arXiv:2602.16374v1 [cs.CE] 18 Feb 2026

带压电圆盘传感器的悬臂梁瞬态响应实验与数值研究

Radek Kolman[1], [2*], RobertCimrman[1,3], Ladislav Musil[1], MoritzFrey[4], Jarom´ırKylar[1], Sebastian Brandstaeter[4], Vojt˘echKotek[1], Alexander Popp[4], Jan Kober[1][1*]
捷克科学院热力学研究所，Dolej˘skova 1402/5；182 00，捷克共和国布拉格 8。[2]伊赫拉瓦理工学院，Tolst´eho 16，586 01，捷克共和国伊赫拉瓦。[3]西波希米亚大学新技术研究中心和应用科学学院，捷克共和国比尔森。[4]慕尼黑联邦国防军大学数学与计算机模拟研究所，Werner-Heisenberg-Weg 39，85577，德国诺伊比贝格。

*通讯作者。电子邮箱： kolman@it.cas.cz；其他作者： cimrman3@ntc.zcu.cz；musil@it.cas.cz；moritz.frey@unibw.de；kylar@it.cas.cz；sebastian.brandstaeter@unibw.de；alexander.popp@unibw.de；kober@it.cas.cz；

摘要

对复杂结构（如飞机和发电站的关键部件）进行在线实时传感和健康状态监测，是动力学研究的重要内容。研究人员使用多种传感器捕捉动态响应，并监测复杂系统关键部件运行期间的变化。压电材料（PZ）属于一类电活性材料，可将机械变形转换为电响应。例如，压电陶瓷或PVDF薄膜可用于在线传感，记录机械变形的时程。本文聚焦于配备粘接式压电传感器的悬臂梁结构的动力响应，并结合实验与建模方法，以获得准确可靠的结果。在梁发生瞬态振动期间，通过激光测振仪记录梁表面某一点的法向速度时程；该振动由突然移除梁自由端的质量载荷触发。同时，使用电子设备测量压电传感器的输出电压。本文建立了压电传感器耦合悬臂梁的弹性动力学模型，并介绍了采用有限元法对其进行离散化的方法。数学模型包含附加项，用于施加浮动电势边界条件，以维持传感器某一电极上的恒定电荷；此外，还以扩展形式给出该模型，以适用于灵敏度分析或参数识别。模型实现通过一个与实验装置相对应的数值算例进行验证。计算结果与实验数据吻合良好。此外，还基于实验测量识别了瑞利阻尼参数。

关键词： 压电弹性、动力学、振动实验、参数识别

1 引言

飞机和发电站关键部件等复杂工程系统的结构完整性和运行可靠性，对于安全和效率至关重要。这些结构发生故障可能导致灾难性后果，包括人员伤亡、经济损失和环境灾害。因此，对这些结构的健康状态进行在线实时传感与监测，已成为结构动力学和无损检测（NDT）研究的重要内容。随着智能材料、传感技术和计算建模的发展，该领域正经历重大转型，朝着预测性维护和基于状态的监测方向迈进。相比之下，实时结构健康监测（SHM）旨在持续评估结构在运行期间的状况，从而实现早期故障检测、损伤定位，并估算剩余使用寿命 Farrar 和 Worden (2007）。文献 Kot 等人(2021）介绍了近期用于结构健康监测（SHM）的无损检测（NDT）进展。在线结构健康监测（SHM）的成功有赖于开发和集成可靠、准确且灵敏的传感器系统，以捕捉应变、应力、位移、振动和声发射等相关物理现象。目前实际应用中采用了多种传感技术 Hassani 和 Dackermann(2023）。

通常，智能材料用于感测机械响应，见 Bengisu 和 Ferrara(2018)。智能材料也称为智能型或响应材料，是经过工程设计的材料，其特性可在外部刺激（如应力、电场或磁场以及温度）的作用下，以受控方式显著改变。此类材料包括压电材料（PZ）、形状记忆合金、电活性聚合物、电致伸缩材料、磁致伸缩材料等；见 Shahinpoor (2020）。这些材料及其构成的结构可用于感测动态事件。压电材料（PZ）尤其适用于感测机械响应、能量采集和机电驱动。锆钛酸铅（PZT）和聚偏二氟乙烯（PVDF）等压电材料（PZ）因能够将机械能转换为电信号而得到广泛应用 Das 和 Mohanty (2024）。这些传感器可嵌入结构内部或安装于表面，能够检测应变和振动的细微变化 Ferreira 等人 (2022）。它们具有高频响应和小巧的外形，非常适合监测飞机机翼、转子叶片和涡轮机结构中的高速动态事件。

弹性动力学中常用的数值方法是有限元法（FEM）Zienkiewicz 等人（2005）。压电效应也可以纳入数值模拟中。关于这一主题的首篇论文由 Alik Allik 和 Hughes （1970）发表，他们推导了矩阵形式并提出了数值策略。Benjeddou Benjeddou （2000）回顾了自适应结构元件有限元建模的公式和应用方面的进展。

除了传感之外，现代结构健康监测（SHM）系统还需要与高保真计算模型集成，以解读测量数据并预测未来行为。有限元模型通常用于模拟结构在各种载荷条件下的响应。与传感器输入相结合后，这些模型可作为数字孪生的基础——即物理系统的实时虚拟副本，并依据运行数据动态更新。

本文从实验与计算两方面研究顶部粘贴有压电传感器的钢梁的动态响应。实验装置在第2节中加以描述，测量结果在第3节中给出。测得的一阶固有频率由第4节中的解析模型加以支持。第5 节介绍的数学模型包含附加项，用以强制浮动电位边界条件，从而在其中一个传感器电极上保持恒定电荷，并以适于灵敏度分析或参数识别的扩展形式给出。该能力通过与实验装置对应的数值算例加以展示，其中识别了机械材料参数和瑞利阻尼系数，与测量结果吻合良好。计算采用开源多尺度有限元求解器SfePy Cimrman等人 (2019)，用于正问题与反问题计算。本研究服务于正在进行的由3D打印结构构成的超材料动力学工作，其中包括压电致动器和传感器。

2 问题定义

我们研究钢悬臂梁在附着于梁端的质量所施加的突然卸载作用下的动态响应。实验装置如图1所示，其中条形梁结构夹持于刚性夹具上。

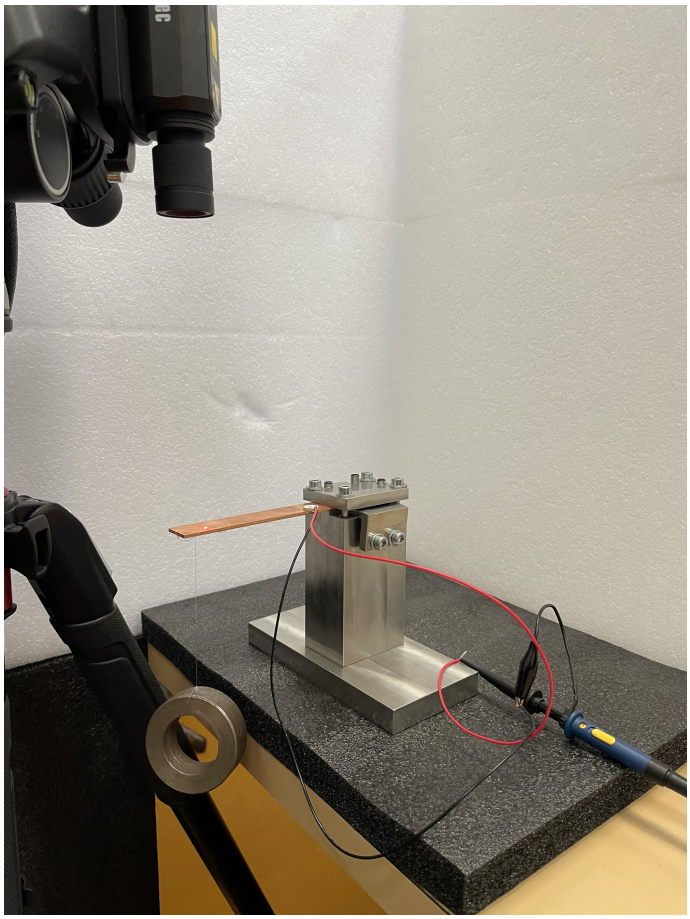


图 1：用于测量梁结构在突然中断载荷作用下动态响应的实验装置。该载荷由移除连接在梁端的重物产生。梁结构夹持在刚性夹具上。

起初，由质量为 0.282 kg 的物体的重量所产生的静力使梁发生预变形，该物体通过尼龙线系在梁端。与所连接重物相对应的力为 $F = 2.766$ N。随后，尼龙线被剪断，梁开始自由振动。使用 PZ传感器圆片和激光测振仪监测梁的动态响应。记录 PZ传感器电极两端的电压，以及激光测振仪测得的梁表面某点处速度的法向分量。梁的尺寸，以及 PZ传感器和激光测量点的位置，见图 2。

