分岔图和轨道图。我们的主要分岔结果总结于图14。值得注意的是，逆行与顺行彗星轨道之间桥的分岔结构，与 [3–6, 37]，中研究的、由主天体之一附近的小尺度开普勒运动产生的逆行和顺行解所对应的结构相似；也就是说，形成通往顺行轨道的空间桥时，始终需要对逆行轨道进行多两次覆盖。与小尺度顺行和逆行轨道不同，后者的多重覆盖的 Conley–Zehnder指标会变得非常高；逆行和顺行彗星轨道的多重覆盖的指标跳跃始终为 2 到 4，这是由于沿彗星轨道的线性化流旋转极其缓慢。

附录数据表

数据库包含我们所研究的各族相关选定轨道的初始数据、弗洛凯乘子及其对应的克莱因符号和康利–策恩德指数。对于一对双曲型弗洛凯乘子，我们用 λ 表示其中具有 $|\lambda| > 1$的那个。对于一对椭圆型弗洛凯乘子，我们用 θ 表示模 2π 的旋转角，并以克莱因符号加以表征。水平虚线表示生灭分岔。

表A1： κ_- （第一组）和 κ_+ （第二组）的数据。

C	$x(0)$	$\dot{y}(0)$	$T/2$	弗洛凯乘子和克莱因符号	$\mu_{CZ}\,/\,\mu^{p}{}_{CZ}\,/\,\mu^{s}_{CZ}$
−3.73079020	3.96375030	−4.46622787	2.788167	$(+)\ \theta_p \approx 0.706, (+)\ \theta_s \approx 0.707$	2 / 1 / 1
−3.08307598	2.92838023	−3.51324570	2.618682	$(+)\ \theta_p \approx 1.044,\ \ (+)\ \theta_s \approx 2\pi/6$	2 / 1 / 1
−2.78507825	2.52551891	−3.15557876	2.514480	$(+)\ \theta_p \approx 1.251,\ \ (+)\ \theta_s \approx 2\pi/5$	2 / 1 / 1
−2.41531689	2.08857210	−2.78208822	2.358779	$(+)\ \theta_p \approx 1.560,\ \ (+)\ \theta_s \approx 2\pi/4$	2 / 1 / 1
−1.91761341	1.60566275	−2.39923349	2.103212	$(+)\ \theta_p \approx 2.059, (+)\ \theta_s \approx 2\pi/3$	2 / 1 / 1
−1.33311990	1.17816938	−2.12337566	1.742922	$(+)\ \theta_p \approx 2.650,\ \ \lambda_s \approx -1.000$	2 / 1 / 1
−1.19019267	1.09454322	−2.09792012	1.634914	$(+)\ \theta_p \approx 2.741, \lambda_s \approx -1.397$	2 / 1 / 1
−1.12676203	1.06081793	−2.10393894	1.574541	$(+)\ \theta_p \approx 2.934, \lambda_s \approx -1.000$	2 / 1 / 1
−1.06179859	1.03118167	−2.14002812	1.490894	$\lambda_p \approx -2.251, (-)\ \theta_s \approx 2\pi\ 2/3$	2 / 1 / 1
−1.04060107	1.02363545	−2.16219513	1.456837	$\lambda_p \approx -3.079, (-)\ \theta_s \approx 2\pi\ 3/4$	2 / 1 / 1
−1.01611986	1.01670394	−2.19373120	1.414661	$\lambda_p \approx -4.550, \lambda_s \approx 1.000$	$2\to 3\,/\,1\,/\ 1\to 2$
−0.48769543	−0.27646347	2.83871407	0.796606	$\lambda_p \approx -57.70, \lambda_s \approx 300.5$	3 / 1 / 2
−0.41303508	−0.17803693	3.51792654	0.671272	$(+)\ \theta_p \approx 2.760,\ \ \lambda_s \approx 533.5$	3 / 1 / 2
−0.41292572	−0.17508887	3.54826837	0.667245	$(+)\ \ \theta_p \approx 0.019,\ \ \lambda_s \approx 544.3$	3 / 1 / 2
