arXiv:2602.16355v2 [math.CO] 25 Feb 2026

排列模式中的一系列问题：单峰性、等价、错排与排序

Vincent Vatter*

2026年2月27日

我们围绕四个主题收集了排列模式中的公开问题：排列模式偏序集中的秩单峰性、Wilf 等价与形状 Wilf 等价、排列类中错位排列的计数，以及通过串联栈、广义栈和受限容器（$\mathcal{C}$-机器）进行排序。

1. 引言

本文是我在2025年排列模式会议会前青年学者研讨会上所作报告的配套文章。该会议是这一系列会议的第23届，在圣安德鲁斯大学举行，由 Christian Bean 和 Ruth Hoffmann 组织。本文并非罗列排列模式领域最知名或最难的公开问题，而只是围绕若干主题收集了一些问题：有些是我曾遇到、思考过或被问到的问题。许多问题都属于“总该有人……”这一类。有些是广为流传的问题，也有些可能很简单。本文无意为该领域绘制路线图；若要介绍我认为最深刻或最重要的公开问题，就需要采用不同的方式，并做大量铺垫。不妨把本文看作一份有趣景点的清单，这些景点都不难抵达。

本领域最著名的未解问题，想必是计算避免 1324 模式的排列的数量；它在 OEIS 中的编号为 A061552 [71]。这个问题很容易接触到，但许多人都曾尝试求解，却一直难有进展。有人问 Zeilberger 为什么会这样，他回答道：“因为生活很艰难。我们能够精确计数的少数组合对象，都是些平凡的对象” [64] （原文着重）。无论如何，关于这一难题，有许多地方可以查阅更多资料 [14, 15, 22, 23, 35, 37, 38, 40, 54, 67]。我们对这个问题没有什么新见解，因此转而讨论那些似乎更容易处理的领域，或者至少是那些我们较少看到其难以处理的证据的领域。

排列模式研究成果的主要发表平台，以及交流公开问题的主要场所，一直是排列模式会议系列。该系列由 Michael Albert 和 Michael Atkinson 于 2003 年在新西兰达尼丁的奥塔哥大学创办。Atkinson 将 Albert 引入这一领域

*佛罗里达大学数学系，美国佛罗里达州盖恩斯维尔。

的研究后， [65], 吸引了许多如今活跃于排列模式领域的研究者；为纪念他退休，会议于*Permutation Patterns 2013*上向他致敬。Albert、Atkinson 及其创办的会议系列对研究议程产生了深远影响，而会议设置公开问题环节的传统尤其具有影响力。至于 Albert，他后来成为排列模式领域的核心人物，以计算和合作研究的方式著称，并于 2024 年退休。本着这一精神，这里提出的许多问题都亟待计算解决：有些问题的目标就是获取数据，有些则是希望借此更清晰地指明前进方向。

读者或许也会觉得早期汇编的一些公开问题很有价值。Wilf 被广泛视为该领域的奠基人之一，并在 2003 年首届排列模式会议上作大会报告；在该领域发展初期，他撰写了一篇综述 1999 [98] ，我还是研究生时读来尤其喜欢。在那篇综述中，Wilf 因 Alon 和 Friedgut 的近期成果 [3]而对 Stanley–Wilf 猜想表示怀疑；几年后，Marcus 和 Tardos [66] 证明了该猜想，他的怀疑也因此被证明是错的。Wilf 还讲述了 Stanley 对 Noonan–Zeilberger 猜想 [70]的怀疑：每个有限基排列类都有一个 D-有限生成函数。多年后，Garrabrant 和 Pak [49]推翻了该猜想，证明 Stanley 的怀疑是有根据的。

另一项宝贵资源是 Steingrímsson 于 2013 年发表的综述 [89], ，内容涵盖广泛，包括排列模式偏序集的莫比乌斯函数、区间的拓扑性质、粘合模式与网格模式，以及增长率的结构。Steingrímsson 本人也是该领域的领军人物，培养了许多现今的研究者；他曾在*Permutation Patterns2009*上作大会报告。

对于想要了解排列模式的读者，有几部全面的入门参考书可供阅读。Kitaev 的《排列与词中的模式》 [56] 是该领域内容全面的汇编。Bóna 的本科教材《组合数学漫步》 [24]以通俗易懂的方式介绍了这一领域，而他的专著《排列的组合学》 [25] 则更深入地探讨了这一主题。最后，我也忍不住要推荐自己的一篇综述 [94] ，它收录于《枚举组合学手册》。

本文其余部分安排如下。第 2 节讨论排列模式偏序集中区间的秩单峰性。第 3 节探讨对称变换和 Wilf 等价。第 4 节讨论排列类中错排的计数。第 5 节考察排序机器。下文将汇集基本定义，并对作为关系结构的排列作一些评述。

基本定义

排列模式的基本概念很容易表述。对于那些将排列视为 Coxeter 群元素的读者（Tenner [92]），谨此致歉；我们用长度表示排列中元素的数量，记作 $|\pi|$。我们将排列 π 与其图形等同，即平面上的点集$\{(i, \pi(i))\}$ 。说某个元素位于另一元素的左侧或右侧、上方或下方时，指的是它们在图形中的相对位置。类似地，如果某个元素既在另一元素的右侧又在其下方，我们就说它位于另一元素的东南方，其他方位也依此类推。

若排列 σ 中存在一个与 σ序同构的子序列（即其元素呈现相同的相对顺序），则称排列 σ 包含于 π中，记作 $\sigma \leq \pi$；否则， π 避免 σ。从图形的角度来看，

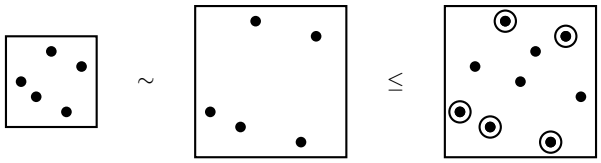


图*1*： 排列 $\sigma = 32514$ （左）包含于 $\pi = 362957184$ （右）。 π 中圈出的元素构成子序列**32918**，它与 σ序同构。排列 π 避免**4321**，因为它没有长度为四的递减子序列。

$\sigma \leq \pi$ 表示从 π的图形中选取若干点并进行缩放后，可得到 σ的图形。图**1**展示了这些定义。这种包含关系构成一个偏序，我们称之为排列模式序。

排列类是这个偏序集中的下集（或序理想）：一个由排列组成的集合$\mathcal{C}$，满足如果 $\pi \in \mathcal{C}$ 且 $\sigma \leq \pi$，那么 $\sigma \in \mathcal{C}$。我们用$\mathcal{C}_n$ 表示类$\mathcal{C}$中长度为 n 的排列集合。每个排列类$\mathcal{C}$ 都由其基刻画，即所有不属于$\mathcal{C}$的极小排列所组成的集合。我们用 Av(B) 表示避免 B中每个元素的排列类。一个类的基必然是一个反链 （两两不可比较的排列组成的集合）；而由于排列模式序中存在无限反链，基也可能是无限的。

作为关系结构的排列

对排列模式的研究自然地融入了关系结构这一更广泛的组合学之中。从图形来看，一个排列是由 n 个点构成的集合，并配备了两种全序：从左到右的顺序（按 x 坐标排列）和从下到上的顺序（按 y 坐标排列）。正如 Cameron [31]所指出的，这一视角阐明了一个排列被包含在另一个排列中意味着什么：包含关系不过是诱导子结构关系，这也是在图（诱导子图）、偏序集（诱导子偏序集）、整数分拆（杨氏格）及其他组合对象中研究的同一概念。

这一观点与下一节相关，届时我们将比较排列的单峰性结果与分拆和词的类似结果。在大多数情况下，包含序是此类关系结构的自然顺序，而相关问题（及其答案）最终却出人意料地大不相同。

2. 单峰性

我们先从这些问题中或许最容易表述的一个开始，尽管它很可能是最难证明的问题之一。若存在某个下标 k，使得有限序列 a_0，a_1，……，a_n 被称为单峰的，则

$$a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_k \geq \cdots \geq a_n;$$

也就是说，该序列先弱递增至最大值，然后弱递减。若一个多项式的系数序列是单峰的，则称该多项式为单峰的。组合学与代数中有许多尚未解决的单峰性问题；如需了解示例，读者可参阅 Stanley 于1986年发表的综述 [87],，其中许多猜想至今仍未解决。

给定一个长度为 n的排列 π，令 a_k 表示包含于 π中的长度为 k 的排列的数量。序列 a_0，a_1，……，a_n 必然是单峰的吗？为了更细致地表述这个问题，我们先回顾几个定义。在包含序下，给定排列 π 中包含的所有排列构成一个主下集（也称为主序理想）。这是一个分级偏序集，其中排列的秩由其长度给出。若一个分级偏序集中各秩元素数量构成的序列是单峰的，则称该偏序集为秩单峰的。

猜想 2.1 猜想。排列模式偏序集中的每个主下集都是秩单峰的。

这一现象可能最早是在排列模式的背景下由 Murphy 注意到的。他在其 2002年论文的结尾写道 [69, 第 348], 页（着重号为后加）：

> 有一个程序可以输入任意长度（通常约为 24）的排列，并按长度排序，返回其中包含的所有排列。这是求给定排列或排列集合的闭包之基的一种简单但有些耗费资源的方法。这个程序最妙之处在于其输出呈现出纤细的腰身。下面给出一个长度为 17 的排列中各长度排列的数量：
>
> 1，1，2，5，14，36，87，210，486，927，1315，1348，1005，549，218，61，11，1。

我们还可以进一步追问：这个偏序集中的所有区间是否都是秩单峰的。区间 $[\sigma, \pi]$是满足条件 $\sigma \leq \tau \leq \pi$ 的所有排列 τ 所构成的集合。McNamara 和 Steingrímsson 正是在这种一般性下提出了以下猜想，它涵盖了猜想 2.1。

猜想 2.2 (McNamara和 Steingrímsson [68, 猜想 9。4])。排列模式偏序集中的每个区间都是秩单峰的。

类似结构

在考察排列模式偏序集的已知结果之前，我们先简要探讨其他组合结构中的类似问题。由此呈现的图景并不一致：有些情形满足秩单峰性，有些则不满足，因此排列这一情形确实仍无定论。

在排列的连续 模式偏序集中，Elizalde 和 McNamara [44] 证明了区间的秩单峰性。然而，他们的证明依赖于连续包含这一特别受限的性质（在这种序下，每个排列至多覆盖另外两个排列），似乎并未给标准的（不一定连续的）排列模式序带来启发。

对于整数分拆，情况则更为模糊。分拆上的包含序 由 $\mu \leq \lambda$ 定义：若 μ 的费雷尔图能放入 λ的费雷尔图之内；等价地，若对所有 i均有 $\mu_i \leq \lambda_i$，必要时以零填充。该序使全体分拆的集合成为一个分配格，称为杨氏格。由 $m \times n$ 矩形分拆（$m, m, \ldots, m$）所生成的主下集——它由 n 个均等于 m 的部分组成——记作 $L(m, n)$，其秩生成函数为一个高斯多项式。自十九世纪中叶以来，人们便已知高斯多项式是单峰的，尽管直到O'Hara [72] 于1990年才给出组合证明，后来由 Zeilberger [99]作了生动的阐述。

人们或许会希望杨氏格中的所有主下集都是秩单峰的。事实上，1986年，Pouzet 和 Rosenberg [73, 第 367] 页提出了一个更为一般的问题：在任何类型的有限关系结构的

自然序下，主下集是否都是秩单峰的？仅仅一年后，Stanton [88], 便给出了否定答案，他在杨氏格中展示了一个非单峰的主下集。分拆 (8，8、4、4) 的秩序列为

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 9,\ 11,\ 15,\ 17,\ 21,\ 23,\ 27,\ 28,\ \underline{31,\ 30,\ 31},\ 27,\ 24,\ 18,\ 14,\ 8,\ 5,\ 2,\ 1.$$

Stanton 关于整数分拆的反例也排除了猜想 2.1 的任何图类比，因为它表明，图 $K_8 \cup K_8 \cup K_4 \cup K_4$ 的诱导子图计数并非单峰的。

尽管他们的问题得到的是否定答案，Pouzet 和 Rosenberg [73, 推论 2.11] 确实确立了可称为秩单峰性“前半部分”的结果：在任意有限关系结构的主下集中，秩序列至少在达到中间秩之前弱递增。结合杨氏格的对称性，这为高斯多项式的单峰性提供了另一种证明。将这一结果专用于排列时，它保证排列模式偏序集中任意主下集的秩序列至少递增至其长度的一半。

有限字母表上的词在子词序下的性质要好得多。Chase [32] 证明，主下集不仅是秩单峰的，而且还是秩对数凹的；我们现在来定义这一更强的性质。

对数凹性

若非负项序列 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ 满足对数凹，则对所有$1 \le k \le n-1$都有 $a_k^2 \ge a_{k-1}a_{k+1}$；多项式 $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ 若其系数序列是对数凹的，则称其为对数凹。对于正项序列，对数凹性意味着单峰性，因为它表明比值 a_k/a_{k-1} 单调不增，因此一旦该比值降至 1 以下，就会一直保持在 1 以下。

