arXiv:2602.16361v1 [math.GR] 18 Feb 2026

论 Coxeter 系统中与反射相关的生成函数和自动机

RICCARDO BIAGIOLI、CHRISTOPHE HOHLWEG 和 EL ISA SASSO

摘要。本文研究了 Coxeter 系统中有关反射集合的两个组合问题。第一个问题是：反射的回文约化词所构成的语言是否为正则语言；第二个问题则是如何求出反射的庞加莱级数公式，即反射长度的生成函数。这两个问题的灵感分别来自 Stembridge 提出的猜想（该猜想认为反射的庞加莱级数是有理函数）以及 de Man 给出的解答。

为解决第一个问题，我们引入了反射前缀，它们自然地由回文约化词产生。我们研究了反射前缀与根偏序、根上的支配序以及二面体反射子群之间的联系。借助与 m-Shi 构形相关的 m-典范自动机，我们证明反射前缀的约化词所构成的语言是正则的。对于第二个问题，我们着重研究仿射 Coxeter 群。在这种情况下，我们利用根偏序哈斯图的对称性，推导出庞加莱级数的一个简洁公式。

1. 引言

设 (W, S) 是一个 Coxeter 系统，且 S 有限。我们用 S^* 表示字母表 S 上的自由幺半群。为区分单词及其对应的群元素，我们用粗体字母表示 S^* 中的单词 $\mathbf{w} = s_1 \cdots s_k$，而用 $w = s_1 \cdots s_k$表示其在 W中的乘积。设 $w \in W$，若单词 $\mathbf{w} = s_1 \cdots s_k \in S^*$是 w的约化词，则 $w = s_1 \cdots s_k$，并且 k在此条件下长度最小；此时， w 的长度为 $\ell(w) = k$。单位元 $e \in W$ 由空词表示，且 $\ell(e) = 0$。我们用 $\mathrm{Red}(w)$ 表示 $w \in W$ 的所有约化词构成的集合，用 $\mathrm{Red} = \bigsqcup_{w \in W} \mathrm{Red}(w)$ 表示 W 中所有约化词构成的集合，其中 $\sqcup$ 表示不交并。最后，对于任意子集 $A \subseteq W$， A 的庞加莱级数是形式幂级数 $A(q) := \sum_{w \in A} q^{\ell(w)}$.

在本文中，我们研究关于 Coxeter 群 W 的反射集合 $T := \bigcup_{w \in W} wSw^{-1}$ 的两个组合学问题：

(1) （关于反射的）回文约化词所构成的语言是正则的吗？(2) 反射集合 T的庞加莱级数是否存在显式且优美的公式？

我们对这些问题的主要贡献如下：

2020 数学主题分类。主要分类 20F55；次要分类 05A05、17B22；05E16。关键词和短语。Coxeter 群、反射、Shi 配置、Garside 阴影。Hohlweg 获得了由 Hohlweg 持有的加拿大自然科学与工程研究委员会资助项目无限 *Coxeter* 群的组合学的部分支持，Biagioli 则获得了 PRIN 2022 项目 2022S8SSW2李理论的代数与几何方面的支持。

- 我们引入反射前缀这一概念，它是一类自然地由反射的回文约化词导出的元素，并研究其性质与根偏序、根上的支配序以及二面体反射子群之间的关系。 W
- 对于任意 Coxeter 系统，我们证明反射前缀的约化词语言 Pref_T是正则的。为此，我们使用与m-典范自动机相关联的 m-Shi 构形（见 [15, §3。4]和 [6]），它们提供了一族有限确定性自动机，用于识别Pref_T。由此，我们证明回文约化词的生成函数是有理函数。
- 对于仿射 Coxeter 群，我们用有理分式推导出反射集合的庞加莱级数的一个简洁表达式。该公式源自根偏序哈斯图的某些对称性。

现在我们来讨论促成本文写作的一些历史背景和动机。若 W是有限的，则对于任意 $A \subseteq W$， $A(q)$显然是一个多项式。无限 Coxeter 系统组合学中的一个自然问题是，确定哪些子集 A 使庞加莱级数 $A(q)$是有理的，也就是说，可以表示为 q中的两个多项式之比。众所周知， $W(q)$是有理函数，参见例如 [1, 推论 7.1.8]。此外， $W(q)$关于标准抛物子群的一个显式递归公式见 [1,命题 7.1.7]。

另一个自然的研究方向，是研究与 Coxeter 系统 (W, S) 中的 S^* 相关的词的生成函数。更确切地说，给定典范投影 $\pi\colon S^* \to W$，它将一个词 $\mathbf{w} = s_1 \cdots s_k$ 映射到元素 $w = s_1 \cdots s_k$，因此自然会考虑子集 $B \subseteq S^*$ 相对于 (W, S) 的 “提升的”庞加莱级数：

$$B(q) = \sum_{\mathbf{w} \in B} q^{\ell(w)},$$

其中，记号 $\ell(w)$ 被理解为 $\ell(\pi(\mathbf{w}))$。

Coxeter 群的组合学中一个长期悬而未决的问题，是枚举 $|\mathrm{Red}(w)|$；详细讨论见 [1, 第123], 页，各种部分结果见 [12, 14]。然而，如果我们考虑所有具有给定长度的元素，就知道长度为 $k \in \mathbb{N}$ 的约化词的数量 r_k 可由下列庞加莱级数枚举

$$\mathrm{Red}(q) = \sum_{\mathbf{w} \in \mathrm{Red}} q^{\ell(w)} = \sum_{k \in \mathbb{N}} r_k q^k,$$

众所周知，它是有理的。证明依据的是存在一个识别语言 Red 的有限确定性自动机；更多细节参见 [1,定理 4.9。1]

据 Brenti 报道， [3], Stembridge 在 1997 年伯克利数学科学研究所的一场开放问题讨论会上提出了以下问题：庞加莱级数是否

$$T(q) = \sum_{t \in T} q^{\ell(t)} \quad \text{is rational?}$$

由于已知反射都容许回文约化词，解决这一问题的一种自然方法是构造一个有限自动机，使其对每个反射恰好识别一个回文约化词。这样一个正则的存在

语言将意味着相应的生成函数是有理的。然而，正则性在回文约束下一般并不能保持。若一个语言是正则的，众所周知，其回文词构成的子语言是上下文无关的，但不一定是正则的；例如，若 $S = \{a, b\}$则 S^* 是正则的，但对抽引引理的标准应用表明，其回文词的子语言并非正则。事实上，Pal，即所有回文约化词的语言，这些词必然是反射的约化词，其正则性仍是一个未决问题。在最近的一篇文章中，Milićević [17] 为有限 Weyl 群中的所有反射提供了回文约化词，但强调了寻找适用于任意 Coxeter 群的一般算法这一挑战。为克服这些挑战，我们转向下文将定义的反射前缀语言。

反射前缀语言。我们回顾一下，（右）弱序$(W, \leq_R)$是由以下条件定义的偏序集：$u \leq_R w$ 若存在一个 $u \in W$的约化词，它是 $w \in W$的某个约化词的前缀。等价地，$u \leq_R w$ 当且仅当$\ell(w) = \ell(u^{-1}w) + \ell(u)$。

众所周知，每个反射的长度都是奇数。设 $t \in T$ 是一个长度为 $\ell(t) = 2k + 1$，我们将 t-前缀定义为任意满足 $p_t \in W$ 的元素$p_t \leq_R t$ 且 $\ell(p_t) = k + 1$。事实证明，$s_1 \cdots s_k s_{k+1} s_k \cdots s_1$ 是 t 的一个回文约化词，当且仅当 $s_1 \cdots s_k s_{k+1}$ 是一个 t-前缀的约化词；参见 §3.1。

反射前缀是研究根偏序（命题3.10）、支配序（命题 3.14）以及求出二面体反射子群的典范生成元（定理 3.19）的有用组合框架。关于反射前缀及其相关语言的主要结果总结于下述定理。

定理 1.1. 设 (W, S) 是一个 *Coxeter* 系统。

(1) 反射前缀的约化词语言 Pref_T 是正则的。(2) 回文约化词的语言为：

$$\mathrm{Pal} = \{s_1 \cdots s_k s_{k+1} s_k \cdots s_1 \in S^* \mid s_1 \cdots s_k s_{k+1} \in \mathrm{Pref}_T\}.$$

(3) 下列庞加莱级数是有理的：

$$\mathrm{Pref}_T(q) = \sum_{\mathbf{w} \in \mathrm{Pref}_T} q^{\ell(w)} = \sum_{k \geq 0} \mathrm{pal}_k \, q^k,$$

其中，pal_k 表示长度为 k 的回文约化词的数量。

(4) 庞加莱级数 $\mathrm{Pal}(q) = q \, \mathrm{Pref}_T(q^2)$ 是有理的。

第一个断言，即 Pref_T 的正则性，在推论 3.26 中得到了确立。证明依赖于一种由与 m-Shi 构形 $(m \in \mathbb{N})$ 相关联的 Garside 阴影自动机族导出的自动机构造；更多细节见 [15, 6]。第二个断言由命题 3.1 得出，而第三和第四个断言是前两个断言的推论。

关于 $T(q)$ 仿射 Coxeter 系统中的闭式公式。 值得注意的是，de Man 于 1999 年 提供了 Stembridge 问题的解答 [5]。然而，作者似乎并未意识到 Stembridge 的问题，而组合学界也未获悉这一解答。这一疏忽或许部分源于 de Man 文章的标题*“Coxeter 群根的数量生成函数”*；该文直到末尾的 [5, §5。2] 中才谈到按长度统计反射。他的

其解答基于 Brink–Howlett自动机 [4] ，该自动机识别 字典序排列的约化词语言，也就是说，每个元素 w 在 $\mathrm{Red}(w)$ 中都有唯一的字典序约化词。

更准确地说，在 [5, 定理 4.1], 中，de Man 证明，正根深度的生成函数$\Phi^+(q)$是若干有理函数之和，这些有理函数由 Brink–Howlett 自动机的一部分状态以及由 T参数化的图族顶点计数得到。因此，生成函数$\Phi^+(q)$是有理函数。由于 $T(q) = q\,\Phi^+(q^2)$，庞加莱级数 $T(q)$也为有理函数。然而，Brink–Howlett 自动机包含许多状态，其中大多数是“死状态”，这使得该自动机在实际应用中难以使用。例如，~在仿射类型 A_2中，Brink–Howlett 自动机的状态数有上界 2^6；de Man 给出了一些 $T(q)$的例子，并借助计算机处理他的公式。

本文针对仿射 Coxeter 系统，通过给出 $T(q)$ 的一个简单公式，为 Stembridge 问题提供了另一种解法。

定理 1.2。 设(W, S) 是一个仿射 *Coxeter* 系统。那么

$$T(q) := \sum_{t\in T} q^{\ell(t)} = q\frac{P(q^2)}{1-q^{2M}},$$

其中 $M \in \mathbb{N}$ 和 $P(q)$ 是一个回文多项式。

上述定理的证明依赖于 Φ^+ 上的根偏序的两个基本对称性（定理 4.4 和 4.6）。这些性质给出了M 和 $P(q)$ 的显式公式（定理 4.11），由此即可推出上述结果。

本文结构。 本文安排如下。在 §2中，我们回顾词与根的组合学所需的一些事实，特别是关于 Coxeter 系统根系上的两个偏序：根偏序和支配序。Brink 和 Howlett 在他们证明 Coxeter 系统是自动机的工作中引入了这两个偏序 [4] 。在 §3中，我们讨论反射前缀、反射的回文约化词以及自动机；在 §4中，我们给出仿射类型中按长度枚举反射的结果。最后，我们在 §5中提出一些尚未解决的问题。

致谢。 CH 谨向 Francesco Brenti、James Parkinson 和 Christophe Reutenauer 致以诚挚谢意，感谢他们进行了极具启发性的讨论。作者尤其感谢 Matthew Dyer 在本项目早期阶段将 de Man 的文章 [5] 介绍给他们。

2. Coxeter 系统中词与根的组合学

本节回顾有关 Coxeter 群组合理论的一些标准结果；更详细的阐述请参见 [1] 。

2.1. **Coxeter 系统中的词的组合学**。

设 (W, S) 为一个 Coxeter 系统。如引言中所回顾的，若 S^* 中的词 $\mathbf{w} = s_1 \cdots s_k$ 是 $w \in W$ 的约化词，我们便简单地说乘积 $w = s_1 \cdots s_k$ 是 $w \in W$ 的约化词。类似地，对于 $u, v, w \in W$，若 $\ell(w) = \ell(u) + \ell(v)$，则称 $w = uv$ 为约化乘积 。此时，我们称 u 是 w 的前缀，且 v 是 w 的后缀 。换言之，u 是 w 的前缀（相应地，后缀），当且仅当存在 u 的一个约化词，它是 w 的某个约化词的前缀（相应地，后缀）。

$w \in W$ 的约化词与 (W, S) 的（右）凯莱图中始于 e、终于 w 的测地线一一对应。回顾引言可知，（右）弱序 $(W, \leq_R)$ 是如下定义的偏序集：若 u 是 w 的前缀，则 $u \leq_R w$。该（右）弱序以（右）凯莱图为哈斯图，其中边 $\{w, ws\}$ 在 $\ell(w) < \ell(ws)$ 时由 w 指向 ws。

的右下降集是

$$D_R(w) = \{s \in S \mid \ell(ws) < \ell(w)\} = \{s \in S \mid ws \leq_R w\}.$$

类似地， 的左下降集是

$$D_L(w) = \{s \in S \mid \ell(sw) < \ell(w)\} = \{sw \in S \mid s \leq_R w\}.$$

对于 $I \subseteq S$，我们考虑标准抛物子群 $W_I = \langle I \rangle$。W/W_I 的最小陪集代表元集合为

$$X_I = \{x \in W \mid x \leq_R xs,\ \forall s \in I\}.$$

尤其是，任意元素 w 都有唯一的约化乘积 $w = uv$，其中 $u \in X_I$且 $v \in W_I$。此外，任意乘积 uv 属于 W，其中 $u \in X_I$ 且 $v \in W_I$，都是约化乘积；例如参见 [1, 命题 2.4。4]以下结论众所周知；为完整起见，我们给出证明。

引理 2.1。设 $w \in W$ 和 $I \subseteq D_R(w)$。则 W_I 是有限的，且 $w = uw_{\circ,I}$ 是一个约化乘积，其中 $u \in X_I$ 且 $w_{\circ,I}$ 是 W_I中的最长元素。

证明。我们考虑约化乘积 $w = uv$，其中 $u \in X_I$ 且 $v \in W_I$。由于$I \subseteq D_R(w)$，并根据约化乘积的定义，对所有 $s \in I$，有：

$$\ell(w) - 1 = \ell(ws) = \ell(u(vs)) = \ell(u) + \ell(vs).$$

因此 $\ell(vs) < \ell(v)$，因为 $\ell(w) = \ell(u) + \ell(v)$。换言之，$D_R(v) = I$，因为 $v \in W_I$。因此，由 [1, 命题 2.3.1 (ii)] 应用于 W_I，可得 W_I 是有限的，且 $v = w_{\circ,I}$。□

Björner 证明了 $(W, \leq_R)$ 是一个交半格，这意味着任意非空子集 $X \subseteq W$ 都存在一个交，即记作 $\bigwedge_R X$ 的最大下界；见 [1, §3.2]。如果存在 $g \in W$，使得对任意 $x \in X$ 都有$x \leq_R g$，则称子集 $X \subseteq W$ 在 W 中有界。因此，任何有界子集 $X \subseteq W$ 都存在一个最小上界 $\bigvee_R X$，称为 X 的并：

$$\bigvee_R X = \bigwedge_R \{g \in W \mid x \leq_R g, \forall x \in X\} \in W.$$