梁的材料为低碳钢，钢梁的总质量为 45.803 g。梁结构的总长度为 150 mm，宽度为 $b = 20$ mm，厚度为 $h = 1.905$ mm。梁的有效长度为 $L = 102$ mm。根据这些数值，梁的材料密度为 $\rho = 8014.5$ kg/m^3。

3 实验

为检测梁的动态响应，使用了一片直径为 10 mm、厚度为 2 mm、由 PIC 181 材料（PI Ceramic, https://www.piceramic.com/）制成的压电传感器圆片。使用 Picoscope 3404D示波器测量压电传感器银丝网印刷电极两端的电压。PIC 181 是一种改性锆钛酸铅材料，具有极高的机械品质因数和较高的居里温度，专为大功率声学应用而设计。此外，其介电常数和弹性常数具有良好的温度稳定性和时间稳定性，因此非常适合

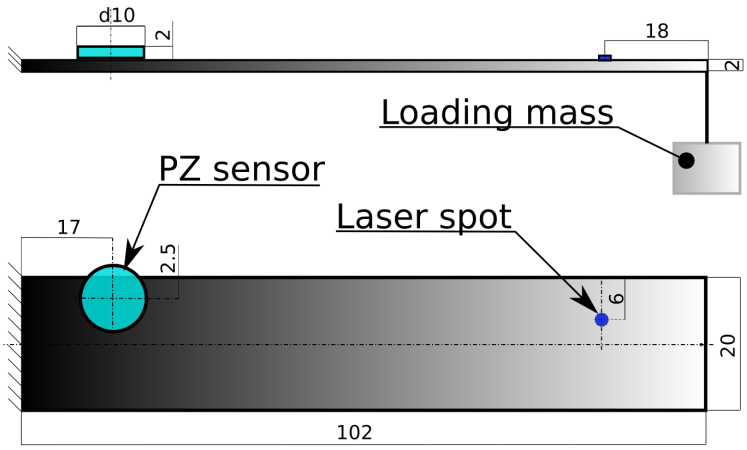


图 2：实验示意图，标示了相关尺寸以及压电传感器、激光光斑和加载质量块的位置。

用于谐振模态超声应用，并且已被证明特别适用于压电电机驱动。该传感器的其他重要参数包括：厚度模态谐振频率为 10.550 kHz，径向模态谐振频率为 227 kHz，电容量为 0.435 nF。

速度测量使用了配备 CLV-700传感器头的 Polytec CLV-2000激光测振仪。激光装置安装在三脚架上，位于梁上方，激光束照射到梁上，距离约为 30 cm。为确保获得足够的光学反射，在图 2所示位置的梁表面贴上了反射标签，因为未经处理的表面反射率不足，无法进行可靠测量。通过 CLV-2000 装置前面板上的输入模块监测反射信号的质量。

3.1 梁材料参数的测量

对梁进行振动分析时，需要其机械材料参数，即弹性本构模型中使用的杨氏模量和泊松比。

采用脉冲回波法测量钢梁中沿厚度方向传播的纵波波速，测得其为 $c_1 = 5693\ \mathrm{m/s}$。采用钢材泊松比的表列值 $\nu = 0.3$。基于该值，根据纵波波速关系式 E =189 GPa 预测相应的杨氏模量 $c_1 = \sqrt{(2G + \Lambda)/\rho}$，其中 $\Lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$且 $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$，参见 Achenbach (2012)。

3.2 实验输出

实验获得了以下各量的时程记录。压电传感器测得的电压时程如图 3 （左）所示，而激光光斑处的法向速度时程如图 4 （左）所示。图 3 （右）和图4 （右）中记录的局部放大图展示了瞬态振动的起始。结构的一阶固有频率$f_{1,\mathrm{measured}} = 147.59$ Hz是利用MATLAB中基于快速傅里叶变换（FFT）的信号处理方法从实验数据中识别得到的。

4 梁一阶固有频率的解析估算值

一阶固有频率可通过基于伯努利-纳维假设的悬臂梁线性无阻尼振动解析模型进行估算。Rao 给出的解析解 Rao（1995）中，一阶固有频率的计算公式为

$$f_1 = \frac{1}{2\pi}(\beta_1 l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}}, \tag{1}$$