−0.41292568	−0.17508886	3.54826847	0.667244	$\lambda_p \approx 1.004, \lambda_s \approx 544.3$	2 / 0 / 2
−0.95924764	−0.06168512	6.39335159	0.477327	$\lambda_p \approx 848.9, \lambda_s \approx 1926$	2 / 0 / 2
−1.68063393	−0.04012751	8.50504725	0.417761	$\lambda_p \approx 2135, \lambda_s \approx 3554$	2 / 0 / 2
−2.51369826	−0.02999931	10.64223834	0.378057	$\lambda_p \approx 4033, \lambda_s \approx 5797$	2 / 0 / 2
3.94727405	3.32100001	−2.77216975	3.763832	$(+)\ \theta_p \approx 1.243, (+)\ \theta_s \approx 1.245$	2 / 1 / 1
3.76531791	2.92763105	−2.34313685	3.925946	$(+)\ \theta_p \approx 1.566, (+)\ \theta_s \approx 2\pi/4$	2 / 1 / 1
3.57582149	2.52462303	−1.89539901	4.186777	$(+)\ \theta_p \approx 2.086, (+)\ \theta_s \approx 2\pi/3$	2 / 1 / 1
3.37152656	2.09036920	−1.39994341	4.704335	$(+)\ \theta_p \approx 3.134, \lambda_s \approx -1.000$	2 / 1 / 1
3.37139816	2.09009402	−1.39962427	4.704806	$\lambda_p \approx -1.000, \lambda_s \approx -1.003$	2 / 1 / 1
3.36994316	2.08697533	−1.39600678	4.710158	$\lambda_p \approx -1.021, \lambda_s \approx -1.000$	2 / 1 / 1
3.36445490	2.07520682	−1.38234813	4.730661	$\lambda_p \approx -1.000, (-)\ \theta_s \approx 3.188$	2 / 1 / 1
3.26371835	1.85842481	−1.12877794	5.226019	$(-)\ \theta_p \approx 4.150, (-)\ \theta_s \approx 2\pi\ 2/3$	2 / 1 / 1
3.22782403	1.78256000	−1.03977090	5.484844	$(-)\ \theta_p \approx 4.668, (-)\ \theta_s \approx 2\pi\ 3/4$	2 / 1 / 1
3.15340606	1.69254257	−0.95118846	6.254196	$\lambda_p \approx 1.473, \lambda_s \approx 1.000$	$3\to 4\,/\,2\,/\ 1\to 2$
3.15194964	1.69613732	−0.95696577	6.268160	$\lambda_p \approx 1.498, \lambda_s \approx 1.017$	4 / 2 / 2
3.15136315	1.69775817	−0.95952922	6.273520	$\lambda_p \approx 1.508, \lambda_s \approx 1.000$	$4\to 5\,/\,2\,/\ 2\to 3$
3.15055237	1.70016298	−0.96329648	6.280659	$\lambda_p \approx 1.521,\ \ (+)\ \theta_s \approx 0.027$	5 / 2 / 3
2.98165907	2.17197153	−1.63122614	6.324042	$\lambda_p \approx 3.678,\ \ (+)\ \theta_s \approx 0.106$	5 / 2 / 3
1.49947321	3.07313502	−2.93201321	6.274403	$\lambda_p \approx 2.319, (+)\ \theta_s \approx 0.016$	5 / 2 / 3