2.2. **Garside 阴影自动机**。(W, S) 的一个*Garside* 阴影是一个子集 $G \subseteq W$，满足 $S \subseteq G$，并且

(i) G 在右弱序下对并封闭，即若 $\emptyset \neq X \subseteq G$ 有界，则 $\bigvee_R X \in G$;

(ii) G 对后缀封闭，即若 $w \in G$ 且 $w = uv$ 是约化的，则 $v \in G$。

与任意 Garside 阴影 G相关联的是一个 *Garside* 投影，其定义如下：

$$\begin{aligned} \pi_G : W &\mapsto G \\ w &\mapsto \bigvee_R \{g \in G \mid g \leq_R w\}. \end{aligned}$$

Garside 阴影由 Dyer 和第二作者提出，用以证明 Artin-Tits 幺半群中存在有限 Garside 族，参见 [11]。他们特别证明了，只要 S 是有限的，有限 Garside 阴影就存在。

在 [15], 中，第二作者与 Nadeau 和 Williams 为任意 Garside 阴影定义了一个确定性自动机，该自动机识别 Red，即（W， S）的约化词语言。令 G 为（W， S）的 Garside 阴影。*Garside* 阴影自动机 $\mathcal{A}_G$ 是定义在字母表 S 上的确定性自动机，定义如下：

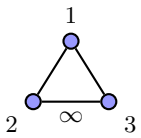
- 状态集合为 G;
- 终态是 G中的元素;
- 初态是单位元 e;
- 转移为： $w \in W \xrightarrow{s} \pi_G(sw) \in G$，当且仅当 $\ell(sw) > \ell(w)$。

自动机 $\mathcal{A}_G$ 由顶点集 G 上的有向边标记图表示，其边由 S中的元素标记，并且对于任意 $w \in G$ 和 $s \in S$，至多存在一条源点为 w 且标签为 s的边（即一个转移）。

定理 2.2 ([15, 定理 1。2])。 设 G 是 (W, S)的有限 *Garside* 阴影，则 A_G 是一个有限确定性自动机，识别语言Red。

因此，作者得以证明 Red 是正则的，且庞加莱级数 Red(q) 是有理函数。关于 Garside 阴影自动机的最新进展，也请参阅 [18, 19, 21] 。

例 2.3。 设 (W, S) 是一个类型为



集合 $G = W_{\{s_1,s_2\}} \cup W_{\{s_1,s_3\}}$ 是 的 Garside 阴影，适用于 (W, S)，其对应的 Garside 阴影自动机 $\mathcal{A}_G$ 如图 1所示。标记为 s_1 的转移以橙色表示， s_2 以紫色表示， s_3 以绿色表示。

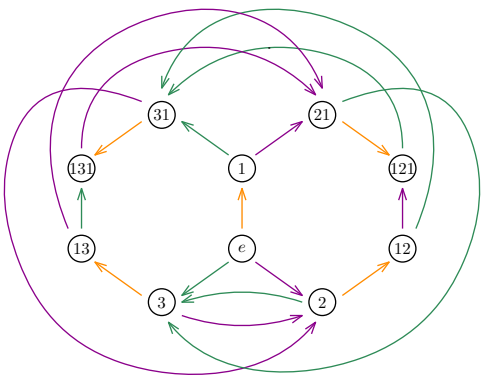


图 1。 例 2.3 中的自动机$\mathcal{A}_G$ 。

2.3. **根系与逆序集**。我们回顾根系和逆序集的一些基本事实；更多细节见 [11, §2。3]。

回顾一下，二次空间（V， B）是指配备了对称双线性型 B 的有限维实向量空间 V。我们用 $O_B(V)$ 表示保持 B 不变的 V 的线性映射群，并用 $Q = \{v \in V \mid B(v, v) = 0\}$ 表示（V， B）的各向同性锥。

任意 Coxeter 系统（W， S）都具有几何表示，即，对于某个二次空间（V，B），W 的忠实表示是其作为 $O_B(V)$ 的离散反射子群，并带有满足以下条件的简单系 $\Delta = \{\alpha_s \mid s \in S\}$：

(1) Δ 是正线性无关的：若 $\sum_{\alpha\in\Delta} a_\alpha \alpha = 0$ 且 $a_\alpha \geq 0$，则所有 $a_\alpha = 0$

（2）若乘积 st 的阶 m_{st} 为有限，则 $B(\alpha_s, \alpha_t) = -\cos\left(\frac{\pi}{m_{st}}\right)$；而 $B(\alpha_s, \alpha_t) \leq -1$ 当且仅当 m_{st} 为无限。（3）对于所有 $s \in S$、$B(\alpha_s, \alpha_s) = 1$.

于是，$s \in S$ 在 V 上的作用是由 $s(v) = v - 2B(\alpha_s, v)\alpha_s$ 定义的反射。记 $\Phi := W(\Delta)$ 为相应的根系，它是正根 $\Phi^+ = \mathrm{cone}(\Delta) \cap \Phi$ 与负根 $\Phi^- := -\Phi^+$ 的不交并。称有序对 (Φ, Δ) 为一个带基根系，其秩为 $|\Delta| = |S|$。作出如下假设即可得到经典几何表示：Δ 是 V 的一组基，并且当 st 在 W 中的阶为无穷时，$B(\alpha_s, \alpha_t) = -1$ 。关于经典几何表示的更多细节，请参见 [[1, §4.1]。

众所周知，Φ^+ 与 T 之间存在一一对应，参见例如 [1, 命题 4.4.5]:

$$\Phi^+ = \{\alpha_t \mid t \in T\} \quad \text{and} \quad T = \{s_\alpha \mid \alpha \in \Phi^+\},$$

其中，α_t 是与反射 $s_{\alpha_t} = t$ 相关联的根。

$w \in W$ 的逆序集是：

$$\Phi(w) = \{\alpha \in \Phi^+ \mid w^{-1}(\alpha) \in \Phi^-\}.$$

众所周知，如果 $w = uv$ 是 W 中的约化乘积，那么

$$\Phi(w) = \Phi(u) \sqcup u(\Phi(v)),$$

例如，参见 [6, 命题 2.2]。特别地，可得：

当且仅当 $\Phi(u) \subseteq \Phi(w)$ 时，• $u \leq_R w$ 在弱序中；

• $\Phi(w) = \{\alpha_{s_1}, s_1(\alpha_{s_2}) \ldots, s_1 \cdots s_{k-1}(\alpha_{s_k})\}$ 如果 $w = s_1 \cdots s_k$ 是 w 的一个约化词。

2.4. **根偏序**。深度函数 $\mathrm{dp} : \Phi^+ \to \mathbb{N}$ 定义为

$$\mathrm{dp}(\beta) := \min\{\ell(w) \mid w \in W, w(\beta) \in \Delta\}.$$

下一个结果是 [1, 引理 4.6.2]，它描述了根的深度在简单反射 $s \in S$ 的作用下如何变化。

引理 2.4. 设 $s \in S$ 与 $\beta \in \Phi^+ \setminus \{\alpha_s\}$。则 $\mathrm{dp}(\alpha_s) = 0$ 与

$$\mathrm{dp}(s(\beta)) = \begin{cases} \mathrm{dp}(\beta) - 1, & \text{if } B(\beta, \alpha_s) > 0; \\ \mathrm{dp}(\beta), & \text{if } B(\beta, \alpha_s) = 0; \\ \mathrm{dp}(\beta) + 1, & \text{if } B(\beta, \alpha_s) < 0. \end{cases} \tag{1}$$

注 2.5. 正根的深度定义 β 上文所提供者类似于最初引入于 [4, 定义 1.5]（另见 [1,定义 4.6.1]），其由下式给出：

$$\mathrm{dp}'(\beta) := \min\{\ell(w) \mid w \in W, w(\beta) \in \Phi^-\}.$$

这等价于 $\mathrm{dp}'(\beta) = \min\{\ell(w) \mid w \in W, w(\beta) \in -\Delta\}$。事实上，若 $w = s_1 \cdots s_k$ 满足 $w(\beta) \in \Phi^-$，则存在一个指标 $1 \leq i \leq k$，使得 $s_i \cdots s_k(\beta) \in \Phi^+$，而 $s_{i-1} \cdots s_k(\beta) \in \Phi^-$。由于 s_{i-1} 对 $\Phi^+ \setminus \{\alpha_{s_{i-1}}\}$ 进行置换，因此可得 $s_i \cdots s_k(\beta) = \alpha_{s_{i-1}} \in \Delta$。于是，这两个定义之间满足 $\mathrm{dp}'(\beta) = \mathrm{dp}(\beta) + 1$。

回顾 [1, §4.6]， Φ^+ 上赋有一个称为根偏序的偏序 $\leq$。

定义 2.6。 根偏序 $(\Phi^+, \leq)$ 定义如下：当且仅当存在 $w \in W$，使得 $w(\alpha) = \beta$ 且 $\ell(w) = \mathrm{dp}(\beta) - \mathrm{dp}(\alpha)$ 时， $\alpha \leq \beta$。

这里我们陈述根偏序的一些众所周知的性质，这些性质可见于 [1, §4.6 与§4.7]。

命题 2.7. 根偏序 $(\Phi^+, \leq)$ 满足：

(i) $(\Phi^+, \leq)$ 是一个以 $dp : \Phi^+ \to \mathbb{N}$ 为秩函数的分次偏序集。*(ii)* 对于 $\alpha \in \Phi^+$，$dp(\alpha) = 0$ 当且仅当 $\alpha \in \Delta$。*(iii)* 覆盖关系由 $\alpha \lhd s(\alpha)$ 给出，其中 $s \in S$ 且 $\alpha \in \Phi^+ \mid \{\alpha_s\}$，使得 $dp(\alpha) < dp(s(\alpha))$（或等价地，若 $B(\alpha, \alpha_s) < 0$）。*(iv)* 我们有 $\alpha < \beta$ 当且仅当存在 $s_1, \ldots, s_k \in S$ 使得 $\alpha \lhd s_1(\alpha) \lhd s_2 s_1(\alpha) \lhd \ldots \lhd s_k \cdots s_2 s_1(\alpha) = \beta$。在此情形下，$dp(\beta) - dp(\alpha) = k = \ell(s_1 \cdots s_k)$。

定义 2.8。 设 $s \in S$ 和 $\alpha \in \Phi^+ \setminus \{\alpha_s\}$。根偏序 $(\Phi^+, \leq)$ 中的覆盖 $\alpha \lhd s(\alpha)$ 称为短覆盖，当且仅当 $-1 < B(\alpha, \alpha_s) < 0$；否则，该覆盖称为长覆盖。

根据 [1, 命题 4.5.4]，，由两个反射 $s_\alpha, s_\beta \in T$ 生成的二面体子群是无限的，当且仅当 $|B(\alpha, \beta)| \geq 1$；因此，覆盖 $\alpha \lhd s(\alpha)$ 是短覆盖（分别为长覆盖），当且仅当由 s_α 和 s 生成的二面体群是有限的（分别为无限的）。

例 2.9。考虑例 2.3 中的 Coxeter 系统。单根为 $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 和 $\Phi^+ = \mathrm{cone}(\Delta) \cap W(\Delta)$。图 2 展示了 Φ^+ 的根偏序哈斯图，深度截至 3。正根用相对于 Δ 的坐标表示；例如，312 表示 $3\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3$。此外，每条边都对应一个覆盖关系，其颜色取决于所应用的简单反射：橙色对应简单反射 s_1，紫色对应 s_2，绿色对应 s_3。最后，覆盖关系为长覆盖时，边以虚线表示；否则为短覆盖。例如，$010 \lhd 110 = s_1(010)$ 是短覆盖关系，因为 $B(\alpha_2, \alpha_1) = -1/2 > -1$，而 $B(\alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_1) = -1/2 - 1 < -1$，因此 $012 \lhd 312 = s_1(012)$ 是长覆盖关系，其中 B 是典范几何表示的双线性形式。

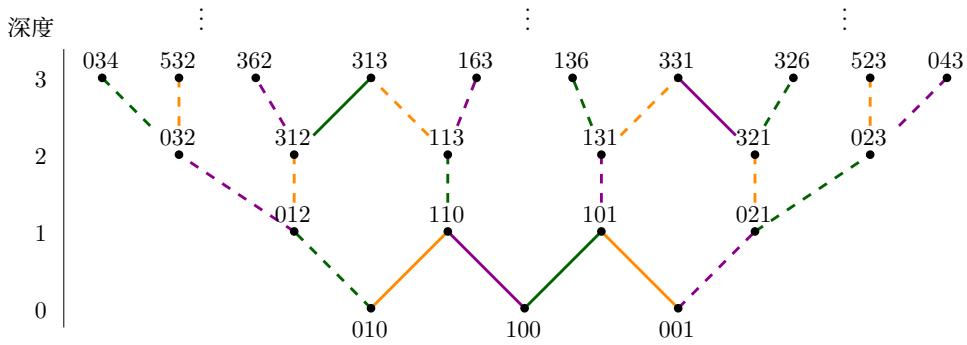


图 2。 例2.9的根偏序哈斯图。

2.5. **小根**。 一个 小根[1] 是指在根偏序 $(\Phi^+, \leq)$中，可通过一连串短覆盖关系从单根到达的正根[1,；例如参见7]§4。我们用 Σ表示小根的集合。

例 2.10。 考虑$(W,\ S)$ 例2.9，则只有五个小根：

$$\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3\}.$$

注 2.11。 在有限考克斯特群中，所有正根都是小根。这是因为有限 Coxeter 系统的根偏序中不含长覆盖关系，因为其中不存在无限二面体子群。

小根由 Brink 和 Howlett 在 [4]中引入，以证明 Coxeter 群是自动的。关键在于以下陈述；另见 [1, 定理 4.7。3]。

定理 2.12 ([4,定理 2.8])。 当且仅当 S 有限时，集合 Σ 有限。

2.6. **支配序**。 我们介绍正根 W 上的另一种偏序 $\leq_d$ ，称为支配序。Brink 和 Howlett 也在 [4] 中引入了这种偏序。设 $\alpha,\ \beta \in \Phi^+$，若对于 $w \in W,\ \beta \in \Phi(w)$ 蕴含 $\alpha \in \Phi(w)$，则称 β 支配 α，记作$\alpha \leq_d \beta$。对于 $\beta \in \Phi^+,\ \beta$ 的支配集为：

$$\mathrm{Dom}(\beta) = \{\alpha \in \Phi^+ \mid \alpha \leq_d \beta\}.$$

正根 $\beta \in \Phi^+$ 的支配深度（或无限深度）定义如下：

$$\mathrm{dp}_\infty(\beta) := |\{\alpha \in \Phi^+ \setminus \{\beta\} \mid \alpha \leq_d \beta\}| = |\mathrm{Dom}(\beta)| - 1.$$

我们有一个与引理 2.4类似的结果，参见例如 [11,命题 3.3]。

命题 2.13. 设 $s \in S$ 和 $\beta \in \Phi^+ \mid \{\alpha_s\}$，则有 $\mathrm{dp}_\infty(\alpha_s) = 0$ 且

$$\mathrm{dp}_\infty(s(\beta)) = \begin{cases} \mathrm{dp}_\infty(\beta), & \text{if } |B(\beta, \alpha_s)| < 1; \\ \mathrm{dp}_\infty(\beta) + 1, & \text{if } B(\beta, \alpha_s) \leq -1; \\ \mathrm{dp}_\infty(\beta) - 1, & \text{if } B(\beta, \alpha_s) \geq 1. \end{cases}$$

[1]在文献中也称为初等根

注意，若 $\alpha \lhd s(\alpha)$ 是 $(\Phi^+, \leq)$ 中的长覆盖关系，则 $\mathrm{dp}_\infty(s(\alpha)) = \mathrm{dp}_\infty(\alpha)+1$；否则 $\mathrm{dp}_\infty(s(\alpha)) = \mathrm{dp}_\infty(\alpha)$。