我们无法期望排列模式偏序集具有对数凹性。每个非平凡下集的秩序列都以 1, 1, 2,...开头，但 $1^2 < 1 \cdot 2$，因此这些序列并非对数凹。即使忽略空排列，以 1, 2, 5 或 1,2,6（两者都很常见）开头的序列也不满足对数凹性，因为 $2^2 < 1 \cdot 5$。

尽管如此，借助 Ibragimov [52] 以及 Keilson 和 Gerber [55].[1]提出的以下经典结果，对数凹性在证明单峰性方面可以发挥关键作用。

命题 2.3。 系数为正的多项式 $p(x)$ 是对数凹的，当且仅当对于每个单峰多项式 $q(x)$， $p(x)q(x)$都是单峰的。

分层排列与复合

人们或许会希望，这个猜想至少在分层排列这一特别容易处理的排列类中已经得到解决。下面简要回顾其定义。

排列 π （长度为 m）与排列 σ （长度为 n ）的直和，或简称和，是以下排列：

[1]需要指出的是，两个单峰多项式的乘积不一定是单峰的。例如，$1 + x + 3x^2$ 是单峰的，但 $(1 + x + 3x^2)^2 = 1 + 2x + 7x^2 + 6x^3 + 9x^4$ 不是。

$\pi \oplus \sigma$，其长度为 $m+n$，定义如下:

$$(\pi \oplus \sigma)(i) \;=\; \begin{cases} \pi(i) & \text{for } 1 \le i \le m, \\ \sigma(i-m)+m & \text{for } m+1 \le i \le m+n. \end{cases}$$

从图形上看， $\pi \oplus \sigma$ 的图形位于 π的图形上方且靠右，而 σ 的图形则在其上方。该运算满足结合律，因此像 $\pi \oplus \sigma \oplus \tau$ 这样的表达式不需要加括号。

如果一个排列可以表示为递减排列的和，则称其为分层排列；等价地，分层排列恰好是 Av(231,312)。每个分层排列都有唯一的分解 $\pi = \delta_1 \oplus \delta_2 \oplus \cdots \oplus \delta_k$，其中每个 δ_i 都是递减排列，因此分层排列与整数拆分一一对应：整数拆分 $c = c(1)c(2)\cdots c(k)$ 对应于各层长度依次为 $c(1)$、$c(2)$、…、$c(k)$ 的分层排列。例如，整数拆分 $(3,1,4)$ 对应于分层排列 $321 \oplus 1 \oplus 4321 = 321\,4\,8765$。

在这一双射下，分层排列上的模式包含序对应于整数拆分上的（广义）子词序。具体而言，具有 k 个部分的整数拆分 $u = u(1)\cdots u(k)$ 是具有 ℓ 个部分的整数拆分 w 的子词，当且仅当存在下标 $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le \ell$，使得对于所有 $1 \le j \le k$，都有 $u(j) \le w(i_j)$。因此，在分层排列上的排列模式序中，$\pi \le \sigma$ 当且仅当相应的整数拆分在子词序中满足 $u \le w$。

Sagan [79]证明了整数拆分的主下集具有单峰性，这似乎足以解决分层排列的情形。然而，这里存在一个问题：*Sagan 所考虑的序并不是子词序。*

在 Sagan 的逐分量序中，整数拆分 $u = u(1)\cdots u(k)$ 被包含于 $w = w(1)\cdots w(\ell)$ 中，当且仅当 $k \le \ell$，并且对于所有 $1 \le i \le k$，都有 $u(i) \le w(i)$。这类似于杨氏格，按照各部分之间的逐分量比较对整数拆分进行排序。但它并不是子词序；子词序对应于分层排列上的排列模式序，并且更为人们所研究（例如参见 Bergeron、Bousquet-Mélou 和 Dulucq [13]，以及 Sagan 和 Vatter [80]）。

区别在于，在子词序中，嵌入不必与起始元素对齐。例如，在逐分量序下，整数分拆 (2) 不包含于 $(1,\ 2)$ 中，但相应的分层排列满足 $21 \le 1\,32$ 排列模式序。

Sagan 的主要结果如下。证明简短而富有启发性。

定理 2.4 (Sagan [79, 定理 3。3])。 *任意整数分拆的主下集在逐分量序下都是秩单峰的。*

证明。 令 $f_w(x)$ 表示逐分量序下整数分拆$w = w(1)\cdots w(\ell)$ 的主下集的秩生成多项式。若 $u = u(1)\cdots u(k)$ 包含于 w，则要么 u为空，要么 $u(1) \le w(1)$，且 $u(2)\cdots u(k) \le w(2)\cdots w(\ell)$。由此得到递推关系

$$f_w(x) \;=\; 1 \;+\; \left(x + x^2 + \cdots + x^{w(1)}\right) f_{w(2)\cdots w(\ell)}(x),$$

其中，对于空整数分拆，有 $f_\varepsilon(x) = 1$。

我们对 w的部分数进行归纳。基础情形 $f_\varepsilon(x) = 1$ 显然是单峰的。在归纳步骤中，多项式 $x + x^2 + \cdots + x^{w(1)}$ 是对数凹的，因此根据命题 2.3，它与（由归纳假设可知是）单峰的多项式 $f_{w(2)\cdots w(\ell)}(x)$ 的乘积是单峰的。由于该乘积中 x 的系数为 1，加上常数项 1 后仍保持单峰性。 □

尽管逐分量序与子词序并不相同，但对于部分大小弱递减的整数拆分，两种序下的主下集具有相同的秩序列。为说明这一点，注意若 $w = w(1) \cdots w(\ell)$弱递减，那么子词序下从 u 到 w 的任意嵌入都可以向左平移，从而得到逐分量序下的嵌入。因此，在两种序下，包含于 w 中的整数拆分集合相同，尽管它们之间的序关系可能不同；所以，根据 Sagan 定理 2.4，部分弱递减的整数拆分所对应的主下集是秩单峰的。利用对称性（将整数拆分逆序），当 w 弱递增时，单峰性同样成立。

推论 2.5。 由单调部分构成的整数拆分的主下集在子词序下是秩单峰的。因此，相应分层排列的主下集也是秩单峰的。

特别地，这涵盖了“矩形”整数拆分（ℓ，ℓ，……，ℓ）的情形。这正是作者在$Permutation\ Patterns\ 2007$上向 Sagan 提出的原始问题。一般情形，即便对于分层排列，仍未解决。

猜想 2.6。 每个整数拆分的主下集在子词序下都是秩单峰的。因此，每个分层排列的主下集都是秩单峰的。

Albert 和作者已验证，对于长度不超过 34 的所有整数拆分，这一猜想均成立。当然，这是猜想 2.1 的一个特例，而猜想 2.1 本身又是猜想 2.2 的一个特例。

2.1 对数凸性与主类

我们一直讨论的主下集是排列类，但相当不寻常，因为它们是有限的。对于计数会无限增长的更典型排列类，沿这些思路又能说些什么？

对于主类 （即由避免单个排列所定义的那些），存在一个引人入胜的未解问题。它与单峰性无关：Av(β) 的计数平凡地是单峰的，因为它是弱递增的（无论 β 是什么，如果 π 避免 β，那么在前面添加一个新的最大值后，$\pi \oplus 1$ 或 π 也同样避免）。它也与对数凹性无关：以 1, 2,5 或 1, 2,6 开头的序列不是对数凹的，因此对于任何长度为三或更长的排列 β，Av(β) 都不可能是对数凹的。有趣的问题在于主排列类是否是对数凸的。

由非负项构成的序列 $a_0, a_1, \ldots$ 是对数凸 的，如果 $a_n^2 \le a_{n-1}a_{n+1}$ 对所有 $n \ge 1$成立。例如，阶乘是对数凸的。斐波那契数（它们计数若干排列类，尽管没有主类）提供了一个很好的反例：卡西尼恒等式表明 $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2$在 1 与 -1之间交替，因此对数凸性不等式仅有一半时间成立。

主类是否可能具有对数凸性？Liang 和 Sagan [62] 提出了一种利用 FKG 不等式以组合方式证明对数凸性的方法；他们还取得了其他成果，例如利用 Bouvel、Ferrari 和 Tenner [28]的中间序证明了卡特兰数的对数凸性。事实上，人们猜想所有主类都具有一种比对数凸性更强的性质。

更强的性质如下。若存在一个支撑于 $[0, \infty)$ 上的非负测度 μ，使得对所有 n 都有 $a_n = \int_0^\infty x^n \, d\mu(x)$，则序列 a_0，a_1，……是一个 ***Stieltjes*** 矩序列 。

等价的刻画包括汉克尔矩阵

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

是全非负的（所有子式均非负），或者生成函数 $\sum a_n x^n$ 可以表示为如下形式的连分数

$$\cfrac{\alpha_0}{1-\cfrac{\alpha_1 x}{1-\cfrac{\alpha_2 x}{1-\cdots}}}$$

对于某个由非负实数组成的序列 $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,$ .....。

例如，卡特兰数满足

$$C_{n+1}=\frac{1}{2\pi}\int_0^4 x^n\sqrt{x(4-x)}\,dx \quad \text{and} \quad \sum_{n\geq 0} C_n x^n = \cfrac{1}{1-\cfrac{x}{1-\cfrac{x}{1-\cdots}}}.$$

特别地，Hankel 刻画立即表明，Stieltjes 矩序列是对数凸的：该矩阵的 2×2 子式中就包括量 $a_{n-1}a_{n+1}-a_n^2$。

序列 $|\mathrm{Av}_n(12\cdots k)|$ 是 Stieltjes 矩序列，这一事实源于 Rains [76],的工作；他之所以对这一结果感兴趣，是因为随机矩阵理论。最早考虑其他主排列类的人似乎是 Elvey Price，他在博士论文 [46] 中进行了研究。他利用 Bóna [21], 首次建立的代数生成函数，证明了 Av(1342) 的计数是一个 Stieltjes 矩序列，并提出了以下问题。

问题 2.7（Elvey Price [46, 第 227]页）。 对于每个长度至少为二的排列 β，$\mathrm{Av}(\beta)$ 的计数是否构成 *Stieltjes* 矩序列?

Bostan、Elvey Price、Guttmann 和 Maillard [27]进一步探讨了这一主题，并提出了问题 2.7。他们相当详细地研究了 Av(1342) 和 Av(12$\cdots k$) 在 $3\leq k\leq 8$ 下的计数，并证明 Conway、Guttmann 和 Zinn-Justin [38] 得到的 Av(1324) 计数前五十项与其构成 Stieltjes 矩序列这一结论相符。Clisby、Conway、Guttmann 和 Inoue [36]提供了数值证据，表明通过避开长度为五的模式定义的所有主类，其计数均为 Stieltjes 矩序列。

Blitvić 和 Steingrímsson [17]构造了一个含十四个参数的连分数，其特化形式能够枚举种类繁多的排列集合，因此这些集合对应的序列都是 Stieltjes 矩序列。这表明，主类若具有矩性质，或许反映的是更深层的结构联系，而非偶然的特例。

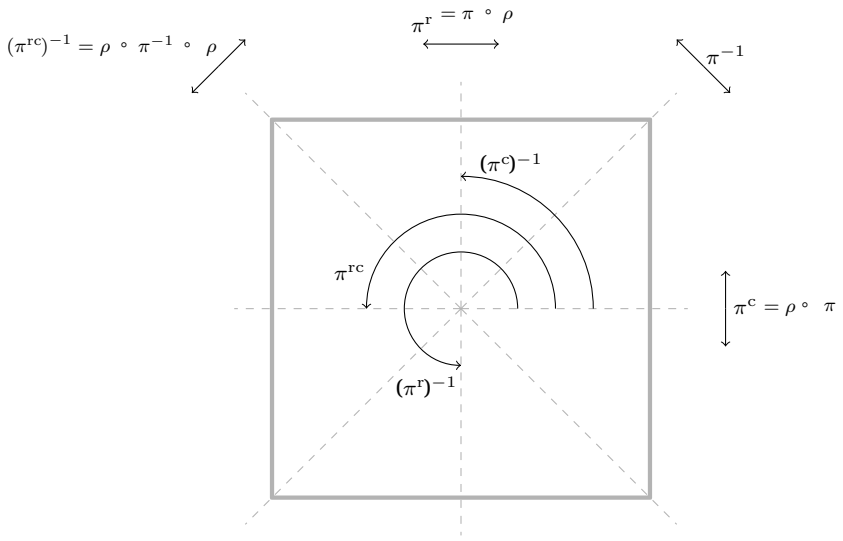


图 *2*： 正方形的对称变换，标示出它们对排列 π 的作用。

3. 等价

排列模式序具有一个自然的对称群，即八阶二面体群 D_4；图 2 将其表示为正方形的对称变换。这些对称变换作用于排列的图形。在排列模式的文献中，该群通常被描述为由三个反射生成：反转 $\pi \mapsto \pi^{\mathrm{r}}$（关于竖直轴的反射）、补 $\pi \mapsto \pi^{\mathrm{c}}$（关于水平轴的反射）和逆 $\pi \mapsto \pi^{-1}$（关于主对角线的反射）。二面体群的标准表示则使用一个反射和一个旋转；在这里，这可以是四种反射中的任意一种，再加上 90° 旋转 $\pi \mapsto (\pi^{\mathrm{c}})^{-1}$ 或 270°旋转 $\pi \mapsto (\pi^{\mathrm{r}})^{-1}$。如图 2 所示，两个反射复合会得到一个旋转，而三个反射复合则会得到另一个反射。