表 A2：从 1:1 κ_- 对应的L_1 晕轨道（第一组）以及从 1:2 κ_- 对应的L_2 和L_3 垂直李雅普诺夫轨道（分别为第二组和第三组）分出的轨道族数据。

C	$x(0)$	$z(0)$	$\dot{y}(0)$	$T/2$	弗洛凯乘子与克莱因符号	μ_{CZ}
−1.01611986	−0.84576821	0	2.02848068	1.414661	$\lambda_p \approx -4.550,\ \lambda_s \approx 1.000$	2→ 3
−1.01121740	−0.84802264	0.04500000	2.02578862	1.417869	$\lambda \approx -4.980,\ (-)\ \theta \approx 5.264$	2
−0.98614733	−0.86050440	0.11500000	2.01183966	1.435595	$\lambda_1 \approx -7.801,\ \lambda_2 \approx -1.194$	2
1.00758977	−0.00588985	0.99501230	0.99764024	1.556055	$513.3 \pm 376.2i\ ,\ 0.001 \pm 0.001i$	2
2.94065356	0.92852311	0.29459187	0.08181840	1.083121	$(-)\ \theta_1 \approx 4.661,\ (+)\ \theta_2 \approx 1.626$	2
2.94342187	0.92915408	0.29140652	0.08174723	1.075469	$(-)\ \theta \approx 5.504,\ \lambda \approx -1.000$	2
2.94699116	0.92992363	0.28728227	0.08174985	1.065406	$\lambda_1 \approx 1.000,\ \lambda_2 \approx -2.623$	2→ 3
2.97165710	0.93338449	0.25816317	0.08596446	0.990270	$\lambda_1 \approx 2.373,\ \lambda_2 \approx -5.415$	3
3.00400727	0.91276840	0.20718952	0.15444698	0.915881	$\lambda_1 \approx 1.001,\ \lambda_2 \approx -4.433$	3
3.00400727	0.91276832	0.20718947	0.15444717	0.915881	$(+)\ \theta \approx 0.001,\ \lambda \approx -4.433$	4
2.99862220	0.88116552	0.19373322	0.22165687	1.056634	$(+)\ \theta \approx 0.924,\ \lambda \approx -1.000$	4
2.99783519	0.87193582	0.19019461	0.23730262	1.115036	$(+)\ \theta_1 \approx 0.002,\ (+)\ \theta_2 \approx 1.957$	4
2.99783519	0.87193578	0.19019460	0.23730267	1.115037	$\lambda \approx 1.002,\ \ (+)\ \theta \approx 1.957$	3
3.00741394	0.85032515	0.17588652	0.26274287	1.274440	$\lambda \approx 21.53,\ (+)\ \theta \approx 2.571$	3
3.11960141	0.82631121	0.08588652	0.20029568	1.389850	$\lambda \approx 838.4,\ \ (-)\ \theta \approx 5.342$	3
3.17439048	0.82336756	0	0.12634016	1.371476	$\lambda_p \approx 2361,\ \lambda_s \approx 1.000$	3→ 4
C	$x(0)$	$\dot{y}(0)$	$\dot{z}(0)$	$T/4$	弗洛凯乘子与克莱因符号	μ_{CZ}
−1.12676203	1.06081793	−2.10393894	0	1.574541	$(-)\ \theta_p \approx 5.868,\ \lambda_s \approx 1.000$	3→ 4
−1.12353182	1.06075604	−2.10251315	0.05499999	1.574389	$(-)\ \theta \approx 5.942,\ \lambda \approx 1.406$	3
−1.11699017	1.06077019	−2.09942385	0.09698150	1.574377	$\lambda_1 \approx 1.000,\ \lambda_2 \approx 1.819$	3→ 4
0.00187071	1.06404466	−1.57176890	0.90260590	1.571456	$\lambda_1 \approx 12.87,\ \lambda_2 \approx 91.99$	4
1.00449875	1.06930182	−1.10176890	1.02485766	1.565515	$\lambda_1 \approx 17.71,\ \lambda_2 \approx 245.3$	4
2.96706753	1.11194442	−0.18118227	0.43588315	1.105549	$\lambda_1 \approx 1.000,\ \ \lambda_2 \approx 335.3$	4→ 5
3.07784218	1.13162660	−0.06764894	0.30751995	0.935413	$(+)\ \theta \approx 0.613,\ \ \lambda \approx 823.9$	5
3.14423876	1.14839882	−0.01733906	0.16751995	0.890856	$(+)\ \theta \approx 0.401,\ \ \lambda \approx 1550$	5
3.16764037	1.15450857	−0.00269836	0.06751995	0.881078	$(+)\ \theta \approx 0.294,\ \lambda \approx 1908$	5
C	$x(0)$	$z(0)$	$\dot{y}(0)$	$T/4$	弗洛凯乘子与克莱因符号	μ_{CZ}
−1.33311990	1.17816938	0	−2.12337566	1.742922	$(-)\ \theta_p \approx 5.300,\ \lambda_s \approx 1.000$	2→ 3
−1.29018584	1.15485565	0.10500000	−2.10552729	1.729236	$(-)\ \theta_1 \approx 5.494,\ (-)\ \theta_2 \approx 5.725$	2
−1.08659142	1.04597982	0.24798430	−2.02336264	1.658151	$\lambda \approx 1.000,\ \ (-)\ \theta \approx 5.694$	2→ 3
−0.88712597	0.94352218	0.38500000	−1.93846655	1.601378	$\lambda \approx 1.121,\ \ (-)\ \theta \approx 5.970$	3
−0.64402169	0.82132984	0.56898610	−1.82135383	1.577771	$\lambda_1 \approx 1.577,\ \lambda_2 \approx 1.000$	3→ 4
−0.30229740	0.64993844	0.75193521	−1.65111433	1.569487	$\lambda_1 \approx 1.399,\ \lambda_2 \approx 1.032$	4
0.03075099	0.48299074	0.86792609	−1.48457007	1.566650	$\lambda_1 \approx 1.605,\ \lambda_2 \approx 1.000$	4→ 5
1.00587257	−0.00506155	0.99597899	−0.99752434	1.563844	$\lambda \approx 2.106,\ (+)\ \theta \approx 0.029$	5
2.01924928	−0.51088663	0.86011032	−0.49289975	1.562901	$\lambda \approx 2.582,\ (+)\ \theta \approx 0.032$	5
2.83771288	−0.91834774	0.40635136	−0.08648728	1.562522	$\lambda \approx 2.959,\ (+)\ \theta \approx 0.032$	5
3.00893966	−1.00346817	0.05635136	−0.00159211	1.562464	$\lambda \approx 3.038,\ (+)\ \theta \approx 0.031$	5