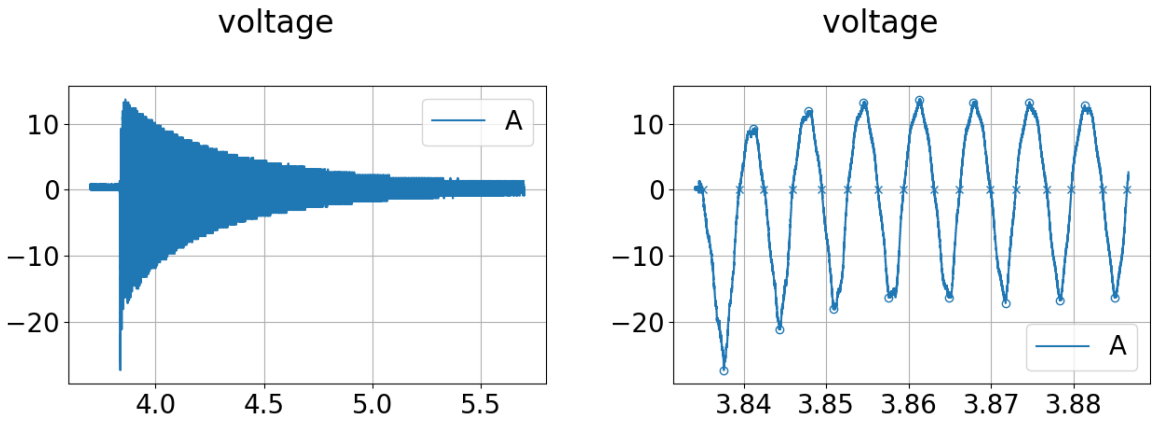


图 3：压电传感器测得的电压时程（单位：V）：完整记录（左）和瞬态振动起始阶段的放大视图（右）。

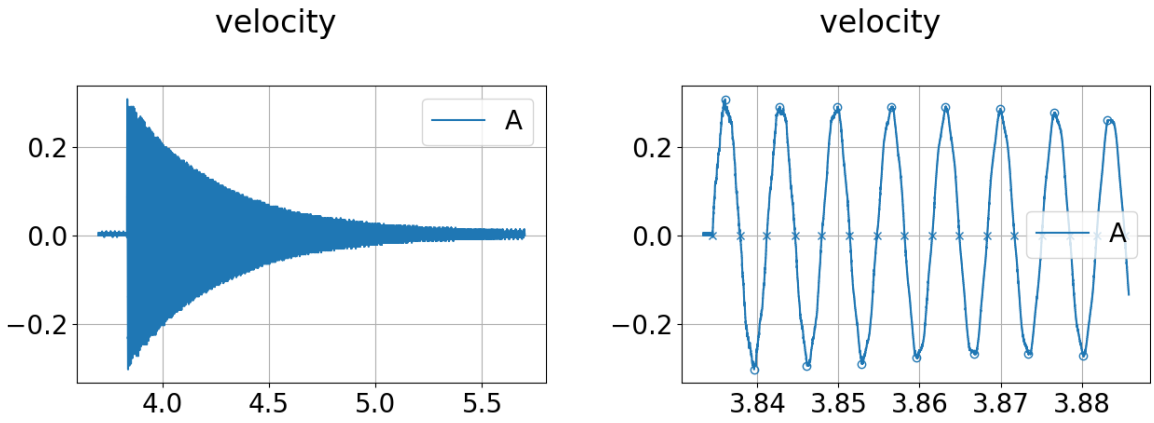


图 4：激光测振仪测得的激光光斑处法向速度时程（单位：m/s）：完整记录（左）和瞬态振动起始阶段的放大视图（右）。

其中，在本例中，$(\beta_1 l) = 1.8751$，截面二次矩为 $I = \frac{1}{12}bh^3$，横截面积为 $A = bh$，钢密度为 $\rho = 8014.5$ $\mathrm{kg/m^3}$，，杨氏模量为 $E = 189$ GPa。代入这些数值，得到解析基频为 $f_{1,\ \mathrm{analytical}} = 143.62$ Hz。

5 有限元模型

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 表示计算域，由对应于悬臂梁的弹性部分 Ω_E 和表示连接在梁上的圆柱形传感器的压电部分 Ω_P 组成。Ω 域中的一点记为 $\boldsymbol{x}$。在当前设置中，悬臂梁沿边界Γ_u固定，如图 5所示。

在线性假设下，Ω_P 中压电固体的本构关系可写为

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C}^P\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{E}\,, \quad \boldsymbol{d} = \boldsymbol{e}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{E}\,, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\nabla}^T\boldsymbol{u}\right)\,, \quad \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi\,, \tag{2}$$

其中，机械应力 $\boldsymbol{\sigma}$（采用 Voigt 记法）和电位移 $\boldsymbol{d}$ 取决于机械柯西应变 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 和电场矢量 $\boldsymbol{E}$。这里，$\boldsymbol{u}$表示机械位移矢量，φ表示电势，$\boldsymbol{C}^P$ 表示恒定电场下的弹性刚度模量矩阵，$\boldsymbol{e}$ 表示压电耦合模量矩阵，$\boldsymbol{\epsilon}$ 表示恒定应变下的介电常数矩阵。在弹性域 Ω_E中，本构关系简化为 $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C}^E\boldsymbol{\varepsilon}$。

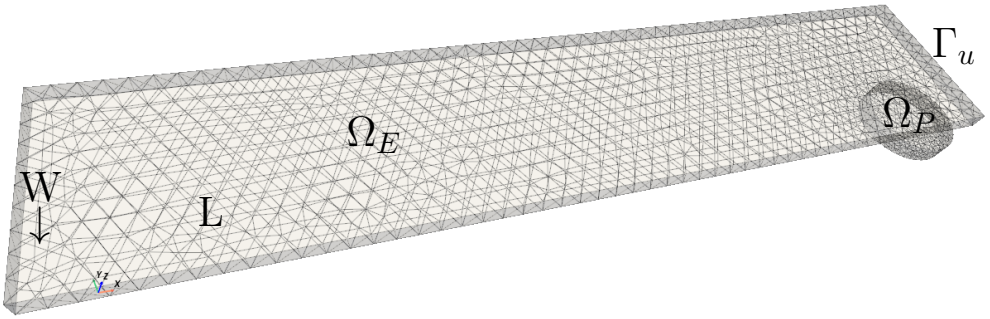


图5：带有限元网格的计算域。在时间 $t = 0$ s 时，点 W 处的底面附有静载荷。动态运动量在点 L 处记录，该点对应于实验中激光测振仪的测量位置。

5.1 压电弹性动力学问题：强形式

在 $t \in [0, T]$ 上求解的压电弹性动力学问题的强形式如下：求 $\boldsymbol{u}$、φ 和 $\bar{\varphi}\,(t)$，使得

$$
\begin{aligned}
\rho\ddot{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{b} \text{ in } \Omega\times[0,T]\,,\\
\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{d} &= 0 \text{ in } \Omega_P\times[0,T]\,,\\
\boldsymbol{u} &= 0 \text{ on } \Gamma_u\times[0,T]\,,\\
\varphi &= 0 \text{ on } \Gamma_{p0}\times[0,T]\,,\\
\varphi &= \bar{\varphi}(t) \text{ on } \Gamma_{pQ}\times[0,T] \text{ such that } \int_{\Gamma_{pQ}} \dot{\boldsymbol{d}}\cdot\boldsymbol{n} = \bar{\varphi}(t)/R + C\dot{\bar{\varphi}}\,,\\
\boldsymbol{u}|_{t=0} = \boldsymbol{u}^0\,,\quad \dot{\boldsymbol{u}}|_{t=0} &= \dot{\boldsymbol{u}}^0\,,\quad \varphi|_{t=0} = \varphi^0 \text{ in } \Omega\,,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

其中，ρ 表示材料密度，$\boldsymbol{b}$ 表示自重（体）力，$\boldsymbol{n}$ 表示外向单位法向量。此外，$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\nabla}\dot{\varphi} - \boldsymbol{e}\boldsymbol{\varepsilon}\,(\dot{\boldsymbol{u}})$。

在压电传感器的底部电极上施加零电势，Γ_{p0}。势能 φ还需在顶部电极上保持空间常数，Γ_{pQ}，但其值随时间变化，并由额外的未知量表示 $\bar{\varphi}(t$。该未知量的取值使得通过 Γ_{pQ} 的电流与外部电路中的电流相匹配；该外部电路由示波器电阻 R 和电容 C表征。在 $\partial\Omega$ 的其余未指定部分施加齐次诺伊曼边界条件。根据初始条件 $\boldsymbol{u}^0$、$\dot{\boldsymbol{u}}^0$和 φ^0确定初始电荷状态；这些条件对应于自重以及点 W 处附加载荷所产生的局部表面力作用下的静力平衡，见图5。

5.2 压电弹性动力学问题：弱形式

接下来，我们定义数学模型（3）的弱变分形式，其中包括瑞利（比例）阻尼。由于 Γ_{pQ} 处电势的狄利克雷边界条件取值未知，因此必须以弱形式施加该条件。弱变分形式如下。设 $V_0^u = \{\boldsymbol{u} \in (\Omega)\ (\Omega), \text{on}\ ,\ (\Omega)\ (\Omega)\ \text{on}\ .$ 我们寻求 $(\ ), (\ ), (\ ),$ 使得