这些对称变换将每个长度的排列划分为对称类：如果对于某个对称变换 Φ，排列 π 和 σ 满足 $\sigma = \Phi(\pi)$，则它们属于同一个对称类。由于对称变换是排列模式序的自同构，任何关于 π-回避排列的计数问题，都等价于关于 $\Phi(\pi)$-回避排列的相应问题。（不过，这只适用于对所有排列进行计数的情况；当我们施加额外限制时，例如下一节中对错位排列进行计数，就会失去这些对称变换。）

采用群论视角可能会很有帮助。对于长度为 n 的排列，令

$$\rho = n(n-1)\cdots 21 = \mathrm{id}^{\mathrm{r}} = \mathrm{id}^{\mathrm{c}}.$$

于是，补是通过 ρ 进行左乘，即 $\pi^{\mathrm{c}} = \rho \circ \pi$；而反转是通过 ρ 进行右乘，即 $\pi^{\mathrm{r}} = \pi \circ \rho$。由于 ρ 是一个对合，对称变换之间的恒等式就可以通过直接计算轻松得到。例如，$(\pi^{\mathrm{r}})^{-1} = (\pi \circ \rho)^{-1} = \rho^{-1} \circ \pi^{-1} = \rho \circ \pi^{-1} = (\pi^{-1})^{\mathrm{c}}$。

两个排列的避模式类可以具有相同的基数，却并非彼此的对称变换。一个经典例子是，Av(231) 和 Av(321) 都由卡特兰数计数，但 231

		1	2	3	4	5	6	7
对称类	A000903	1	1	2	7	23	115	694
Wilf 等价类	A099952	1	1	1	3	16	91	595

表 *1*： $1 \le n \le 7$ 的对称类和 Wilf 等价类的数量。

和 321 属于不同的对称类。这促使 Wilf 在20世纪80年代提出，要对何时避免一个排列与避免另一个排列具有同等限制性进行分类。[2] 我们称 π 和 σ 为*Wilf* 等价，记作 $\pi \sim \sigma$，如果对所有 n，$|\mathrm{Av}_n(\pi)| = |\mathrm{Av}_n(\sigma)|$。对称变换意味着 Wilf 等价，但正如例子 $231 \sim 321$ 所示，反过来并不成立。

在进一步讨论 Wilf 等价之前，我们先指出，虽然对称类的计数结果证明相当直接，但人们并非一直都意识到这一点。加德纳在1962年11月的《科学美国人》 专栏中 [48] 描述了在 $n \times n$ 棋盘上放置 n 互不攻击的车时，如何计数“本质不同”的摆法（这等价于计数长度为 n的排列的对称类），并写道：“消除旋转和反射所产生的重复解十分困难，以至于即使是阶数低至 8×8的棋盘，也没人知道究竟有多少种本质不同的解。”事实上，这只是波利亚理论的一个常规应用；而且，早在波利亚之前，Lucas 就已经在其1891年的著作《数论》 [63, 第220–222], 页解决了这个问题。[3]

Wilf 等价比这更难。如果 $\pi \sim \sigma$，那么 π 和 σ 的长度必须相同。长度为1、2和3的排列各自只构成一个 Wilf等价类。对于长度4，有7个对称类，但只有3个 Wilf等价类；要证明恰好有3个，需要付出相当多的努力，Stankova 于1996年 [84] 完成了这项工作。在2002年的论文中，Stankova 和 West [86]将分类扩展到了长度7。这些数值列于表1。自2002年以来，Wilf等价类的计数工作一直停滞于此。

Q问题 3.1. 长度为8的排列有多少个 *Wilf*等价类 $e?$

将此推广到长度 8 的第一步，是计算 $|\mathrm{Av}_n(\beta)|$，针对每个长度为 8 的 β 以及足够大的 n，以便将对称类分离为候选 Wilf等价类，然后检验哪些表面上的等价已由已知结果解释。或许现有定理已经足够，或许还有新的 Wilf 等价有待发现。

充分条件：形状 Wilf 等价

大多数已知的 Wilf 等价都可以用一种更强的等价概念来解释。形状为 λ 的完全车放置 （或*frp*）是一个形状为 λ 的 Ferrers 棋盘，每行和每列各放置一个车。每个长度为 n的排列 π都对应一个 $n \times n$方形 frp，其中车放置在位置 $(i, \pi(i))$; 这就是在 π 的图形上添加网格线。frp 上有一种自然的包含序： R

[2]Wilf 从未在出版物中提出这个问题，但 Babson 与 West [10] 以及 Stanley [34, 第 357] 页都指出，他于20世纪80年代提出了该问题。[3]对于一个实际上颇为困难的类似问题，考虑 n-皇后问题，它要求计数 n 个皇后在 $n \times n$ 棋盘上互不攻击放置方式的对称类。与车问题不同，这里没有简单公式：解的序列（A000170）始于 1,0, 0, 2,10, 4,40,92,352,...，而当前纪录 $n = 27$ 需要长达一年的大规模并行计算 [75]。我们参阅 Bell 与 Stevens 的综述 [12]。

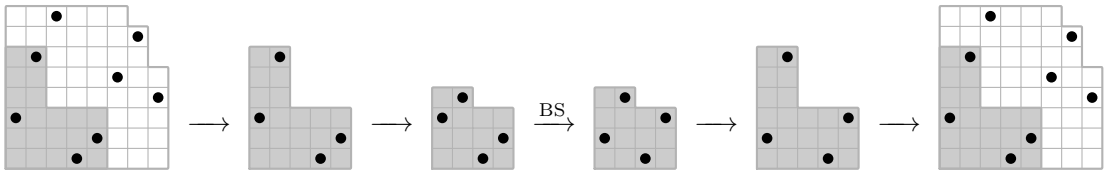


图*3*：命题 3.2 的证明，其中包含 $\alpha = 231$、$\beta = 312$ 和 $\gamma = 21$。阴影区域是由 21 的副本投下的阴影。标记为 BS 的双射由 Bloom 和 Saracino 提出 [20]。

当且仅当可以通过删除 S 的若干行和列得到 R 时，R 才包含于 S。将此关系限制在方形 frp 上时，它与排列的模式序一致。

我们称一个 Ferrers 棋盘排列包含排列 σ，如果它包含与 σ 对应的方形 Ferrers 棋盘排列；否则称它避免 σ。请注意，整个方形都必须落在 Ferrers 棋盘排列内；例如，车恰好构成 21 模式的 Ferrers 棋盘排列，仍可能避免 21，因为右上角可能无法落在 Ferrers 棋盘内。一般的 Ferrers 棋盘排列可以想象成由阶梯状边界（Dyck 路径）围起来的图形。若对于每个 Ferrers 形状 λ，形状为 λ 且避免 β 的 Ferrers 棋盘排列数量都等于形状为 λ 且避免 γ 的 Ferrers 棋盘排列数量，则排列 β 和 γ 是形状 ***Wilf*** 等价的。形状 Wilf 等价蕴含 Wilf 等价（通过限制为方形形状），但反之不成立。

形状 Wilf 等价的力量源于一个闭包性质，该性质最初由 Babson 和 West 观察到 [10]（隐含在他们定理 1.6 和 1.9 的证明中），随后由 Backelin、West 和 Xin 明确提出 [11, 命题 2.3]。

命题 3.2。如果 α 和 β 形状 ***Wilf*** 等价，那么对于任意排列 γ，$\alpha \oplus \gamma$ 和 $\beta \oplus \gamma$ 也形状 ***Wilf*** 等价。

这个想法很简单，图3对此作了说明。给定一个避免 $\alpha \oplus \gamma$ 的 frp，考虑 γ 的副本投下的阴影：即 frp 中每个 γ 副本西南方的那些格子（与往常一样，γ 的一个副本指对应于 γ 的完整方形 frp，而不只是构成 γ 模式的车）。这片阴影构成一个 Ferrers 棋盘（图中以阴影标出）；去掉空行和空列后，其中的车构成一个避免 α 的 frp。接着，我们应用任意一个见证 α 和 β 形状 Wilf 等价的双射，得到一个形状相同且避免 β 的 frp。恢复空行和空列，并替换阴影之外的 frp 部分，就得到一个形状与原来相同、避免 $\beta \oplus \gamma$ 的 frp。

由一种形状 Wilf 等价，命题 3.2 可以生成无穷多种其他形状 Wilf 等价。事实上，目前只知道两种基本的形状 Wilf 等价。

定理 3.3 (Backelin、West 和 Xin [11, 定理 2。1])。对于每个 $k \geq 1$，排列$k(k-1)\cdots 21$和 $12\cdots k$ 都是形状 ***Wilf*** 等价的。

West [95] 证明了情形 $k = 2$，而 Babson 和 West [10]证明了情形 $k = 3$。Krattenthaler [59]利用 Fomin 增长图，为一般情形给出了一个优雅的双射证明。此后，de Mier [39] 将这一结果推广到了二进制矩阵，Jelínek 和 Mansour [53]则将其推广到了词。

定理 3。　4 (Stankova 和 West [86])。排列 231 和 312 是形状 ***Wilf*** 等价的。

后来，Bloom 和 Saracino [20], 给出了一个双射证明，这就是图3中标记为 BS 的双射。这个双射非常简洁：他们建立了 231-避免

Ferrers 棋盘排列与带标号的 Dyck 路径之间的对应关系，然后在局部转换标号，最后再映射回避免 312 的 Ferrers 棋盘排列。Guo、Krattenthaler 和 Zhang [51] 此后将定理 3.4 推广到了词。

定理 3.3 指出，123 和 321 形状 Wilf 等价，就像 12 和 21 一样。结合命题 3.2，这意味着 $123 = 12 \oplus 1$ 与 $213 = 21 \oplus 1$形状 Wilf 等价。

根据命题 3.2，要证明两个排列 α 和 β 不 形状 Wilf 等价，一种方法是证明 $\alpha \oplus 1$ 和 $\beta \oplus 1$ 并非 Wilf 等价。将 $123 \oplus 1$、 $231 \oplus 1$ 和$132 \oplus 1$回避排列枚举至长度 7，便可排除其他等价关系，最终得到三个由长度为三的排列构成的形状 Wilf 等价类：{123，321、213}、{231、312}和{132}。

Stankova [85]证明，这些等价类可以按避免关系排序：对于任意 Ferrers 棋盘，避免 132 的 Ferrers 棋盘排列至少与避免 321 的 Ferrers 棋盘排列一样多，而避免 321 的 Ferrers 棋盘排列至少与避免 231 的 Ferrers 棋盘排列一样多。换言之，在任意形状的 Ferrers 棋盘上，132 是最容易避免的长度为三的模式，而 231 是最难避免的。

计算表明，命题 3.2 与定理 3.3 和 3.4 一起，涵盖了长度不超过 6 的排列的所有形状 Wilf 等价。

问题 3.5. 命题 *3.2* 以及定理 *3.3* 和 *3.4* 是否蕴含所有形状 *Wilf* 等价?

潜在　在*2025*年排列模式会议上，Burstein 提出了命题 3.2 的一个潜在逆命题　　.

问题 3.6 (Burstein)。 如果 $\alpha \oplus 1 \sim \beta \oplus 1$，那么 α 和 β 是否形状 *Wilf* 等价?

尽管大多数 Wilf 等价似乎都源自形状 Wilf 等价，但至少有一个例外。Stankova [83]证明了 $1342 \sim 2413$，但这些排列并不形状 Wilf 等价，因为在长度为 8 时，回避 $1342 \oplus 1$和 $2413 \oplus 1$ 的排列的计数不同。后来，Bloom [18]给出了这一 Wilf 等价的双射证明。

迈向必要条件

尽管 Wilf 等价的充分条件已受到相当多的关注，必要条件却一直缺乏。目前，证明 $\pi \not\sim \sigma$ 的唯一通用方法，是不断枚举回避 π和 σ的排列，直到计数出现差异。显然，这种方法无助于证明关于模式无穷族的一般性结论，也无法帮助我们从结构上理解 Wilf 等价何时会失效。

一种更精细的方法是研究高于某个模式且“余维数”较小的排列。对于一个长度为 m的排列 β，定义

$$g_k(\beta) = \big|\{\text{permutations of length } m+k \text{ that contain } \beta\}\big|.$$

由于 $|\mathrm{Av}_n(\beta)| = n! - g_{n-m}(\beta)$，因此对于所有 k， $\pi \sim \sigma$ 当且仅当 $g_k(\pi) = g_k(\sigma)$。因此，理解函数 g_k 可能有助于得出 Wilf 等价的必要条件。

对于较小的 k，已有一些已知结果。Pratt [74, p. 276] 于 1973 年指出，对任意长度为 m 的排列 β，$g_1(\beta) = m^2 + 1$；也就是说， g_1 仅取决于 β 的长度，而不取决于其结构。Ray 和 West [77]证明了

$$g_2(\beta) = \frac{m^4 + 2m^3 + m^2 + 4m + 4 - 2j}{2}$$

对于某个满足 $0 \le j \le m-1$ 的整数 j。然而， j 对 β 的依赖关系尚未得到充分理解。作者在排列模式 *2007* [93]上提出了以下两个问题。