表 A3：从 1:3 κ_- 出现的两个族的数据。第一组中的轨道终止于 1:1 A_1, ，第二组中的轨道终止于 1:1 $\kappa_{+\circ}$

C	$x(0)$	$z(0)$	$\dot{y}(0)$	$T/2$	弗洛凯乘子 & 克莱因符号	μ_{CZ}
−1.91761341	1.60566275	0	−2.39923349	6.309637	(−) $\theta_p \approx 6.177, \lambda_s \approx 1.000$	2→ 4
−1.81735436	1.45213275	0.40000000	−2.29505407	6.307873	(−) $\theta_1 \approx 6.120$, (−) $\theta_2 \approx 6.266$	2
−1.64473200	1.19211399	0.53509332	−2.14652015	6.305408	(−) $\theta_1 \approx 5.968$, (−) $\theta_2 \approx 6.257$	2
−1.55297424	0.89906119	0.32676374	−2.11518547	6.322365	(−) $\theta_1 \approx 5.964$, (−) $\theta_2 \approx 6.280$	2
−1.55297424	0.89697817	0.32348360	−2.11596504	6.322815	(−) $\theta \approx 5.689, \lambda \approx 1.002$	3
−1.56235471	0.81383824	0.13914529	−2.16620917	6.358972	(−) $\theta \approx 5.470, \quad \lambda \approx 1.034$	3
−1.56849475	0.79468554	0	−2.18507428	6.379428	(−) $\theta_p \approx 5.393, \quad \lambda_s \approx 1.000$	2→ 3
C	$x(0)$	$\dot{y}(0)$	$\dot{z}(0)$	$T/2$	弗洛凯乘子与克莱因符号	μ_{CZ}
−1.91761341	1.60566275	−2.39923349	0	6.309637	(−) $\theta_p \approx 6.177, \lambda_s \approx 1.000$	2→ 4
−1.81392539	1.70156027	−2.41995114	0.20000000	6.307532	(−) $\theta \approx 6.118, \lambda \approx 1.017$	3
−1.30597461	2.02602529	−2.50444153	0.36232839	6.293265	$\lambda_1 \approx 1.000, \lambda_2 \approx 1.104$	3→ 4
0.01978289	1.66817421	−1.85359980	0.73396077	6.283455	$\lambda_1 \approx 1.080, \lambda_2 \approx 1.772$	4
0.84557994	1.55885049	−1.49359980	0.80855708	6.281744	$\lambda_1 \approx 1.131, \lambda_2 \approx 2.425$	4
2.33904193	1.60479821	−1.07681306	0.58143972	6.276518	$\lambda_1 \approx 1.282, \lambda_2 \approx 2.617$	4
2.94488745	1.67186668	−0.98393202	0.30143972	6.274243	$\lambda_1 \approx 1.374, \lambda_2 \approx 1.807$	4
3.15136315	1.69775817	−0.95952922	0	6.273520	$\lambda_p \approx 1.508, \lambda_s \approx 1.000$	5→ 4

表 A4：从 1:4 κ_- 分岔出的两个族的数据。根据图 9，第一组中的轨道对应红色分支，第二组中的轨道对应蓝色分支。两个族均终止于 1:2 $\kappa_{+\circ}$

C	$x(0)$	$z(0)$	$\dot{y}(0)$	$T/4$	弗洛凯乘子与克莱因符号	μ_{CZ}
−2.41531689	−2.08786757	0	2.78104740	4.717558	(−) $\theta_p \approx 6.241, \lambda_s \approx 1.000$	2→ 4
−2.20635533	−1.93838562	0.77200000	2.63130893	4.716830	(−) $\theta_1 \approx 6.194$, (−) $\theta_2 \approx 6.256$	2
−1.89791187	−1.71694084	1.18249000	2.40962414	4.715987	(−) $\theta \approx 6.093, \lambda \approx 1.000$	2→ 3
−1.55961509	−1.47338332	1.47271735	2.16593152	4.715271	(−) $\theta \approx 6.011, \lambda \approx 1.013$	3
−1.01534919	−1.08077118	1.77861858	1.77327052	4.714397	(−) $\theta \approx 5.915, \lambda \approx 1.000$	3→ 2
−0.57577415	−0.76338453	1.93482010	1.45593152	4.713838	(−) $\theta_1 \approx 5.860$, (−) $\theta_2 \approx 6.273$	2
−0.16974581	−0.47016752	2.02514833	1.16279452	4.713384	(−) $\theta \approx 5.821, \lambda \approx 1.000$	2→ 3
0.46321270	−0.01315667	2.07783917	0.70593152	4.712724	(−) $\theta \approx 5.776, \lambda \approx 1.024$	3
1.23938644	0.54697989	2.00390183	0.14593152	4.711854	(−) $\theta \approx 5.744, \lambda \approx 1.042$	3
2.82478178	1.69181204	1.21295943	−0.99968252	4.708275	(−) $\theta \approx 5.822, \lambda \approx 1.000$	3→ 2
3.20138458	1.96566673	0.70006443	−1.27449955	4.705982	(−) $\theta_1 \approx 5.973$, (−) $\theta_2 \approx 6.243$	2
3.37152656	2.08697533	0	−1.39600678	4.710158	(−) $\theta_p \approx 6.269, \lambda_s \approx 1.000$	2→ $\overline{3}$
C	$x(0)$	$\dot{y}(0)$	$\dot{z}(0)$	$T/4$	弗洛凯乘子与克莱因符号	μ_{CZ}
−2.41531689	2.08857210	−2.78208822	0	4.717558	(−) $\theta_p \approx 6.241, \quad \lambda_s \approx 1.000$	2→ 4
−2.23032078	2.08707669	−2.73695277	0.24199999	4.716389	(−) $\theta \approx 6.258, \lambda \approx 1.082$	3
−2.05873588	2.08606393	−2.69524723	0.33133100	4.715605	$\lambda_1 \approx 1.000, \lambda_2 \approx 1.152$	3→ 4
−1.31916187	2.08362347	−2.51630078	0.54200000	4.713737	$\lambda_1 \approx 1.028, \lambda_2 \approx 1.408$	4
0.02928745	2.08214076	−2.19144828	0.68495225	4.712318	$\lambda_1 \approx 1.000, \lambda_2 \approx 1.762$	4→ 5
0.45240023	2.08206794	−2.08979228	0.69353564	4.712029	(+) $\theta \approx 0.016, \quad \lambda \approx 1.846$	5
1.87581185	2.08305464	−1.74920028	0.60725253	4.711176	$\lambda_1 \approx 1.000, \quad \lambda_2 \approx 1.952$	5→ 4
2.54685508	2.08433874	−1.58979228	0.48448151	4.710758	$\lambda_1 \approx 1.035, \quad \lambda_2 \approx 1.820$	4
3.36994316	2.08697533	−1.39600678	0	4.710158	$\lambda_p \approx 1.042, \lambda_s \approx 1.000$	4→ $\overline{5}$