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \rho\boldsymbol{v}\cdot\ddot{\boldsymbol{u}} + \int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) + \alpha\int_\Omega \rho\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{u}} + \beta\int_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}})\\
&\quad - \int_\Omega \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{b} + \int_{\Omega_P} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v})^T\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{\nabla}\varphi - \int_{\Gamma_{pQ}} (\boldsymbol{e}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}))\cdot\boldsymbol{n}(\varphi - \bar{\varphi}) = 0 \qquad \forall\boldsymbol{v}\in V_0^u(\Omega)\,, \qquad (4)\\
&\quad - \int_{\Omega_P} (\boldsymbol{\nabla}\psi)^T\boldsymbol{e}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) + \int_{\Omega_P} (\boldsymbol{\nabla}\psi)^T\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\nabla}\varphi - \int_{\Gamma_{pQ}} (\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\nabla}\varphi)\cdot\boldsymbol{n}\psi\\
&+ \int_{\Gamma_{pQ}} (\boldsymbol{e}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}))\cdot\boldsymbol{n}\psi + \int_{\Gamma_{pQ}} (\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\nabla}\psi)\cdot\boldsymbol{n}(\varphi - \bar{\varphi}) + \int_{\Gamma_{pQ}} \gamma\psi(\varphi - \bar{\varphi}) = 0 \qquad \forall\psi\in V_0^\varphi(\Omega_P)\,, \qquad (5)\\
&\qquad \int_{\Gamma_{pQ}} (\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\nabla}\dot{\varphi})\cdot\boldsymbol{n} - \int_{\Gamma_{pQ}} (\boldsymbol{e}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}))\cdot\boldsymbol{n} - \bar{\varphi}/R - C\dot{\bar{\varphi}} = 0\,, \qquad (6)\\
&\qquad \boldsymbol{u} = 0 \qquad \text{on } \Gamma_u\times[0,T]\,, \qquad (7)\\
&\qquad \varphi = 0 \qquad \text{on } \Gamma_{p0}\times[0,T]\,, \qquad (8)
\end{aligned}
$$

$$\boldsymbol{u}(0)=\boldsymbol{u}^0,\ \dot{\boldsymbol{u}}(0)=0,\ \varphi(0)=\varphi^0 \qquad \text{in } \Omega\,, \tag{9}$$

其中 α 和 β 为比例阻尼系数，而 γ 为罚参数。外部电路由（6）建模。（4）中的最后一项以及（5）中的最后四项，对应于采用 Nitsche方法的非对称变体 Nitsche (1971) 弱形式施加狄利克雷边界条件 $\varphi=\bar{\varphi}(t)$ 于 Γ_{pQ}。不同于静电学中的情形（其中 $\boldsymbol{d}=-\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\nabla}\varphi$），当前的压电情形满足 $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{e}\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\nabla}\varphi$，因此在采用 Nitsche 型方法对电荷通量进行罚处理时会引入额外项。

5.3 有限元离散

有限元 对 (4)–(6) 的离散基于以下近似 式

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=\mathbf{N}_u(\boldsymbol{x})\mathbf{u}(t)\,,\quad \varphi(\boldsymbol{x},t)=\mathbf{N}_\varphi(\boldsymbol{x})\mathbf{p}(t)\,,\quad \bar{\varphi}(t)=1\bar{p}(t)\,, \tag{10}$$

其中，$\mathbf{N}_u(\boldsymbol{x})$ 和 $\mathbf{N}\varphi(\boldsymbol{x})$ 分别表示位移和电势的形函数矩阵。这里，$\mathbf{u}(t)$ 是时间连续的节点位移向量，$\mathbf{p}(t)$ 是时间连续的节点电势向量，$\bar{p}(t)$ 是压电传感器处时间连续的电势。采用隐式二阶Newmark方法 Newmark（1959）对动力学方程 (4) 进行离散，而外部电路方程 (6) 则采用中心差分格式进行离散。由于要对时变系统相对于多个参数进行灵敏度分析，因此以扩展形式给出离散方程。引入时间步长为 Δt 的均匀时间离散，使得离散时刻为 $t_n=n\Delta t\in[0,T]$，其中 $n\in\{0,1,\dots,N\}$ 和 $t_N=T$。为便于后续引用，将所有离散时刻组成的集合定义为 $\mathcal{T}=\{t_0,t_1,\dots,t_N\}$。时间步 $n\geq 1$ 的未知量为 $\mathbf{u}^n$, $\dot{\mathbf{u}}^n$, $\ddot{\mathbf{u}}^n$, $\mathbf{p}^n$, $\dot{\mathbf{p}}^n$, $\bar{p}^n$，例如，$\mathbf{u}^n=\mathbf{u}(t_n)$。前一时间步 $n-1$ 的相应已知量用上标 $^{n-1}$ 表示（$n\geq 1$ 亦同）。最后，空间和时间上完全离散的方程以扩展形式写为：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}^n+\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}^n+\mathbf{K}\mathbf{u}^n+\mathbf{B}^T\mathbf{p}^n-\mathbf{G}^T(\mathbf{p}^n-\mathbf{1}\bar{p}^n)-\mathbf{b}=0\,, \tag{11}$$

$$-\mathbf{B}\mathbf{u}^n+\mathbf{G}\mathbf{u}^n+\mathbf{D}\mathbf{p}^n-\mathbf{F}\mathbf{p}^n+\mathbf{F}^T(\mathbf{p}^n-\mathbf{1}\bar{p}^n)+\mathbf{M}_p(\mathbf{p}^n-\mathbf{1}\bar{p}^n)=0\,, \tag{12}$$

$$\mathbf{1}^T\mathbf{F}\dot{\mathbf{p}}^n-\mathbf{1}^T\mathbf{G}\dot{\mathbf{u}}^n-\frac{1}{2R}(\bar{p}^n+\bar{p}^{n-1})-C\frac{\bar{p}^n-\bar{p}^{n-1}}{\Delta t}=0\,, \tag{13}$$

$$\dot{\mathbf{u}}^n-\dot{\mathbf{u}}^{n-1}-(1-\gamma_N)\Delta t\ddot{\mathbf{u}}^{n-1}-\gamma_N\Delta t\ddot{\mathbf{u}}^n=0\,, \tag{14}$$

$$\mathbf{u}^n-\mathbf{u}^{n-1}-\Delta t\dot{\mathbf{u}}^{n-1}-(\frac{1}{2}-\beta_N)\Delta t^2\ddot{\mathbf{u}}^{n-1}-\beta_N\Delta t^2\ddot{\mathbf{u}}^n=0\,, \tag{15}$$

$$\dot{\mathbf{p}}^n+\frac{1}{\Delta t}\mathbf{p}^{n-1}-\frac{1}{\Delta t}\mathbf{p}^n=0\,, \tag{16}$$

其中，M表示质量矩阵，C表示阻尼矩阵，K表示刚度矩阵，B表示压电耦合矩阵，D表示静电势矩阵，b表示体力向量。表面通量矩阵F $=\int_{\Gamma_{pQ}}\mathbf{N}_\varphi^T\boldsymbol{n}\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{N}\varphi$和G $=\int_{\Gamma_{pQ}}\mathbf{N}_\varphi^T\boldsymbol{n}\boldsymbol{e}\mathbf{N}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 用于对 Γ_{pQ}上的狄利克雷边界条件 $\varphi=\bar{\varphi}$ 进行弱施加。由1组成的矩阵用于对F和G的各行求和，从而执行式（6）中所示的积分。此外，$\mathbf{M}_p$ 表示势能罚（质量）矩阵。Newmark时间积分格式由式（14）和（15）定义，其参数为 β_N 和 γ_N；中心差分格式由式（16）以及式（13）第三项中的平均算子给出。求解正问题时，将式（14）–（16）所表示的量 $\ddot{\mathbf{u}}^n$、$\mathbf{u}^n$和 $\dot{\mathbf{p}}^n$代入式（11）–（13）。由此，每个时间步有三个主要未知量，即 $\ddot{\mathbf{u}}^n$、$\mathbf{p}^n$和 $\bar{p}^n$，它们通过求解一个线性方程组得到。

5.4 参数识别

本节给出参数识别问题的一般框架，该框架用于根据实验数据确定未知参数值。为识别这些参数，将测得的时间序列与数值模拟得到的相应输出进行拟合。所使用的测量数据与模拟输出配对如下：

a) 由激光测振仪在点 L 处测得的速度分量 $v_z(t_i)$，以及相应的模拟量 $\dot{u}_z^L(t_i)=\dot{u}_z(\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_L,t_i)$，即时刻 t_i 在点 L（位于 $\boldsymbol{x}_L$）处沿 z 方向的模拟速度；以及 b) 由压电传感器测得的电压 $V(t_i)$ 和模拟量 $\bar{p}(t_i)$，即时刻 t_i压电传感器处的模拟电势