问题 3。 **7.** 用 β 的统计量表示 ***Ray–West*** 公式中 $g_2(\beta)$ 的量 j 。

问题 3.8。 求 $g_3(\beta)$ 的公式。

不平衡 Wilf 等价

到目前为止，我们讨论的是单个排列之间的 Wilf 等价，但这个概念可以自然地推广到集合：若对于所有 n 都有 $|\mathrm{Av}_n(B)| = |\mathrm{Av}_n(B')|$，则排列集合 B 和 B' 是 Wilf 等价的。人们可能会认为 Wilf 等价的集合基数相同，但事实并非如此。

Atkinson、Murphy 和 Ruškuc [7] 刻画了可由两个串联的递增栈排序的排列类。它的基是无限的，

$$\{2\ (2k{-}1)\ 4\ 1\ 6\ 3\ \cdots\ (2k)\ (2k{-}3) : k \ge 2\},$$

但他们证明，该类仍与 Av(1342) Wilf 等价；Av(1342) 已由 Bóna [21]计数。[4]

Burstein 和 Pantone [30] 还给出了此类有限集合之间不平衡 Wilf 等价的更多例子，例如{1324, 3416725} $\sim$ {1234}。这些现象仍未得到充分理解。

4. 错位排列

排列模式研究的一个重点是对特定排列类进行计数，尤其是那些由数量较少、长度较短的基元素定义的排列类。计数一类排列并非只是“集邮”，它既能作为理解其结构的替代指标，也能衡量现有方法是否足够。然而如今，容易解决的问题似乎大多已被攻克。

特别是，“2×4”类（其基由两个长度为 4 的排列组成）几乎已被彻底研究。这些类多年来一直是检验不同计数方法的试验场；但在 56 个对称类和 38 个 Wilf等价类中，只有三个类的生成函数尚不为人所知。此外，Albert、Homberger、Pantone、Shar 和 Vatter [2]提供的证据表明，这三个剩余类的生成函数不满足代数微分方程；这意味着它们不是 D-有限的（甚至不是微分代数的）。这些生成函数仍有可能具有优美的连分数表达式，不过目前尚无已知的 2×4 类具有这种形式。

随着排列类精确计数日趋成熟，自然会希望进一步研究具有额外结构的细化问题。例如，可以考察某个排列类中的交替（升降）排列、偶排列、第一类杜蒙排列或对合的数量。事实证明，其中许多细化问题都可以处理。

然而，即便是在性质非常良好的排列类中，有一种排列仍然难以计数：错位排列。回想一下，错位排列是指没有

[4]此后，Bloom 和 Elizalde [19,定理 4.3] 利用完整车放置，给出了 Av(1342) 生成函数的一种更简单的推导。

不动点（满足 $\pi(i) = i$ 的元素，位于图形的主对角线上）。我们将在下文概述少数已知结果，但很快就会遇到尚未解决的问题。

避免长度为三的模式的错排

Robertson、Saracino 和 Zeilberger [78] 开创了对避模式错排的研究。逆和反转补这两种对称变换都保持不动点的数量不变，因此它们在错排集合上构成对称变换。这将研究避免长度为三的模式的错排归结为四种情况：{123}、{132、213}、{231、312}和{321}。

Robertson、Saracino 和 Zeilberger 证明，对于 $\beta \in \{132、213、321\}$， β-避免排列的错排数量由 Fine 数列（A000957）计数：

$$0,\ 1,\ 2,\ 6,\ 18,\ 57,\ 186,\ 622,\ 2120,\ 7338,\ 25724,\ 91144,\ \ldots.$$

132 和 321 之间的巧合令人惊讶，因为这两种模式属于不同的对称类。当然，它们是 Wilf 等价的（两个避模式类的数量都由卡特兰数计数），但错排中的这一巧合并不能由此推出。事实上，Robertson、Saracino 和 Zeilberger 证明了一个更强的结论：在所有 132-避免排列和所有 321-避免排列中，不动点数量的分布相同。

Elizalde [43] 进一步强化了这一结果，证明不动点数与超越数（满足 $\pi(i) > i$ 的元素）的联合分布，在回避 132 的排列与回避 321 的排列中相同。Elizalde 和 Pak [45] 后来为这一结果给出了双射证明。[5]

对于 $\beta \in \{231,312\}$，回避 β 的错排计数见 A258041：

$$0,\ 1,\ 1,\ 4,\ 10,\ 31,\ 94,\ 303,\ 986,\ 3284,\ 11099,\ 38024,\ \ldots.$$

Robertson、Saracino 和 Zeilberger 计算了该数列的前八项 [78, 表 3]，并证明 [78, 定理 7。1] 对于每个长度，回避 231 的错排都严格少于回避 132 的错排 $n \geq 3$ （不妨直接翻到图4；差距相当悬殊）。Elizalde [42, 定理 3。7] 给出了一个连分数表达式，用于表示按不动点数统计回避 312 的排列的生成函数。[6]

接下来要考虑的是避免模式 123 的错排。这个数列的开头是

$$0,\ 1,\ 2,\ 7,\ 20,\ 66,\ 218,\ 725,\ 2538,\ 8646,\ 31118,\ 108430,\ \ldots.$$

这是 OEIS 中的数列 A318232，该条目引用了 Fu、Tang、Han 和 Zeng 的工作 [47]。他们定义

$$G_n(t) = \sum_{\pi} t^{\operatorname{exc}\pi},$$

其中求和遍及长度为 n 的 123 避免错位排列，$\operatorname{exc}\pi$ 表示 π的超越数。特别地， $G_n(1)$ 是 123 避免错位排列的数量。

[5]这里的时间顺序不同寻常：Elizalde 和 Pak 的双射论文发表于 2004 年，而 Elizalde 的初步结果虽然曾在*FPSAC 2003*上报告，却直到 2011 年才正式发表，刊载于 Zeilberger 纪念文集卷的《组合学电子期刊》中。[6]鉴于 Blitvić 和 Steingrímsson 的连分数具有一般性 [17], , 人们或许会希望它能枚举这些排列。它可以专门用于计数避免模式 231 的排列，或计数错排，但无法计数避免模式 231 的错排，也无法计数本节讨论的其他任何避模式错排。

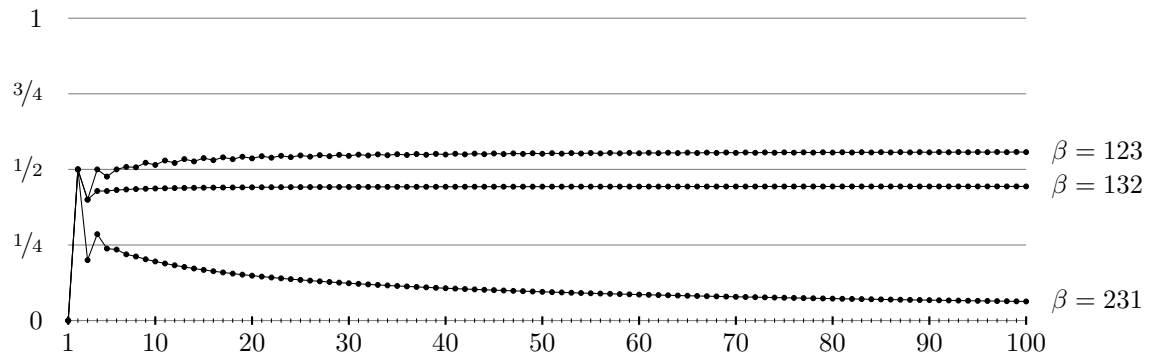


图*4*：长度为 β的回避排列中，错排所占的比例。

Fu、Tang、Han 和 Zeng 还研究了 $G_n(-1)$，并提出了一个猜想 [47, 猜想 5.11]。当 n 为奇数时，我们总有 $G_n(-1) = 0$：反向补对称保持 123 避免性，并且对于错位排列，它会将超越与非超越互换。因此，如果 π 有 k 个超越，那么它的反向补排列就有 $n-k$ 个超越；当 n 为奇数时，两者的奇偶性相反，所以它们的贡献相互抵消。当 n 为偶数时，他们猜想 $(-1)^{n/2}G_n(-1)$ 为正数。这等价于说明，对于给定的偶数长度，具有偶数个超越的 123 避免错位排列是否比具有奇数个超越的更多。

一个回避 123 模式的排列最多有两个不动点。Elizalde [42, 推论 3.2]表明，按不动点数量对回避 123 模式的排列进行计数，可以归结为对恰有两个不动点的排列进行计数，因为其他情况都可以根据这一计数得出。他给出了一个公式 [42, 定理 3.3]，用于计算恰有两个不动点的回避 123 模式的排列数量，但该公式涉及四重求和。利用这个公式，Elizalde 在 [42, 定理 3.4]中证明，对于 $n \geq 4$，长度为 n 的回避 123 模式的错排数量严格多于避免模式 132 的错排（见图4）。Robertson、Saracino 和 Zeilberger 根据 $4 \leq n \leq 8$ 的数据观察到了这一不等式；Elizalde 报告说，Bóna 和 Guibert 也各自独立地提出了这一猜想。

闭式计数仍然难以实现。Elizalde [42, 第 8] 页指出，他“尚未能找到令人满意的表达式”来表示生成函数，不过他希望 [42, 第 39] 页的定理 3.3 之外还存在更简单的公式。Birmajer、Gil、Tirrell 和 Weiner [16, 猜想 A。2]猜想，对于不动点之间的距离参数化的、恰有两个不动点的 123-回避排列，其数量存在一个更简单的公式；若该猜想得证，就能将 Elizalde 的四重求和化为二重求和。这两个公式在 $n = 200$ 之前一致。

利用前 200 项，Pantone（私人通信）成功为该生成函数拟合出一个线性微分方程，这表明它是 D-有限的。遗憾的是，这个微分方程相当繁复（篇幅太长，无法在此列出）。仍有可能存在更简洁的连分数形式表达式，正如 Elizalde [42, 定理 3.7] 针对按不动点数量分类的避免模式 231 的排列所发现的那样。

比例

图4绘出了长度为 n 的 β 回避排列中错位排列所占的比例，涵盖长度为三的三种模式对称类， n 取值从 1 到 100。该图展现了上文所确立的比较关系：123-回避排列比 132-回避排列更可能是错位排列，而 132-回避排列又比 231-回避排列更可能是错位排列。值得注意的是，这一顺序与模式本身的不动点数量恰好相反；不动点更多的模式似乎会被比例更高的错位排列回避。真有意思。

对于 $\beta \in \{132,213,321\}$，我们有 Robertson、Saracino 和 Zeilberger 的结果：避开 β 的错位排列由 Fine 数列计数。将这些数记为 F_n，它们满足 $C_n = 2F_n + F_{n-1}$，其中 C_n 表示卡特兰数，因此 $C_n/F_n = 2 + F_{n-1}/F_n$。由于 Fine 数列的增长率也和卡特兰数一样为 4，我们可以看出 $C_n/F_n \to 9/4$，从而 $F_n/C_n \to 4/9$。

对于 $\beta = 123$，图4表明，避开 123 的错位排列的数量增长形式类似于 δC_n，其中极限比例为 $\delta \geq 1/2$，而 C_n 表示第 n 个卡特兰数。假设这种渐近形式成立，并使用计数的前 200 项，Pantone（个人通信）应用微分逼近法，提出猜想：极限比例恰好为 $9/16$。

猜想 4.1 (Pantone)**：** 在回避123的排列中，错位排列所占比例的极限等于 $9/16$。

对于 $\beta \in \{231, 312\}$，图4和数值实验表明，该比例趋于 0。

问题 4.2。 在回避231的排列中，错位排列所占比例的极限是否等于0?

这些观察引出了更广泛的问题。对于一个排列类$\mathcal{C}$，令$\mathcal{C}^\circ$ 表示$\mathcal{C}$中的错排集合。

问题 4.3。 对于每个排列类 $\mathcal{C}$，比值 $|\mathcal{C}_n^\circ|/|\mathcal{C}_n|$ 是否都收敛?

由此自然引出许多后续问题。对于所有排列组成的类，极限当然是 $1/e$。 $[0,1]$ 中哪些值可以实现? Av(132) 的情形表明，这些极限可以大于 $1/e$，但最多能大多少？是否存在一个严格小于 1 的最大可能极限？对于哪些类，这个极限为 0?

可分错排

长度为 m 的排列 σ 与长度为 n 的排列 τ 的斜和是由下式定义的长度为 $m+n$ 的排列 $\sigma \ominus \tau$：

$$(\sigma \ominus \tau)(i) = \begin{cases} \sigma(i) + n & \text{for } 1 \leq i \leq m, \\ \tau(i-m) & \text{for } m+1 \leq i \leq m+n. \end{cases}$$

从图形上看， $\sigma \ominus \tau$ 的图形位于 σ的图形下方且右侧 .