表 A5：从 1:5 κ_- 分岔出的两个族的数据。根据图 9，第一组中的轨道对应红色分支，第二组中的轨道对应蓝色分支。两个族均终止于 1:3 κ_+。

C	$x(0)$	$\dot{y}(0)$	$\dot{z}(0)$	$T/2$	弗洛凯乘子与克莱因符号	μ_{CZ}
−2.78507825	−2.52523337	3.15514897	0	12.572403	(−) $\theta_p \approx 6.259, \lambda_s \approx 1.000$	2→ 4
−1.95190358	−2.06085155	2.63081580	0.50015919	12.570616	(−) $\theta_1 \approx 6.039$, (−) $\theta_2 \approx 6.278$	2
−1.64857749	−1.67480758	2.28599260	0.65207487	12.570488	(−) $\theta \approx 5.994, \lambda \approx 1.000$	2→ 3
−0.19225157	−1.84545357	2.00585092	0.81287280	12.567228	(−) $\theta \approx 6.051, \lambda \approx 1.039$	3
1.51574261	−2.00676149	1.72869916	0.72220662	12.564860	(−) $\theta \approx 5.947, \lambda \approx 1.052$	3
3.26379993	−2.24150516	1.60217526	0.29550907	12.560384	(−) $\theta \approx 6.023, \lambda \approx 1.000$	3→ 2
3.40128178	−2.33983446	1.69790628	0.21620397	12.560137	(−) $\theta_1 \approx 6.105$, (−) $\theta_2 \approx 6.275$	2
3.57582149	−2.52354221	1.89368945	0	12.560333	(−) $\theta_p \approx 6.259, \lambda_s \approx 1.000$	2→ 4
C	$x(0)$	$z(0)$	$\dot{y}(0)$	$T/2$	弗洛凯乘子与克莱因符号	μ_{CZ}
−2.78507825	−2.52523337	0	3.15514897	12.572403	(−) $\theta_p \approx 6.259, \lambda_s \approx 1.000$	2→ 4
−2.20230468	−1.96909114	1.38000000	2.62909547	12.570561	(−) $\theta \approx 6.195, \quad \lambda \approx 1.003$	3
−0.81720281	−0.74798075	1.73559379	1.56032664	12.568861	(−) $\theta \approx 5.864, \quad \lambda \approx 1.018$	3
1.02320791	0.34457437	1.60119923	0.56032664	12.566073	(−) $\theta \approx 5.536, \quad \lambda \approx 1.044$	3
2.86941464	1.59425590	1.21232538	−0.81967335	12.560660	(−) $\theta \approx 5.776, \lambda \approx 1.015$	3
3.57582149	2.52462303	0	−1.89539901	12.560333	(−) $\theta_p \approx 6.259, \lambda_s \approx 1.000$	2→ 4