下面对支配序的刻画将支配深度与正根的深度联系起来，这就是 [4, 引理 2。3]。

命题 2.14。设 $\alpha, \beta \in \Phi^+$，则 $\alpha \leq_d \beta$ 当且仅当 $\mathrm{dp}(\alpha) \leq \mathrm{dp}(\beta)$ 且 $B(\alpha, \beta) \geq 1$；当且仅当 $\alpha = \beta$ 时取等号。

由此可知，若 $\alpha \lhd s(\alpha)$ 是根偏序中的长覆盖关系，则 $\alpha_s \leq_d \alpha$。例如，在例 2.9 中，$\alpha_3 \leq_d \alpha_2 + 2\alpha_3 \leq_d \alpha_1 + 3\alpha_2 + 6\alpha_3$。

注 2.15。根偏序和支配序是本质上不同的序：前者按dp分级，而后者并不按dp_∞分级。此外，例如在图 2 中，我们有 $100 \lhd 110$，但 $100 \not\leq_d 110$，且 $001 <_d 012$，但$001 \not\lhd 012$。

下一个定理同样归功于 Brink 和 Howlett [4]，它表明：若一个根除了自身以外不支配任何其他根，则它是小根；例如参见 [1, 命题4.7。6]其中给出了证明。

定理 2.16。设 $\alpha \in \Phi^+$，则 $\alpha \in \Sigma$ 当且仅当 $\mathrm{dp}_\infty(\alpha) = 0$。

2.7. **m-小根与 m-低元素**。我们称正根 β 为 m-小根，如果对于某个 $m \in \mathbb{N}$，$\mathrm{dp}_\infty(\beta) \leq m$。

我们用 Σ_m 表示 m-小根的集合。注意，根据 $\Sigma_0 = \Sigma$ 定理2.16。以下是 Fu 对 Brink-Howlett 定理2.12 的推广。

定理 2.17([13, 推论 3。9])。集合 Σ_m 对所有 $m \in \mathbb{N}$均为有限集。

对于 $w \in W$，定义 $\Sigma_m(w) := \Phi(w) \cap \Sigma_m$ 为 w 的 m-小逆序集。

定义 2.18. 对于 $m \in \mathbb{N}$，若元素 $w \in W$ 满足 $\Phi(w) = \mathrm{cone}(\Sigma_m(w))$，则称其为 m-低元素。我们用 $L_m := L_m(W)$ 表示 W 中所有 m-低元素组成的集合。

在例 2.3 中，Garside 阴影 G 就是低元素的集合 L_0。以下定理归功于 Dyer 和第二作者 [11, 定理 1。1] 对于$m = 0$ 以及仿射 Coxeter 系统；而以下结果归功于 Dyer [10, 推论 1。7] 对于所有 $m \in \mathbb{N}$以及任意 Coxeter 系统。

定理 2.19. 对于任意 *Coxeter* 系统以及任意 $m \in \mathbb{N}$，集合 L_m 是有限 *Garside* 阴影。

我们将 $\pi_m : W \mapsto \bigvee_R \{g \in L_m \mid g \leq_R w\}$ 在 L_m 上的 *Garside* 投影记作。在 [6]，中，作者证明了 m-低元素恰好是 m-Shi 构形中的极小元素（按右弱序），也就是说，它们是由与 m-小根对应的超平面构成的 Coxeter 排列子构形中的极小元素。这尤其推出了以下有用的命题。

命题 2.20. 设 $w \in W$，则 $\Sigma_m(\pi_m(w)) = \Sigma_m(w)$。

证明。由于 $\pi_m(w) \leq_R w$，我们有 $\Sigma_m(\pi_m(w)) \subseteq \Sigma_m(w)$。反向结论由 [6, 定理 6.4] 得出，其中作者证明了该集合

$$\{g \in W \mid \Sigma_m(g) = \Sigma_m(w)\}$$

有一个唯一的最小长度元素 $x \in L_m$，且 $x \leq_R w$。因此 $\Sigma_m(w) = \Sigma_m(x)$。但是根据定义，$x \leq_R \pi_m(x)$。因此 $\Sigma_m(w) = \Sigma_m(x) \subseteq \Sigma_m(\pi_m(w))$。

□

3. 反射的反射前缀与回文约化词

本节首先定义并陈述反射前缀 与根偏序、支配序以及极大二面体子群的典范生成元相关的性质。随后，我们构造一族由有限 Garside 阴影 L_m ($m \in \mathbb{N}$) 构成的自动机，用以识别反射前缀语言。

3.1. **反射前缀。** 设 $t \in T$ 是 (W, S)中的一个反射。众所周知， $\ell(t) = 2k+1$ 对某个 $k \in \mathbb{N}$ 成立，并且若 $t = s_1 \dots s_k s_{k+1} s_{k+2} \dots s_{2k+1}$ 是 t的一个约化词，则词 $s_1 \dots s_k s_{k+1} s_k \dots s_1$ 是一个 回文约化词 ，对应于t；例如参见 [6, 命题 2。3]。

下述命题特别表明， t 由其任意一个回文约化词的前缀 $s_1 \cdots s_k s_{k+1}$ 唯一确定。

命题 3.1. 设 $t \in T$，其对应的正根为 α_t。设 $w \in W$，并假设存在 $r \in D_R(w)$ 使得 $t = wrw^{-1}$ 且 $\ell(t) = 2\ell(w) - 1$。那么$D_R(w) =${r}。此外：

(1) 若 $w = s_1 \cdots s_k s_{k+1}$ 是 w的约化词，则 $s_{k+1} = r$ 且 $t = s_1 \cdots s_k r s_k \cdots s_1$ 是 t的回文约化词；(2) $\alpha_t = w(\alpha_r) = s_1 \cdots s_k(\alpha_r)$ 且 $\mathrm{dp}(\alpha_t) = k = \ell(w) - 1$。

证明。设 $w = s_1 \cdots s_k r$ 是一个约化词。我们证明 $D_R(w) =${r}。反设 $|D_R(w)| \geq 2$。于是存在一个 $s \in D_R(w)$，满足 $s \neq r$；令 $I =$ {s, r} $\subseteq D_R(w)$。由引理 2.1 可知， W_I 是有限的，且存在 $u \in X_I$ 使得 $w = uw_{\circ,I}$ 是一个约化乘积。因此 $\ell(w) = \ell(u) + m$，其中$m = m_{sr} \geq 2$。现在注意到 $w_{\circ,I} r w_{\circ,I} \in I$，因为有限 Coxeter 系统的最长元素通过共轭作用于简单反射集合。因此

$$t = s_1 \cdots s_k s_{k+1} s_k \cdots s_1 = s_1 \cdots s_k r s_k \cdots s_1 = wrw^{-1} = uw_{\circ,I} r w_{\circ,I} u^{-1},$$

这意味着 $\ell(t) \leq 2\ell(u) + 1 = 2\ell(w) - 2m + 1 < 2\ell(w) - 1 = \ell(t)$，矛盾。其余断言由 r 的唯一性、根的深度的定义以及等式 $\ell(t) = 2\mathrm{dp}(\alpha_t) + 1 = 2\ell(w) - 1$ 得出。□

定义 3.2 (反射前缀)。 若元素 $p \in W$ 满足：对于任意约化词 $p = s_1 \cdots s_{k+1}$，词 $s_1 \cdots s_k s_{k+1} s_k \cdots s_1$ 都是某个反射 $t \in T$ 的回文约化词，则称 $p \in W$ 为一个-前缀。在此情形下，我们称 p 为一个 t

根据命题 3.1，与反射前缀 p相关联的反射 t 不取决于 p 的约化词的选择。由于每个 $t \in T$ 至少有一个回文约化词，因此 t-前缀的集合非空。对于简单反射 $s \in S$，唯一的 s-前缀是 $p_s = s_\circ$

例 3.3 （二面体群）。 设 $W = I_2(m)$，其中 $m \in \mathbb{N}_{\geq 2} \cup \{\infty\}$ 是由简单反射 $\{r, s\}$ 生成的二面体群，且 $m_{rs} = m_\circ$ 回顾一下，对于两个字母 $a, b \in S$ 和 $k \in \mathbb{N}^*$，我们用 $[ab]_k = abab\cdots$ 表示一个由 k 个字母组成、以 a 开头，并交替出现字母 a 和 b 的词。现在我们区分两种情况。

(i) 情形 m为偶数。任意反射 $t \in T$ 都可写成 $t = [rs]_{2k+1}$或 $t = [sr]_{2k+1}$的形式，其中 $0 \leq k < \frac{m}{2}$。在第一种情况下，唯一的 t前缀为

$p_t = [rs]_{k+1}$；而在第二种情况下，唯一的 t前缀为$p_t = [sr]_{k+1}$。

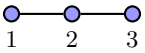
(ii) 情形 m 为奇数。任一反射 $t \in T$ 可写成：

$$t = \begin{cases} [rs]_{2k+1}, & 0 \le k < \frac{m-1}{2}; \\ [sr]_{2k+1}, & 0 \le k < \frac{m-1}{2}; \\ [rs]_m = [sr]_m = w_{\circ,\{r,s\}}. \end{cases}$$

在前两种情形中，存在唯一的 t-前缀，如 (i) 中所述。在最后一种情形中，存在两个 t-前缀： $p_t = [rs]_{\frac{m-1}{2}}$ 与 $p'_t = [sr]_{\frac{m-1}{2}}$。——

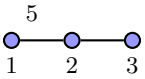
例 3.4 （泛 Coxeter 系统）。 设 (U_n, S) 为秩为 n 的泛 Coxeter 系统，即 $U_n = \langle S \mid s^2 = e$ 对所有 $s \in S\rangle$。每个元素都有唯一的约化词，因此 (U_n, S) 的回文约化词语言由 $\mathrm{Pal} = \{s_1 \cdots s_{i-1} s_i s_{i-1} \cdots s_1 \mid s_j \in S$与 $s_j \neq s_{j+1}\}$ 给出。此外，反射前缀的约化词语言与 W 中所有约化词构成的集合一致，即 $\mathrm{Pref}_T = \mathrm{Red}$。

例 3.5。 在一个$W, S)$ 类型为 A_3的 Coxeter 系统中，考虑反射[2]$t = 12321$。



该反射还有其他约化表达式，即 $t = 12321 = 13231 =$31213 $= 32123$。相应地，它有三个不同的 t-前缀： $p_t = 123$、$p'_t = 132 = 312$ 和 $p''_t = 321$。

注 3.6。 若 $t \in T$ 且 p_t 是一个 t-前缀，则一般而言，并不一定存在一个 r-前缀 p_r ，使得对于所有 $\alpha_r \in \Phi(p_t)$都有 $p_r \le_R p_t$ 。例如，考虑一个类型为 H_3的 Coxeter 系统，其对应的 Coxeter 图如下：



取 $t = 121232121 \in T$、 $p_t = 12123$ 和 $r = 212$。那么 $\alpha_r = 2(\alpha_1) \in \Phi(p_t)$，事实上 $p_t^{-1}(2(\alpha_1)) = 32121(2(\alpha_1)) = 312121(\alpha_1) \in \Phi^-$，但 $212 \not\le_R 12123$。

注 3.7.

(1) 命题3.1 表明，任何反射前缀都是一个 *Grassmannian* 元素，也就是说，右下降至多有一个的元素。刻画反射前缀这一 Grassmannian 元素子集将很有意思。(2) 按定义，任何 t-前缀 p_t 都满足 $p_t \le_R t$ 处于右弱序中 $(W, \le_R)$。(3) 由于 $t^{-1} = t$， t-后缀的概念也成立，并且所有适用于t-前缀的结果也适用于 t-后缀。

以下结论由命题 3.1 以及如下事实推出： $\ell(t) = 2\,\mathrm{dp}(\alpha_t) + 1$ 对任意 $t \in T$成立。

推论 3.8. 设 $w \in W$和 $w = s_1 \cdots s_k r$ 是一个约化词。设 $t \in T$，则以下陈述等价：

(1) *w is a t-prefix;*

[2]为简化记号，我们用 i 代替 s_i。

(2) $t = s_1 \cdots s_k r s_k \cdots s_1$ 是一个回文约化词。(3) $\alpha_t = s_1 \cdots s_k(\alpha_r)$ 且 $\mathrm{dp}(\alpha_t) = \ell(w) - 1$。特别地，对于任意 t- 前缀 p_t, $\alpha_t \in \Phi(p_t)$ 。

上述推论导出了这一有用的结论。

命题 3.9。 设 $t \in T$，其对应的正根为 $\alpha_t \in \Phi^+$。对于任意 t-前缀p_t 以及任意 $\alpha \in \Phi(p_t)$，有 $\mathrm{dp}(\alpha) \leq \mathrm{dp}(\alpha_t)$；当且仅当 $\alpha = \alpha_t$ 时取等式。

证明。考虑一个 t-前缀 p_t 的约化词 $p_t = s_1 \cdots s_k r$。根据推论 3.8，有 $\mathrm{dp}(\alpha_t) = k$。现在，令 $\alpha \in \Phi(p_t)$，使得 $\alpha \neq \alpha_t$。于是存在 $1 \leq i \leq k-1$，使得 $\alpha = s_1 \cdots s_i(\alpha_{s_{i+1}})$。根据深度的定义，有 $\mathrm{dp}(\alpha) \leq i - 1$。因此 $\mathrm{dp}(\alpha) < \mathrm{dp}(\alpha_t)$，这就证明了对所有 $\alpha \neq \alpha_t$ 不等式均成立。□

3.2. **反射前缀与根偏序**。 以下命题表明，反射前缀的约化词与根偏序中的饱和链之间存在对应关系。

命题 3.10。 设 $t \in T$ 和 $\alpha_t \in \Phi^+$ 是相应的正根。

(1) 设 $\alpha_r \lhd s_k(\alpha_r) \lhd \cdots \lhd s_1 \cdots s_{k-1} s_k(\alpha_r) = \alpha_t$ 是 $(\Phi^+, \leq)$ 中的一条饱和链，其中 $r \in S$。那么 $p_t = s_1 \ldots s_k r$ 是某个 t-前缀 p_t 的约化词。*(2)* 设 p_t 是一个 t-前缀，并固定一个约化词 $p_t = s_1 \cdots s_k r$，其中 r 是唯一的右下降。那么 $\alpha_r \lhd s_k(\alpha_r) \lhd \cdots \lhd s_1 \cdots s_{k-1} s_k(\alpha_r) = \alpha_t$ 是 $(\Phi^+, \leq)$ 中的一条饱和链。