如果一个排列可以通过反复对单元素排列 1 应用和与斜和构造出来，那么它就是可分的 。Bose、Buss 和 Lubiw [26] 为可分排列命名，并证明它们恰好是 Av(2413,3142)。值得注意的子类包括我们刚刚讨论过的 Av(132) 和 Av(231)，以及前面讨论过的分层排列。长度为 n的可分排列由大施罗德数（A006318）计数：

$$1,\ 2,\ 6,\ 22,\ 90,\ 394,\ 1806,\ 8558,\ 41586,\ 206098,\ 1037718,\ 5293446,\ \ldots.$$

这一计数结果最早由 Shapiro 和 Stephens [81] 于1991年证明，不过他们采用的是通过和与斜和给出的递归定义。那时，Bose、Buss 和 Lubiw 还没有确定基 {2413，3142}。这也促成了一段有趣的历史巧合：正如 West [97] 所述，Shapiro 和 Getu 后来猜想，大施罗德数也对 Av(2413，3142) 进行计数，却没有意识到 Shapiro 本人早已以一种隐晦的形式证明了这一点。West [97] 于1995年给出了证明。[7] 随后，Stankova [83] 给出了自然得多的证明：将这些排列分解为和与斜和，使这个故事兜了一圈，回到了 Shapiro 和 Stephens。

对于只有有限个简单排列的类（此处不定义这一术语），例如可分排列，Brignall、Huczynska 和 Vatter [29] 展示了如何系统地为各种自然子集的生成函数建立代数方程：交错排列、偶排列、第一类杜蒙排列、对合等等。然而，他们的方法并不适用于错排。问题在于，错排这一性质并不属于有限的“查询完备性质”（按该论文中的含义）。这一事实的证明用到了位移集，$D(\pi) = \{\pi(i) - i : i \in [n]\}$，因此排列 π 是错位排列，当且仅当 $0 \notin D(\pi)$。虽然 $D(\pi \oplus \sigma) = D(\pi) \cup D(\sigma)$，但斜和 $\pi \ominus \sigma$是否为错位排列取决于 $D(\pi)$ 与 $D(\sigma)$ 之间的相互作用，因此必须分别追踪位移集不同的排列。

因此，尽管可分排列的结构已得到充分理解，却尚未找到可分错排生成函数的显式表达式。这些排列由 A393394 计数，

$$0,\ 1,\ 2,\ 7,\ 30,\ 124,\ 560,\ 2610,\ 12470,\ 60955,\ 302930,\ 1528621,\ \ldots.$$

这些项是通过逐个长度追踪每个可能的位移集对应多少个可分排列计算得出的。可分错排的数量则是对不包含 0 的位移集求和。

问题 4.4. 求长度为 n 的可分错排数量的生成函数。

比值 $|\mathcal{S}_n^\circ|/|\mathcal{S}_n|$ 似乎单调递减，趋近于介于 $1/5$ 和 $1/4$ 之间的某个值。不过，这些猜测仅基于长度不超过 18 的计数结果，因此不宜过分当真。

问题 4.5. 假设该极限存在，那么错排在可分排列中所占的比例极限是多少？

[7] West 写道，这是“针对任何涉及长度为 $k \geq 4$ 的禁用子序列的问题，所得到的第一个非平凡计数结果”。这忽略了 Gessel 于 1990年 发表的论文 [50], ，其中给出了避免 1234 的排列的显式公式。既然 [50] 在 [97], 中被引用，这一遗漏令人费解；或许 West 指的是第一个涉及非单调模式，或涉及多个模式的结果。

5. 排序

自 Knuth 在《计算机程序设计艺术》中分析栈排序以来，对排序装置的研究就一直与排列模式交织在一起。本节将考察几种排序机：串联多栈、Atkinson 改进的 (r, s)-栈，以及受限容器（也称为 $\mathcal{C}$-机器）。每种机器都会对应一个排列类（即它能够排序／生成的排列），其中还有许多公开问题。

栈

栈是一种后进先出的线性排序装置，支持入栈和弹出操作。对排列 $\pi = \pi(1)\pi(2)\cdots\pi(n)$ 进行栈排序的贪心算法如下。首先，将 $\pi(1)$ 入栈。之后，假设元素 $\pi(1)\ldots,\pi(i-1)$ 均已输出或入栈，因此 $\pi(i)$ 是输入中的下一个元素。如果 $\pi(i)$ 小于栈中当前的每个元素，就将 $\pi(i)$ 入栈。否则，将栈顶元素依次弹出并输出，直到 $\pi(i)$ 小于栈中剩余的每个元素，然后将 $\pi(i)$ 入栈。所有元素读取完毕后，将栈中剩余的元素全部弹出并输出。由此得到排列 $s(\pi)$。

如果 $s^t(\pi)$ 是恒等排列，则称排列是 West t-栈可排序 的。需要注意的是，对于 $t \geq 2$，West-t-栈可排序排列的集合并不构成一个排列类。例如，35241 是 West-2-栈可排序的，因为

$$s(s(35241)) = s(32145) = 12345,$$

但其子排列3241是不West-2-栈可排序的，因为

$$s(s(3241)) = s(2314) = 2134 \neq 1234.$$

事实上，West [95, 定理4.2.18] （以及后来在 [96]中）证明，West-2-栈可排序排列（他本人并未如此称呼它们）的特征是：在标准意义下避免2341，并且还避免带杠模式35241；一个排列避免35241，是指模式3241的每一次出现都可以扩展为模式35241的一次出现。

我们将不再进一步赘述West栈排序，转而讨论借助 t 串联栈进行的排序：一个排列可由 t 串联栈排序，如果存在某个操作序列能将其变换为恒等排列，其中每个操作都是向 t个栈中的某一个入栈或从中出栈，且元素按顺序依次通过这些栈（从第一个栈到第二个栈，依此类推）。与West的概念不同，这一定义的表现符合人们的合理预期。特别地，可由 t 串联栈排序的排列集合构成一个排列类：如果一个排列可以排序，那么任意子排列都可以通过执行相同的操作来排序，同时忽略该子排列中不存在的元素。

一个栈和两个栈

Knuth 在 [57, 练习 2.2.1-5] 中指出，可由单栈排序的排列恰好是 Av(231)。对于串联的两个栈，Tarjan [91, 引理 10] 证明，最短的不可排序排列长度为 7。我们引用他的“证明”[8]：

[8] Pratt [74], 在同一时期的一篇论文中，以如下文字开始证明：“我们把说服自己相信图3中的排列都无法由双端队列生成的乐趣留给读者。”两者都隐含着这样的假设：

（2435761）无法通过两个栈排序，读者不难验证。反过来，任何长度不超过 6 的序列都可以通过两个栈排序。穷举所有情况即可验证这一事实。

在一份 1992 年的技术报告中 [4, 定理 2], Atkinson 似乎是第一个找出串联的两个栈的所有长度为 7 的 22 个基元素的人。Murphy [69, 命题 257] 证明了可由串联的两个栈排序的排列类具有无限基；除了 22 个长度为 7 的基元素外，他还列出了 51 个长度为 8 的基元素。更一般地，长度为 n 的基元素数量（$n \geq 7$）由 A111576 给出：

$$22,\ 51,\ 146,\ 604,\ \ldots.$$

只要将可排序排列视为避免模式 231 的排列的乘积来理解，计算这些基元素直到 $n = 10$ 就不难，下面我们会对此作出说明。

排序、生成与对偶性

我们先暂停一下，讨论一个通用框架，它能阐明接下来要用到的几个论证。我们将排序机视为把一个输入排列（在示意图中通常画在右侧，因此各元素按其自然顺序 $\pi(1)$、$\pi(2)$、... 进入机器）转换为一个输出排列。排序就是输出为恒等排列这一特殊情形。

$$\underset{\text{output}}{12\cdots n} \longleftarrow \boxed{M} \longleftarrow \underset{\text{input}}{\pi(1)\pi(2)\cdots\pi(n)}$$

生成是输入为恒等排列时的特殊情形。

$$\underset{\text{output}}{\pi(1)\pi(2)\cdots\pi(n)} \longleftarrow \boxed{M} \longleftarrow \underset{\text{input}}{12\cdots n}$$

如果一台机器允许的操作不受所操作符号的值影响，那么它就是符号无关 的。（这一术语沿用 Atkinson [6], 的用法，不过他只使用无关一词；我们加上“符号”以避免与该术语在计算机科学中的其他用法混淆。）栈是符号无关的：无论涉及什么符号，都可以入栈或弹出。[9]串联栈的整数拆分也同样是符号无关的。

对于符号无关的机器，如果我们重新标记输入符号并执行相同的操作序列，就会得到相应地重新标记后的输出。假设一台符号无关的机器M 能够将 π 变换为 σ。通过任意排列 τ 进行重新标记可知，相同的操作序列也能使 M 将 $\tau \circ \pi$ 变换为 $\tau \circ \sigma$。特别地，取 $\tau = \sigma^{-1}$，我们便可看出，M能够将 $\sigma^{-1} \circ \pi$ 变换为恒等排列。换句话说：

命题 5.1。设 M 是一台与符号无关的机器。当且仅当 M 能够对 $\sigma^{-1} \circ \pi$进行排序时，M 才能将 π 变换为 σ 。特别地，当且仅当 M 能够对 π^{-1}进行排序时，M 才能生成 π 。

论文一篇发表于*ACM*学报，另一篇发表于$STOC$；如今看来，读者通过手工而非计算机来验证此类断言的做法已显得有些过时。[9]不过，按照 West 的概念，这并不算在内，因为“若栈顶元素小于下一个输入项，则弹出”的规则依赖于对符号值进行比较。

例如，单栈恰好可以对 Av(231) 这一类进行排序。由于 $312^{-1} = 231$，命题 5.1 表明，单栈可以从恒等排列生成 Av(312) 这一类。

更一般地说，符号无关性阐明了串联的两个栈能够生成什么。假设元素依照 $\sigma(1)\ \sigma(2)\ldots,\sigma(n)$ 的顺序经过第一个栈并进入第二个栈。由于单栈生成 Av(312)，我们有 $\sigma \in$Av(312)。根据符号无关性，第二个栈执行某个操作序列，将 $12\cdots n$ 变换为某个 $\tau \in$ Av(312)。由于实际输入第二个栈的符号是 $\sigma(1)\ldots,\sigma(n)$，而不是 $1,\ldots,n$，因此输出会相应地重新标记，从而生成 $\sigma\circ\tau$。因此，串联的两个栈恰好生成 Av(312)∘Av(312)。

这提供了一种简单的方法来计算前面提到的基：生成 Av(231)∘Av(231) 中所有长度不超过目标长度的元素，并找出其中未出现的极小排列。

关于反向运行机器，还有一个有用的观察。假设机器 M 可以通过某个操作序列将 π 变换为 σ。

$$\underset{\text{output}}{\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)} \longleftarrow \boxed{M} \longleftarrow \underset{\text{input}}{\pi(1)\pi(2)\cdots\pi(n)}$$

将该操作序列倒过来读，就描述了“反向机器” M^{r} 将 σ^{r}变换为 π^{r}的一种方式。

$$\underset{\text{input}}{\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)} \longrightarrow \boxed{M^{\mathrm{r}}} \longrightarrow \underset{\text{output}}{\pi(1)\pi(2)\cdots\pi(n)}$$

一般来说，M_{r}可能是与 M不同的机器；如果 M是可逆 的，我们就称之为可逆机器，也就是说 $M_{\mathrm{r}} = M$。串联栈是可逆的（交换输入和输出的角色，反转栈的顺序，并将入栈操作与弹出操作互换）。

如果我们假设 M是符号无关的，因此 M_{r}也如此，并且 M可以对 π进行排序，那么 M^{r}就可以将 $\rho = n(n-1)\cdots 21$ 变换为 π^{r}。

$$\underset{\text{input}}{n\cdots 21} \longrightarrow \boxed{M^{\mathrm{r}}} \longrightarrow \underset{\text{output}}{\pi(1)\pi(2)\cdots\pi(n)}$$

根据 $(\pi^{\mathrm{r}})^{-1}$ 重新标记各元素后，我们看到 M^{r} 将 $(\pi^{\mathrm{r}})^{-1}\circ\rho = \rho\circ\pi^{-1}\circ\rho = (\pi^{\mathrm{rc}})^{-1}$变换为恒等排列，记录如下。

命题 5.2. 若符号无关机器 M 能够排序 π，则反向机器 M^{r} 能够排序 $(\pi^{\mathrm{rc}})^{-1} = \rho\circ\ \pi^{-1}\ \circ\ \rho$。

由于串联栈是符号无关且可逆的，如果 π 可以由 t 个串联栈排序，那么$(\pi^{\mathrm{rc}})^{-1}$ 也可以由 t 个串联栈排序。如图 2 所示，排列$(\pi^{\mathrm{rc}})^{-1}$是 π 关于反对角线的反射。该排列被称为 π的“对偶”（Murphy [69, 第8.1.2节]）或“双栈对偶”（Smith与Vatter [82]）。我们建议改用术语排序对偶，因为这种对偶性适用于任何符号无关的可逆机器。

一般界

对于一般的 t，Knuth在《计算机程序设计艺术》第 3 [58,卷习题5.2.4-19] 的解答中给出了一个论证，表明如果所有长度为 n 的排列都可以由 t 个串联栈排序，那么所有长度为 $2n$ 的排列都可以由 $t+1$ 个串联栈排序。（该论证也出现在Tarjan [91, 引理 11]中。）

我们概述证明。设 π 是一个长度为 $2n$的排列，并假设所有长度为 n 的排列都能通过 t 个串联栈排序。根据符号无关性，所有长度为 n的排列都能变换为 $\rho = n(n-1)\cdots 21$。因此，我们可以用前 t 个栈，将 $\pi(1)\ldots,\pi(n)$按降序输出，同时将这些元素推入最后一个栈，使它们在读取 $\pi(n+1)$之前按递增顺序排列（从栈顶到栈底读取）。接着，我们用前 t 个栈对 $\pi(n+1)\ldots,\pi(2n)$排序，并将这些元素与最后一个栈中的内容合并，按需输出。

