arXiv:2602.16368v1 [quant-ph] 18 Feb 2026

有限维可能性量子力学的形式理论

Olivier Brunet
olivier.brunet at normalesup.org

2026年2月19日

摘要

本文提出了一种形式体系，用于推理有限维量子系统。与量子逻辑中的常见方法不同，我们的形式体系基于经典一阶逻辑，因此可以在研究中运用模型论的工具。具体而言，我们证明了该形式理论是完备的，这意味着它能够完全确定量子系统的行为。此外，我们还刻画了该形式理论的模型，从而为研究量子理论的隐变量模型提供了新的见解。

1 引言

量子逻辑诞生于 Birkhoff 和 von Neumann 的一篇开创性文章中 [2]，他们观察到

> 量子力学的命题演算与抽象射影几何具有相同的结构。

这种对经典逻辑和布尔代数的背离开启了一个完整的研究领域，重点在于研究正交模格等替代性代数结构 [1]，事实证明，这些结构是深入理解量子力学及其基础的重要工具。

然而，没有必要背离经典逻辑；在这篇文章中，我们将提出一种基于经典逻辑、用于对量子系统进行推理的形式体系。更确切地说，我们将定义一个一阶理论，其中形式变量对应于量子系统。希尔伯特空间的闭子空间不再被用于解释逻辑公式

（以及更一般地，正交模格的元素）将提供称为验证陈述的谓词，这些谓词表达关于检测该量子系统粒子的预测。

这种表述既是非概率性的，也是操作性的：它具有操作性，是因为逻辑术语仅用于描述作用于系统的量子电路布局；它是非概率性的，是因为我们的验证陈述将表达可证伪的预测，说明在电路输出端能够或不能检测到什么。

有了一阶逻辑理论，便可以使用模型论工具 [7] 研究其性质。此外，该理论的表述方式使我们能够清晰地区分量子系统的认识论描述（即语言中的公式），以及与理论的模型及其元素相对应的本体描述。

本文的主要贡献包括：将有限维可能性量子力学表述为一个完备的一阶理论；其公理化体系的最终形式见第16页图5；以及刻画该理论的模型。

在第2节中，我们将介绍量子电路及其行为的形式化方法，定义验证陈述，并列出这些陈述所验证的性质。接着，在第3节中，我们将把这些性质转化为一组公理，构成一个适当定义的一阶理论。然后，在本节末尾及下一节中，我们将关注该理论的一些性质，并证明它是一致且完备的。最后，我们将介绍完备性证明的一个重要推论，即对该理论的模型进行刻画。

除第2节旨在阐明量子电路形式化的动机外，本文主要关注该理论的逻辑层面，而将量子力学相关讨论留待后续配套文章。

2 描述量子系统及其演化

我们将以一种简化的量子电路形式化方案为基础，该方案包含两类算子：酉算子和投影算子。例如，图1所示的电路会产生贝尔态

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|00\rangle + |11\rangle\big)$$

其中时间从左向右流动，对子空间 P 的投影表示为

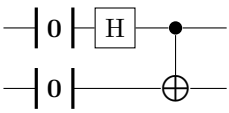


图 1：贝尔态的制备

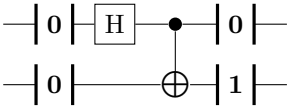


图 2：贝尔态的制备



若在电路的每个输出端放置探测器时，能够同时在每个探测器处探测到一个粒子，则称该量子系统为可能的。否则，它是不可能的。例如，图2所示电路的输出是不可能的，因为 $|10\rangle$ 与 $|\Phi^+\rangle$正交。断言某电路是不可能的，这是一个可证伪陈述，并将成为我们方法的核心。

然而，在前一个例子中，我们依赖于某种量子态的状态，而我们明确希望避免将这一概念作为形式体系的基础要素。相反，我们的方法旨在探究逻辑方法对任何量子态概念施加了哪些约束。不过，通过这个例子，我们引入了形式体系的不同组成部分：

- 两种类型的算子，即酉算子和投影算子，
- 一个用于判断量子系统是否不可能的谓词。

这些要素的语义将完全由我们稍后详细介绍的五条规则规定。在此之前，我们再明确几个要素。

首先，我们将把量子系统视为一个整体，因此电路的图状结构将被一个算子的线性复合所取代。例如，图 2 中的不可能电路变为：



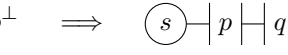
其中， s 表示进入电路的量子系统。这也可以用更数学化的形式表示为

$$\pi_{\mathbf{1}\otimes\mathbf{0}} \circ \mathrm{CNot}_{1,2} \circ H \otimes \mathrm{Id} \circ \pi_{\mathbf{0}\otimes\mathbf{0}}(s) : \mathrm{Imp}$$

我们还需要引入一些其他记号，并补充一条假设：对于每个有限维量子系统，都可以关联一个维数 $d \in \mathbf{N}$ ，使得作用于该系统的投影算子可以关联到$\mathbf{C}^d$的子空间。令$\mathbf{H}_d$ 表示$\mathbf{C}^d$的子空间集合，令$\mathbf{V}_d$ 表示$\mathbf{H}_d$ 中由一维子空间（或向量射线）组成的子集$\mathbf{H}_d$。按照惯用的格论记号， $\top$ （分别为 $\bot$）表示$\mathbf{H}_d$ 关于包含关系的最大（分别为最小）元素。最后，令$\mathbf{U}_d$表示作用于$\mathbf{C}^d$上的酉算子集合。

现在可以列出本方法中定义算子和不可能性谓词含义的规则。首先，依次将两个投影算子作用于正交子空间会产生一个不可能电路：

规则1

$$\forall p, q \in \mathbf{H}_d, \qquad q \leq p^{\perp} \quad \Longrightarrow \quad$$


此处，标有 s 的圆表示输入量子系统。

若 $q \leq p$，则先投影到 p 再投影到 q ，等价于直接投影到 q。由此一般原理，我们推导出两条规则：

规则2

$$\forall p, q \in \mathbf{H}_d, \quad q \leq p \implies \left(\text{  } \right)$$

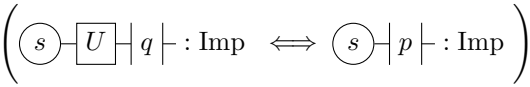
规则3

$$\forall p, q, r \in \mathbf{H}_d, \quad q \leq p \implies \left(\text{  } \right)$$