针对离散测量时刻 $t_i\in\mathcal{T}_m\subseteq\mathcal{T}$（其中 $i\in\{1,2,\dots,N_m\}$），使得测量时刻集合 $\mathcal{T}_m$ 是离散时间步 $\mathcal{T}$的子集，且 N_m 为测量次数，其中 $N_m\leq N+1$。

我们引入 状态问题的抽象形式（11）–（16）（另见Rohan 和 Cimrman（2002）），可 an 写为

$$\Phi(\boldsymbol{\theta},\mathbf{y}^n,\mathbf{y}^{n-1})=0\,,\quad \mathbf{y}^n\equiv[\mathbf{u}^n,\dot{\mathbf{u}}^n,\ddot{\mathbf{u}}^n,\mathbf{p}^n,\dot{\mathbf{p}}^n,\bar{p}^n]^T\,, \tag{17}$$

其中，$\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{R}^{n_\theta}$ 是一个用于收集待识别参数的向量，而$\mathbf{y}^n$和$\mathbf{y}^{n-1}$ 分别收集时间步n 和 $n-1$的所有状态。

ˆ 参数识别的目标是找到最优参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ ，其定义如下 :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \underset{\substack{\text{s.t. } \boldsymbol{\theta}_{\min} \le \boldsymbol{\theta} \le \boldsymbol{\theta}_{\max} \\ \Phi(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{y}^n, \mathbf{y}^{n-1}) = 0 \text{ for all time steps}}}{\arg\min} F(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{Y}) \,, \tag{18}$$

其中 $\boldsymbol{\theta}_{\min}$ 一个且 $\boldsymbol{\theta}_{\max}$ 分别为参数的下界和上界。测量 t
数据 $\mathbf{Y}$ 定义 如下

$$\mathbf{Y} = [\bar{\mathbf{y}}^1, \bar{\mathbf{y}}^2, \ldots, \bar{\mathbf{y}}^{N_m}] \,, \tag{19}$$

它汇集了在时间步 t^i 处获得的实验数据向量，记为 $\bar{\mathbf{y}}^i = [v_z(t_i)\ V(t^i)]^T$。目标函数采用一般的最小二乘形式:

$$F(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{Y}) = F_{v_z}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{Y}) + F_V(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{Y}) \tag{20}$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_m} \left(\frac{\dot{u}_z^L(t_i) - v_z(t_i)}{s_{v_z}} \right)^2 + \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_m} \left(\frac{\bar{p}(t_i) - V(t_i)}{s_V} \right)^2 . \tag{21}$$

目标函数由两项组成：速度的最小二乘误差 F_{v_z} 和电压的最小二乘误差 F_V。注意，在（21）中，目标函数对参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 的依赖是隐式的，因为计算目标函数需要求解（17），以获得仿真量 $\dot{u}_z^L(t_i)$ 和 $\bar{p}(t_i)$。（21）中的各个求和项均按各自的实验振幅进行归一化，以防止任一信号（机械速度或电压）主导目标函数，并确保两种量对优化的贡献均衡。相应地，归一化常数定义为

$$s_{v_z} = \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} |v_z(t_i)|, \qquad s_V = \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} |V(t_i)|. \tag{22}$$

求解（18）的一些算法需要目标函数相对于参数的梯度，$\nabla_{\boldsymbol{\theta}} F$。计算该梯度涉及求偏导数 $\partial \mathbf{y}^n_{\partial \theta_k}$，其中 θ_k 是 $\boldsymbol{\theta}$的一个分量。对（17）关于 $\boldsymbol{\theta}$求导，其中 Φ^n 是 Φ（$\boldsymbol{\theta}$、$\mathbf{y}^n$、$\mathbf{y}^{n-1}$）的简写，可得递推关系

$$\frac{\partial \Phi^n}{\partial \mathbf{y}^n} \frac{\partial \mathbf{y}^n}{\partial \boldsymbol{\theta}} = -\left(\frac{\partial \Phi^n}{\partial \boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial \Phi^n}{\partial \mathbf{y}^{n-1}} \frac{\partial \mathbf{y}^{n-1}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right) \tag{23}$$

由此可得该关系，从而利用初始条件初始化后，计算所有时间步上的 $\partial \mathbf{y}^n_{\partial \boldsymbol{\theta}}$。然后，$\partial \dot{u}_z^L(t_i)\ \partial \theta_k$ 和 $\partial \bar{p}(t_i)\ \partial \theta_k$ 只是 $\partial \mathbf{y}^n_{\partial \boldsymbol{\theta}}$ 中的分量。所谓的这一方法要求在每个时间步求解一个系统矩阵为 $\partial \Phi^n \partial \mathbf{y}^n$、右端项为 n_θ 的线性方程组。该矩阵的各块包含（11）–（16）中引入的离散系统矩阵。

6 实验与数值建模的比较

本节的目的有两个：首先，展示数值模型再现第 3 节所述实验的准确性；其次，确定仅通过建模难以确定的比例阻尼参数以及外部电路参数。

6.1 材料参数的初始设定

钢梁的密度和弹性参数根据第 3.1 节所述的测量结果获得。与 PIC 181传感器对应的 PZ圆片参数由制造商（PI Ceramic）提供。比例阻尼系数和外部电路参数的初始值均为经验选取。因此，数值模拟采用了以下材料参数:

- 钢制弹性梁： $\rho = 8014.5\ \text{kg/m}^3$， $E = 189\ \text{GPa}$， $\nu = 0.3$。
- 压电圆片： $\rho = 7890\ \text{kg/m}_3$，真空介电常数 $\epsilon^0 = 8.8541878128 \cdot 10^{-12}\ \text{F/m}$以及

$$\begin{aligned} \text{in Voigt notation: } \boldsymbol{C}^P &= \begin{bmatrix} 144.1 & 79.65 & 81.45 & 0 & 0 & 0 \\ 79.65 & 144.1 & 81.45 & 0 & 0 & 0 \\ 81.45 & 81.45 & 134.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 27.29 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 27.29 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32.22 \end{bmatrix} \text{GPa}, \\ \boldsymbol{e} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 10.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10.7 & 0 & 0 \\ -5.256 & -5.256 & 14.53 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{C/m}^2, \\ \boldsymbol{\epsilon} &= \epsilon^0 \begin{bmatrix} 717 & 0 & 0 \\ 0 & 717 & 0 \\ 0 & 0 & 665 \end{bmatrix} \text{F/m} \,. \end{aligned} \tag{24}$$

- 比例阻尼：无，即 $\alpha = 0\ \mathrm{s}^{-1}$， $\beta = 0\ \mathrm{s}$。
- 初始外部电路参数： $R = 10\ \mathrm{M\Omega}$， $C = 1\ \mathrm{nF}$。

有限元模型和参数识别程序使用开源有限元软件包 SfePy 实现（Cimrman 等，（2019）；Cimrman（2021），使用 Python 编程语言编写。此外，还使用 COMSOL Multiphysics 对直接仿真的结果进行了验证®。

6.2 无 PZ圆片的梁的模态分析

通过对弹性梁进行模态分析，确定了适用于后续 SfePy 仿真的网格尺寸。针对多种网格分辨率以及位移近似阶数 1 和 2 计算出的最低固有频率，与解析估算值 $f_{1,\ \mathrm{analytical}} = 143.62\ \mathrm{Hz}$（见第 4节）以及使用 COMSOL 得到的结果进行了比较；COMSOL 中也进行了类似的研究。

图 5所示网格（本次测试仅考虑梁部分）结合二次位移近似，能够提供令人满意的精度。进一步细化网格或提高近似阶数均未带来显著改善。这一选择也体现了我们在后续实验动态仿真中尽可能使用最粗网格的倾向。对于所选网格，计算得到梁的第一阶固有频率为 $f_1 = 145.44\ \mathrm{Hz}$。作为比较，使用六面体网格得到的相应 COMSOL 结果为 $f_1 = 145.31\ \mathrm{Hz}$。