Murphy [69, 命题 264] 给出了另一种论证，以得到类似结果。在他的方法中，我们一次处理所有元素 $\pi(1)\ldots,\pi(2n)$。值为$1,2,\ldots,n$的元素通过最后 t个栈排序并输出（这些元素被推入第一个栈，但随即就从中弹出）。值为 $n+1,n+2,\ldots,2n$的元素被推入第一个栈，并暂时留在其中。当所有值为$1,2,\ldots,n$的元素都已输出后，元素 $n+1,n+2,\ldots,2n$便在第一个栈中“上下颠倒”地排列，其顺序与它们在 π中构成的子序列相反（从栈顶到栈底读取）。然后，我们用最后 t 个栈对这些元素排序并输出。

事实上，Knuth 的论证与 Murphy 的论证互为排序对偶。假设排列 π 和 σ 可以由 t 个串联栈排序。Knuth 的论证表明，$t+1$ 个串联栈可以排序所有**水平并置**，其形式为 $\begin{bmatrix}\rho\circ\pi & \sigma\end{bmatrix}$：长度为 $|\pi|+|\sigma|$ 的排列，其中前 $|\pi|$ 个元素与 $\rho\circ\pi$（π的补）序同构，最后 $|\sigma|$ 个元素与 σ序同构。Murphy 的论证表明，$t+1$ 个串联栈可以排序所有**垂直并置**，其形式为 $\begin{bmatrix}\pi\circ\rho & \sigma\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$：长度为 $|\pi|+|\sigma|$的排列，其中最大的 $|\pi|$ 个值与 $\pi\circ\rho$（π的反转）序同构，最小的 $|\sigma|$个值与 σ序同构。

要看出这种对偶性，将 π 和 σ 的排序对偶代入 Murphy 的构造中。由于 π 的排序对偶为 $\rho\circ\pi^{-1}\circ\rho$，我们得到如下形式的垂直并置：

$$\begin{bmatrix}(\rho\circ\pi^{-1}\circ\rho)\circ\rho\\ \rho\circ\sigma^{-1}\circ\rho\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\rho\circ\pi^{-1}\\ \rho\circ\sigma^{-1}\circ\rho\end{bmatrix}.$$

这些排列的排序对偶，恰好就是 Knuth 的论证中的水平并置。

由于串联的两个栈可以对长度为 6 的每个排列进行排序，由这些构造可知，$t\geq 2$ 个串联栈可以对长度为 $3\cdot 2^{t-1}$ 的每个排列进行排序。Atkinson 的 [4, 推论（第10]页）将此界改进为 $7\cdot 2^{t-2}-1$，但渐近行为相同：大约需要 $\log_2 n$ 个串联栈，才能对长度为 n的所有排列进行排序。

作为下界，注意到单栈恰好可以对 C_n 个长度为 n的排列进行排序，其中C_n 表示第 n个卡特兰数。因此，t 个串联栈最多可以对 C_n^t 个长度为 n的排列进行排序。这表明，要对长度为 n的所有排列进行排序，大约需要 $\log_4 n$ 个串联栈。

这些界之间存在两倍的差距，此后也没有被显著缩小

Knuth在近六十年前首次提出了以下问题，并将其难度评为50分中的47分。

问题 5.3 (Knuth [58, 练习 5.2.4-20])。 确定所需串联栈数量的真实增长率（当 $n \to \infty$ 时），以便对每个长度为 n 的排列进行排序。

三个栈

聚焦于三个栈时，我们立刻就遇到了难题。对于两个栈行之有效的穷举计算方法变得难以处理，因为计算

$$\mathrm{Av}(231) \circ \mathrm{Av}(231) \circ \mathrm{Av}(231)$$

即使长度不大也不可行。我们甚至不知道 3-栈可排序排列这一类中最短基元素的长度，尽管 Atkinson 界表明，所有长度为 $7 \cdot 2 - 1 = 13$ 的排列都可以排序，因此这个最短基元素的长度至少为 14。Elder 和 Vatter [41] 报道称，Elder 和 Waton 曾为这个问题打赌一杯啤酒：Elder 猜是 15，Waton 猜是 22（如果宽容些，也可以说是“推测”）。

问题 5.4 （Waton；参见 Elder 与 Vatter [41]）。 无法由三个串联栈排序的最短排列的长度是多少？

Murphy [69, 猜想 265] 更一般地猜测，t 个串联栈可以排序所有长度不超过 $(t+1)!$ 的排列，这将使三个串联栈的最短不可排序排列的长度为 25。然而，Murphy 的猜想不可能对所有 t 都成立，因为 $\log_4(t+1)!$ 的增长速度比 t 更快。

就这些猜想的答案而言，已知的不可排序排列长得惊人。Tarjan [91] 报告称，他构造了一个长度为 41、无法由三个串联栈排序的排列，尽管他并未将其给出。Murphy [69, 命题 262]给出了一种一般方法，用以从无法由 t 个栈排序的排列出发，构造无法由 $t+1$ 个串联栈排序的排列。我们概述他的论证。

假设某个长度为 k 的排列 β 无法通过 t 个串联栈进行排序。考虑排列

$$\pi \;=\; \beta[\,\underbrace{\beta^{\mathrm{r}},\,\beta^{\mathrm{r}},\ldots,\,\beta^{\mathrm{r}}}_{|\beta|-1\text{ copies}},1\,],$$

β 的膨胀，粗略地说，就是将 β 的每个元素（最后一个除外）替换为一个与 β^{r} 序同构的元素块。我们声称，π 无法通过 $t+1$ 个串联栈进行排序。事实上，我们不可能让来自同一个 β^{r} 区间的所有元素同时位于第一个栈中，因为从顶部到底部读取它们会形成 β 的一个副本，而剩余的 t 个栈无法将其排序。因此，第一个区间中至少有一个元素必须在第二个区间的第一个元素进入之前离开第一个栈；对于后续区间，情况同样如此。将这些 $|\beta|-1$ 个元素与 π 的最后一个元素放在一起考虑，我们得到一个与 β 序同构的子序列，它们按该顺序进入最后的 t 个栈，而最后的 t 个栈无法对 β 进行排序，因此也无法对这个子序列进行排序。

Murphy 的构造产生了一个长度为 $|\beta|^2 - |\beta| + 1$ 的不可排序排列。对于三个栈，我们从一个长度为 7 的排列开始（这是两个栈无法排序的最短长度），从而得到一个长度为 43 的不可排序排列，比 Tarjan 声称的示例更长。Murphy [69,

第 329] 页考察了这样一个排列，并发现可以移除其中的四个元素而不使其变得可排序，从而得到一个长度为 39 的不可排序排列。在其 1992 年的技术报告中，Atkinson [4,引理 5] 已经做了大致相同的工作，不过他得到的是一个长度为 38 的不可排序排列。这一纪录已经保持了三十多年。

Atkinson 的$(r,\ s)$-栈

在 1998 年的一篇论文中，Atkinson [5] 提出了栈的一种自然推广。使用标准栈时，可以将一个元素压入栈顶，或从栈顶弹出一个元素。$(r,\ s)$-栈放宽了这些限制：可以将下一个输入元素压入顶部的任意 r 个位置，也可以将顶部任意 s 个元素弹出到输出端。因此，$(1,\ 1)$-栈就是普通栈。

这些机器是符号无关的，因为其操作不依赖于元素的值；而 $(r,\ s)$-栈的反转是 $(s,\ r)$-栈。因此，由命题 5.2 可得如下结论。

命题 5.5 (Atkinson [5, 引理 1。1])。一个(r, s)-栈可以排序 π 当且仅当一个(s, r)-栈可以对其排序对偶进行排序$(\pi^{\mathrm{rc}})^{-1}$。

特别地，能由一个 (r, r)-栈排序的排列类在排序对偶下封闭。本节稍后会回到 (r, s)-栈。

受限容器（$\mathcal{C}$-机器）

现在我们介绍一种不同的栈的推广，它涵盖许多排列类。正如我们将看到的，这个框架将 Atkinson 的 $(r,1)$-栈和 $(1, s)$-栈作为特例包含在内。

设$\mathcal{C}$ 为一个排列类。$\mathcal{C}$-机器 是一种容器，其中的元素受到如下限制：在任何时刻，容器中的元素（从左向右读取）都必须与$\mathcal{C}$中的某个成员序同构。在分析这些机器时，研究生成比研究排序更为自然；我们将在下文进一步讨论这一选择。因此，我们令输入为 $12\cdots n$，机器有三种操作：

- 入栈：从输入中取出下一个元素，并将其放入容器中的任意位置，前提是所得排列与$\mathcal{C}$中的某个成员序同构；
- 弹出：从容器中移除最左侧的元素，并将其追加到输出中；
- 旁路：从输入中取出下一个元素，并将其直接追加到输出中。

置换 由操作序列生成的结果，是所有元素都退出后得到的输出 .

取 $\mathcal{C}$ =Av(12)，即可得到经典栈。在这台机器中，容器内的元素必须按递减顺序排列，因此每次入栈都会将新元素放在左侧。由于元素也从左侧弹出，旁路操作是多余的，因此我们得到通常的栈操作。正如 Knuth 所指出的，这台机器恰好生成 Av(312)。

相比之下，对于 Av(21) 机，容器中的元素必须递增，因此每次入栈都会将新元素放在右侧。由于元素从左侧弹出，旁路操作此时必不可少。这台机器恰好生成 Av(321)：显然，它无法生成 321 或任何包含 321 的排列；反过来，要生成一个 321-避免排列，只需通过旁路输出从左到右最大值，同时将其余元素（它们必定递增）经由容器传递。（这等价于用两个队列并行生成。）

在另一极端，若将 $\mathcal{C}$ 取为所有排列构成的类，则元素可以放入容器中的任意位置，而这台机器便能生成所有排列。

在某些情况下，旁路操作是多余的，栈的例子便说明了这一点。然而，纳入旁路操作能大大简化下文的基定理。实际使用中，旁路的作用恰恰是输出所生成排列的从左到右最大值。

基定理

关于$\mathcal{C}$-机器的主要结构性结果刻画了它们生成的类，并能立即看出一个感兴趣的类是否可以由$\mathcal{C}$-机器生成；若可以，还能看出是哪一种机器。这个证明过于简单，不应省略。在定理陈述中，我们使用记号 $1\ominus B = \{1\ominus\beta : \beta \in B\}$。

定理 5.6 (Albert、Homberger、Pantone、Shar 和 Vatter [2, 定理 1。1])。 对于任意排列集合 B，$\mathrm{Av}(B)$-机器生成类$\mathrm{Av}(1\ominus B)$。

证明。 Av(B)-机器无法生成任何形如 $1\ominus\beta$ （其中 $\beta \in B$）的排列：当最大元素（它在 $1\ominus\beta$ 中出现于首位）即将作为输入时，容器必须容纳一个 β的副本，但这是不允许的。

对于逆命题，我们展示如何生成一个排列 π，使其避开 $1\ominus B$ 中的所有排列。设 $i_1 < i_2 < \cdots < i_\ell$为 π 的从左到右最大值的位置；注意， $i_1 = 1$，因为第一个元素总是从左到右最大值。

我们按照从左到右最大值的顺序迭代处理。对于第一个最大值，我们将所有值小于 $\pi(i_1)$ 的元素，按照相对于 π 的正确相对顺序入栈到容器中。这是可行的，因为 $\pi(i_1)$ 东南方的元素在 π 中避开了 B。然后我们将 $\pi(i_1)$ 旁路到输出中。

对于后续的每个从左到右最大值，注意，前一个从左到右最大值与当前最大值之间横向排列的所有元素都已在容器中。我们将这些元素弹出并送至输出。接着，将输入中值介于这两个最大值之间的元素入栈到容器中，并按照相对于 π 的正确相对位置放置它们。同样，这是可行的，因为当前从左到右最大值东南方的元素必定避开 B。然后我们将当前最大值旁路到输出中，并重复这一过程。

□

排序与生成

与栈不同，$\mathcal{C}$-机器完全不是符号无关的：可用的入栈操作完全取决于容器中元素的相对顺序以及下一个要输入的元素。因此，我们不能依靠命题 5.1 得出排序和生成是对称的结论。如果我们尝试用$\mathcal{C}$-机器进行排序，会发生什么?