现在我们来考虑酉算子。如果 $U(p) = q$，那么最后投影到 p 上，等同于先应用 U ，再投影到 q:

规则4

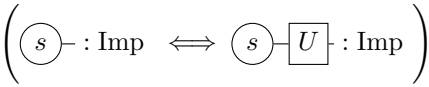
$$\forall p, q \in \mathbf{H}_d,\ \forall U \in \mathbf{U}_d,\ q = U(p) \implies$$



应用酉算子会保留量子系统的不可能性:

规则5

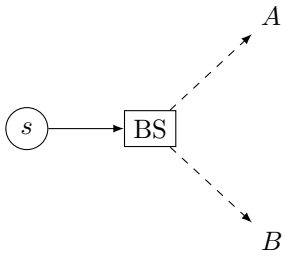
$$\forall U \in \mathbf{U}_d,$$



最后一条规则无疑是最重要的，需要更多一点背景。考虑两条正交向量射线 ψ_1，$\psi_2 \in \mathbf{V}_d$（其中有 $\psi_2 \leq \psi_1^{\perp}$），并假设系统 s 满足:



此外，假设使用基于路径的装置（例如分束器或斯特恩-盖拉赫装置）对 ψ_1 和 ψ_2 进行投影。因此，投影到 ψ_1 和 ψ_2 上的系统会进入两个不同的分支，分别通向 A 或 B，其中可以放置探测器。



现在，假设 $\pi_{\psi_1}(s)$: Imp（分别地，$\pi_{\psi_2}(s)$: Imp）意味着在 A 和 B处都不可能探测到粒子。此外，由于 A 和 B可以相距任意远，相对论要求，在 A 处未探测到粒子不能取决于在 B处是否探测到了粒子（甚至那里是否存在探测器），反之亦然。换句话说，没有粒子会经过任一路径。

因此，若将两条路径重新合并（如下一图所示，两条路径在 C处偏转并重新合并），则可得到一个关于 $\psi_1 \vee \psi_2$ 的投影算子；又由于在 C之后不会检测到任何粒子，我们推断 $\pi_{\psi_1 \vee \psi_2}(s)$: Imp.

$$q \le p^{\perp} \implies \pi_q \circ \pi_p(s) : \mathrm{Imp} \tag{R_1}$$

$$q \le p \implies \big(\pi_q \circ \pi_p(s) : \mathrm{Imp} \iff \pi_q(s) : \mathrm{Imp}\big) \tag{R_2}$$

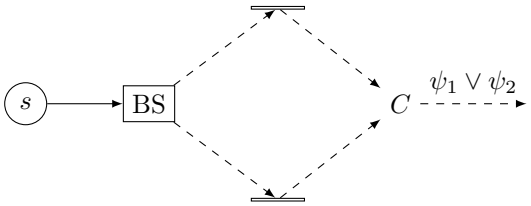
$$q \le p \implies \big(\pi_r \circ \pi_q \circ \pi_p(s) : \mathrm{Imp} \iff \pi_r \circ \pi_q(s) : \mathrm{Imp}\big) \tag{R_3}$$

$$\pi_p(s) : \mathrm{Imp} \iff \pi_{U(p)} \circ U(s) : \mathrm{Imp} \tag{R_4}$$

$$s : \mathrm{Imp} \iff U(s) : \mathrm{Imp} \tag{R_5}$$

$$\left.\begin{array}{c} \psi_1 \le \psi_2^{\perp} \\ \pi_{\psi_1}(s) : \mathrm{Imp} \\ \pi_{\psi_2}(s) : \mathrm{Imp} \end{array}\right\} \implies \pi_{\psi_1 \vee \psi_2}(s) : \mathrm{Imp} \tag{R_6}$$

图3：电路规则



规则6 形式上，这条规则表示为

$$\forall\, \psi_1, \psi_2 \in \mathbf{V}_d, \qquad \psi_1 \le \psi_2^{\perp} \implies$$

$$(s) \vdash\!| \psi_1 |\!\vdash : \mathrm{Imp} \ \text{ and } \ (s) \vdash\!| \psi_2 |\!\vdash : \mathrm{Imp} \implies (s) \vdash\!| \psi_1 \vee \psi_2 |\!\vdash : \mathrm{Imp}$$

这些规则总结于图3中。

利用这些规则（它们描述了电路的变换），我们现在定义一组关于量子系统的谓词，以便对其进行推理。

定义1. 给定一个维数为 d 的量子系统 s 和一个性质 $p \in \mathbf{H}_d$，我们称“s 验证 p”，并记作 $[s\colon\ p]$，当且仅当

$$\forall\, \varphi \in \mathbf{V}_d,\ \varphi \le p^{\perp} \implies \pi_{\varphi}(s) : \mathrm{Imp}$$

必须指出，验证陈述完全建立在不可能性之上，因此它们同样可以被证伪，也不指向任何类型的量子态。

	$\exists\, x,$	$\neg[x:\bot]$	$(\neg\bot)$
	$\forall\, x,$	$[x:\top]$	$(\top)$
$p \leq q$	$\forall\, x,$	$[x:p] \to [x:q]$	$(\leq)$
$p \operatorname{comp} q$	$\forall\, x,$	$[x:p] \wedge [x:q] \to [x:p \wedge q]$	$(\wedge)$
	$\forall\, x,$	$[x:p] \to [\pi_q(x):p \,\&\, q]$	(π_i)
$p \leq q$	$\forall\, x,$	$[\pi_p \circ \pi_q(x):\bot] \to [\pi_p(x):\bot]$	(π_c)
	$\forall\, x,$	$[\pi_q(x):\bot] \to [x:q^{\bot}]$	$(\pi_{\bot})$
	$\forall\, x,$	$[x:p] \to [U(x):U(p)]$	(u_i)
	$\forall\, x,$	$[U(x):p] \to [x:U^{-1}(p)]$	(u_e)