所选的完整网格由 2121 个顶点以及 4815 个（梁） + 1762 （PZ圆片）四面体单元组成。相应的 COMSOL 网格包含 13,066 个顶点以及 8870 个（梁）六面体单元、690 个（梁）棱柱单元和 1190 个（PZ圆片）棱柱单元。

6.3 带有 PZ圆片的梁的模态分析

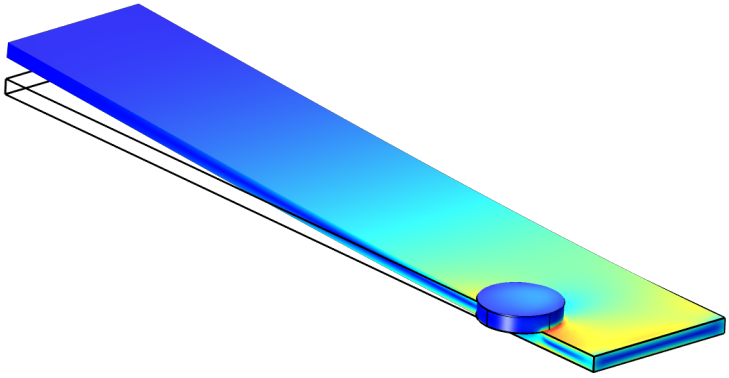


图 6：COMSOL 计算得到的第一阶特征模态，对应于 $f_1 = 150.57\ \mathrm{Hz}$；颜色表示冯·米塞斯应力。

随后，所选的完整网格（包含弹性梁和 PZ圆片）被用于对（4）和（5）中的静态部分进行模态分析。SfePy 得到的一阶固有频率为 $f_1 = 150.74\ \mathrm{Hz}$，而 COMSOL 得到的对应结果为 $f_1 = 150.57\ \mathrm{Hz}$。相应的特征模态如图 6所示。计算所得频率高度吻合，证实了两种离散化的一致性。因此，后续各节所述的瞬态仿真和参数识别程序分别采用了 SfePy 和 COMSOL 网格。

然而，实验测量值较低，即 $f_{1,\ \mathrm{measured}} = 147.59\ \mathrm{Hz}$（见第 3.2 节），下文将进一步讨论。

6.4 瞬态问题

瞬态 由（4）–（6）定义的问题直接对应于第 2 节所述的实验，其有限 ite
元离散 化由（11）–（15）给出。

首先，我们展示使用第 6.1 节所述初始参数设置获得的结果。图 7 展示了以下各量的时间历程：

- 激光测量点处的位移 $u_3(t)$ 和速度 $\dot{u}_3(t)$ L,
- 传感器的 Γ_{pQ} 和 Γ_{p0} 电极表面上的感应电荷 $Q(t)$,
- 电势 $\varphi(t)$ 位于 Γ_{pQ} 电极上。

与实验数据的比较显示，主导频率存在轻微偏差（见图 C 以及上一节中的模态分析结果），外部电路参数也存在差异（图 D）。

在调整模型参数之前，通过将基于 SfePy 的模型的瞬态响应与使用 COMSOL 获得的结果进行比较，对该模型进行了验证。尽管两个模型使用了不同的网格，但结果吻合度很高，如图 8 所示。这证实了数值实现的正确性。

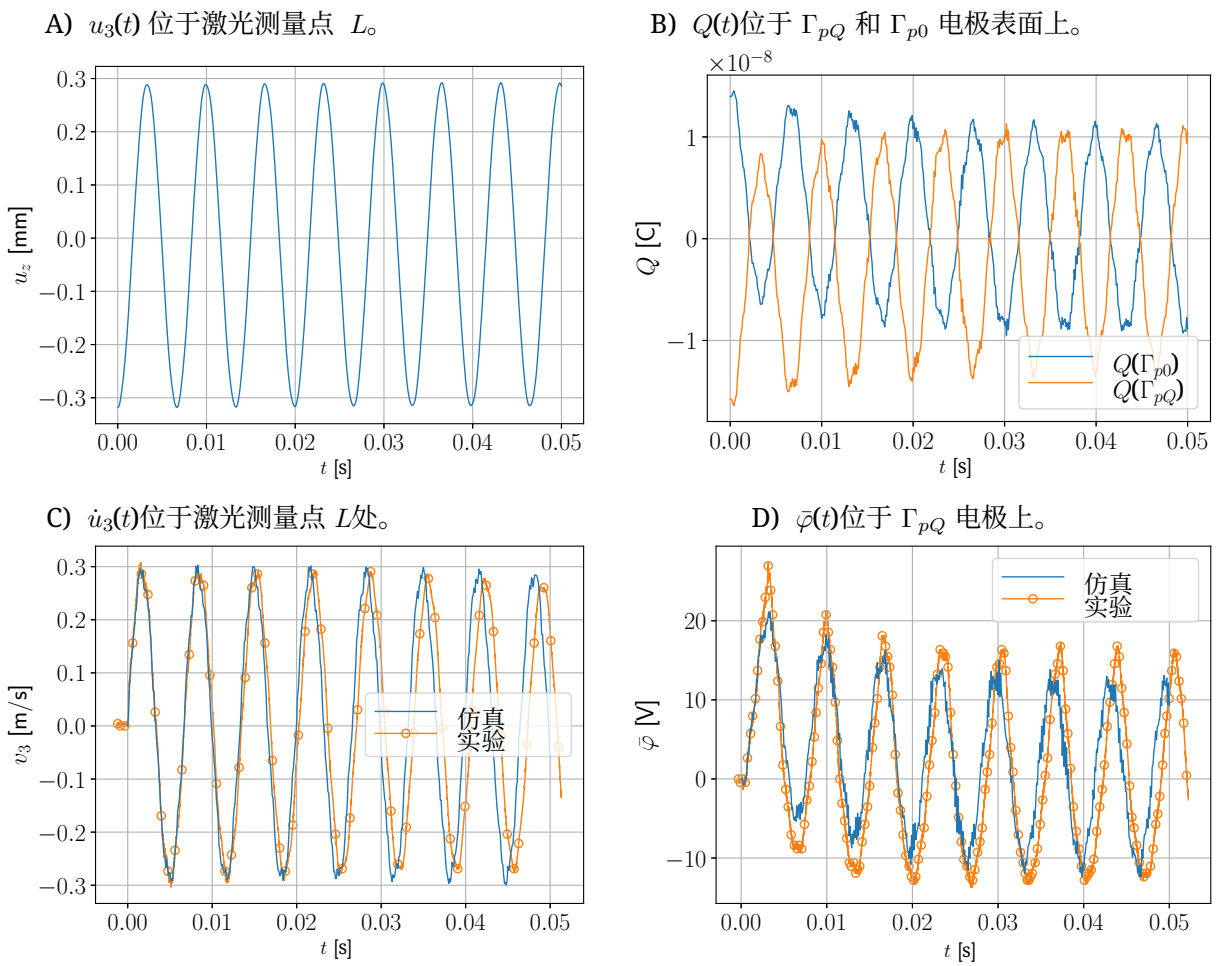


图7：初始材料参数下选定量的时间历程。与实验数据的比较。

数值模型假设压电传感器与梁之间为完全刚性连接。对于所观察到的频率偏差，一个合理的解释是，实际上，PZ 圆片与梁之间的胶粘层具有有限弹性。为研究这一影响，对COMSOL模型进行了扩展，引入了具有以下属性的薄胶层：杨氏模量为3.4 GPa，泊松比为0.34，厚度为0.2 mm，密度为0 kg/m^3。所得时间历程如图9(A)所示，结果表明，这一修改确实将主频降低到了更接近实验观测值的水平。