证明。（1）设 $r \in S$and $\alpha_r \lhd s_k(\alpha_r) \lhd \cdots \lhd s_1 \cdots s_{k-1} s_k(\alpha_r) = \alpha_t$是 $(\Phi^+, \leq)$ 中的一条饱和链。因此 $\mathrm{dp}(\alpha_t) = k$。令 $p_t = s_1 \cdots s_k r$，并注意到 $\alpha_t = s_1 \cdots s_k(\alpha_r)$。若 $s_1 \cdots s_k$ 不是约化词，则 $\mathrm{dp}(\alpha_t) < k$，这与假设矛盾。因此 $s_1 \cdots s_k$ 是约化词。若 $s_1 \cdots s_k r$ 不是约化词，则 $\ell(s_1 \cdots s_k r) < \ell(s_1 \cdots s_k)$。因此 $\alpha_t = s_1 \cdots s_k(\alpha_r) \in \Phi^-$，再次导出矛盾。因此 $s_1 \cdots s_k r$ 是 p_t 的一个约化词。由于 $\ell(t) = 2\mathrm{dp}(\alpha_t) + 1$，回文词 $t = s_{s_1 \cdots s_k(\alpha_r)} = s_1 \cdots s_k r s_k \cdots s_1$ 是约化的。因此 p_t 是一个 t-前缀。(2) 令 p_t 为一个 t-前缀，并选取一个约化词 $p_t = s_1 \cdots s_k r$. 回忆一下，根据命题 3.1， r 是 p_t的唯一右下降。根据推论 3.8，回文词

$$s_1 \cdots s_{i-1} s_i \cdots s_k r s_k \cdots s_i s_{i-1} \cdots s_1$$

是约化的。因此，对于任意 $1 \leq i \leq k$，回文词 $s_i \cdots s_k r s_k \cdots s_i$ 也是约化的。

现在反设存在 $1 \leq i \leq k-1$，使得 $s_i \cdots s_k(\alpha_r)$ 不是 $s_{i+1} \cdots s_k(\alpha_r)$ 的覆盖。换言之，根据命题 2.7，$\mathrm{dp}(s_i \cdots s_k(\alpha_r)) \leq \mathrm{dp}(s_{i+1} \cdots s_k(\alpha_r))$。取满足该性质的极大 i，即 $\alpha_r \lhd s_k(\alpha_r) \lhd \cdots \lhd s_{i+1} \cdots s_k(\alpha_r)$。因此 $\mathrm{dp}(s_{i+1} \cdots s_k(\alpha_r)) = k - i$。于是 $\mathrm{dp}(s_i \cdots s_k(\alpha_r)) \leq k - i < \ell(s_i \cdots s_k) = k - i + 1$。根据推论 3.8，元素 $s_1 \cdots s_k r$ 不是反射前缀，而回文词 $s_i \cdots s_k r s_k \cdots s_i$ 不是约化词，这就产生了矛盾。□

例 3.11. 考虑 Coxeter 系统 (W, S)，其类型为 A_3，并取 $t = 12321$。在例 3.5中，我们看到反射 t 有 3 t-前缀： $p_t = 123$、$p'_t = 132 = 312$和 $p''_t = 321$。根据命题 3.10，可以通过考察 W的根偏序中从单根到 $\alpha_t = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$的饱和链，来确定这些 t-前缀。在图 3中，与这些

t-前缀以高亮方式标出。注意， p'_t 有两个约化表达式，因此有两条相应的饱和链从 α_2 出发。

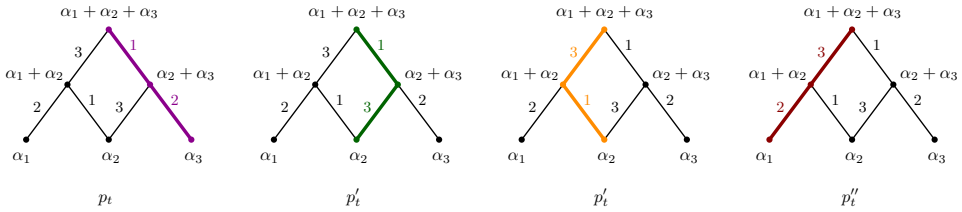


图 3. 与下列各项对应的饱和链： t-前缀，见例 3.11。

回顾一下，左弱序 $(W, \leq_L)$ 定义为： $u \leq_L v$ 当且仅当 u 是 v 的后缀。

推论 3.12. 设 $t \in T$，其对应的根为 $\alpha_t \in \Phi^+$。考虑 p_t 是一个 t-前缀，且 r 是其唯一的右下降。设 $u \in W$ 满足 $e <_L u \leq_L p_t$ 属于 $(W, \leq_L)$，则 $-u(\alpha_r) \leq \alpha_t$ 属于 $(\Phi^+, \leq)$。

证明。 由于 $e <_L u \leq_L p_t$，存在一个约化词 $p_t = s_1 \cdots s_k r$ 以及 $1 \leq i \leq k$，使得 $u = s_i \cdots s_k r$。因此 $-u(\alpha_r) = s_i \cdots s_k(\alpha_r) \leq s_1 \cdots s_k(\alpha_r) = -p_t(\alpha_r) = \alpha_t$ 根据命题 3.10。 □

下面的定理给出了用逆序集刻画反射前缀的方法。

定理 3.13。 设 $w \in W$ 和 $r \in D_R(w)$。设 $t \in T$ 满足 $\alpha_t = -w(\alpha_r) \in \Phi(w)$。那么， w 是一个 t-前缀，当且仅当对所有 $\alpha \in \Phi(w)$，都有 $B(\alpha, \alpha_t) > 0$ 。

证明。 首先假设 $w = p_t$ 是一个 t-前缀。根据命题 3.10，可得

$$\alpha_r \lhd s_k(\alpha_r) \lhd \cdots \lhd s_1 \cdots s_{k-1} s_k(\alpha_r) = \alpha_t$$

与约化词 $p_t = s_1 \cdots s_k r$相关联的饱和链。根据根偏序中覆盖关系的刻画，参见命题 2.7，可得:

$$B(s_{i+1} \cdots s_k(\alpha_r), \alpha_{s_i}) < 0, \quad \text{for all } 1 \leq i \leq k-1.$$

由于 $p_t = s_1 \cdots s_k r$ 是一个约化词，我们知道 p_t 的逆序集为:

$$\Phi(w) = \{\alpha_{s_1}, s_1(\alpha_{s_2}), \ldots, s_1 \cdots s_{k-1}(\alpha_{s_k}), s_1 \cdots s_k(\alpha_r) = \alpha_t\}$$

设 $\alpha \in \Phi(p_t)$。若 $\alpha = \alpha_t$ ，则 $B(\alpha_t, \alpha_t) > 0$。若 $\alpha = \alpha_{s_1}$，则

$$B(\alpha_t, \alpha_{s_1}) = B(s_1 \cdots s_k(\alpha_r), \alpha_{s_1}) = -B(s_2 \cdots s_k(\alpha_r), \alpha_{s_1}) > 0.$$

若 $\alpha \notin \{\alpha_t, \alpha_{s_1}\}$，则存在 $2 \leq i \leq k-1$，使得 $\alpha = s_1 \cdots s_{i-1}(\alpha_{s_i})$，然后

$$B(\alpha_t, \alpha) = B(s_1 \cdots s_k(\alpha_r), s_1 \cdots s_{i-1}(\alpha_{s_i})) = -B(s_{i+1} \cdots s_k(\alpha_r), \alpha_{s_i}) > 0.$$

因此，对于所有 $\alpha \in \Phi(p_t)$， $B(\alpha, \alpha_t) > 0$ 。

反过来，假设对于所有 $\alpha \in \Phi(w)$， $B(\alpha, \alpha_t) > 0$ 。考虑一个约化词$w = s_1 \cdots s_k r$，使得 $\alpha_t = s_1 \cdots s_k(\alpha_r)$。要证明 w 是一个 t-前缀，只需证明:

$$B(s_{i+1} \cdots s_k(\alpha_r), \alpha_{s_i}) < 0, \quad \text{for all } 1 \leq i \leq k-1.$$

这直接来自证明第一部分中的相同计算。□

3.3. **反射前缀与支配序。** 反射前缀提供了一种高效计算 $\beta \in \Phi^+$ 的支配集的方法:

$$\mathrm{Dom}(\beta) = \{\alpha \in \Phi^+ \mid \alpha \leq_d \beta\}$$

及其无限深度$\mathrm{dp}_\infty(\beta)$; 见§2.6。

命题 3.14. 设 $\beta \in \Phi^+$, 并设 $t = s_\beta$ 为相应的反射。对任意 t-前缀 p_t , 我们有:

$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}(\beta) &= \{\alpha \in \Phi(p_t) \mid B(\alpha,\beta) \geq 1\} \\ &= \{\beta\} \sqcup \{\alpha_s \in \Phi(p_t) \mid |\langle s,t\rangle| = \infty\}.\end{aligned}$$

特别地, $\mathrm{dp}_\infty(\beta) = |\{\alpha_s \in \Phi(p_t) \mid |\langle s,t\rangle| = \infty\}|$。

证明。 第二个等式源于一个众所周知的事实: 包含 s、 t 的二面体子群是无限群, 当且仅当 $|B(\alpha_s, \alpha_t)| \geq 1$ 并且 $s \neq t$, 例如参见 [1,命题 4.5。4]。

我们证明第一个等式。设 $A = \{\alpha \in \Phi(p_t) \mid B(\alpha,\beta) \geq 1\}$。令 $\alpha \in A$, 则由命题 3.9, $\mathrm{dp}(\alpha) \leq \mathrm{dp}(\alpha_t) = \mathrm{dp}(\beta)$。因此, 由命题 2.14 可得 $\alpha \in \mathrm{Dom}(\beta)$。令 $\alpha \in \mathrm{Dom}(\beta)$, 则由命题 2.14 再次可得 $B(\alpha,\beta) \geq 1$ 。现在, 由推论 3.8 可得 $\beta \in \Phi(p_t)$。所以 $p_t^{-1}(\beta) \in \Phi^-$。由于 $\alpha \leq_d \beta$, 根据支配序的定义, 我们有 $p_t^{-1}(\alpha) \in \Phi^-$。换言之, $\alpha \in \Phi(p_t)$, 证明完毕。□

例 3.15。考虑例 2.3 的 Coxeter 系统。设 $t = 2321232 \in T$与 $p_t = 2321$, 并称之为 $\beta = \alpha_t$。我们有 $B(\alpha_1,\alpha_2) = B(\alpha_1,\alpha_3) = -1/2$ 以及$B(\alpha_2,\alpha_3) = -1$。因此, $\Phi(p_t) = \{\alpha_2, 2\alpha_2+\alpha_3, 3\alpha_2+2\alpha_3, \beta = \alpha_1+6\alpha_2+3\alpha_3\}$。最后, 为得到 β 的支配集, 我们必须计算 β 与 $\Phi(p_t)\setminus\{\beta\}$ 的根之间的双线性形式B , 并查看该值何时等于或大于 1。因此不难验证 $\mathrm{Dom}(\beta) = \{\alpha_2, 2\alpha_2+\alpha_3\}$, 且 $\mathrm{dp}_\infty(\beta) = 2$。

3.4. **反射前缀与二面体反射子群。** 本节将说明如何利用反射前缀计算任意二面体反射子群 W_I的 W 的典范生成元。这一方法引出了 §3.5中的一种算法, 该算法不需要几何表示即可运行。

设 W_I是 W 的一个反射子群, 即, 对某个 $A \subseteq T$, 有 $W' = \langle A\rangle$。 W_I中的反射集合为 $T_{W'} = T \cap W_I$。记:

$$\Phi_{W'} = \{\alpha \in \Phi \mid s_\alpha \in W'\} \quad \text{and} \quad \Delta_{W'} = \{\alpha \in \Phi^+ \mid \Phi(s_\alpha) \cap \Phi_{W'} = \{\alpha\}\}.$$

Dyer [8] 证明了, $(W_I, \chi(W'))$ 是一个 Coxeter 系统, 其典范生成元集合为:

$$\chi(W') = \{r \in T_{W'} \mid \ell(tr) < \ell(r),\ \forall t \in T_{W'}\} = \{s_\alpha \in T \mid \alpha \in \Delta_{W'}\}.$$

此外, 他还证明 $\Phi_{W'}$ 是 $(W_I, \chi(W_I))$ 的根系, 其简单系为 $\Delta_{W'}$, 正根集合为 $\Phi^+_{W'} = \Phi^+ \cap \Phi_{W'}$。特别地, $T_{W'} = \{s_\alpha \mid \alpha \in \Phi^+_{W'}\}$。我们用 $\ell_{W'}$: $W_I \to \mathbb{N}$ 表示相对于 $(W_I, \chi(W_I))$ 的长度函数。关于本节所用性质的综述, 请参阅 [6, §2.8 和 §2.9] 。

任意元素 $w \in W$都有唯一的分解 $w = uv$, 其中 $u \in W_I$、 $v \in X_{W'}$, 且 $X_{W'} = \{x \in W \mid \ell(s_\alpha x) > \ell(x)\ \forall \alpha \in \Delta_{W'}\}$是极小陪集

的代表元 $W_I\backslash W$。此外， $\Phi_{W_I}(u)$ 是 u 相对于 Coxeter 系统 $(W_I, \chi(W_I))$ 的逆序集，满足以下等式：

$$\Phi_{W_I}(u) = \Phi(w) \cap \Phi_{W_I} = \Phi(u) \cap \Phi_{W_I} \text{ and } |\Phi_{W_I}(u)| = \ell_{W_I}(u).$$

从现在起，固定 r、$t \in T$，使得 $r \neq t$，并令 $W_I = \langle r, t \rangle$ 为由 r 与 t 生成的二面体反射子群，其典范生成元集为 $\chi(W_I) = \{s_1, s_2\}$，简单系为 $\Delta_{W_I} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$。令 $m = \mathrm{ord}(s_1 s_2) \in \mathbb{N}_{\geq 2} \sqcup \{\infty\}$。回想一下，对于两个字母 s、$t \in T$ 与 $k \in \mathbb{N}^*$，我们用 $[st]_k = ststst\cdots$ 表示以 s 开头、交替使用字母 s 与 t、含有 k 个字母的词。对于 $0 \leq k < m/2$，记 $t_{1,k} = [s_1 s_2]_{2k+1}$ 与 $t_{2,k} = [s_2 s_1]_{2k+1}$。反射集 T_{W_I} 容许一个划分 $T_{W_I} = T^1_{W_I} \sqcup T^2_{W_I}$，其中：

$$T^1_{W_I} = \{t_{1,k} \mid 0 \leq k < m/2\} \quad \text{and} \quad T^2_{W_I} = \{t_{2,k} \mid 0 \leq k < m/2\}.$$

对所有 $0 \leq k < m/2$，注意到字 $t_{1,k} = [s_1 s_2]_{2k+1}$ 与 $t_{2,k} = [s_2 s_1]_{2k+1}$ 均为既约字，且 $\ell_{W_I}(t_{i,k}) = 2k+1$。我们考虑 T_{W_I} 上的如下全序：

$$s_1 = t_{1,0} \prec \cdots \prec t_{1,k} \prec t_{1,k+1} \prec \cdots \prec t_{2,l+1} \prec t_{2,l} \prec \ldots t_{2,1} \prec t_{2,0} = s_2,$$

其中 $0 \leq k, l < m/2 - 1$。这是 反射序，定义在 T_{W_I} 上，其意义见 [7,定义 2。1]；另见 [1,§5。2]。

记 $\alpha_{i,k} \in \Phi^+_{W_I}$ 为对应于反射 $t_{i,k}$ 的根。由此我们得到一个划分 $\Phi^+_{W_I} = \Phi^1_{W_I} \cup \Phi^2_{W_I}$，其中 $\Phi^i_{W_I} = \{\alpha_{i,k} \mid 0 \leq k < m/2\}$；此外，$\Phi^1_{W_I} \cap \Phi^2_{W_I}$ 在 m 为奇数时为 $\{\alpha_{1,(m-1)/2} = \alpha_{2,(m-1)/2}\}$，在 m 为无穷或偶数时为空。这一分解给出 $\Phi^+_{W_I}$ 上的一个全序：

$$\alpha_1 = \alpha_{1,0} \prec \cdots \prec \alpha_{1,k} \prec \alpha_{1,k+1} \prec \cdots \prec \alpha_{2,l+1} \prec \alpha_{2,l} \prec \ldots \alpha_{2,1} \prec \alpha_{2,0} = \alpha_2, \tag{2}$$

其中 $0 \leq k, l < m/2 - 1$。下面的命题表明，反射前缀在二面体子群上的限制仍是反射前缀。

命题 3.16. *设 $t \in T$ 与 W' 是包含 t 的二面体反射子群，其典范生成元集为 $\chi(W') = \{s_1, s_2\}$，且 $m = \mathrm{ord}(s_1 s_2)$。设 p_t 是一个 t-前缀。将 $p_t = u_t v$ 写成 $u_t \in W'$ 与 $v \in X_{W_I}$。则 u_t 是 Coxeter 系统 $(W', \chi(W'))$ 的一个 t-前缀，并且要么 $\Phi_{W'}(u_t) \subseteq \Phi^1_{W'}$，要么 $\Phi_{W'}(u_t) \subseteq \Phi^2_{W'}$。*