图4：PQM的公理

借助这些谓词，我们在图 4 中列出了关于量子系统进行性质验证的若干公理。在逐一回顾之前，先来看看它们都是我们关于量子电路的规则所推导出的结果：

命题1. 图*4*中列出的所有公理都可由前述规则推出。

证明。 证明详见A.1节。 □

图4中的断言将作为我们形式理论的公理，可描述如下：

•第一个断言 $\neg\bot$指出，存在一些并非不可能的系统；也就是说，将粒子投影到一条向量射线上后，有可能探测到该粒子。这一断言的性质与后续断言不同。

• 接下来的三个公理，即 $\top$、 $\leq$ 和 $\wedge$，描述了量子系统所满足的一组性质。对于 $\leq$，这适用于所有 p， $q \in \mathbf{H}_d$使得 $p \leq q$ ；而对于 $\wedge$， p 和 q 必须相容，也就是说，对应的投影算子彼此对易（或者等价地，使用正交格记法可写作 $p = (q \wedge p) \vee (q^{\bot} \wedge p)$ 。

• 接下来的三条将量子系统在被施加投影之前与之后所验证的性质联系起来。

• 最后一条公理将量子系统在被施加酉算子之前与之后所验证的性质联系起来。

请注意，在这些公理中，量化的对象是量子系统，而非性质（即$\mathbf{H}_d$ 和$\mathbf{V}_d$的元素）。

3 用于量子系统推理的形式理论

为了进一步研究图 4 所列公理的后果，现在让我们以一阶逻辑理论的形式，精确定义将要使用的整个逻辑框架。

定义 2。 对于所有 $d \in \mathbf{N}^\star$，我们将 $\mathcal{L}_d$ 定义为由以下内容构成的形式语言：

函数 我们有两类函数：

1. 对于每个 $U \in \mathbf{U}_d$，一个一元函数 u；2. 对于某个 $p \in \mathbf{H}_d$，一个表示正交投影算子的 一元函数 π_p。

关系 对于每个 $p \in \mathbf{H}_d$，都有一个一元关系 $[\cdot : p]$。

关于投影算子，我们不要求对每个 $p \in \mathbf{H}_d$ 都有一个投影算子：只要求在某条向量射线上至少有一个投影算子，并且在某个二维子空间上至少有一个投影算子。利用酉算子进行适当变换后，不失一般性地，我们可以认为每条向量射线上以及每个二维子空间上都至少有一个投影算子。

我们回顾一下，给定一种形式语言 $\mathcal{L}$，一个 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{M}$ 由一个称为该结构$\mathbf{M}$ 的论域 的集合，以及对语言中每个函数和关系的解释构成：对于每个元数为 a 的形式函数 f，都有一个函数 $f^{\mathcal{M}} : \mathbf{M}^a \to \mathbf{M}$；对于每个元数为 a 的形式关系 R，都有一个关系 $R^{\mathcal{M}} \subseteq \mathbf{M}^a$。

两种 $\mathcal{L}_d$-结构将在我们的研究中发挥核心作用：希尔伯特模型[1] $\mathcal{H}_d$ 的论域为$\mathbf{H}_d$，而向量模型 $\mathcal{V}_d$ 的论域为$\mathbf{V}_d \cup \{\bot\}$。它们的定义如下：

[1]这个术语 *model* 很快就会变得清楚。

• 我们先从希尔伯特模型 $\mathcal{H}_d$开始。它的论域是$\mathbf{H}_d$，即$\mathbf{C}^n$ 的子空间集合，并且：

$$\begin{aligned} \forall\, p \in \mathbf{H}_d,\ \forall\, U \in \mathbf{U}_d, \qquad & U^{\mathcal{H}_d}(p) := \big\{U(v) \;\big|\; v \in p\big\} \\ \forall\, p, q \in \mathbf{H}_d, \qquad & \pi_q^{\mathcal{H}_d}(p) := p \,\&\, q \\ \text{and} \qquad \forall\, p, q \in \mathbf{H}_d, \qquad & [p : q]^{\mathcal{H}_d} := p \leq q \end{aligned}$$

这里，佐佐木投影 $p \,\&\, q := q \curlywedge (q^\perp \oplus p)$是正交投影的格论等价物：如果 Π_Q 表示 Q上的正交投影算子，那么

$$P \,\&\, Q = \big\{\Pi_Q(v) \;\big|\; v \in P\big\}$$

• 向量模型 $\mathcal{V}_d$ 的论域为$\mathbf{V}_d^\star := \mathbf{V}_d \cup \{\perp\}$，即$\mathbf{V}_d$ 中的向量射线（即一维子空间）集合$\mathbf{C}^n$，以及零子空间，并且其中：

$$\begin{aligned} \forall\, P \in \mathbf{V}_d^\star,\ \forall\, U \in \mathbf{U}_d, \qquad & U^{\mathcal{V}_d}(P) := \big\{U(v) \;\big|\; v \in P\big\} \\ \forall\, P \in \mathbf{V}_d^\star,\ \forall\, Q \in \mathbf{H}_d, \qquad & \pi_Q^{\mathcal{V}_d}(P) := P \,\&\, Q \\ \forall\, P \in \mathbf{V}_d^\star,\ \forall\, Q \in \mathbf{H}_d, \qquad & [P : Q]^{\mathcal{V}_d} := P \subseteq Q \end{aligned}$$

这两个模型的定义十分相似，这表明它们密切相关。我们用以下命题将这一点形式化：

命题 2。 $\mathcal{V}_d$ 是 $\mathcal{H}_d$的一个子结构，粗略地说，也就是将 $\mathcal{H}_d$ 限制在$\mathbf{V}_d^\star$上。

证明。 特别需要指出的是，向量射线经酉算子作用后的像仍是向量射线，且其佐佐木投影的维数至多为一。

□

现在语言已经明确，图 4 中列出的命题构成了一阶理论的公理和公理模式，该理论建立在 $\mathcal{L}_d$ 上，我们将其称为可能性量子力学 （简称 PQM；如果需要明确指明维数，也可称为 PQM$_d$ ）。需要注意的是，这个一阶理论没有等号，而且量化只适用于量子系统，不适用于$\mathbf{H}_d$中的元素。