表 A6：从 1:6 κ_- 分出的两个族的数据。根据图 9，第一组中的轨道对应红色分支，第二组中的轨道对应蓝色分支。两个族均终止于 1:4 κ_+。

C	$x(0)$	$\dot{y}(0)$	$\dot{z}(0)$	$T/4$	弗洛凯乘子与克莱因符号	μ_{CZ}
−3.08307598	−2.92823801	3.51302954	0	7.856048	(−) $\theta_p \approx 6.266, \lambda_s \approx 1.000$	2→ 4
−2.82590417	−2.92744896	3.46849895	0.22200000	7.855771	(−) $\theta_1 \approx 6.270$, (−) $\theta_2 \approx 6.274$	2
−2.05755697	−2.92569580	3.33581052	0.41706000	7.855169	(−) $\theta \approx 6.231, \lambda \approx 1.000$	2→ 3
0.37068395	−2.92336333	2.91854867	0.58507077	7.853980	(−) $\theta \approx 6.129, \quad \lambda \approx 1.021$	3
3.36677655	−2.92601680	2.40917597	0.27369986	7.852301	(−) $\theta \approx 6.229, \quad \lambda \approx 1.000$	3→ 2
3.64903893	−2.92681861	2.36188185	0.15098786	7.852040	(−) $\theta_1 \approx 6.265$, (−) $\theta_2 \approx 6.269$	2
3.76531791	−2.92722927	2.34250125	0	7.851892	(−) $\theta_p \approx 6.266, \lambda_s \approx 1.000$	2→ 4
C	$x(0)$	$\dot{y}(0)$	$\dot{z}(0)$	$T/4$	弗洛凯乘子与克莱因符号	μ_{CZ}
−3.08307598	2.92838023	−3.51324570	0	7.856048	(−) $\theta_p \approx 6.266, \lambda_s \approx 1.000$	2→ 4
−2.86931536	2.92776198	−3.47626961	0.20300000	7.855811	(−) $\theta \approx 6.270, \lambda \approx 1.006$	3
−2.11373395	2.92627646	−3.34602307	0.40726000	7.855185	$\lambda_1 \approx 1.000, \lambda_2 \approx 1.049$	3→ 4
0.35678440	2.92493645	−2.92264423	0.58466924	7.853965	$\lambda_1 \approx 1.021, \lambda_2 \approx 1.166$	4
3.39525998	2.92699047	−2.40561417	0.26413810	7.852319	$\lambda_1 \approx 1.000, \lambda_2 \approx 1.051$	4→ 3
3.66107019	2.92741447	−2.36069292	0.14300260	7.852044	(−) $\theta \approx 6.269, \lambda \approx 1.015$	3
3.76531791	2.92763105	−2.34313685	0	7.851892	(−) $\theta_p \approx 6.266, \lambda_s \approx 1.000$	2→ 4

表 A7：从 1:1 κ_+ 分岔出的分支数据，延续至接近与地球碰撞。

C	$x(0)$	$z(0)$	$\dot{y}(0)$	$T/2$	弗洛凯乘子与克莱因符号	μ_{CZ}
3.15340606	1.69254257	0	−0.95118846	6.254196	$\lambda_p \approx 1.473, \lambda_s \approx 1.000$	3→4
3.10497908	1.64057057	0.32500000	−0.89038323	6.256432	$\lambda \approx 1.418$, (–) $\theta \approx 5.997$	3
2.50281375	1.14121257	1.02130088	−0.32487557	6.272841	$\lambda \approx 1.284$, (–) $\theta \approx 5.405$	3
1.71481742	0.64318063	1.34352107	0.19512442	6.280390	$\lambda \approx 1.207$, (–) $\theta \approx 5.374$	3
0.61412474	−0.01215181	1.54242536	0.82470958	6.284400	$\lambda \approx 1.126$, (–) $\theta \approx 5.594$	3
−0.43400738	−0.81183181	1.69890129	1.69890129	6.285041	$\lambda \approx 1.193$, (–) $\theta \approx 6.282$	3
−0.43400072	−0.81183281	1.69891361	1.46801799	6.285041	$\lambda_1 \approx 1.193$, $\lambda_2 \approx 1.001$	4
0.73611388	0.11872418	2.40681480	0.32732843	6.274234	$\lambda_1 \approx 2.749$, $\lambda_2 \approx 1.044$	4
1.61080283	1.64821787	2.23796057	−1.35100956	6.264739	$\lambda_1 \approx 3.760, \lambda_2 \approx 1.001$	4
1.61080283	1.64821872	2.23796038	−1.35101056	6.264739	$\lambda \approx 3.760$, (–) $\theta \approx 6.283$	3
1.39262658	1.73365484	2.37502843	−1.51425179	6.258164	$\lambda \approx 3.376$, (–) $\theta \approx 6.243$	3
0.73257748	0.67443663	3.04798979	−1.60213845	6.211295	$\lambda \approx 2.178$, (–) $\theta \approx 6.122$	3
0.66946846	0.37443663	3.09929510	−1.33315327	6.159828	$\lambda \approx 1.705$, (–) $\theta \approx 6.025$	3