此外，当将示波器建模为纯电阻元件时，计算所得的电势与实验数据高度吻合。因此，与第 6.1 节所述的初始参数设置不同，此处将示波器电容设为零。图 9(B) 展示了采用不含示波器电容的胶层模型得到的电压时程，并与实验测量结果进行了对比。

作为一种替代方法，也可以通过（人为地）降低梁的杨氏模量来降低模型的主频。然而，该方法仍假设梁与PZ圆片之间为刚性机械耦合，因此会高估产生的电压幅值。可通过（人为地）增大与PZ圆片并联的示波器电容来补偿这一影响。下一节将探讨这一策略，并使用所提出的参数识别程序自动识别模型参数。

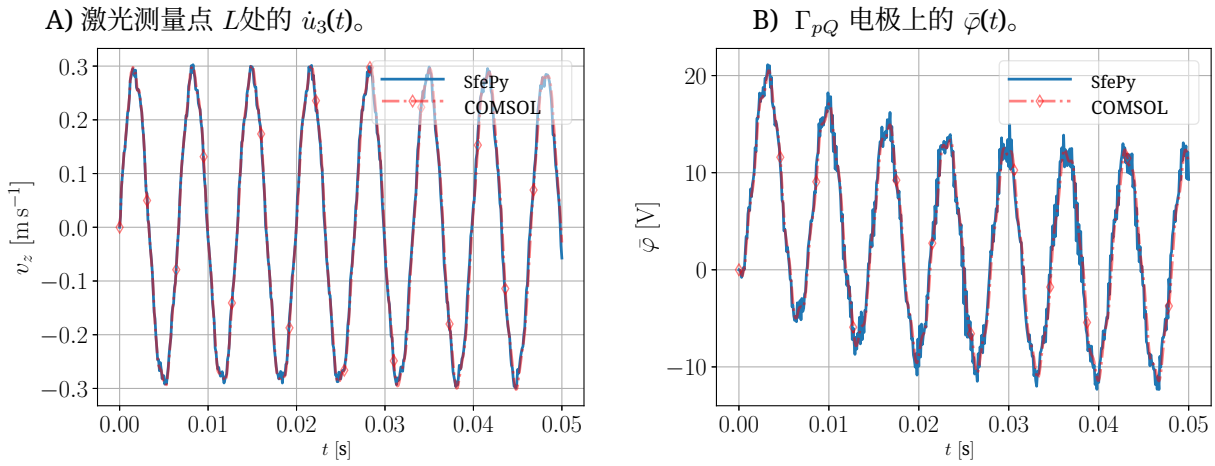


图8：初始材料参数下选定量的时间历程。SfePy与COMSOL结果的比较。

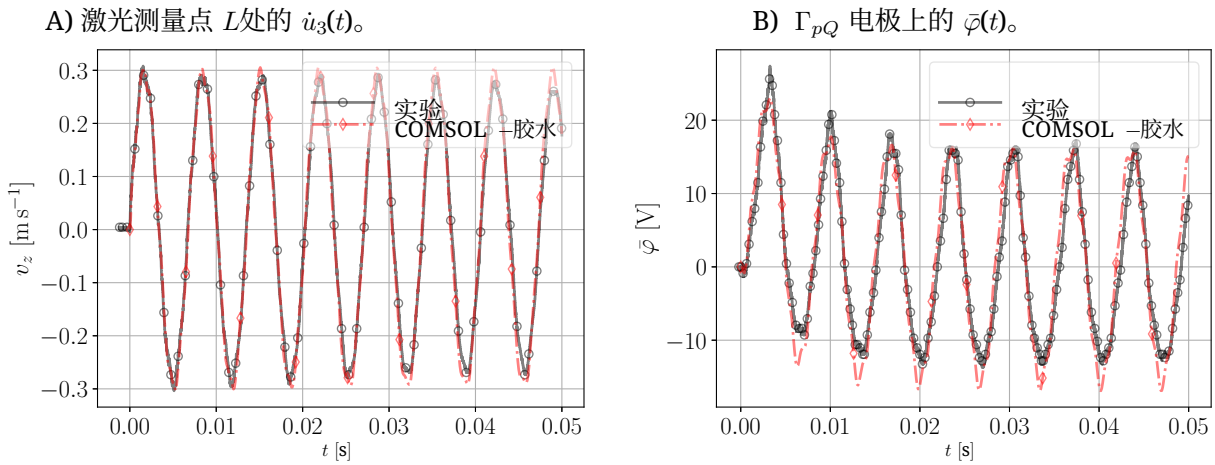


图9：初始材料参数下选定量的时间历程。采用胶层模型且示波器电容为零时，实验数据与COMSOL结果的比较。

6.5 阻尼和电气参数识别

为说明参数识别程序，我们确定机械参数 α （质量比例阻尼）、 β（刚度比例阻尼）和 E（梁的杨氏模量），以及电气参数 $\boldsymbol{\theta} = [\alpha, \beta, E, R, C]$（示波器电阻）和 R（示波器电容）C。由此得到的参数向量为。实验测振仪数据 v_z t_i（）和电压测量值 V t_i（）涵盖s时间段，$t_i \in [0, 0.05]$并用于参数识别。下面将考察并比较两种不同的参数辨识方法。

顺序参数识别

第一种方法采用最小二乘求解器，依次识别机械参数和电气参数。具体而言，我们使用了SciPy 中的 least squares() 函数 Virtanen 等人 (2020)及信赖域反射（TRF）算法。该求解器既可以通过有限差分对目标函数的雅可比矩阵进行数值近似 F，也可以使用用户提供的函数来计算偏灵敏度。

对于当前的线性问题，与默认的两点有限差分格式相比，使用半解析雅可比矩阵预计不会显著缩短计算时间（见第5.4节），因为这两种方法都需要求解数量相同的线性方程组。此外，解析雅可比矩阵还会带来额外的计算开销。尽管如此，其实现仍使我们能够测试基于 JAX 自动微分得到的项 Bradbury 等人 (2023)，并为模型未来的非线性扩展提供概念验证。

以表 1所列的初始猜测值和参数边界为起点，辨识得到的参数值如下。首先，仅通过最小化目标函数中的速度贡献项 α， β和 E 来辨识机械参数 F_{v_z} （20），实际上将电压贡献设为零， $F_V = 0$。在此过程中

，电气参数 R 和 C 固定为表1所列的初始值。随后进行第二次最小二乘计算，仅通过最小化电压贡献 F_V来辨识电气参数，其中 $F_{v_z} = 0$，同时将机械参数固定为第一次计算所得的值。在这两次辨识步骤中， s_{v_z} 和 s_V 均设为 1，因为将单项最小二乘目标函数乘以一个常数不会影响其最小值的位置。

求解器迭代过程中参数的演变如图 10所示，最终辨识值汇总于表 1。辨识参数得到的一阶固有频率为 $f_1 = 147.82$ 赫兹。使用初始参数和辨识参数得到的 $\dot{u}_z^L(t)$ 和 $\bar{p}(t$ 仿真时程与实验数据的对比如图 11a 和图 11b所示。