命题 3. 对于所有 $n \in \mathbf{N}$， $\mathcal{H}_d$ 和 $\mathcal{V}_d$ 都是PQMd的模型。

证明。 我们回顾一下， $\mathcal{L}$-结构是 $\mathcal{L}$ 上的形式理论的一个模型，如果该理论的每个句子在该结构的解释下都为真。

我们不会证明 PQM$_d$ 的每条公理在 $\mathcal{H}_d$ 中都有效，但这里给出一些论证。关于 $\leq$，它可译为

$$\forall\, x \in \mathbf{H}_d,\ x \leq \bot$$

对于 $\pi_\bot$，这是正交模格中的一个经典结果：

$$\forall\, x \in \mathbf{H}_d,\ x \,\&\, q = \bot \iff x \leq q^\bot$$

□

利用 G¨odel 的完备性定理，模型的存在带来了一个重要的首要推论：

推论4。 对于所有 $d \in \mathbf{N}$，PQM$_d$ 是一致的。

这意味着，在 PQM$_d$ 中，不可能同时证明一个命题及其否定；这个形式理论并非自相矛盾。模型的存在也将在下一节发挥重要作用，届时我们将证明该理论是完备的。

4 形式理论的完备性

我们回顾，一个理论 T 是完备的，如果它是一致的，并且对于每一个句子 σ，要么 $T \models \sigma$ 要么 $T \models \neg\sigma$ （而一致性意味着二者不能同时成立）。直观地说，这意味着该理论是完全确定的，没有任何句子的含义仍然“悬而未决”。

一个理论的完备性的另一个等价刻画是：它的所有模型都是初等等价的，也就是说它们对哪些句子为真达成一致：如果 $\mathcal{M}$和 $\mathcal{N}$ 是一个完备理论的模型，那么

$$\forall\, \sigma,\ \mathcal{M} \models \sigma \iff \mathcal{N} \models \sigma$$

定理5. 对所有 $d \in \mathbf{N}$，如果 $d \geq 3$，则PQM$_d$ 是完备的。

本文其余部分将主要用于证明这一定理，并探讨其若干推论。我们将分三步，通过展示模型之间的初等等价来完成这一点：首先，对于任意句子 σ，我们有 $\mathcal{H}_d \models \sigma \implies \mathcal{V}_d \models \sigma$。然后，对于任意句子 σ 以及任意模型 $\mathcal{M}$，$\mathcal{M} \models \sigma \implies \mathcal{H}_d \models \sigma$，最后 $\mathcal{V}_d \models \sigma \implies \mathcal{M} \models \sigma$。

不过首先要指出，我们的理论除了没有等号之外，也没有常元，而且所有关系和函数都是一元的。因此，它与一元一阶逻辑密切相关。这一性质的一个重要推论是，在完备性证明中，我们可以将范围限定为形如 $\exists x,\ \varphi(x)$ 的句子，其中 $\varphi(x)$ 本身具有如下形式

$$[\overline{f}_1(x):p_1]\wedge\cdots\wedge[\overline{f}_n(x):p_n]\wedge\neg[\overline{g}_1(x):q_1]\wedge\cdots\wedge\neg[\overline{g}_m(x):q_m]$$

其中，p_i 和 q_i 是$\mathbf{H}_d$的元素，而 f_i 和 g_i 是有限个幺正函数的复合。[-]

下文中，我们将固定这样一个 $\varphi(x)$。此外，对于任意一个论域为$\mathbf{M}$ 的模型 $\mathcal{M}$，以及任意 $m\in\mathbf{M}$，$\varphi(m)$ 表示

$$[\overline{f}_1^{\mathcal{M}}(m):p_1]^{\mathcal{M}}\wedge\cdots\wedge[\overline{f}_n^{\mathcal{M}}(m):p_n]^{\mathcal{M}}\wedge\neg[\overline{g}_1^{\mathcal{M}}(m):q_1]^{\mathcal{M}}\wedge\cdots\wedge\neg[\overline{g}_m^{\mathcal{M}}(m):q_m]^{\mathcal{M}}$$

特别地，一阶逻辑的语义表明

$$\mathcal{M}\models\exists x,\varphi(x)\iff\exists m\in\mathbf{M},\ \mathcal{M}\models\varphi(m)$$

4.1 从子空间到向量

在 $\mathcal{H}_d$（以及 $\mathcal{V}_d$ 中，因为它是 $\mathcal{H}_d$ 的子结构）中，我们有

$$[\pi_q(m):p]^{\mathcal{H}}\iff m\,\&\,q\le p\iff m\le p\,\delta\,q\iff[m:p\,\delta\,q]^{\mathcal{H}}$$

其中 $p\,\delta\,q$ 定义为 $q^{\perp}\vee(p\wedge q)$，这可由正交模格的经典性质推出。同样，我们有

$$[U(m):p]^{\mathcal{H}}\iff[m:U^{-1}(p)]^{\mathcal{H}}$$

因此，为了证明这一点，不失一般性，

$$\mathcal{H}_d\models\exists x,\varphi(x)\implies\mathcal{V}_d\models\exists x,\varphi(x)$$

我们可以考虑 $\varphi(x)$ 具有如下形式

$$\varphi(x)=[x:p_1]\wedge\ \cdots\ \wedge[x:p_n]\wedge\neg[x:q_1]\wedge\ \cdots\ \wedge\neg[x:q_m]$$

其中只出现验证语句。

现在，假设 $\mathcal{H}_d\models\exists x,\varphi(x)$，并令 $r\in\mathbf{H}_d$ 满足 $\mathcal{H}_d\models\varphi(r)$，即

$$\forall\, i\in[\![1,n]\!],r\le p_i$$

——或者，等价地，$r\le\bigwedge_{i\in[\![1,\ n]\!]}p_i$——并且

$$\forall\, j\in[\![1,m]\!],\ r\not\le q_j$$

令 $p_\infty = \bigwedge p_i$，这意味着对于所有 j， $p_\infty \wedge q_j$ 都是 p_∞的真子空间。现在，一个众所周知的事实是，向量空间不能表示为有限个或可数个真子空间的并（例如，这是贝尔纲定理的一个推论）。换句话说，我们有[2]

$$\bigcup_j (p_\infty \cap q_j) \neq p_\infty$$

因此存在一个非零向量 $u \in p_\infty \setminus \bigcup_j (p_\infty \cap q_j)$，于是我们有

$$\mathcal{V}_d \models \varphi\big(\mathrm{span}(u)\big)$$

由此我们证明了，对于所有 φ,

$$\mathcal{H}_d \models \exists\, x, \varphi(x) \implies \mathcal{V}_d \models \exists\, x, \varphi(x)$$