致谢。 作者感谢德国研究基金会（DFG）项目编号 541062288 的资助。此外，作者谨向 Urs Frauenfelder 致以谢意，感谢他提供的宝贵讨论。作者还要感谢 Alexander Batkhin 和 Alexander Bruno 为 Bruno 的部分俄语预印本提供英文注释。此外，作者衷心感谢 Otto van Koert 提供的宝贵讨论、热情款待，并在作者于2025年11月作为访问研究人员访问首尔国立大学期间营造了鼓舞人心的氛围；彗星轨道解析方法一节的许多重要内容正是在此期间完成的。

参考文献

[1] *Albers P., Fish J.W., Frauenfelder U., van Koert O.*：旋转开普勒问题的 *Conley–Zehnder* 指标。*Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 154(2), 243–260 (2013)* https://doi.org/10.1017/S0305004112000515[2] *Arnold V.I., Avez A.*：《经典力学的遍历问题》。纽约，*Benjamin (1968)*[3] *Aydin C.*：从巴比伦月球观测到弗洛凯乘子和 *Conley–Zehnder* 指标。《*J. Math. Phys.*》*64(8) (2023)* https://doi.org/10.1063/5.0156959[4] *Aydin C.*：空间希尔三体问题的 *Conley–Zehnder* 指标。《天体力学与天文动力学》*135(32) (2023)* https://doi.org/10.1007/s10569-023-10134-7[5] *Aydin C.*：地月圆限制性三体问题中远距离逆行轨道的垂直自共振分岔研究。*(2025)* https://arxiv.org/abs/2508.17286[6] *Aydin C., Batkhin A.*：通过辛不变量研究希尔问题对称周期轨道族的网络。《天体力学与天文动力学》*137(12) (2025)* https://doi.org/10.1007/s10569-025-10241-7[7] *Belbruno E.A.*：限制性问题的一个新周期轨道族。《天体力学》*25, 195–217 (1981)* https://doi.org/10.1007/BF01230520[8] *Belbruno E.A.*：限制性三体问题的一种新正则化及其应用。《天体力学》*25, 397–415 (1981)* https://doi.org/10.1007/BF01234179[9] *Bray T.A., Goudas C.L.*：共线拉格朗日点附近的双重对称轨道。《天文学杂志》*72(2), 202–213 (1967)*[10] *Broucke R.A.*：地月质量条件下限制性三体问题中的周期轨道。技术报告 *32-1168*，喷气推进实验室 *(1968)*[11] *Bruno A.D.*：日木情形下限制性三体问题的简单周期解。俄语，莫斯科应用数学研究所，预印本第 *66* 号 *(1993)*[12] *Bruno A.D.*：限制性三体问题的零重数解与逆行周期解。俄语，莫斯科应用数学研究所，预印本第 *93* 号 *(1996)*[13] *Conley C., Zehnder E.*：流与哈密顿方程周期解的 *Morse* 型指标理论。《纯粹与应用数学通讯》*37(2), 207–253 (1984)* https://doi.org/10.1002/cpa.3160370204[14] *Cors J.M., Garrido M.*：椭圆三维限制性 $(N+1)$ 体问题中的对称彗星型周期轨道。*Physica D: Nonlinear Phenomena 470 (2024)* https://doi.org/10.1016/j.physd.2024.134426

[15] Doedel E.J., Romanov V.A., Paffenroth R.C., Keller H.B., Dichmann D.J., Gal´an-Vioque J., Van- derbauwhede A.：圆型限制性三体问题中与平动点相关的基本周期轨道。《国际分岔与混沌杂志》**17**, 2625–2677 (2007) https://doi.org/10.1142/S0218127407018671[16] Eliashberg Y., Givental A., Hofer H.：辛场论导论。《几何与泛函分析》2000 (特拉维夫，1999) Geom. Funct. Anal.，特刊，第二部分(2000), 560–673 https://doi.org/10.1007/978-3-0346-0425-3_4[17] Feagin T.：采用 *m*-对称性的高阶显式龙格－库塔方法。Neural, Parallel, and Scientific Computations**20**, 437–458 (2012) https://hdl.handle.net/10657.1/2296[18] Franz C.J., Russell R.P.：月球附近平面与三维周期轨道及轨道族数据库。《航天科学杂志》**69**, 1573–1612 (2022) https://doi.org/10.1007/s40295-022-00361-9[19] Ginzburg V. L.：康利猜想。《数学年刊》(第 2 辑)**172**(2), 1127–1180 (2010)

[20] Hofer H., Wysocki K., Zehnder E.: 紧三维球面上的有限能量叶状结构与哈密顿动力学. Ann. of Math.(2) **157**(1), 125–255 (2003) https://doi.org/10.4007/annals.2003.157.125

[21] Johnson S.K., Mortensen D.J., Chavez M.A., Woodland C.L.: *Gateway*——月球探测通信平台. IET Conference Proceedings (2022) https://doi.org/10.1049/icp.2022.0544

[22] JoungC., KohD., van KoertO.: 利用莫泽正则化研究高倾角近晕轨道的分岔. (2025) https://arxiv.org/abs/2512.03849