一种答案是，按照定义，使用$\mathcal{C}$机器进行排序并没有多大意思。唯一有效的容器配置是递增排列，因为容器中的任何逆序都会保留到输出中，导致排序失败。因此，使用$\mathcal{C}$机器排序等同于使用优先队列排序：可以将元素压入并弹出，但弹出的不是最后压入的元素（如栈），也不是最先压入的元素（如队列），而是最小的元素。容量无限的优先队列可以对任意排列进行排序：

只需将所有元素压入，然后按顺序将它们弹出。[10] 因此，如果$\mathcal{C}$ 包含所有长度的恒等排列，$\mathcal{C}$机器就能对所有内容进行排序。

如果$\mathcal{C}$ 所含的恒等排列长度至多只到某个 k，那么用$\mathcal{C}$-机器进行排序就等价于用$(k+1)$-有界优先队列进行排序，该队列在任意时刻最多可容纳 $k+1$ 个元素。（“+1”用于计入旁路操作。）有界优先队列已由Atkinson与Tulley [9], 等人研究过，不过其排序能力似乎尚未被明确写下来。不难看出，$(k+1)$-有界优先队列恰好能对类Av$(S_{k+1} \ominus 1)$进行排序，也就是避开所有长度为 $k+2$且以1结尾的模式的排列。描述该类的另一种方式是：它由最大降幅至多为 k的排列组成，其中 π 的最大降幅 为 $\max\{i-\pi(i)\}$。这些类已经得到了很好的理解；事实上，Chung、Claesson、Dukes与Graham [33] 甚至已经确定了它们的下降多项式。简而言之，按所定义的方式用$\mathcal{C}$-机器进行排序并不会带来任何新的结果。

用$\mathcal{C}$-机器进行排序的另一种方法，是修改机器的定义，使排序过程更自然。如果$\mathcal{C}$-机器能够生成 π，那么反转后的$\mathcal{C}$-机器（它只在左侧入栈，但允许从容器中的任意位置弹出）就能将 π^{r} 变换为 id^{r}。因此，对$\mathcal{C}$应用适当的对称变换后，我们可以研究如何用反转后的$\mathcal{C}$-机器进行排序，而不必研究如何用$\mathcal{C}$-机器生成排列。但这显然与用$\mathcal{C}$-机器生成排列是对称的，而且谈论生成更容易。

Atkinson 的$(r,1)$-栈和$(1,s)$-栈作为$\mathcal{C}$-机器

$(r,1)$-栈允许向顶部的任意 r 个位置入栈，但只能从顶部弹出。将这个栈逆时针“旋转” 90° 后，可以看出它等价于 Av(B)-机器，其中 B由所有长度为 $r+1$ 且以最大元素结尾的排列组成。这样，我们便可以将输入中的下一个元素（它大于容器中当前的所有元素）插入容器顶部的前 r 个位置中的任意一个，然后从容器的第一个位置弹出。令 S_r 表示所有长度为 r的排列构成的集合，可以看出，$(r,1)$-栈等价于 Av$(S_r \oplus 1)$-机器。根据定理 5.6，该机器生成类 Av$\big(1 \ominus (S_r \oplus 1)\big)$，这重新证明了 Atkinson [5, 定理 2.1] 的一个结果。根据命题 5.5 的对偶性，$(1,s)$-栈也等价于$\mathcal{C}$-机器。

Atkinson [5, 第 3] 节继续对这些类进行计数，找到了它们的代数生成函数和渐近行为。Kremer [60, 61], 的工作中也隐含地涉及了这些类的计数：他对每个 $r \geq 1$ 和固定的指标 j，$k \in [r+2]$ 考虑了基为

$$B_{j,k} = \{\beta \in S_{r+2} : \beta(j) = r+1 \text{ and } \beta(k) = r+2\}.$$

她的主要结果 [61, 定理 1] 表明，对于满足 $|j-k| \leq 2$、或 $k=1$、或 $k=r+2$ 的所有形如 Av$(B_{j,k})$ 的类，它们的生成树均同构，因此彼此 Wilf 等价。相关递推关系也出现在 Sulanke 关于着色平行四边形多格骨牌的研究 [90]中。（提醒读者，Kremer 印出的生成函数有误；正确的生成函数请参阅 Atkinson 的论文。）对于 $r=1$，我们得到卡特兰数。对于 $r=2$，计数结果为大施罗德数（A006318）；该数列此前曾在可分排列的背景下出现在这篇

[10]关于优先队列，更有趣的问题涉及这样的对 $(\pi,\ \sigma)$：优先队列能够将 π 转换为 σ。Atkinson 和 Thiyagarajah [8] 的一个定理指出，长度为 n 的排列中，恰好有 $(n+1)^{n-1}$ 个这样的排列对。

论文中；Kremer 的类与可分排列 Wilf 等价，但与之并不对称。对于 $r = 3$，我们得到 A054872。

排序 1342-避免排列

如第 3 节所述，Atkinson、Murphy 和 Ruškuc [7] 证明，由两个有序栈 串联而成的排序机所能排序的类与 Av(1342) Wilf 等价。这里的有序栈 是指从顶到底读取时，其中的内容必须保持递增的栈；使用串联栈进行排序时，最后一个栈必须始终有序，但前面的栈则不必如此。在 *PermutationPatterns 2007*上，Bóna 提出了 [93, 问题 4]:

> 是否存在一种自然的排序机，能够恰好对 Av(1342) 类进行排序?

定理 5.6 表明，答案基本上是肯定的：Av(4213) 类由 Av(213)-机器生成。这里我们用一个对称变换后的模式替换了 Av(1342)，并将排序改为生成，但这两处变化都无关紧要。然而，Bóna 实际上设想的是一种更令人满意的、从机器层面解释 Wilf 等价的方式，而这个问题仍未解决：

问题 5.7. 在 $\mathrm{Av}(1342)$ 与可由串联的两个有序栈排序的排列类之间，寻找一个双射，并使其体现为相关机器操作序列之间的对应关系。

计数与 D-有限性

$\mathcal{C}$-机器框架导出了生成函数的函数方程。在条件理想时，这些方程可以给出显式公式；在其他情况下，则可通过动态规划高效计算出大量项。

一个引人注目的例子是 Av(4231,4123, 4312)。这个排列类可以由一台$\mathcal{C}$-机器生成（所有基元素都以其最大元素开头），Albert、Homberger、Pantone、Shar 和 Vatter [2]计算出了其计数序列（A257562）的前 5000 项。尽管有如此丰富的数据，至今仍未找到该生成函数所满足的代数微分方程。

Garrabrant 和 Pak [49] 构造的 Noonan–Zeilberger猜想 [70]的反例，其基都极其庞大。若能有一个更简洁的反例就好了；而 Av(4231,4123,4312) 的基仅含三个简短排列，因此似乎是很有力的候选。

猜想 5.8（Albert、Homberger、Pantone、Shar 与 Vatter [2, 猜想 5.3]）。 $\mathrm{Av}(4231、4123、4312)$ 的生成函数不是微分代数的。

有趣的是，超类 Av(4231,4312) 由大施罗德数枚举。这一点由 Stanley 提出猜想，并首先由 Kremer [60, 命题 11], 证明，尽管该类并不属于她那一大族 Wilf 等价类。相反，她具体证明了对称类 Av(2134,1324) 的生成树与她那一大族的生成树同构。

与此同时，类 Av(4231) 与引言中提到的臭名昭著的类 Av(1324) 对称。目前，这个类的枚举纪录为 50 项，由 Conway、

Guttmann 和 Zinn-Justin [38] 计算得出。因此，在这一链中

$$\mathrm{Av}(4231, 4123, 4312) \subseteq \mathrm{Av}(4231, 4312) \subseteq \mathrm{Av}(4231),$$

第一类在计算上易于处理，但其生成函数的性质似乎不太理想（其计数不是 Stieltjes 矩序列，因为其 Hankel 行列式最终会变为负数 [27, 第 40] 页），第二类具有代数生成函数，而第三类则无人知晓该如何处理。

$(2,\ 2)$-栈

回到 Atkinson 的（r, s）-栈，（2, 2）-栈是未被 $\mathcal{C}$-机器框架涵盖的最简单情形：它允许向顶部两个位置中的任意一个入栈，也允许从顶部两个位置中的任意一个弹出。Atkinson 为这一类确定了基。

定理 5.9 (Atkinson [5, 定理 4.1])**.** （2,2）-栈可排序排列类为

$$\mathrm{Av}(23451,\ 23541,\ 32451,\ 32541,\ 245163,\ 246153,\ 425163,\ 426153).$$

根据命题 5.5，这一类在排序对偶下封闭。从基也可以看出这一点，因为每个元素都与其排序对偶成对出现：

排列	23451	23541	32541	245163	246153	426153
排序对偶	自身	32451	自身	自身	425163	自身

当然，若能对 (r, s)-栈可排序排列的基作出一般性描述，将会很有意义；即便只是知道这些基是否全都是有限的，也很有价值。

问题 5.10. 刻画一般 $r, s \geq 2$ 下可由 (r, s)-栈排序的排列类的基 .

可由 (2,2)-栈排序的排列由 A393395 计数，

$$1, 2, 6, 24, 116, 628, 3636, 21956, 136428, 865700, 5583580, 36490740, \ldots.$$

Atkinson 报告了 OEIS Superseeker 给出的这些排列的生成函数的一个猜想表达式，但没有证明它。Pantone（私人通信）利用 Combinatorial Exploration [1] 并基于定理 5.9 中的基，证明了 Atkinson 的猜想，从而确定该排列类的生成函数的最小多项式为

$$2xf^3 - (2x + 3)f^2 - (x - 7)f - 4.$$

（这与 Atkinson 的表述略有不同，因为这里包含空排列对应的常数项 1，而 Atkinson 的表述中没有。）直接从排序机制推导这一计数结果仍然很有意义。

问题 5.11. 根据(2,2)-栈的结构，推导(2,2)-栈可排序排列类的生成函数。

鉴于目前已知的所有 (r, s)-栈可排序类的计数结果都是代数的，我们不禁想知道这一结论还能推广到多远。

问题 5.12。 由（r、 s）-栈可排序的排列类，对于所有 r、 $s \geq 1$ 是否具有代数生成函数?

推广$\mathcal{C}$-机器

（2，2）-栈不是$\mathcal{C}$-机器：它允许从顶部两个位置中的任意一个弹出，而$\mathcal{C}$-机器只能从最左侧位置弹出。这启发了$\mathcal{C}$-机器的一种自然推广：允许弹出操作移除容器中最左侧的 s 个元素中的任意一个，而不只是最左侧的元素。将这种机器称为带有扩展 $\mathcal{C}$-弹出操作的 s-弹出机器，简称（$\mathcal{C}$ s）-机器。此前讨论的$\mathcal{C}$-机器于是属于（$\mathcal{C}$， 1）-机器，而（2，2）-栈可以视为（Av(123， 213)，2）-机器。

基定理（定理 5.6）完整刻画了由$\mathcal{C}$,1)-机器生成的类。类似的结果是否能推广到更一般的情形?

Problem 5.13. 是否存在类似于定理 *5.6*、适用于($\mathcal{C}$ s)-机器的基定理?

即使只是取得部分进展也很有价值。例如，如果$\mathcal{C}$ 是有限基的，那么每个$\mathcal{C}$ s)-机器生成的类是否都有有限基?

致谢

我感谢 Jay Pantone 就本文所述内容与我进行了许多极有帮助的讨论，感谢 Bruce Sagan 指出早期稿件中的一处错误，并感谢 Natasha Blitvić 和 Einar Steingrímsson 提供了有益的通信交流。

参考文献

[1] Albert, M. H., Bean, C., Claesson, A., Nadeau, E., Pantone, J., and Ulfarsson, H. Combinatorial Exploration：用于计数的算法框架。美国数学会回忆录 *317*, 1611 (2026).[2] Albert, M. H., Homberger, C., Pantone, J., Shar, N., and Vatter, V. 生成受限容器中的排列。《组合理论杂志》*A*辑 *157* (2018), 205–232.[3] Alon, N., and Friedgut, E. 关于避免给定模式的排列数量。《组合理论杂志》*A*辑 *89*, 1 (2000), 133–140.[4] Atkinson, M. D. 用栈网络对排列进行排序。技术报告 TR-210, 卡尔顿大学, 1992。可在线查阅： `https://carleton.ca/scs/?p=15050`.[5] Atkinson, M. D. 广义栈排列。组合概率与计算 *7*, 3 (1998), 239–246.[6] Atkinson, M. D. 置换机器与排列模式。载于排列模式, S. A. Linton, N. Ruškuc, and V. Vatter, 编, 第376卷伦敦数学会讲义系列剑桥大学出版社, 剑桥, 英格兰, 2010, 第67–88页.[7] Atkinson, M. D., Murphy, M. M., and Ruškuc, N. 用串联的两个有序栈排序。理论计算机科学 *289*, 1 (2002), 205–223.[8] Atkinson, M. D., and Thiyagarajah, M. 优先队列的排列能力。*BIT 33*, 1 (1993), 2–6.[9] Atkinson, M. D., and Tulley, D. 有界容量优先队列。理论计算机科学 *182*, 1-2 (1997), 145–157.