4.2 从任意模型到子空间

设 $\mathcal{M}$ 是 PQM$_d$ 的任意模型。我们将证明存在一个函数 $\kappa : \mathbf{M} \mapsto \mathbf{H}_d$，使得对于所有 $m\_\in \mathbf{M}$、所有 $p \in \mathbf{H}_d$，以及由酉算子和投影组成的所有复合 f，

$$\mathcal{M} \models [\overline{f}^{\mathcal{M}}(m) : p]^{\mathcal{M}} \iff \mathcal{H}_d \models [\overline{f}^{\mathcal{H}_d}\big(\kappa(m)\big) : p]^{\mathcal{H}}$$

因此

$$\forall\, m \in \mathbf{M},\ \mathcal{M} \models \varphi(m) \iff \mathcal{H}_d \models \varphi\big(\kappa(m)\big)$$

并且，因而，

$$\mathcal{M} \models \exists\, x, \varphi(x) \implies \mathcal{H} \models \exists\, x, \varphi(x)$$

首先，对于任意 $m \in$**M**，我们将与 m 相关联的滤子 定义为集合

$$F^{\mathcal{M}}(m) = \big\{p \in \mathbf{H}_d \;\big|\; [m : p]^{\mathcal{M}}\big\}$$

命题 6. 对于所有 $m \in M$，我们有：

1. $\top \in F^{\mathcal{M}}(m)$;
2. $\forall\ p, q \in \mathbf{H}_d,\ \big(p \in F^{\mathcal{M}}(m) \text{ and } p \leq q\big) \implies q \in F^{\mathcal{M}}(m)$;
3. $\forall\, p, q \in F^{\mathcal{M}}(m),\ p \,\&\, q \in F^{\mathcal{M}}(m)$.

[2]这里，我们改用类似集合的记法，因为此处暂时将子空间视为向量的集合。

证明。 前两个陈述直接由公理（$\top$）和（$\leq$）得出。第三个陈述由（$\leq$）和（$\wedge$）以及以下事实得出：对于所有 p，$q \in \mathbf{H}_d$，因为$p \vee q^{\perp}$ 和 q 相容，且有 $p \,\&\, q = q \wedge (p \vee q^{\perp})$。 □

命题 7。 对于所有 $m \in M$，如果 $F^{\mathcal{M}}(m) \cap \mathbf{V}$ 至少包含两个不同元素，那么必然有 $\perp \in F^{\mathcal{M}}(m)$。

证明。 参见 [4, 3]。A.2 小节给出了一个简化的证明。 □

命题 8。 在维度 $d \geq 3$ 中，如果 $p, q \in F^{\mathcal{M}}(m)$ 不相容，那么 p 和 q 都不是 $F^{\mathcal{M}}(m)$中的极小元素。

证明。 参见 [5] 中的命题 8。证明见 A.3 小节。 □

定理 9。 若 $d \geq 3$，对于每个论域为 $\mathbf{M}$ 的 $\mathrm{PQM}d$ 模型 $\mathcal{M}$，都存在一个函数 $\kappa : \mathbf{M} \to \mathbf{H}_d$，使得对于所有 $m \in \mathbf{M}$，

$$\forall p \in \mathbf{H}_d,\ p \in F^{\mathcal{M}}(m) \iff \kappa^{\mathcal{M}}(m) \leq p$$

或者，等价地：

$$\forall p \in \mathbf{H}_d,\ [m : p]^{\mathcal{M}} \iff [\kappa(m) : p]^{\mathcal{H}_d}$$

证明。 首先，由于我们在有限维空间中工作，$F^{\mathcal{M}}(m)$ 关于包含关系至少有一个极小元素。假设 $F^{\mathcal{M}}(m)$ 有两个不同的极小元素 p 和 q。根据命题 8，它们必须相容。但此时有 $p \wedge q \in F^{\mathcal{M}}(m)$，这与 p 和 q是 $F^{\mathcal{M}}(m)$ 的两个不同极小元素这一事实相矛盾。因此，$F^{\mathcal{M}}(m)$ 有唯一的极小元素，即它有一个最小元素，这正是所需的 $\kappa^{\mathcal{M}}(m)$。

□

命题 10。 对于所有模型 $\mathcal{M}$，前一个定理中定义的函数 κ 实现了一个从 $\mathcal{M}$ 到 $\mathcal{H}_d$的强 $\mathcal{L}_d$-态射，即对于所有 $m \in \mathbf{M}$，

$$\forall p \in \mathbf{H}_d, \quad [m : p]^{\mathcal{M}} \iff [\kappa(m) : p]^{\mathcal{H}_d} \tag{1}$$

$$\forall q \in \mathbf{H}_d, \quad \kappa\big(\pi_q^{\mathcal{M}}(m)\big) = \pi_q^{\mathcal{H}_d}\big(\kappa(m)\big) \tag{2}$$

$$\forall U \in \mathbf{U}_d, \quad \kappa\big(u^{\mathcal{M}}(m)\big) = u^{\mathcal{H}_d}\big(\kappa(m)\big) \tag{3}$$

证明。 根据定理 9，已证明第（1）点对所有 $m \in \mathbf{M}$ 和 $p \in \mathbf{H}_d$ 均成立，

$$[m : p]^{\mathcal{M}} \iff p \in F^{\mathcal{M}}(m) \iff \kappa(m) \leq p \iff [\kappa(m) : p]^{\mathcal{H}_d}$$

下面证明第（2）点。对于 $m \in \mathbf{M}$ 和 $q \in \mathbf{H}_d$，由 $[m : \kappa(m)]^{\mathcal{M}}$，可推出 $[\pi_q^{\mathcal{M}}(m) : \kappa(m) \,\&\, q]^{\mathcal{M}}$，因此

$$\kappa \circ \pi_q^{\mathcal{M}}(m) \leq \kappa(m) \,\&\, q$$

现在，假设 $\kappa \circ \pi_q^{\mathcal{M}}(m) < \kappa(m) \,\&\, q$。于是我们可以定义 $u \in \mathbf{V}_d$，使得

$$u \leq \big(\kappa(m) \,\&\, q\big) \wedge \big(\kappa \circ \pi_q(m)\big)^{\perp}$$