在证明上述命题之前，我们需要两条引理。首先，我们需要如下有用性质，它是 Dyer 的“Bruhat 图的函子性” [9]的推论：对任意 $s, t \in T_{W_I}$，使得 $\ell_{W_I}(s) < \ell_{W_I}(t)$，我们有 $\ell(s) < \ell(t)$，换言之，$\mathrm{dp}(\alpha_s) < \mathrm{dp}(\alpha_t)$；例如参见 [6, §2.8-Eq.(4)]。由这一讨论，我们推出下面的引理。

引理 3.17. 在如上所述对 $\Phi^+_{W_I}$ 施加全序后，函数 $\mathrm{dp}\colon \Phi_{W_I} \to \mathbb{N}$ 在 $\Phi^1_{W_I}$ 上严格递增，并在 $\Phi^2_{W_I}$ 上严格递减。□

其次，Dyer 在 [7] 中证明了，W 中元素的逆序集是反射序的初始段。在我们的情形中，这意味着任意逆序集 $\Phi_{W_I}(u)$ 都是一个从 α_1 开始或从 α_2 开始的有限段，即在等式 (2) 中，是一个从 α_1 开始或以 α_2 结束的饱和链。此外，当且仅当 u 是 $w_\circ$ 中的最长元素 W_I、W' 和 W' 因而为有限时，$\Phi_{W_I}(u)$ 才同时包含 α_1 和 α_2。我们在下面的命题中给出这一结论；该命题直接由定义 2.1 和引理 2.11] 推出，只需考虑 T_{W_I} 上述反射序或其对偶序即可。

引理 3.18。令 $u \in W'$，则存在 $0 \le k < m/2$，使得下列等式之一成立：

(1) $\Phi_{W'}(u) = \{\alpha_1 = \alpha_{1,0}, \alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{1,k}\}$；(2) $\Phi_{W'}(u) = \{\alpha_2 = \alpha_{2,0}, \alpha_{2,1}, \dots, \alpha_{2,k}\}$；(3) $m < \infty$ 为奇数，$k < m/2 - 1$ 且

$$\Phi_{W'}(u) = \{\alpha_1 = \alpha_{1,0}, \dots, \alpha_{1,(m-1)/2} = \alpha_{2,(m-1)/2}, \alpha_{2,(m-3)/2}, \dots, \alpha_{2,k}\}$$

或 $\Phi_{W'}(u) = \{\alpha_2 = \alpha_{2,0}, \dots, \alpha_{2,(m-1)/2} = \alpha_{1,(m-1)/2}, \alpha_{1,(m-3)/2}, \dots, \alpha_{1,k}\}$

(4) $m < \infty$ 为偶数且

$$\Phi_{W'}(u) = \{\alpha_1 = \alpha_{1,0}, \dots, \alpha_{1,m/2-1}, \alpha_{2,m/2-1}, \alpha_{2,(m-2)/2}, \dots, \alpha_{2,k}\}$$

$$or \quad \Phi_{W'}(u) = \{\alpha_2 = \alpha_{2,0}, \dots, \alpha_{2,m/2-1}, \alpha_{1,m/2-1}, \alpha_{1,(m-2)/2}, \dots, \alpha_{1,k}\}$$

此外，$\alpha_1, \alpha_2 \in \Phi_{w'}(u)$ 当且仅当 $u = w_{\circ,W'}$。 □

命题 3.16 的证明。设 $r \in S$ 满足 $D_R(p_t) = \{r\}$，由命题 3.1 可知。将 $p_t = wr$ 写成一个约化乘积。若 $w = e$，则 $p_t = r$ 且 $t = r \in \chi(W')$。因此，t 是 $(W', \chi(W'))$ 中的 t-前缀。假设 $w \neq e_\circ$ 则 $\alpha_t = -p_t(\alpha_r) = w(\alpha_r)$ 且 $\Phi(w) = \Phi(p_t) \setminus \{\alpha_t\}$。因此，$\alpha_t$ 是 $\Phi_{W'}(u_t$ 的每个表达式中的最左根（见引理 3.18）。但是，根据命题 3.9，$\mathrm{dp}(\alpha_t)$ 是 $\Phi(p_t)$ 中根的深度的唯一最大值。因此，$\mathrm{dp}(\alpha_t)$ 是 $\Phi_{W'}(u_t)$ 上深度的唯一最大值。所以根据引理 3.17，$\Phi_{W'}(u_t)$ 唯一可能的取值为：

(a) $\Phi_{W'}(u_t) = \{\alpha_1 = \alpha_{1,0}, \alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{1,k}\}$，其中某个 $1 \le k < m/2$，且 $\alpha_t = \alpha_{1,k_\circ}$ 于是 $\Phi_{W'}(u_t) \subseteq \Phi^1_{W'^\circ}$ 因此，根据定义，$u_t = [s_1 s_2]_k$ 是 $(W', \chi(W'))$ 中的一个 t-前缀。(b) $\Phi_{W'}(u) = \{\alpha_2 = \alpha_{2,0}, \alpha_{2,1}, \dots, \alpha_{2,k}\}$，其中某个 $1 \le k < m/2$，且 $\alpha_t = \alpha_{2,k_\circ}$ 于是 $\Phi_{W'}(u_t) \subseteq \Phi^2_{W'}$，并且 $u_t = [s_2 s_1]_k$ 是 $(W', \chi(W'))$ 中的一个 t-前缀。□

3.5.**二面体反射子群的反射前缀与典范生成元**。作为命题3.16 以及引理3.18 中逆序集描述的推论，我们得到以下算法，用于计算二面体反射子群的典范生成元及其简单系。当人们希望求出反射子群的典范生成元集合时，此算法尤其有用，正如 [8, 命题 3.7]。

定理 3.19。设 $r, t \in T$ 满足 $r \neq t$，且 $W' = \langle r, t \rangle$ 是由 r 和 t 生成的二面体反射子群。设 p_r 是一个 r-前缀，p_t 是一个 t-前缀。

(1) 若 $|\Phi_{W'}(p_r)| = |\Phi_{W'}(p_t)| = 1$，则：

$$\Delta_{W'} = \{\alpha_r, \alpha_t\} \quad and \quad \chi(W') = \{r, t\}.$$

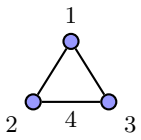
(2) 若 $|\Phi_{W'}(p_r)| > 1$（分别地，$|\Phi_{W'}(p_t)| > 1$），则：

$$\Delta_{W'} = \{\alpha_1, \alpha_2\} \quad and \quad \chi(W') = \{s_1, s_2\},$$

其中，α_1 是 $\Phi(p_r) \cap \Phi_{W'}$（分别地，$\Phi(p_t) \cap \Phi_{W'}$）中深度最小的唯一根，而 s_1 (α_2) 是 $\Phi(p_r) \cap \Phi_{W'} \setminus \{\alpha_1\}$（分别地，$\Phi(p_t) \cap \Phi_{W'} \setminus \{\alpha_1\}$）中深度最小的唯一根。□

上述定理中所述算法的优点是，只需计算根 $\Phi(p_r)$ 和 $\Phi(p_t)$，而不必先计算深度达到某个值的正根子集。

例 3.20. 设 (W, S) 属于类型



取 $t = 3132313$ 和 $r = 3123213$，并令 $W' = t, r$。考虑 t-前缀 $p_t = 3132$ 和 r-前缀 $p_r = 3123$。为了应用定理 3.19 中的算法，我们需要计算集合 $\Phi_{W'}(p_r)$ 和 $\Phi_{W'}(p_t)$。首先，p_t 和 p_r 的逆序集分别为 $\Phi(p_t) = \{\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1, \alpha_t\}$ 和 $\Phi(p_r) = \{\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_3, 31(\alpha_2)\ \alpha_t\}$。（根据引理 3.17，我们只需计算 $\Phi^+_{W'}$ 中深度不超过 $\max(\mathrm{dp}(\alpha_t), \mathrm{dp}(\alpha_r))$ 的根。）此外，$r(\alpha_t) = 3123213(313(\alpha_2)) = 312323(\alpha_2) = 313232(\alpha_2) = 312(\alpha_2) = -31(\alpha_2)$，因此我们有 $31(\alpha_2) \in \Phi^+_{W'} \cap \Phi(p_r) = \Phi_{W'}(p_r)$。事实上，我们有 $\Phi_{W'}(p_r) = \{31(\alpha_2)\ \alpha_r\}$，其中 $\mathrm{dp}(31(\alpha_2)) = 2$ 且 $\mathrm{dp}(\alpha_r) = 3$。现在我们处于定理 3.19(2) 的情形：由于 $\mathrm{dp}(31(\alpha_2)) < \mathrm{dp}(\alpha_r)$，因此 $\Delta_{W'} = \{31(\alpha_2), 31213(\alpha_r)\} = \{\alpha_1, 31(\alpha_2)\}$，且 $\chi(W') = \{1, 31213\}$。

关于不借助几何表示计算典范生成元。在 SageMath [22] 程序中，我们只使用了 (W, S) 的抽象定义及其反射集 T。T-逆序集已知 $w \in W$ 为：

$$T(w) = \{r \in T \mid \ell(rw) < \ell(w)\} \quad \text{and} \quad \Phi(w) = \{\alpha_r \mid r \in T(w)\}.$$

命题3.14允许我们不再考虑正根上的支配序，而是考虑反射集 T 上的支配序。给定 $t \in T$：

(1) 我们计算 t 的一个约化词，并取相应的 t-前缀 p_t；(2) 我们确定 p_t 的 T-逆序集 $T(p_t)$；(3) 我们按以下方式构造 T-支配集：

$$\mathrm{Dom}_T(t) = \{t\} \sqcup \{r \in T(p_t) \text{ such that } |\langle r, t\rangle| = \infty\}.$$

现在设 $r, t \in T$，其中 $r \neq t$，并令 $W' = \langle r, t\rangle$ 为由 r 和 t 生成的二面体反射子群。设 p_r 为一个 r-前缀，p_t 为一个 t-前缀。那么，定理 3.19 中的条件是在集合 $T(p_r) \cap W_I$ 和 $T(p_t) \cap W_I$ 上检验的；在根上计算的 $\mathrm{dp}(\cdot)$ 则替换为在 $T(p_r) \cap W_I$ 或 $T(p_t) \cap W_I$ 中的反射上计算的 $\ell(\cdot)$。

注 3.21 (关于极大二面体反射子群)。为了计算包含 t，r 的极大二面体反射子群 W' 的典范生成元，我们需要一个几何表示来确保其极大性，即

$$\Phi_{W'} = \Phi \cap (\mathbb{R}\alpha_r \oplus \mathbb{R}\alpha_t).$$

然后，我们使用上述算法，并令

$$T_{W'}(p_r) = \{u \mid \alpha_u \in \Phi_{W'}(p_r)\} \quad \text{and} \quad T_{W'}(p_t) = \{u \mid \alpha_u \in \Phi_{W'}(p_t)\}.$$

其中 $\Phi_{W'}(p_r) = \Phi(p_r) \cap \Phi_{W'} = \Phi(p_r) \cap (\mathbb{R}\alpha_r \oplus \mathbb{R}\alpha_t)$ 并且

$$\Phi_{W'}(p_t) = \Phi(p_t) \cap \Phi_{W'} = \Phi(p_t) \cap (\mathbb{R}\alpha_r \oplus \mathbb{R}\alpha_t).$$

3.6. **识别反射前缀语言。** 最后，本节将介绍一种自动机，其状态集合为 L_m - m 低元素（参见 §2.7）。该自动机识别由反射前缀的约化词构成的语言：Pref_T

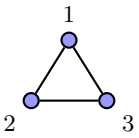
$$\begin{aligned}\mathrm{Pref}_T &= \{s_1\cdots s_k s_{k+1} \in \mathrm{Red} \mid p = s_1\cdots s_k s_{k+1} \text{ is a reflection-prefix}\}\\ &= \{s_1\cdots s_k s_{k+1} \in \mathrm{Red} \mid \mathrm{dp}(s_1\cdots s_k(\alpha_{s_{k+1}})) = k\}\\ &= \{s_1\cdots s_k s_{k+1} \in \mathrm{Red} \mid \ell(s_1\cdots s_k s_{k+1} s_k\cdots s_1) = 2k+1\}\\ &= \{s_1\cdots s_k s_{k+1} \in \mathrm{Red} \mid s_1\cdots s_k s_{k+1} s_k\cdots s_1 \in \mathrm{Red}\}.\end{aligned}$$

该自动机是一个有向图，其顶点集为 L_m，边由以下元素标记：S，对于任意 $w \in L_m$ 和 $s \in S$，至多存在一条边（转移），其源点为 w，标记为 s（见 [15, §2]）。

令 $\mathcal{A} := \mathcal{A}_m(W, S)$ 为满足以下条件的自动机：

- 状态集为 L_m；
- 终态为 $\mathcal{F} = \{su \mid \ell(su) > \ell(u)$ 和 $s(\Sigma_m(u)) \cap \Sigma_m(u) = \emptyset\}$；
- 初态为单位元 e；
- 转移为：$a \in \mathcal{F} \xrightarrow{s} \pi(sa)$，其中 $\ell(sa) > \ell(a)$ 且 π_m： $W \to L_m$是到 L_m 的 Garside 投影，由 $\pi_m(w) = \bigvee_R\{g \in L_m \mid g \le_R w\}$(参见 §2.7)。

例 3.22. 考虑类型为 A_2、Coxeter 图为下述图的 Coxeter 系统 (W, S)



W 的 0-低元素为

$$L_0 = \{e, 1, 2, 3, 12, 21, 13, 31, 23, 32, 121, 131, 232, 1232, 2313, 3121\}$$

（参见 [11, 例 3.29]），自动机 $\mathsf{A}_0(W, S)$ 如图 4 所示，其中阴影状态 131、121、232 不是终态。事实上，例如，$\Sigma_0(21) = \{\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2\} = s_1(\Sigma_0(21))$，因此 $s_1(\Sigma_0(21)) \cap \Sigma_0(21) \neq \emptyset$，所以 $121 \notin \mathsf{F}$。注意，如果阴影状态是终态，那么我们就会得到 L_0 上的 Garside 阴影自动机。

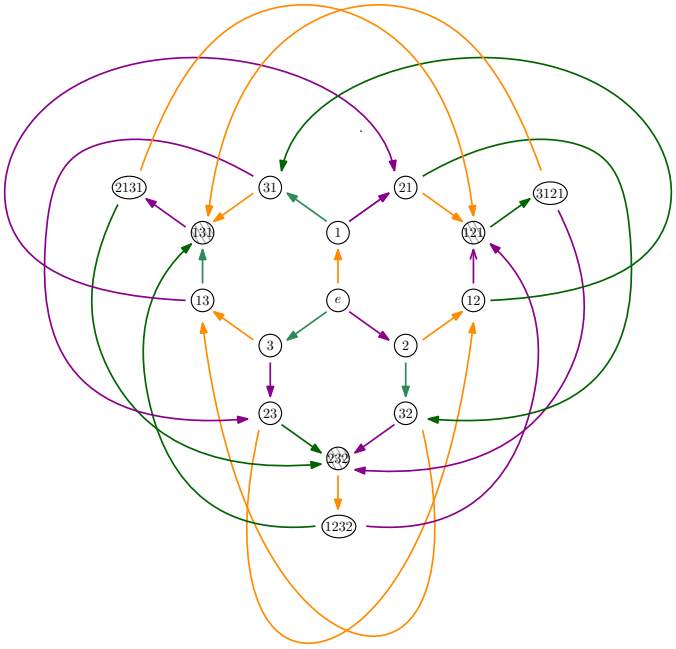
回顾一下，$w \in W$ 的左下降集合为 $D_L(w) = \{s \in S \mid \ell(sw) < \ell(w)\}$。这个引理是第二作者与 Nadeau、Williams 在 [15] 中所得结果的推论。