[10] Babson, E., and West, J. 排列 $123p_4\cdots p_m$ 和 $321p_4\cdots p_m$ 是 Wilf 等价的。图与组合 16, 4 (2000), 373–380.[11] Backelin, J., West, J., and Xin, G. 单元素类的 Wilf 等价性。《应用数学进展》 38, 2 (2007), 133–148.[12] Bell, J., and Stevens, B. 关于已知结果和 n 皇后研究领域的综述。《离散数学》 309, 1 (2009), 1–31.[13] Bergeron, F., Bousquet-Mélou, M., and Dulucq, S. 合成偏序集中的标准路径。魁北克数学年刊 19, 2 (1995), 139–151.[14] Bevan, D. 避免 1324 模式的排列与 Łukasiewicz 路径中的模式。《伦敦数学会杂志》(第2辑) 92, 1 (2015), 105–122.[15] Bevan, D., Brignall, R., Elvey Price, A., and Pantone, J. Av(1324) 的结构刻画及其增长率的新上界。欧洲组合学杂志 88 (2020), 文章 103115, 共29页.[16] Birmajer, D., Gil, J. B., Tirrell, J. O., and Weiner, M. D. 模式避免的稳定区间自由排列。《离散数学》 348, 3 (2025), 论文编号 114329, 共13页.[17] Blitvić, N., and Steingrímsson, E. 排列、矩与测度。美国数学会汇刊 374, 8 (2021), 5473–5508.[18] Bloom, J. 长度为4的模式的 Wilf 等价性的细化。《组合理论杂志》A辑 124 (2014), 166–177.[19] Bloom, J., and Elizalde, S. 匹配与分拆中的模式回避。《组合学电子期刊》 20, 2 (2013), 论文5, 共38页.[20] Bloom, J., and Saracino, D. 231-避免放置与312-避免放置之间的一个简单双射。组合数学与组合计算杂志 89 (2014), 23–32.[21] Bóna, M. 对避免 1342 模式的排列进行精确计数：与标号树和平面图的紧密联系。《组合理论杂志》A辑 80, 2 (1997), 257–272.[22] Bóna, M. 避免 1324 模式的排列的一个新上界。组合概率与计算 23 (2014), 717–724.[23] Bóna, M. 避免 1324 模式的排列的新纪录。欧洲数学杂志 1, 1 (2015), 198–206.[24] Bóna, M. 《组合数学漫步》，第4版。世界科学出版社, 哈肯萨克, 新泽西州, 2017.[25] Bóna, M. 《排列的组合学》，第3版。《离散数学及其应用》。CRC出版社, 博卡拉顿, 佛罗里达, 2022.[26] Bose, P., Buss, J. F., and Lubiw, A. 排列的模式匹配。信息处理快报 65, 5 (1998), 277–283.[27] Bostan, A., Elvey Price, A., Guttmann, A. J., and Maillard, J.-M. 模式避免排列的 Stieltjes 矩序列。《组合学电子期刊》20, 4 (2020), P4.20, 共59页.[28] Bouvel, M., Ferrari, L., and Tenner, B. E. 弱序与 Bruhat 序之间：排列的中间序。图与组合 41, 2 (2025), 论文编号34, 共25页.[29] Brignall, R., Huczynska, S., and Vatter, V. 简单排列与代数生成函数。《组合理论杂志》A辑 115, 3 (2008), 423–441.

[30] Burstein, A. 和 Pantone, J. 两个不平衡 Wilf 等价的例子。《组合学杂志》6, 1-2 (2015), 55–67。[31] Cameron, P. J. 齐次排列。《组合学电子期刊》9, 2 (2002/03), 论文 2，共 9 页。[32] Chase, P. J. 子序列数与对数凹性。《离散数学》16, 2 (1976), 123–140。[33] Chung, F.、Claesson, A.、Dukes, M. 和 Graham, R. 有界下降幅度排列的下降多项式。《欧洲组合学杂志》31, 7 (2010), 1853–1867。[34] Chung, F.、Greene, C. 和 Hutchinson, J. Herbert S. Wilf (1931–2012)。《美国数学学会通告》62, 4 (2015), 346–360。[35] Claesson, A.、Jelínek, V. 和 Steingrímsson, E. 1324 及其他分层模式的 Stanley–Wilf 极限上界。《组合理论杂志》A辑 119, 8 (2012), 1680–1691。[36] Clisby, N.、Conway, A.、Guttmann, A. 和 Inoue, Y. 经典的长度为 5 的模式回避排列。《组合学电子期刊》29, 3 (2022), 论文 3.14，共 63 页。[37] Conway, A. R. 和 Guttmann, A. J. 关于避免 1324 模式的排列的增长率。《应用数学进展》64 (2015), 50–69。[38] Conway, A. R.、Guttmann, A. J. 和 Zinn-Justin, P. 重新审视避免 1324 模式的排列。《应用数学进展》96 (2018), 312–333。[39] de Mier, A. k-非交叉与 k-非嵌套图，以及费雷尔图的填充。《组合学》27, 6 (2007), 699–720。[40]Egge, E. 挑战上帝：Stanley–Wilf 猜想、Stanley–Wilf 极限，以及组合学的两代爆发式发展。载于《数学进步百年》，S. F. Kennedy、D. J. Albers、G. L. Alexanderson、D. Dumbaugh、F. A. Farris、D. B. Haunsperger 和 P. Zorn 编。美国数学协会，华盛顿特区，2015 年，第 65–82 页。[41] Elder, M. 和 Vatter, V. 在第三届排列模式国际会议上提出的问题与猜想，佛罗里达大学，2005 年 3 月 7–11 日。不会出版。arXiv:math/0505504 [math.CO]。[42] Elizalde, S. 关于不动点和超越的多重模式避免。《组合学电子期刊》11, 1 (2004), 研究论文 51，共 40 页。[43] Elizalde, S. 受限排列中的不动点和超越。《组合学电子期刊》18, 2 (2011), 论文 29，共 17 页。[44] Elizalde, S. 和 McNamara, P. R. W. 连续模式偏序集的结构。《国际数学研究通报》IMRN, 7 (2018), 2099–2134。[45] Elizalde, S. 和 Pak, I. 精细受限排列的双射。《组合理论杂志》A辑 105, 2 (2004), 207–219。[46]Elvey Price, A. 枚举组合学精选问题：排列类、随机游走和平面图。博士论文，墨尔本大学，2018 年。在线地址：https://hdl.handle.net/11343/219277。[47] Fu, S.、Tang, D.、Han, B. 和 Zeng, J. (q,t)-卡特兰数：伽马展开、模式避免与(-1)现象。《应用数学进展》106 (2019), 57–95。[48] Gardner, M. 数学游戏。《科学美国人》207, 5 (1962年11月), 151–168。[49] Garrabrant, S. 和 Pak, I. 排列模式难以计数。载于《

第二十六届 ACM-SIAM 离散算法年度研讨会（SODA）论文集。ACM，纽约，纽约州，2016 年，第 923–936 页。[50] Gessel, I. M. 对称函数与 P-递归性。《组合理论杂志》A辑 53, 2 (1990年), 257–285。[51] Guo, T.、Krattenthaler, C. 和 Zhang, Y. 关于词的（形状）Wilf 等价。《应用数学进展》100 (2018), 87–100。[52] Ibragimov, I. A. 单峰分布的卷积。《概率论及其应用》1, 2 (1956), 255–260。[53] Jelínek, V. 和 Mansour, T. k元词、整数拆分与停车函数上的 Wilf 等价。《组合学电子期刊》16, 1 (2009), 论文 58，共 9 页。[54] Johansson, F. 和 Nakamura, B. 利用函数方程枚举避免 1324 模式的排列。《应用数学进展》56 (2014), 20–34。[55] Keilson, J. 和 Gerber, H. 离散单峰性的一些结果。《美国统计学会杂志》66 (1971), 386–389。[56] Kitaev, S.《排列与词中的模式》。《理论计算机科学专著》。Springer，柏林，德国，2011 年。[57] Knuth, D. E.《计算机程序设计艺术》，第 1 卷。Addison-Wesley，雷丁，马萨诸塞州，1968 年。[58] Knuth, D. E.《计算机程序设计艺术》，第 3 卷。Addison-Wesley，雷丁，马萨诸塞州，1973 年。[59] Krattenthaler, C. Ferrers 形状填充中的增长图以及递增链与递减链。《应用数学进展》37, 3 (2006), 404–431。[60] Kremer, D. 具有禁用子序列的排列与广义 Schröder 数。《离散数学》218, 1-3 (2000), 121–130。[61]Kremer, D. 后记：“具有禁用子序列的排列与广义 Schröder 数”。《离散数学》270, 1-3 (2003), 333–334。[62]Liang, J. 和 Sagan, B. E. 通过分配格研究对数凹性与对数凸性。arXiv:2408.02782 [math.CO]。[63] Lucas, F. É. A.《数论》，第一卷。Gauthier-Villars et Fils，巴黎，法国，1891。[64] Mansour, T. 对 Doron Zeilberger 的访谈。《枚举、组合与应用》1, 1 (2021), 访谈 #S3I3，共 4 页。[65] Mansour, T. 对 Michael Albert 的访谈。《枚举、组合与应用》2, 4 (2022), 访谈 #S4I1PP，共 5 页。[66] Marcus, A. 和 Tardos, G. 排除的排列矩阵与 Stanley–Wilf 猜想。《组合理论杂志》A辑 107, 1 (2004), 153–160。[67] Marinov, D. 和 Radoičić, R. 计数避免 1324 模式的排列。《组合学电子期刊》9, 2 (2003), 论文 13，共 9 页。[68] McNamara, P. R. W. 和 Steingrímsson, E. 关于排列模式偏序集的拓扑。《组合理论杂志》A辑 134 (2015), 1–35。[69] Murphy, M. M.《受限排列、反链、原子类与栈排序》。

博士论文，圣安德鲁斯大学，2002年。在线网址： http://hdl.handle.net/10023/11023。[70] Noonan, J. 和 Zeilberger, D. 具有指定数量“禁用”模式的排列计数。《应用数学进展》17，4（1996），381–407。[71] OEIS基金会公司。《在线整数数列百科全书》（OEIS）。电子版发表于 https://oeis.org/。[72] O’Hara, K. M. 高斯系数的单峰性：构造性证明。《组合理论杂志》A辑53，1（1990年），29–52。[73] Pouzet, M. 和 Rosenberg, I. G. 群与关系的斯佩纳性质。《欧洲组合学杂志》7，4（1986年），349–370。[74] Pratt, V. R. 使用双端队列、并行栈和并行队列计算排列。载于 STOC ’73：《第五届 ACM 计算理论年度研讨会论文集》。ACM，纽约，纽约，1973，页268–277。[75] Preußer, T. B. 和 Engelhardt, M. R. 在进位链中放置皇后，№ 27。《信号处理系统期刊》88，2（2017），185–201。[76] Rains, E. M. 递增子序列与经典群。《组合学电子期刊》5（1998），研究论文12，共9页。[77] Ray, N. 和 West, J. 矩阵偏序集以及含禁用子序列的排列。《组合年刊》7，1（2003），55–88。[78] Robertson, A.、Saracino, D. 和 Zeilberger, D. 精细受限置换。《组合年刊》6，3-4（2002），427–444。[79] Sagan, B. E. 矩形内的整数拆分与单峰性。《代数组合学杂志》29，4（2009），405–411。[80] Sagan, B. E. 和 Vatter, V. 合成偏序集的莫比乌斯函数。《代数组合学杂志》24，2（2006），117–136。[81] Shapiro, L. 和 Stephens, A. B. 自举渗流、施罗德数与n-王问题。《SIAM 离散数学杂志》4，2（1991），275–280。[82] Smith, R. 和 Vatter, V. 串联的一个栈和一个弹出栈。《澳大拉西亚组合学杂志》58，1（2014），157–171。[83] Stankova, Z. 禁用子序列。《离散数学》132，1-3（1994），291–316。[84] Stankova, Z. 长度为4的禁用子序列分类。《欧洲组合学杂志》17，5（1996），501–517。[85] Stankova, Z. 长度为3的排列上的形状 Wilf 序。《组合学电子期刊》14，1（2007），论文56，共44页。[86] Stankova, Z. 和 West, J. 一类新的 Wilf 等价排列。《代数组合学杂志》15，3（2002），271–290。[87] Stanley, R. P. 代数、组合学和几何中的对数凹与单峰数列。载于《图论及其应用：东西方》（济南，1986年），《纽约科学院年刊》第576卷。纽约科学院，纽约，纽约，1989，页500–535。[88] Stanton, D. 单峰性与杨氏格。《组合理论杂志》A辑54，1（1990年），41–53。[89] Steingrímsson, E. 关于排列模式的一些公开问题。载于《组合学综述》——

组合学*2013*，S. R. Blackburn、S. Gerke 和 M. Wildon 编，第409卷《伦敦数学会讲义系列》。剑桥大学出版社，剑桥，英格兰，2013，页 239–263。[90] Sulanke, R. A. 平行四边形多格骨牌的三个递推关系。《微分方程及其应用杂志》*5*，2（1999），155–176。[91] Tarjan, R. 使用队列和栈网络进行排序。《计算机协会杂志》*19*，2（1972年），341–346。[92] Tenner, B. E. 模式回避与 Bruhat 序。《组合理论杂志》*A*辑*114*，5（2007年），888–905。[93] Vatter, V. 问题讨论会上提出的问题与猜想。载于《排列模式》，S. Linton、N. Ruškuc 和 V. Vatter 编，第376卷《伦敦数学会讲义系列》。剑桥大学出版社，剑桥，英格兰，2010，页339–344。[94] Vatter, V. 排列类。载于《枚举组合学手册》，M. Bóna 编。CRC出版社，博卡拉顿，佛罗里达，2015，页754–833。[95] West, J. 含禁用子序列的排列与栈可排序排列。博士论文，麻省理工学院，1990年。在线网址：`http://hdl.handle.net/1721.1/13641`。[96] West, J. 两次经栈排序。《理论计算机科学》*117*，1-2（1993），303–313。[97] West, J. 生成树与卡特兰数和施罗德数。《离散数学》*146*，1-3（1995），247–262。[98] Wilf, H. S. 排列的模式。《离散数学》*257*，2-3（2002），575–583。[99] Zeilberger, D. Kathy O'Hara 关于高斯多项式单峰性的构造性证明。美国数学月刊*96*，7（1989），590–602。