由于 $u \leq \big(\kappa \circ \pi_q(m)\big)^{\perp}$ 且 $[\pi_q(m) : \kappa \circ \pi_q(m)]$, ，由此可得

$$\big[\pi_u \circ \pi_q(m) : \perp\big]$$

但由于 $u \leq \kappa(m) \,\&\, q \leq q$，这意味着

$$\big[\pi_u(m) : \perp\big]$$

从而 $[m : u^{\perp}]$。因此，$\kappa(m) \,\&\, q \leq u^{\perp} \,\&\, q$。但 u 与 q（作为 $u \leq q$）的相容性意味着 $u^{\perp} \,\&\, q = u^{\perp} \wedge q$，因此我们最终得到

$$u \leq \kappa(m) \,\&\, q \leq u^{\perp} \wedge q \leq u^{\perp}$$

这是荒谬的。第(3)点可以用类似的方式证明。 □

由于 κ 是强态射，对所有 $m \in \mathbf{M}$，我们有

$$[\overline{f}^{\mathcal{M}}(m) : p]^{\mathcal{M}} \iff [\kappa \circ \overline{f}^{\mathcal{M}}(m) : p]^{\mathcal{H}} \iff [\overline{f}^{\mathcal{H}_d} \circ \kappa(m) : p]^{\mathcal{H}_d}$$

推论11。

$$\mathcal{M} \models \exists\, x, \varphi(x) \implies \mathcal{H}_d \models \exists\, x, \varphi(x)$$

证明。显然，如果 $\mathcal{M} \models \varphi(m)$，那么 $\mathcal{H}_d \models \varphi\big(\kappa(m)\big)$。 □

4.3 从 Vect 到任意模型

前一个结果无法用于证明，对于任意句子 φ，

$$\mathcal{H}_d \models \exists\, x, \varphi(x) \iff \mathcal{M} \models \exists\, x, \varphi(x)$$

因为一般而言 κ 并非满射。不过，我们有一个较弱的结果，即 $\mathbf{V}_d \subseteq \kappa(\mathbf{M})$，正如我们接下来将要证明的那样；这足以确立 $\mathbf{PQM}_d$ 的完备性。

命题12. 对所有 $v \in \mathbf{V}_d$，存在一个元素 $m \in \mathbf{M}$ 使得 $\kappa(m) = v$。

证明. 设 $v \in \mathbf{V}_d$。根据公理 $\neg\bot$，存在一个元素 $m \in \mathbf{M}$ 使得 $\kappa(m) \neq \bot$。再设 $w \in \mathbf{V}_d$ 使得 $w \leq \kappa(m)$。则

$$\kappa\big(\pi_w(m)\big) = \kappa(m)\,\&\,w = w$$

现在，令 $U \in \mathbf{U}_d$ 使得 $U(w) = v$。令 $m' = U \circ \pi_w(m)$，我们有

$$\kappa(m') = v$$

□

推论13。

$$\mathcal{V}_d \models \exists x,\ \Phi(x) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{M} \models \exists x,\ \Phi(x)$$

证明。如果 $\mathcal{V}_d \models \exists x, \varphi(x)$，那么令 $v \in \mathbf{V}$ 满足 $\mathcal{V}_d \models \varphi(v)$。根据命题12，存在一个 $m \in \mathbf{M}$ 使得 $\kappa(m) = v$。但是

$$\mathcal{M} \models \varphi(m) \iff \mathcal{H}_d \models \varphi\big(\kappa(m)\big) \iff \mathcal{V}_d \models \varphi\big(\kappa(m)\big)$$

因此 $\mathcal{M} \models \exists x,\ \varphi(x)$。 □

4.4 总结

我们已经证明，对于任意 $n \geq 3$ 以及 PQM$_d$的任意模型 $\mathcal{M}$，

$$\mathcal{M} \models \exists x, \varphi(x) \implies \mathcal{H}_d \models \exists x, \varphi(x) \implies \mathcal{V}_d \models \exists x, \varphi(x) \implies \mathcal{M} \models \exists x, \varphi(x)$$

并且，这条蕴含链可以推广到任意句子，由此我们得出：

定理14。对于所有 $n \geq 3$，PQM$_d$ 是完备的。

最后，让我们探讨该定理的两个推论。首先，我们可以修改该理论的公理。例如，在公理 $\wedge$ 中，我们可以去掉 p 与 q 相容这一要求（由于完备性，只需证明这一点在 $\mathcal{H}_d$ 中成立）：

$$\forall\, x, p, q \in \mathbf{H}_d, \quad [x:p]^{\mathcal{H}} \wedge [x:q]^{\mathcal{H}} \implies x \leq p \text{ and } x \leq q \implies x \leq p \wedge q \implies [x : p \wedge q]^{\mathcal{H}}$$

这一极不显然的简化是$\mathbf{H}_d$在 $d \geq 3$ 时的拓扑所导致的。

另一项简化适用于有关投影算子的规则。我们有 $\pi_q^{\mathcal{H}}(x) = x \,\&\, q$，并且我们先前已经看到，

$$x \,\&\, q \leq p \implies x \leq p \,\delta\, q$$

其译为

$$[\pi_q(x) : p] \to [x : p \,\delta\, q]$$

该公理蕴含并因而可以取代 π_c 与 $\pi_\perp$二者；就后者而言，

$$\perp \delta\, q = q^\perp \vee (q \wedge \perp) = q^\perp$$

而就前者而言，若 $p \leq q$，则 $p^\perp \,\delta\, q = p^\perp$ 且 $p^\perp \,\&\, p = \perp$，从而

$$[\pi_p \circ \pi_q(x) : \perp]^{\mathcal{H}} \implies x \leq p^\perp \implies [\pi_p(x) : \perp]^{\mathcal{H}}$$

We在图5中给出PQM$_d$ 针对 $d \geq 3$的修订公理化。

	$\forall\, x,$	$[x : \top]$	$(\top)$
	$\exists\, x,$	$\neg[x : \perp]$	$(\neg\perp)$
$p \leq q$	$\forall\, x,$	$[x : p] \to [x : q]$	$(\leq)$
	$\forall\, x,$	$[x : p] \wedge [x : q] \to [x : p \wedge q]$	$(\wedge)$
	$\forall\, x,$	$[x : p] \to [\pi_q(x) : p \,\&\, q]$	(π_i)
	$\forall\, x,$	$[\pi_q(x) : p] \to [x : p \,\delta\, q]$	(π_e)
	$\forall\, x,$	$[x : p] \to [U(x) : U(p)]$	(u_i)
	$\forall\, x,$	$[U(x) : p] \to [x : U^{-1}(p)]$	(u_e)