引理 3.23. 设 $s_1\cdots s_{k+1} \in \mathrm{Pref}_T$。那么

$$D_L(\pi_m(s_{k+1}\cdots s_1)) = D_L(s_{k+1}\cdots s_1) = \{s_{k+1}\}.$$

证明。写作 $u = s_{k+1}\cdots s_1$。根据 [15, 第 438 页，定理 1.2], 的证明，词$s_1\cdots s_{k+1}$ 在状态 $\pi_m(u)$ 中被识别，且 u^{-1} 是一个反射前缀。由命题 3.1，$D_L(u) = D_R(u^{-1}) = \{s_{k+1}\}$。因此，根据 [15, 命题 2.6], ，我们有$D_L(\pi_m(u)) = D_L(u) = \{s_{k+1}\}$。□

引理 3.24. 设 $s_1\cdots s_{k+1} \in \mathrm{Red}$，则 $s_1\cdots s_{k+1} \in \mathrm{Pref}_T$ 当且仅当$\pi_m(s_{k+1}\cdots s_1)$ 是一个终态。



~图 4. 自动机 $\mathcal{A}_0(W,\ S)$ 例 3.22 中类型 A_2，它识别 W 的反射前缀语言。

证明. 根据命题 2.20，$\Sigma_m(\pi_m(u)) = \Sigma_m(u)$ 对任意 $u \in W$. 根据引理 [5,引理 2.4],

$\mathrm{dp}(s_1 \cdots s_k(\alpha_{k+1})) = k$ 当且仅当 $s_{k+1}(\Sigma_m(s_k \cdots s_1)) \cap \Sigma_m(s_k \cdots s_1) = \emptyset$，因此 $s_{k+1}(\Sigma_m(\pi_m(s_k \cdots s_1))) \cap \Sigma_m(\pi_m(s_k \cdots s_1)) = \emptyset$ 当且仅当 $\pi_m s_{k+1} \cdots s_1) = s_{k+1}\pi_m(s_k \cdots s_1) \in \mathcal{F}$。 □

根据引理 3.23 和引理 3.24，我们证明了以下结果。

定理 3.25. 自动机 A 识别语言 Pref_T。

由上述定理和命题3.10可得以下推论。

推论 3.26。 语言 Pref_T 是正则的，且其生成函数

$$\sum_{u \in \mathrm{Pref}_T} q^{|u|} = \sum_{t \in T} |\{s_1 \cdots s_k s_{k+1} s_k \cdots s_1 \in \mathrm{Pref}_T \mid t = s_1 \cdots s_k s_{k+1} s_k \cdots s_1\}|\, q^{\ell(t)}$$
$$= \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k q^k$$

是有理函数，其中 a_k 表示 W的根偏序中长度为 k 的饱和链的数量。特别地，$\mathrm{Pal}(q) = q\,\mathrm{Pref}_T(q^2)$ 是有理函数。

4. Poincare series of affine Coxeter groups

本节通过明确描述仿射 Coxeter 群的庞加莱级数，直接解决 Stembridge 问题。该公式基于对相应根偏序的哈斯图的详细描述。

4.1. **晶体根系**。对于一个仿射 Coxeter 系统 (W, S)，其底层有限 Weyl 群为 (W_0, S_0)，通常使用其在半正定二次空间 (V, B)中对应的晶体根系。在这种情况下，经典几何表示（见 §2.3）是唯一的几何表示，而简单系 Δ 是 V的一组基。晶体条件使我们能够考虑根不一定为单位根的根系。下面简要回顾这一构造。

设 Φ_0 是有限 Weyl 群 W_0的一个约化不可约晶体根系，它实现于欧几里得空间 (V_0, B_0) 中，对应的简单根集合为 $\Delta_0 = \{\alpha_s \mid s \in S_0\}$，正根为 Φ_0^+（例如参见 [2, 16]）。那么，对于 $s, t \in S_0$，有：

$$B_0(\alpha_s, \alpha_t) = \begin{cases} -\|\alpha_s\|\|\alpha_t\| \cos\left(\frac{\pi}{m_{st}}\right) & \text{if } m_{st} < \infty, \\ -1 & \text{if } m_{st} = \infty. \end{cases}$$

二次空间 (V, B) 如下构造：$V = V_0 \oplus \mathbb{R}\delta$，而 B 是通过令 B 的根基等于 $Q = \mathbb{R}\delta$，由 B_0 扩张得到的。令 ω 表示 Φ_0的最高根；晶体仿射单系为 $\Delta = \Delta_0 \cup \{\delta - \omega\}$，其根系为 $\Phi = \{\alpha + k\delta \mid \alpha \in \Phi_0,\ k \in \mathbb{Z}\}$。正根集合为：

$$\Phi^+ = \{\, k\delta + \alpha,\ (k+1)\delta - \alpha \mid \alpha \in \Phi_0^+,\ k \in \mathbb{N} \,\} = (\mathbb{N}\delta + \Phi_0^+) \sqcup (\mathbb{N}^*\delta - \Phi_0^+).$$

由此可知，Φ 是仿射 Weyl 群（W，S）的晶体（无限）根系，其中 $S = S_0 \cup \{s_{\delta-\omega}\}$。

4.2. **仿射情形下的根偏序与支配序**。关于单位根系的结构性结果，特别是由双线性形式 B 的符号所决定的结果，通常可以推广到晶体根系。然而，依赖于该形式具体数值的性质，例如支配和长边，必须针对晶体根系进行精确的重新表述；更多细节请参见 [11,例 3.9]。

由晶体根系 Φ，单位根系（见 §2.3 的意义下）可通过利用映射 $\alpha \mapsto \frac{\alpha}{\|\alpha\|}$对每个根进行归一化而得到。令 α，$\beta \in \Phi$则：

$$B\left(\frac{\alpha}{\|\alpha\|}, \frac{\beta}{\|\beta\|}\right) = \frac{B(\alpha, \beta)}{\|\alpha\|\|\beta\|}.$$

因此，对于单位根 $B(\alpha', \beta') \leq -1$，定义2.8或命题 2.13中出现的条件 α'，β'变为：

$$B(\alpha, \beta) \leq -\|\alpha\|\|\beta\|.$$

因此，定义2.8在晶体情形下可表述如下。

定义 4.1（晶体根系中的长边和短边）。根偏序（$\Phi^+, \leq$）中的覆盖关系$\alpha \lhd s(\alpha)$，若 $-\|\alpha\|\|\alpha_s\| < B(\alpha, \alpha_s) < 0$，则称为短。否则，称该覆盖关系为长。

后续章节将更详细地研究根偏序的哈斯图。

在仿射情形下，支配序的哈斯图是$2|\Phi_0^+|$ 全序链的并。事实上，Φ 中的支配关系只有以下形式：

$$k\delta + \alpha \ \lesssim_d\ l\delta + \alpha, \quad \text{or} \quad (k+1)\delta - \alpha \ \lesssim_d\ (l+1)\delta - \alpha,$$

其中 $k \leq l$ 属于 $\mathbb{N}$ 且 $\alpha \in \Phi_0^+$；参见 [11, 例 3。9]。

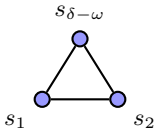
这些支配关系的一个有趣推论是，对于 $\alpha \in \Phi_0^+$和$k \in \mathbb{N}$，我们有：

$$\mathrm{dp}_\infty(k\delta + \alpha) = k \quad \text{and} \quad \mathrm{dp}_\infty((k+1)\delta - \alpha) = k,$$

见 [11, 例3.9，公式(⋄)]。特别地，k-小根的集合（见第2.7节）对于 $k \in \mathbb{N}$ 在仿射情形下为：

$$\Sigma_k = \left(k\delta + \Phi_0^+\right) \sqcup \left((k+1)\delta - \Phi_0^+\right). \tag{3}$$

例4.2。设 (W, S) 是一个类型为 A_2 的 Coxeter 系统，



那么，底层有限Coxeter系统 (W_0, S_0) 的类型为 A_2。考虑 $S = \{s_1, s_2, s_{\delta-\omega}\}$，其中 $s_1, s_2 \in S_0$，而 $\omega = \alpha_1 + \alpha_2$ 是 W_0 的最高根。有限正根系为 $\Phi_0^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2\}$，仿射单系为 $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \delta - \omega\}$。$k \in \mathbb{N}$ 的 k-小根集合为：

$$\begin{aligned}\Sigma_k \quad = \quad & \{\alpha_1 + k\delta, \alpha_2 + k\delta, \alpha_1 + \alpha_2 + k\delta\} \\ & \sqcup \{-\alpha_1 + (k+1)\delta, -\alpha_2 + (k+1)\delta, -(\alpha_1 + \alpha_2) + (k+1)\delta\}.\end{aligned}$$

仿射正根系为：

$$\Phi^+ = \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} \Sigma_m.$$

其哈斯图$(\Phi^+, \leq)$ 如图5所示，深度至3，其中边的颜色对应所施加的简单反射：红色对应s_1，黄色对应 s_2，绿色对应 $s_3 := s_{\delta-\omega}$。此外，虚线边对应长覆盖关系。

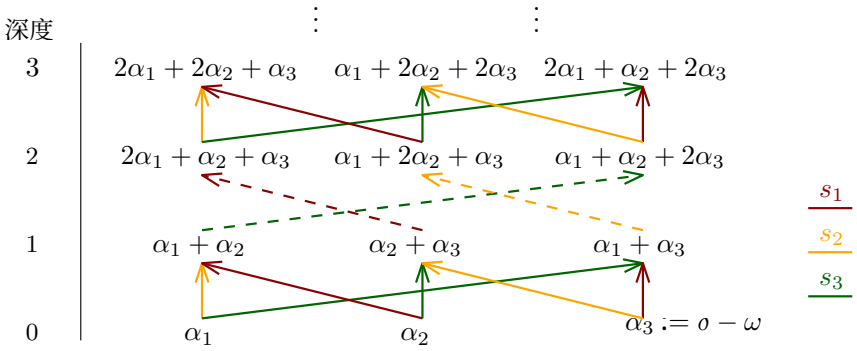
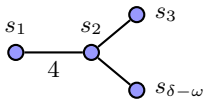


图5. 类型为 A_2 的根偏序的哈斯图（截至深度 3），其中 $\Sigma = \Sigma_0$ 和 Σ_1 对应于由非虚线边连接的块。

例4.3。 设$(W,\ S)$是一个类型为 B_3 的 Coxeter 系统，其 Coxeter 图如下



在这种情况下，我们有 $\|\alpha_1\| = 1$ 和 $\|\alpha_2\| = \|\alpha_3\| = \|\omega\| = \sqrt{2}$, 其中 $\omega = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$。例如， $B(\alpha_2, \delta - \omega) = -B(\alpha_2, \omega) = -1 > -\|\alpha_2\|\|\omega\| = -2$，而$B(\delta - \alpha_3, \alpha_3) = -\|\alpha_3\|^2 = -2$。因此，覆盖关系 $\alpha_2 \lhd s_{\delta-\omega}(\alpha_2)$ 是短的，而$\delta - \alpha_3 \lhd s_3(\delta - \alpha_3) = \delta + \alpha_3$是长的。限制到 $\Sigma = \Sigma_0$ 的类型 B_3 的根偏序的哈斯图见图 6。

4.3. 根偏序内的偏序集同构。 设 $(W,\ S)$ 是一个仿射 Coxeter 系统，其底层有限系统为 $(W_0,\ S_0)$，晶体根系为Φ_0。由于 Φ_0 不可约， Φ_0 分解为 W_0-轨道有两种情形：

- $\Phi_0 = \mathcal{O}_1$ is a single orbit if (W, S) is simply laced;
- $\Phi_0 = \mathcal{O}_1 \sqcup \mathcal{O}_2$ if (W, S) is of type $\tilde{B}_n$, $\tilde{C}_n$, $\tilde{G}_2$ or $\tilde{F}_4$.

为简化起见，我们记：

$$\Phi_0^+ = \bigsqcup_{i=1}^{h} \mathcal{O}_i^+,$$

其中 $\mathcal{O}_i^+ = \mathcal{O}_i \cap \Phi_0^+$，且 $1 \le i \le h$ $(h = 1,\ 2)$。我们还假设 $\mathcal{O}_1^+$ 是包含最高根 ω 的 W_0- 轨道。

设 $\mathcal{O}$ 是一个 W_0-轨道。当 $k \in \mathbb{N}$ 时，$\mathcal{O}$ 中的 k-小根集合为：

$$\Sigma_{\mathcal{O},k} = (k\delta + \mathcal{O}^+) \sqcup \big((k+1)\delta - \mathcal{O}^+\big) = \{k\delta + \alpha, (k+1)\delta - \alpha \mid \alpha \in \mathcal{O}^+\}. \tag{4}$$

此外，由等式（3），我们有 $\Sigma_k = \sqcup_{i=1}^{h} \Sigma_{\mathcal{O}_i,\ k}$，其中 $h = 1,\ 2$。令

$$\Phi_{\mathcal{O}} = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} \Sigma_{\mathcal{O},k}.$$

因此 $\Phi^+ = \sqcup_{i=1}^{h} \Phi_{\mathcal{O}_i}$，其中 $h = 1,\ 2$。

子偏序集 $(\Phi_{\mathcal{O}},\ \le)$ 的哈斯图呈现出很强的对称性，这对证明本节的主要结果至关重要。

小根层面的对称性。 为简化记号，我们将 $\mathcal{O}$ 中的小根集合记作：

$$\Sigma_{\mathcal{O}} = \Sigma_{\mathcal{O},0} = \mathcal{O}^+ \sqcup (\delta - \mathcal{O}^+).$$

回顾一下， Σ 是根偏序中的一个序理想（见 [1, 推论 4.7。7]），且 Σ 中的任意覆盖关系都是短的（见 [1, 引理 4.7.5 和定理 4.7。6]）。

定理 4.4。 设 $\mathcal{O}$ 是一个 W_0-轨道。映射 $\phi : \mathcal{O}^+ \to \delta - \mathcal{O}^+$ 定义为$\phi(\alpha) = \delta - \alpha$，它是偏序集 $(\mathcal{O}^+, \le)$ 与对偶偏序集$(\delta - \mathcal{O}^+, \le)^{op}$之间的同构：对于任意 $\alpha, \beta \in \mathcal{O}^+$，当且仅当 $\alpha \le \beta$时， $\delta - \beta \le \delta - \alpha$成立。此外，$(\mathcal{O}^+, \le)$ 和$(\delta - \mathcal{O}^+, \le)$ 中的所有覆盖关系都是短的。

证明。 由于偏序集同构由保持（或反转）覆盖关系唯一确定，只需证明 $\alpha \lhd \beta$ in $\mathcal{O}^+$ 当且仅当 $\delta - \beta \lhd \delta - \alpha$ in $\delta - \mathcal{O}^+$。回顾一下，对于任意 $\alpha, \beta \in \Phi^+$，当且仅当存在一个简单反射 $s \in S$ 使得 $\beta = s(\alpha)$ 且 $B(\alpha, \alpha_s) < 0$ 时，才存在覆盖关系。我们考察仿射 Weyl 群 W 中两类简单反射。

(i) 设 $s \in S_0$ 是一个有限反射。对于有限单根 α_s，我们有：

$$B(\delta - \alpha, \alpha_s) = B(\delta, \alpha_s) - B(\alpha, \alpha_s) = -B(\alpha, \alpha_s).$$