[23] Joung C., van Koert O.: 限制性三体问题中的计算辛拓扑与对称轨道. Nonlinearity**38**(2) (2025) https://doi.org/10.1088/1361-6544/ada7ba

[24] Lamb J.S.W., Roberts J.A.G.: 动力系统中的时间反演对称性：综述. Physica D**112**,1–39 (1998) https://doi.org/10.1016/S0167-2789(97)00199-1

[25] Lara M., Scheeres D.J.: 小行星附近三维运动的稳定性界限.《航天科学杂志》**50**, 389–409 (2002) https://doi.org/10.1007/BF03546245

[26] Lee D.: 空间旋转开普勒问题的*Conley-Zehnder*指标.《拓扑与分析杂志》(2026) https://doi.org/10.1142/S1793525326500238

[27] Liu L., Hu C.: 嫦娥五号*T1*扩展任务方案设计.《中国航空学报》**31**, 1559–1567 (2018) https://doi.org/10.1016/j.cja.2018.04.012

[28] Llibre J., Meyer K.R., Soler J.：广义西特尼科夫族与李雅普诺夫周期轨道族之间的桥。《微分方程杂志》**154**，140–156（1999） https://doi.org/10.1006/jdeq.1998.3565

[29] Llibre J., Roberto L.A.: 空间限制性$(N+1)$体问题中彗星型周期轨道的新双重对称族.《天体力学与动力天文学》**104**, 307–318 (2009) https://doi.org/10.1007/s10569-009-9213-6[30] Llibre J., Stoica C.: 限制性$(N+1)$体问题中的彗星型和希尔型周期轨道. 微分方程杂志**250**(3), 1747–1766 (2011) https://doi.org/10.1016/j.jde.2010.08.005

[31] Llibre J., Pas.ca D., Valls C.: 三体问题共线中心构型中具有三个相等主天体的圆形限制性四体问题. 天体力学与动力天文学 133 (2021) https://doi.org/10.1007/s10569-021-10052-6[32] McDuff D., Salamon D.: 《辛拓扑学导论》. 牛津大学出版社, 第3版 (2017)[33] Meyer K.R.: N体问题的周期解. 微分方程杂志 39, 2–38 (1981)[34] Meyer K.R.: 限制性N体问题中无穷远附近的周期轨道. 《天体力学》 23, 69–81 (1981) https://doi.org/10.1007/BF01228545[35] Meyer K.R.: N体问题中的彗星式周期轨道. 计算与应用数学杂志 52, 337–351 (1994) https://doi.org/10.1016/0377-0427(94)90365-4[36] Meyer K.R., Hall G.R., Offin D.: 《哈密顿动力系统与N体问题导论》. 第二版. Springer (2009)[37] Moreno A., Aydin C., van Koert O., Frauenfelder U., Koh D.: 基于辛方法的圆型限制性三体问题分岔图. 《航天科学杂志》 71(51) (2024) https://doi.org/10.1007/s40295-024-00462-7[38] Moulton F.R.: 一类外行星的周期轨道. 美国数学会汇刊 13(1), 96–108 (1912)[39] Papadakis D.: 圆形限制性四体问题中三维周期解的族. 《天体物理与空间科学》 361 (2016) https://doi.org/10.1007/s10509-016-2713-4[40] Poincar´e H.: Les m´ethodes nouvelles de la m´ecanique c´eleste（《天体力学新方法》）. Gauthier-Villars et Fils (1892)[41] Robbin J., Salamon D.: 路径的马斯洛夫指标. 《拓扑学》 32(4), 827–844 (1993) https://doi.org/10.1016/0040-9383(93)90052-W[42] Robin I.A., Markellos V.V.: 由垂直自共振卫星轨道生成的三维周期轨道的数值确定. 《天体力学》 21, 395–434 (1980) https://doi.org/10.1007/BF01231276[43] Roy A.E.: 《轨道运动》. 物理学会出版社, 布里斯托尔与费城, 第4版 (2005)[44] Siegel C.L., Moser J.K.: 《天体力学讲义》. 施普林格出版社（柏林·海德堡） (1995)[45] Szebehely V.: 《轨道理论》——限制性三体问题. 学术出版社, 纽约 (1967)[46] Williams J., Dawn T.F., Batcha A.L.: 猎户座任务设计、哥白尼软件开发与阿尔忒弥斯一号轨迹的历史. AAS/AIAA轨道动力学专家会议, AAS 23-241 (2023)[47] Zimovan-Spreen E.M., Howell K.C., Davis D.C.: 近直线晕轨道及邻近更高周期动力结构：轨道稳定性与共振性质. 《天体力学与动力天文学》 132(28) (2020) https://doi.org/10.1007/s10569-020-09968-2
CENGIZ AYDIN INSTITUT F ¨UR MATHEMATIK（数学研究所）, UNIVERSIT ¨AT HEIDELBERG（海德堡大学）, 德国 电子邮箱: cengiz.aydin@hotmail.de