图5：针对 $d \geq 3$修订的PQM$_d$公理

我们这项研究的第二个重要结论是，κ-函数的存在实际上构成了刻画PQM$_d$模型的判据。

定理15. 如果 $d \geq 3$ 是一个 $\mathcal{L}_d$-结构 $\mathcal{M}$，其论域为 $\mathcal{M}$，那么它是PQM$_d$ 的模型，当且仅当存在一个强 $\mathcal{L}_d$-态射 κ： $\mathbf{M} \to \mathbf{H}_d$，使得 $\kappa(\mathbf{M}) \neq \{\perp\}$。

证明。 我们已经证明，对于每一个 PQM$_d$的模型 $\mathcal{M}$，都存在一个强态射 κ：$\mathbf{M} \to \mathbf{H}_d$，使得 $\kappa(\mathbf{M}) \neq \{\perp\}$。

反过来，假设 $\mathcal{M}$ 是一个 $\mathcal{L}_d$-结构，并且存在一个强态射 $\kappa : \mathbf{M} \to \mathbf{H}_d$，使得 $\kappa(\mathbf{M}) \neq \{\bot\}$。下面证明 $\mathcal{M}$ 确实是 PQM$_d$的一个模型。由于 κ 是一个强态射，因此有：

$$\forall\, m \in \mathbf{M},\ \forall\, p \in \mathbf{H}_d, \quad [m : p]^{\mathcal{M}} \iff [\kappa(m) : p]^{\mathcal{H}} \iff \kappa(m) \leq p$$

因此，PQM$_d$ 的所有公理都显然成立。例如，公理 $\wedge$ 可化简为

$$\forall\, m \in \mathbf{M},\ \forall\, p, q \in \mathbf{H}_d, \quad \kappa(m) \leq p \ \text{ and } \ \kappa(m) \leq q \implies \kappa(m) \leq p \wedge q$$

其证明是直接的。 □

5 结论与展望

本文表明，通过经典逻辑研究量子力学是有意义的，并且补充了通常基于研究布尔代数以外结构的量子逻辑方法。此外，借助模型论的结果，本文通过该理论的模型为量子力学基础带来了新的见解；这些模型由定理15刻画。不过，我们将把这一讨论，以及更广泛而言这一形式理论对量子力学基础的影响，留待后续的一篇配套文章展开。

在逻辑方面，这一形式体系可以沿多个方向扩展。首先，我们只讨论了有限维情形，这在定理 9 中发挥了关键作用。一个重要问题是研究如何修改该理论，使其也能涵盖无限维可分希尔伯特空间。另一个重要的发展方向，是将构造复合系统的可能性纳入这一形式体系，例如通过某种张量积，从而不再受限于线性电路。类似地，也可以修改这一形式体系，以涵盖粒子可能经过的不同路径；而在当前版本中，粒子只能沿一条路径运动。线性逻辑的乘法与加法联结词 [6] 似乎为此提供了自然的形式化思路。

A 证明

A.1 命题1的证明

(⊤) 这是由以下事实得出的：$\left\{v \in \mathbf{V}_d \;\middle|\; v \leq \top^{\bot}\right\} = \emptyset$。

(¬⊥) 这是对如下事实的重新表述：至少存在一个 $v \in \mathbf{V}_d$，使得应用 π_v 并不总是导致一个不可能的电路。

($\leq$) 设 $v \in \mathbf{V}_d$ 使得 $v \leq q^\perp$。由于 $p \leq q$，我们有 $q^\perp \leq p^\perp$，并由传递性可得 $v \leq p^\perp$。

因此，$[s:\ p]$ 意味着 $\pi_v(s)$：蕴涵。

($\wedge$) 假设 $p, q \in \mathbf{H}_d$ 相容，并令 $v \in \mathbf{V}_d$ 满足 $v \leq (p \wedge q)^\perp$。$p$ 与 q 的相容性意味着

$$(p \wedge q)^\perp = p^\perp \vee \left(q^\perp \wedge p\right)$$

此外，我们有

$$v \leq \left(v \,\&\, p^\perp\right) \vee \left(v \,\&\, (q^\perp \wedge p)\right)$$

and

$$v \,\&\, (q^\perp \wedge p) \leq \left(v \,\&\, p^\perp\right)^\perp$$

现在，$v \,\&\, p^\perp \leq p^\perp$ 和 $[s:\ p]$ 意味着 $\pi_{v\&p^\perp}(s)$：蕴涵。同样，我们有 $\pi_{v\&(q^\perp \wedge p)}(s)$：蕴涵。因此，利用 (R_6)，我们有

$$\pi_{(v\&p^\perp)\vee(v\&(q^\perp\wedge p))}(s) : \mathrm{Imp}$$

最后，利用 (R_3)，我们得出 $\pi_v(s)$：蕴涵。

(π_i) 令 $v \in \mathbf{V}_d$ 满足 $v \leq (p \,\&\, q)^\perp$。等价地，我们有 $v \,\&\, q \leq p^\perp$。特别地，由于 $[s:\ p]$，这意味着 $\pi_{v\&q}(s)$：蕴涵，并利用 (R_2)，

$$\pi_{v\&q} \circ \pi_q(s) : \mathrm{Imp}$$

现在，由于 $v \,\&\, q^\perp \leq q^\perp$，利用 (R_1)，我们还有

$$\pi_{v\&q^\perp} \circ \pi_q(s) : \mathrm{Imp}$$

最后，由于 $v \leq (v \,\&\, q) \vee \left(v \,\&\, q^\perp\right)$，利用 (R_6)，我们推得

$$\pi_v \circ \pi_q(s) : \mathrm{Imp}$$

($\pi_\perp$) 令 $v \leq (q^\perp)^\perp$。利用 (R_2)，我们有

$$\pi_v \circ \pi_q(s) : \mathrm{Imp} \iff \pi_v(s) : \mathrm{Imp}$$

But，由于 $[\pi_q(s) :\ \perp]$，显然，$\pi_v \circ \pi_q(s) : \mathrm{Imp}$，因此 $\pi_v(s) : \mathrm{Imp}$。

(u_i) 令 $v \leq U(p)^\perp$。利用 (R_4)，我们有：

$$\pi_v \circ U(s) : \mathrm{Imp} \iff \pi_{U^{-1}(v)}(s) : \mathrm{Imp}$$

但是 $U^{-1}(v) \leq p^\perp \iff v \leq U(p)^\perp$，因此 $[s:\ p]$ 蕴含 $\pi_{U^{-1}(u)}(s) : \mathrm{Imp}$，最后还有 $\pi_v \circ U(s) : \mathrm{Imp}$。