由此可知，$B(\alpha, \alpha_s) < 0$ 当且仅当 $B(\delta - \alpha, \alpha_s) > 0$。因此，$\alpha \lhd s(\alpha)$ 当且仅当 $s(\delta - \alpha) = \delta - s(\alpha) \lhd \delta - \alpha$。

(ii) 令 $s_{\delta-\omega}$ 为仿射反射。同样，对于仿射单根 $\delta - \omega$，根基的性质意味着：

$$B(\delta - \alpha, \delta - \omega) = B(\delta, \delta - \omega) - B(\alpha, \delta - \omega) = -B(\alpha, \delta - \omega).$$

同样，双线性形式的符号反转：$B(\alpha, \delta - \omega) < 0$ 当且仅当 $B(\delta - \alpha, \delta - \omega) > 0$。这确保了 $\alpha \lhd s_{\delta-\omega}(\alpha)$ 当且仅当$s_{\delta-\omega}(\delta - \alpha) = \delta - s_{\delta-\omega}(\alpha) \lhd \delta - \alpha$。

现在，令 $\alpha \lhd s(\alpha)$ 是 $\mathcal{O}^+$ 中的一个覆盖关系，其中 $s \in S$。此覆盖关系的类型取决于 $B(\alpha, \alpha_s)$ 的值。在映射 ϕ 下，这对应于覆盖关系 $\delta - s(\alpha) \lhd \delta - \alpha$。根据反射 s 和根基的性质，我们有：

$$B(\delta - s(\alpha), \alpha_s) = -B(s(\alpha), \alpha_s) = B(\alpha, \alpha_s).$$

由于 $B(\cdot\ \alpha_s)$ 在两种情况下都相同，因此定义 2.8 中关于短或长的判定条件得以保留。由于 $\mathcal{O}^+$ 和 $\delta - \mathcal{O}^+$ 将小根集 Σ分解，因此它们全都是短根。□

例 4.5. 若 (W, S) 的类型为 $\widetilde{B}_3$，则 $\Phi_0^+ = \mathsf{O}_1^+ \sqcup \mathsf{O}_2^+$，其中 $\mathsf{O}_1^+ = \{\alpha_1, s_2(\alpha_1)\ s_3 s_2(\alpha_1)\}$，且 $\mathsf{O}_2^+ = \{\alpha_2, \alpha_3, s_1(\alpha_2)\ s_3(\alpha_2)\ s_1 s_3(\alpha_2)\ s_2 s_1 s_3(\alpha_2)\}$。限制在 $\Sigma_{\mathcal{O}_1} \sqcup \Sigma_{\mathcal{O}_2}$ 上的根偏序如图 6 所示。

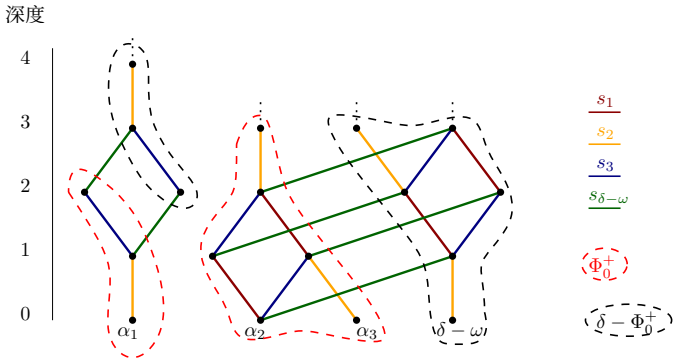


图 6. 类型 $\widetilde{B}_3$ 限制于 $\Sigma_{\mathcal{O}_1} \sqcup \Sigma_{\mathcal{O}_2}$。红线部分的偏序集与黑线部分的对偶偏序集同构，正如定理 4.4所述。

限制在 W_0-轨道上的根偏序的对称性。 依照 [2, 第 VI 章，第 1], 节，对于 $\alpha, \beta \in \Phi^+$，我们定义

$$n(\alpha, \beta) := 2\frac{B(\alpha, \beta)}{B(\beta, \beta)},$$

因此 $s_\beta(\alpha) = \alpha - n(\alpha, \beta)\beta$. 根据 [2, 第六章第 1 节命题 8], , 若 $\alpha \neq \beta$ 且$\|\alpha\| \leq \|\beta\|$, 则 $n(\alpha, \beta) \in \{0, \pm 1\}$。由此可得，当 $\alpha \neq \omega$ 时，$n(\alpha, \omega) \in \{0, \pm 1\}$，

因为对于所有正根 α， $\|\alpha\| \leq \|\omega\|$。最后注意，对于 k， $m \in \mathbb{N}^*$， $n(k\delta+\alpha,\ \beta) = n(\alpha,\ \beta) = n(\alpha,\ m\delta+\beta)$，并且 $n(k\delta-\alpha,\ \beta) = -n(\alpha,\ \beta) = n(\alpha,\ m\delta-\beta)$。

现在我们描述集合$\Sigma_{\mathcal{O},k}$内部的覆盖关系。设 $\alpha \in \Phi_0^+$ 和$k \in \mathbb{N}$。

(1) 不存在如下形式的覆盖关系

$$(k+1)\delta-\alpha \lhd s_{\delta-\omega}\big((k+1)\delta-\alpha\big).$$

事实上，如果存在这样的覆盖关系，则 $0 > B\big((k+1)\delta-\alpha,\ \delta-\omega\big) = B(\alpha,\omega)$，从而 $n(\alpha,\omega) = -1$。由此可得

$$s_{\delta-\omega}(\alpha) = \alpha - n(\alpha,\delta-\omega)(\delta-\omega) = \alpha + n(\alpha,\omega)(\delta-\omega) = \alpha-\delta+\omega.$$

因此， $s_{\delta-\omega}\big((k+1)\delta-\alpha\big) = (k+2)\delta-(\alpha+\omega) \notin \Sigma_{\mathcal{O},k}$，矛盾。

(2) $\Sigma_{\mathcal{O},k}$ 中的所有覆盖关系都属于以下三种类型之一：

(i) $k\delta+\alpha \lhd s(k\delta+\alpha) = k\delta+s(\alpha)$， when $B(\alpha,\alpha_s) < 0$;

(ii) $(k+1)\delta-\alpha \lhd s\big((k+1)\delta-\alpha\big) = (k+1)\delta-s(\alpha)$, when $B(\alpha,\alpha_s) > 0$ and $\alpha \neq \alpha_s$. Note that if $\alpha = \alpha_s$, then $(k+1)\delta-s(\alpha) = (k+1)\delta+\alpha_s \in \Sigma_{\mathcal{O},k+1}$.

(iii) $k\delta+\alpha \lhd s_{\delta-\omega}(k\delta+\alpha) = k\delta+s_{\delta-\omega}(\alpha)$, when $B(\alpha,\delta-\omega) < 0$ and $\alpha \neq \omega$. Otherwise, $s_{\delta-\omega}(k\delta+\omega) = (k+2)\delta-\omega \in \Sigma_{\mathcal{O},k+1}$.

现在陈述根偏序的第二个对称性。

定理 4.6. 设 $\mathcal{O}$ 是一个 W_0-轨道。存在一个偏序集同构

$$(\Sigma_{\mathcal{O},k},\leq) \cong (\Sigma_{\mathcal{O}},\leq)$$

对所有 $k \in \mathbb{N}$ 均成立。此外，$\Sigma_{\mathcal{O},k}$ 中的所有覆盖关系都是短的。

证明。 映射 $\pi_k : \Sigma_{\mathcal{O},k} \longrightarrow \Sigma_{\mathcal{O}}$ 定义为

$$\pi_k(k\delta+\alpha) = \alpha, \qquad \pi_k((k+1)\delta-\alpha) = \delta-\alpha,$$

对于 $\alpha \in \Phi_0^+$，它是一个双射。根据定理前面的讨论，我们知道 $\Sigma_{\mathcal{O},k}$ 中的覆盖关系有三种类型。

当且仅当 $0 > B(k\delta+\alpha,\alpha_s) = B(\alpha,\alpha_s)$ 时，类型为 (i) 的覆盖 $k\delta+\alpha \lhd k\delta+s(\alpha)$ 才会出现；这等价于 $\alpha \lhd s(\alpha)$ 是 $\Sigma_{\mathcal{O}}$ 中的一个覆盖关系。

类型 (ii) 的覆盖关系 $(k+1)\delta-\alpha \lhd (k+1)\delta-s(\alpha)$ 当且仅当 $0 > B((k+1)\delta-\alpha,\ \alpha_s) = -B(\alpha,\ \alpha_s)$，且 $\alpha \neq \alpha_s$ 时成立；这等价于 $\delta-\alpha \lhd \delta-s(\alpha)$ 在 $\Sigma_{\mathcal{O}}$中是一个覆盖关系。

类型 (iii) 的覆盖关系 $k\delta+\alpha \lhd s_{\delta-\omega}(k\delta+\alpha)$ 当且仅当 $0 > B(k\delta+\alpha,\ \delta-\omega) = B(\alpha,\ \delta-\omega)$，且 $\alpha \neq \omega$ 时成立；这等价于 $\alpha \lhd s_{\delta-\omega}(\alpha)$ 在 $\Sigma_{\mathcal{O}}$中是一个覆盖关系。

因此， π_k 保持并反映覆盖关系，因而是偏序集同构。最后一个结论由定理 4.4 得出，因为在 $\Sigma_{\mathcal{O}}$中所有覆盖关系都是短的。□

例 4.7。 在下方的图 7 中，根偏序的哈斯图~（类型 B_3 ）的前三个切片如图所示。第一个切片与图6中展示的偏序集相同，尽管其序关系的绘制方式不同。这种替代表示方式让定理 4.6 中所述的同构更加显而易见。

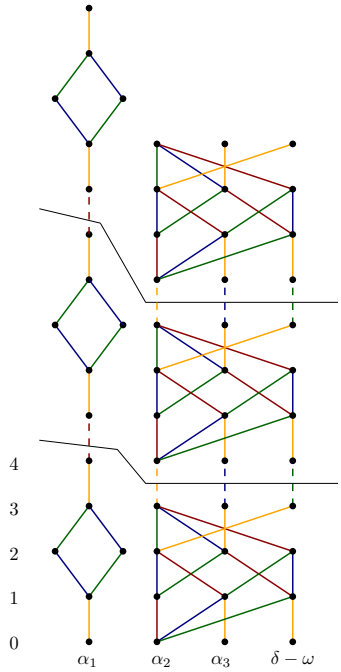


图 7

我们以展示覆盖关系 $\alpha \lhd \beta$ 与$\alpha \in \Sigma_{\mathcal{O},\, k}$ 和$\beta \in \Sigma_{\mathcal{O},\, k+1}$ 是长的来结束本讨论。

命题 4.8 (覆盖关系)。

(i) 对所有 $k \in \mathbb{N}, s \in S_0$，$(k+1)\delta - \alpha_s \lhd s((k+1)\delta - \alpha_s)$ 都是长覆盖关系，其中 $(k+1)\delta - \alpha_s \in \Sigma_{\mathcal{O},k}$ 和 $s((k+1)\delta - \alpha_s) \in \Sigma_{\mathcal{O},k+1}$。*(ii)* 对所有 $k \in \mathbb{N}$, $k\delta+\omega \lhd s_{\delta-\omega}$, $(k\delta+\omega)$ 都是长覆盖关系，其中 $k\delta+\omega \in \Sigma_{\mathcal{O},k}$ 和 $s_{\delta-\omega}(k\delta+\omega) \in \Sigma_{\mathcal{O},k+1}$。

证明。考虑 $(k+1)\delta - \alpha_s \lhd s((k+1)\delta - \alpha_s)$，则 $B((k+1)\delta - \alpha_s,\ \alpha_s) = -\|\alpha_s\|^2$，因此该覆盖关系是长覆盖关系，并且 $s((k+1)\delta - \alpha_s) = (k+1)\delta + \alpha_s \in \Sigma_{\mathcal{O},\, k+1}$。类似地，若考虑覆盖关系 $k\delta+\omega \lhd s_{\delta-\omega}(k\delta+\omega)$，则 $B(k\delta+\omega,\ \delta-\omega) = -\|\omega\|^2$，所以该覆盖关系是长覆盖关系。特别地，$s_{\delta-\omega}(k\delta+\omega) = (k+2)\delta - \omega \in \Sigma_{\mathcal{O},\, k+1}$。□

4.4. 深度生成函数的显式公式。 现在我们准备利用上一节中引入的集合 $\Sigma_{\mathcal{O}}$ 和 $\Phi_{\mathcal{O}}$ 上的根偏序限制，为 Φ 中正根的深度生成函数给出一个闭式公式。

令 $\mathcal{O} \subseteq \Phi_0$ 为 W_0-轨道。定义

$$M_{\mathcal{O}} = \max\{\mathrm{dp}(\beta) \mid \beta \in \Sigma_{\mathcal{O}}\}.$$

我们证明，正根的深度仅取决于 $M_{\mathcal{O}}$ 以及 $\mathcal{O}^+$ 中一个根的深度。

推论 4.9。令 $\alpha \in \mathcal{O}^+$ 和 $k \in \mathbb{N}$，则：

(1) $\mathrm{dp}(k\delta+\alpha) = \mathrm{dp}(\alpha)+k(M_{\mathcal{O}}+1)$;(2) $\mathrm{dp}((k+1)\delta-\alpha) = \mathrm{dp}(\delta-\alpha)+k(M_{\mathcal{O}}+1)$.