(u_e) 我们要证明 $[U(x) : p]$ 蕴含 $[x : U^{-1}(p)]$。设 $v \in \mathbf{V}_d$ 使得 $v \leq \left(U^{-1}(p)\right)^{\perp}$。我们要证明 $\pi_v(s) : \mathrm{Imp}$。但根据规则 (R_4),

$$\pi_v(s) : \mathrm{Imp} \iff \pi_{U(v)} \circ U(s) : \mathrm{Imp}$$

现在，我们有 $v \leq \left(U^{-1}(p)\right)^{\perp} \iff U(v) \leq p^{\perp}$ 并且由于 $[U(x) : p]$, 因此可得 $\pi_{U(v)} \circ U(s) : \mathrm{Imp}$，等价地，$\pi_v(s) : \mathrm{Imp}$

A.2 命题 7 的证明

令 $P(a)$ 表示这样的事实：F 包含两个向量 u_+ 和 u_-，它们的坐标为

$$u_+ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_- \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

在适当选取的标准正交基下。

命题 16. 对于所有 $a \in]0, 1[$，若 $P(a)$，则对于所有 $b \in [a, f(a)$，有 $P(b)]$，其中

$$f : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

注意，性质 $P(1)$ 意味着 F 包含两个正交非零向量，因此根据相容交，F 包含 $\perp$。

证明。令 $x, y \in \mathbf{R}$ 并定义 $w \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$（坐标以

与性质 $P(a)$ 对应的标准正交基表示）。

根据公理（$\leq$），由于 span(u_+)（分别为 span(u_-)）属于 F，因此 span(u_+, w)（分别为 span(u_-, w)）也属于其中；若它们相容，则根据公理（$\wedge$），span$(w) \in F$。

但显然，我们有张成空间$(u_\pm, w)$ = 张成空间$(v_\pm, w)$，且

$$v_\pm = u_\pm - \frac{\langle w | u_\pm \rangle}{\langle w | w \rangle} w$$

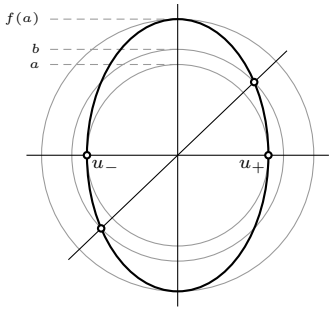
由于 $\langle w|v_+\rangle = \langle w|v_-\rangle = 0$，张成空间$(v_+, w)$ 与张成空间(v_-, w) 相容，当且仅当 $\langle v_+|v_-\rangle = 0$，也就是说，当且仅当

$$x^2 + (1-a^2)y^2 = a^2$$

换句话说，我们已经证明，如果 $x^2 + (1-a^2)y^2 = a^2$，那么 $w \in F$。可以看出，这是一个半短轴为 a 、半长轴为 $f(a)$ 的椭圆方程，其中

$$f : x \in [0, 1[\mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

因此，$\forall b \in [a, f(a)]$，$P(b)$。 □



命题 7 的证明。该命题可重述为：对于所有 $a \in]0,\ 1]$, $P(a)$，都蕴含 $P(1)$。然而，对 f的研究表明，对于所有 $a \in]0,\ 1]$，都存在一个整数 n ，使得 $f^{(n)}(a) \geq 1$，因此 F 包含两个正交向量，从而包含 $\perp$。 □

A.3 命题 8 的证明

令 P，Q为 $F^{\mathcal{M}}(m)$ 中两个不相容元素，将其视为子空间，并记 Π_P（分别为 Π_Q）为正交投影 P（分别投影到 Q上）。

首先可以指出，$\Pi_P \circ \Pi_Q$ 在 P 上的限制是自伴的，其特征值位于 $[0, 1]$中。此外，由于 P 和 Q 不相容，它具有一个特征值 $\lambda \in]0,\ 1[$。设 u 为相应特征向量，并设 $v = \Pi_Q(u)$。显然，$\Pi_P(v) = \lambda u$，且 $u \notin Q$ 和 $v \notin P$也如此。

定义 $C = \text{span}(u,\ v)$。等价地，取 $C = \text{span}(u,\ v - \lambda u)$。由于 $u \in P$ 和 $v - \lambda u \in P^{\perp}$，可得 C 和 P 相容。同理，C 和 Q 相容。

因此，$\{P\,\&\,C,\ Q\,\&\,C\} \in F^{\mathcal{M}}\left(\pi_C^{\mathcal{M}}(m)\right)$。但是，$P\,\&\,C = P \wedge C =$张成空间$(u)$，且 $Q\,\&\,C = Q \wedge C =$ 张成空间(v)，所以 $F^{\mathcal{M}}\left(\pi_C^{\mathcal{M}}(m)\right)$ 包含 V 中的两个不同元素。因此，由命题 7 可得

$\perp \in F^{\mathcal{M}}(\pi_C^{\mathcal{M}}(m))$。因此，由（$\pi_\perp$）可得，$[m\colon\ C^\perp]^{\mathcal{M}}$。最后，利用（$\wedge$），我们有 $[m\colon\ P \wedge C^\perp]^{\mathcal{M}}$，其中 $P \wedge C^\perp < P$。这表明 P 在 $F^{\mathcal{M}}(m)$ 中并非极小，Q 也不是。

参考文献

[1] E. Beltrametti 和 G. Cassinelli。《量子力学逻辑》，《数学及其应用百科全书》第15卷。剑桥大学出版社，2010年。[2] Garrett Birkhoff 和 J ohn von Neumann。量子力学的逻辑。《数学年刊》，37(4)：823–843，1936年。[3] Olivier Brunet。正交模格的内蕴拓扑。《国际理论物理学杂志》，46(11)，2007年11月。[4] Olivier Brunet。先验知识与 Kochen-Specker定理。《物理快报A辑》，365(1-2)：39–43，2007年5月。[5] Olivier Brunet。从逻辑视角看量子测量。载于《量子物理与逻辑》，EPTCS第195卷，第84–95页。2015年。[6] Jean-Yves Girard。线性逻辑。《理论计算机科学》，50：1–102，1987年。[7] David Marker。模型论导论。载于《模型论、代数与几何》，第39卷。MSRI出版物，2000年。