证明。根据定理 4.6，$\Sigma_{\mathcal{O},k}$ 中的最低深度为 $k(M_{\mathcal{O}}+1)$。只需证明，在 $\Sigma_{\mathcal{O},k}$ 中，深度等于 $k(M_{\mathcal{O}}+1)$ 的根只有

$$\{k\delta+\alpha_s, (k+1)\delta-\omega \mid s\in S\}.$$

注意，$B(k\delta+\alpha_s,\alpha_s) = B(\alpha_s,\alpha_s) > 0$，且 $s(k\delta+\alpha_s) = k\delta-\alpha_s \in \Sigma_{\mathcal{O},k-1}$。因此我们有覆盖关系 $k\delta-\alpha_s \lhd k\delta+\alpha_s$。类似地，我们也有覆盖关系$k\delta-\omega \lhd (k+1)\delta-\omega$，其中 $k\delta-\omega\in\Sigma_{\mathcal{O},k-1}$。于是，$\{k\delta+\alpha_s,(k+1)\delta-\omega \mid s\in S\}$是 $\Sigma_{\mathcal{O},k}$ 中深度最低的根，并且不存在具有此性质的其他根。□

我们将整个集合 Φ^+ 上的深度生成函数，以及它在 $\Sigma_{\mathcal{O}}$ 和 $\Phi_{\mathcal{O}}$ 上的限制分别记为：

$$\Phi^+(q) = \sum_{\beta\in\Phi^+} q^{\mathrm{dp}(\beta)}, \quad P_{\mathcal{O}}(q) := \sum_{\beta\in\Sigma_{\mathcal{O}}} q^{\mathrm{dp}(\beta)}, \quad \text{and} \quad \Phi_{\mathcal{O}}(q) := \sum_{\beta\in\Phi_{\mathcal{O}}} q^{\mathrm{dp}(\beta)}. \tag{5}$$

命题 4.10. 多项式 $P_{\mathcal{O}}(q)$是次数为 $M_{\mathcal{O}}$ 的回文多项式，而 $\Phi_{\mathcal{O}}$ 中根的深度生成函数为：

$$\Phi_{\mathcal{O}}(q) = \frac{P_{\mathcal{O}}(q)}{1-q^{M_{\mathcal{O}}+1}}. \tag{6}$$

证明。首先，根据 $\Sigma_{\mathcal{O}}$ 和 $M_{\mathcal{O}}$ 的定义，我们注意到，定义 $P_{\mathcal{O}}(q)$ 的和中各项的最高次数恰为 $M_{\mathcal{O}}$。更确切地说，我们有

$$P_{\mathcal{O}}(q) = \sum_{\beta\in\mathcal{O}^+} (q^{\mathrm{dp}(\beta)} + q^{M_{\mathcal{O}}-\mathrm{dp}(\beta)}).$$

由于

$$\begin{aligned} q^{M_{\mathcal{O}}}P_{\mathcal{O}}(q^{-1}) &= q^{M_{\mathcal{O}}}\sum_{\beta\in\mathcal{O}^+}(q^{-\mathrm{dp}(\beta)}+q^{-(M_{\mathcal{O}}-\mathrm{dp}(\beta))}) \\ &= \sum_{\beta\in\mathcal{O}^+}(q^{M_{\mathcal{O}}-\mathrm{dp}(\beta)}+q^{\mathrm{dp}(\beta)}) = P_{\mathcal{O}}(q), \end{aligned}$$

多项式 $P_{\mathcal{O}}(q)$ 是回文的。

根据推论 4.9，第 k 层中每个根的深度都平移了 $k(M_{\mathcal{O}}+1)$，即

$$\sum_{\beta\in\Sigma_{\mathcal{O},k}} q^{\mathrm{dp}(\beta)} = q^{k(M_{\mathcal{O}}+1)}P_{\mathcal{O}}(q).$$

将这些贡献相加，得到几何级数：

$$\Phi_{\mathcal{O}}(q) = \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{\beta\in\Sigma_{\mathcal{O},k}} q^{\mathrm{dp}(\beta)} = \sum_{k=0}^{\infty} q^{k(M_{\mathcal{O}}+1)}P_{\mathcal{O}}(q) = \frac{P_{\mathcal{O}}(q)}{1-q^{M_{\mathcal{O}}+1}},$$

至此，证明完成。□

通过组合与每个轨道相关的多项式，我们得到了最终结果。

定理 4.11. 正根的深度的生成函数形式如下

$$\Phi^+(q) = \frac{P(q)}{1-q^M}$$

其中 $M = \operatorname{lcm}(M_{\mathcal{O}} + 1 \mid \mathcal{O}$ W_0-轨道$)$ 且 P 是回文的。

证明。 根据构造， $\Phi^+(q) = \sum_{i=1}^{h} \Phi_{\mathcal{O}_i}(q)$，其中 $h = 1,2$ 是W_0-轨道的数量。为简便起见，令 $P_{\mathcal{O}_i} = P_i$ 且对所有 i，令 $M_{\mathcal{O}_i} = M_i$ ，并设 $M = \operatorname{lcm}(M_i + 1)_{i=1}^{h}$。于是我们可以将 $\Phi^+(q)$ 改写为

$$\Phi^+(q) = \frac{\sum_{i=1}^{k} \frac{1-q^M}{1-q^{M_i+1}} P_i(q)}{1-q^M} = \frac{P(q)}{1-q^M}.$$

现在我们要证明 $P(q)$ 是回文的。对每个 i，记 $D_i(q) = \frac{1-q^M}{1-q^{M_i+1}}$。不难看出， $D_i(q) = \sum_{j=1}^{M/(M_i+1)} q^{M-j(M_i+1)}$ 是一个次数为 $\deg(D_i(q)) = M - M_i - 1$ 的回文多项式。特别地，对于所有 i，$\deg(D_i(q)P_i(q)) = M - 1$，因此 $\deg(P(q)) = M - 1$。我们有

$$\begin{aligned} q^{M-1}P(q^{-1}) &= \sum_{i=1}^{k} q^{M-1} D_i(q^{-1}) P_i(q^{-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k} q^{M-M_i-1} D_i(q^{-1}) q^{M_i} P_i(q^{-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k} D_i(q) P_i(q) = P(q) \end{aligned}$$

其中第三个等式成立是因为 $D_i(q)$ 和 $P_i(q)$ 对所有 i (命题 4.10) 都是回文的。因此， $P(q)$ 是回文的。 □

例 4.12。 考虑类型为 B_3 的 (W, S)。对应于两个轨道的多项式为：

$$P_{\mathcal{O}_1}(q) = 1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4 \text{ and } P_{\mathcal{O}_2}(q) = 3 + 3q + 3q^2 + 3q^3.$$

因此 $M_{\mathcal{O}_1} = 4$ 和 $M_{\mathcal{O}_2} = 3$。所以根据命题 4.10 我们得到：

$$\Phi_{\mathcal{O}_1} = \frac{1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4}{1 - q^5} \text{ and } \Phi_{\mathcal{O}_2} = \frac{3 + 3q + 3q^2 + 3q^3}{1 - q^4} = \frac{3}{1 - q}.$$

沿用定理 4.11证明中的记号，我们得到：

$$D_1(q) = 1 + q^5 + q^{10} + q^{15} \text{ and } D_2(q) = 1 + q^4 + q^8 + q^{12} + q^{16}.$$

由于 $M = \operatorname{lcm}(5,4) = 20$， Φ^+ 的深度生成函数为：

$$\begin{aligned} \Phi^+(q) =& (4q^{19} + 4q^{18} + 5q^{17} + 4q^{16} + 4q^{15} + 4q^{14} + 4q^{13} + 5q^{12} + 4q^{11} + 4q^{10} \\ &+ 4q^9 + 4q^8 + 5q^7 + 4q^6 + 4q^5 + 4q^4 + 4q^3 + 5q^2 + 4q + 4)(1 - q^{20})^{-1}. \end{aligned}$$

例 4.13. 考虑类型为 F_4 的 (W, S)。我们使用 SageMath 得到限制在 $\Sigma_{\mathcal{O}_1}$ and $\Sigma_{\mathcal{O}_2}$ 上的根偏序的哈斯图。对应于两个轨道的多项式为：

$$P_{\mathcal{O}_1}(q) = 3\sum_{i=0}^{7} q^i \quad \text{and}$$
$$P_{\mathcal{O}_2}(q) = 2 + 2q + 2q^2 + 3q^3 + 2q^4 + 2q^5 + 2q^6 + 3q^7 + 2q^8 + 2q^9 + 2q^{10}.$$

因此 $M_{\mathcal{O}_1}=7$ 和 $M_{\mathcal{O}_2}=10$。因此，根据命题 4.10 我们得到：

$$\Phi_{\mathcal{O}_1}=\frac{3}{1-q} \quad \text{and} \quad \Phi_{\mathcal{O}_2}=\frac{P_{\mathcal{O}_2}}{1-q^{11}}.$$

注意，$M=\mathsf{lcm}(11,\ 8)\ =88$。

~**例 4.14**。考虑类型为 G_2 的 $(W,\ S)$。我们使用 SageMath 得到限制在 $\Sigma_{\mathcal{O}_1}$ 和 $\Sigma_{\mathcal{O}_2}$ 上的根偏序的哈斯图。与这两个轨道对应的多项式为：

$$P_{\mathcal{O}_1}(q)=2+2q+2q^2 \text{ and } P_{\mathcal{O}_2}(q)=1+q+2q^2+q^3+q^4$$

因此，$M_{\mathcal{O}_1}=2$ 且 $M_{\mathcal{O}_2}=4$。由命题 4.10 可得：

$$\Phi_{\mathcal{O}_1}=\frac{2}{1-q} \quad \text{and} \quad \Phi_{\mathcal{O}_2}=\frac{1+q+2q^2+q^3+q^4}{1-q^5}.$$

注意，$M=\mathsf{lcm}(3,\ 5)\ =15$。

典型类型的例子。令 $n\in\mathbb{N}_{\geq 2}$。

~**例 4.15.** 在类型 A_n 中，由于只有一个轨道，我们通过直接计算得到 $M=n-1$，即最高根的高度减 1，并且

$$P_{\mathcal{O}}(q)=P(q)=(n+1)\sum_{i=0}^{n-1}q^i=(n+1)\frac{1-q^n}{1-q}.$$

因此：

$$\Phi^+(q)=\frac{n+1}{1-q}.$$

~**例 4.16.** 考虑类型 B_n 的 (W,S)。可以证明，对应于这两个轨道的多项式为：

$$P_{\mathcal{O}_1}(q)=\textstyle\sum_{i=0}^{n-1}q^i \quad \text{and}$$
$$P_{\mathcal{O}_2}(q)=\textstyle\sum_{i=0}^{n-2}(n-1-i)\left(q^{2i}+q^{2i+1}\right).$$

因此 $M_{\mathcal{O}_1}=n-1$ 且 $M_{\mathcal{O}_2}=2n-3$。于是由命题 4.10 我们得到：

$$\Phi_{\mathcal{O}_1}=\frac{1}{1-q} \quad \text{and} \quad \Phi_{\mathcal{O}_2}=\frac{P_{\mathcal{O}_2}}{1-q^{2n-2}}.$$

~**例 4.17.** 考虑类型 C_n 的 (W,S)。可以证明，对应于这两个轨道的多项式为：

$$P_{\mathcal{O}_1}(q)=2\textstyle\sum_{i=0}^{n-1}q^i \quad \text{and}$$
$$P_{\mathcal{O}_2}(q)=(n-1)q^{2n-2}+\textstyle\sum_{i=0}^{n-2}(n-1)q^{2i}+nq^{2i+1}.$$

因此 $M_{\mathcal{O}_1}=n-1$ 且 $M_{\mathcal{O}_2}=2n-2$。由命题 4.10 可得：

$$\Phi_{\mathcal{O}_1}=\frac{2}{1-q} \quad \text{and} \quad \Phi_{\mathcal{O}_2}=\frac{P_{\mathcal{O}_2}}{1-q^{2n-1}}.$$

5. 尚待解决的问题

我们在此提出一些由本文引出的自然问题。

问题 1. 回文约化词（或按字典序排列的回文约化词）所构成的语言是否正则？

问题 2. 刻画哪些 *Grassmannian* 元素（只有一个右下降的元素）是反射前缀（见命题*3.1*）。（注意，*Grassmannian* 元素也是 *Nathan Reading* 的碎片在右弱序中的最小代表 [20]。）

问题 3. 对于非定型 *Coxeter* 系统，即既非仿射也非有限的系统，求生成函数 $\Phi^+(q)$、$T(q)$ 和 $= q\Phi^+(q^2)$的闭式公式。

问题 4. 对于仿射类型，我们给出了根偏序的哈斯图的组合描述，并指出支配序恰好是若干全序的并集。对于非定型 Coxeter 系统，Dyer 和第二作者开始研究根上的弱序，它是这两种序的推广，见 [11, §5]。这两种序的一个首要区别是，支配序并非按无限深度分级（而根偏序按深度分级）。因此，我们提出以下关于非定型 Coxeter 系统的问题。

(1) 研究根偏序的哈斯图，以及移除长边后得到的各个连通分支。(2) 研究区分根偏序中短覆盖和长覆盖的形式幂级数：$\sum_{k,l\in\mathbb{N}} a_{k,l}q^k t^l$，其中 $a_{k,l}$ 表示根偏序中具有 k 条短边和 l 条长边的饱和链数量。(3) 研究支配序。(4) 研究无限深度的生成函数 $\sum_{\beta\in\Phi^+} q^{\mathrm{dp}_\infty(\beta)}$。(5) 研究形式幂级数 $\sum_{k\in\mathbb{N}} b_k q^k$，其中 b_k 表示支配序中长度为 k 的饱和链数量。（本问题与 [6,问题 5]有关。）

参考文献

[1] A. Björner 和 F. Brenti。《Coxeter 群组合学》，第 231 卷。Springer，2005。2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 15, 16, 23[2] N. Bourbaki。《李群与李代数：Coxeter 群与 Tits 系统。由反射生成的群。根系。第 4–6 章》。Masson，1968。21, 24[3] F. Brenti。关于 Coxeter 群与单峰性的若干开放问题。《代数组合学开放问题》，即将出版的论文集卷，2022。2[4] B. Brink 和 R.B. Howlett。Coxeter 群的一个有限性性质与自动结构。《数学年刊》， 296 179 190, 1993 4, 8, 9, 10 : –。R. de Man。Coxeter 群根的[5]数量生成函数。《符号计算杂志》， 27 6 535 541, 1999 3, 4, 20 ( ): –。M. Dyer、S. Fishel、C. Hohlweg 和 A. [6]Mark。Coxeter 群中的 Shi 构形与低元素。《伦敦数学会论文集》(3 129 2 2024 2, 3, 7, 10, 11, 15, 16, 30)，( )，。M. J. Dyer。[7]Hecke 代数与 Bruhat 区间的壳化。II. 扭曲 Bruhat 序。载于《Kazhdan-Lusztig 理论及相关主题》（伊利诺伊州芝加哥，1989），当代数学第 139 卷，第 141 165 1992 16 – 页。美国数学会，罗得岛州普罗维登[8]斯，。M.J. Dyer。Coxeter 系统的反射子群。《代数杂志》， 135 1 57 73, 1990 15, 17 ( ): –。[9]M.J. Dyer。论 Coxeter 系统的“Bruhat 图”。《组合数学》，( ): –191，1991 16。78 2 185

[10] M.J. Dyer。 n-低元素与 Coxeter 群的极大秩 k 反射子群。《代数杂志》，607, 03 2021 10 。M.J. Dyer 和 C. Hohlweg。Coxeter 群中的小根、低元素与弱[11]序。《数学进展》，301：739–784，2016。6, 7, 9, 10, 19, 21, 22, 30[12] K. Eriksson。仿射 Coxeter 群中的约化词。载于《第六届形式幂级数与代数组合学会议论文集》（新泽西州新布朗斯维克，1994），第 157, 127 146, 1996 2 卷，第 – 页。X. Fu。Coxeter 群、虚锥与支配。《太平洋数学杂志》，[13] 262 2 339 363, 2013 10 ( )：–。S. Hart。Coxeter 群中有多少元素具有唯一约化表达式? 《群论杂志》，[14] 20 5 903 910, 2017 2 ( )：–。C. Hohlweg、P. Nadeau 和 N. Williams。Coxeter 群中的自动机、约化词与 Garside 阴影。《代数杂志》，457：431–456，2016。2, 3, 6, 19[15][16] J.E. Humphreys。《反射群与 Coxeter 群》。第 29 号。剑桥大学出版社，1990。21[17] E. Milićević。魏尔群中反射的约化词。《数学成果》，80(4)：论文编号 100，2025。3[18] J. Parkinson 和 Y. Yau。Coxeter 群中的锥类型、自动机与正则划分。《数学进展》，398：论文编号 108146，66，2022。6[19] 7 6 1879 1885, 2024 6[20] P. Przytyck 和 Y. Yau。两个 Garside 阴影。《代数与组合》，( )：–。Nathan Reading。非交叉划分与碎片交序。《代数组合杂志》，33 4 483 530, 2011 30 ( )：–。Fabricio Dos Santos。Coxeter 群中的 Garside 阴影与双自动结构。即将发表于《以色列数学杂志》，2025。6[21][22] W. A. Stein 等。Sage 数学软件（9.5 版）。Sage 开发团队，2011。 http://www.sagemath.org. 18

(Riccardo Biagioli) 博洛尼亚大学，圣多纳托门广场 5 号，40126 博洛尼亚，意大利电子邮箱：riccardo.biagioli2@unibo.it(Christophe Hohlweg) 蒙特利尔魁北克大学，LaCIM 数学系，CP 8888 Succ. Centre-Ville，蒙特利尔，魁北克，H3C 3P8，加拿大电子邮箱：hohlweg.christophe@uqam.ca网址： http://hohlweg.math.uqam.ca(Elisa Sasso) 博洛尼亚大学，圣多纳托门广场 5 号，40126 博洛尼亚，意大利电子邮箱： elisa.sasso2@unibo.it