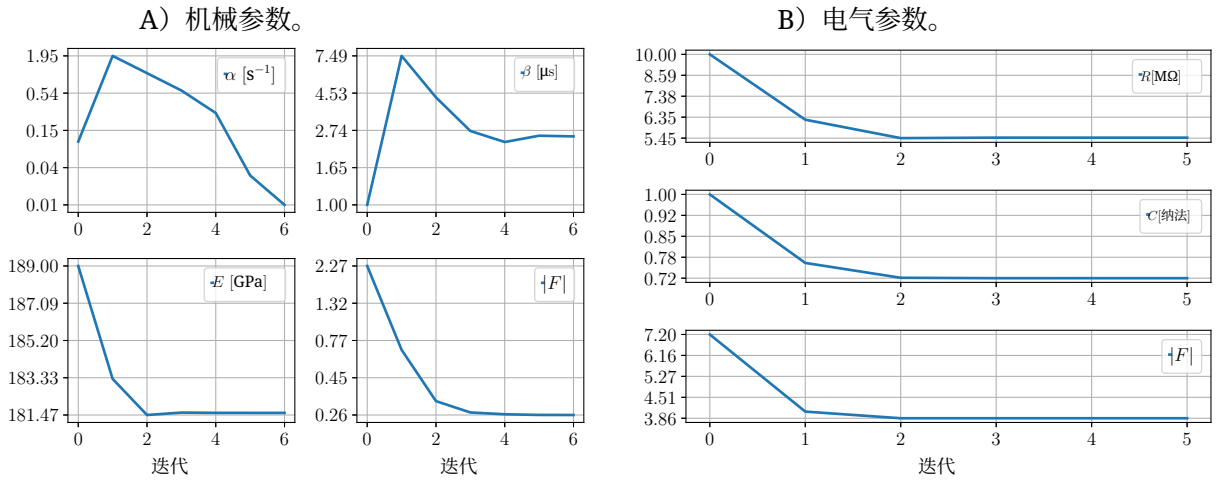


图10：使用 SciPy 的最小二乘() 函数和信赖域反射算法进行顺序辨识时，材料参数和目标函数 $|F|$ 的变化过程。A）和B）两个面板分别对应两次独立的辨识计算：第一次（A）中，电气参数固定为其初始值；第二次（B）中，机械参数固定为第一次辨识得到的值，因此每一步仅优化相应的参数子集。

全局参数辨识

在第二种参数识别方法中，采用协方差矩阵自适应进化策略（CMA-ES）对机械参数和电气参数进行同步识别 Hansen 和 Ostermeier (2001）。我们结合 QUEENS 框架，使用了 `pymoo` 库 Blank 和 Deb (2020) 提供的实现，以对大型计算模型进行求解器无关的多查询分析 Biehler 等 (2025）。为避免对高频噪声过拟合，优化过程中仅使用了实验时间序列中的一个代表性子集（如图 11所示）。在计算目标函数之前，将仿真量 $\dot{u}_z^L(t)$ 和 $\bar{p}(t)$ 线性插值至实验测量时刻 t_i。

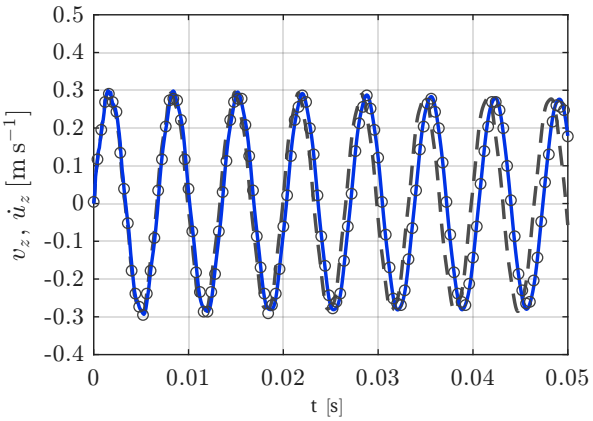
采用这一全局优化策略有两个目的：在一次优化运行中捕捉参数之间可能存在的耦合效应，并确保识别出的参数对应于完整目标函数的最小值（20）。优化采用种群规模 16，共进行 400 代。与第一种方法相同，算法使用表 1中报告的初始猜测值和参数边界进行初始化。识别出的参数值汇总于表 1。将相应的 $\dot{u}_z^L(t)$ 和 $\bar{p}(t)$ 仿真时程与实验数据进行对比，结果见图 11c 和图 11d。

对这两种辨识策略进行比较可以发现，其计算成本存在显著差异。基于TRF的方法仅需进行39次目标函数评估，而全局CMA-ES方法由于其基于种群的特性，需要进行6400次评估。不过需要注意的是，在顺序方法中，参数并非在一次优化运行中完成辨识；相反，每个参数子集都是单独进行优化的。尽管存在这一差异，两种策略得到的参数估计值仍具有可比性。对于基于TRF的顺序辨识，完整目标函数的最终值为0.36；对于全局CMA-ES方法，该值为0.32，表明后者的拟合效果略好，但两者仍处于同一数量级。

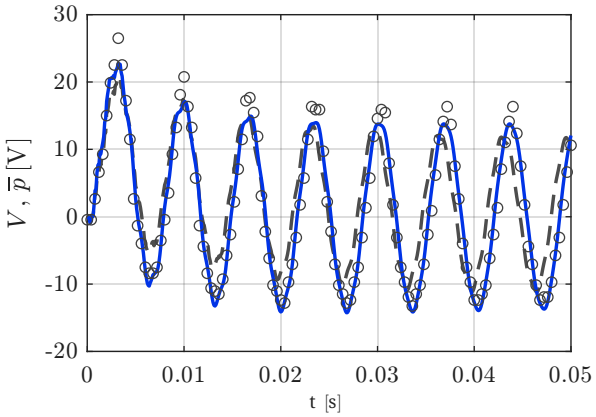
	初始值	边界	最终结果（信赖域反射算法）	最终结果（协方差矩阵自适应进化策略）
α [s^{-1}]	0.1	$[0.01, 10]$	0.011	0.2981
β [μs]	1	$[0.1, 100]$	2.5	4.791
E [GPa]	189	$[140, 200]$	182	181.46
R [兆欧]	10	$[1, 50]$	5.5	5.73
C [纳法]	1	$[0.01, 2]$	0.72	0.685
F	9.85	—	0.36	0.32

表1：初始猜测值、边界 $[\boldsymbol{\theta}_{\min}, \boldsymbol{\theta}_{\max}]$以及使用TRF算法和协方差矩阵自适应进化策略获得的最优参数值——分别对应第一种和第二种辨识方法——均已报告。完整目标函数 F （见（20））的相应值也已列出。对于基于TRF算法的序贯辨识，报告的 F 值表示各次单独辨识计算所得目标函数值之和。

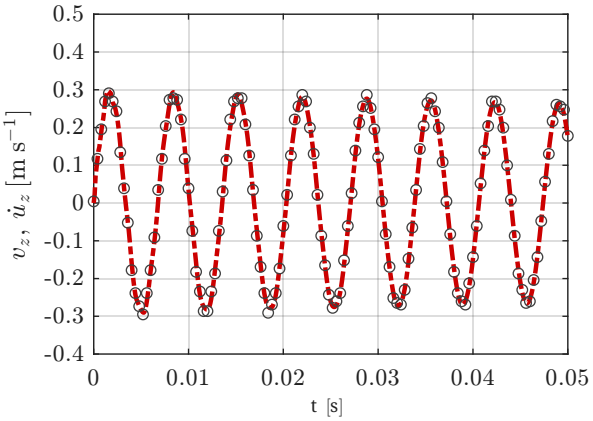
(a) $\dot{u}_3(t)$ 位于激光测量点 L



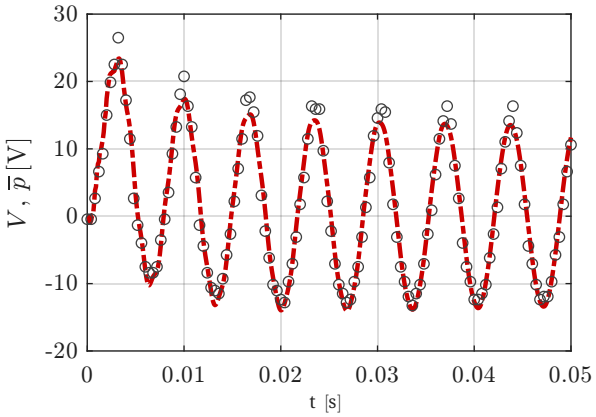
(b) $\bar{\varphi}(t)$ 位于 Γ_{pQ} 电极上



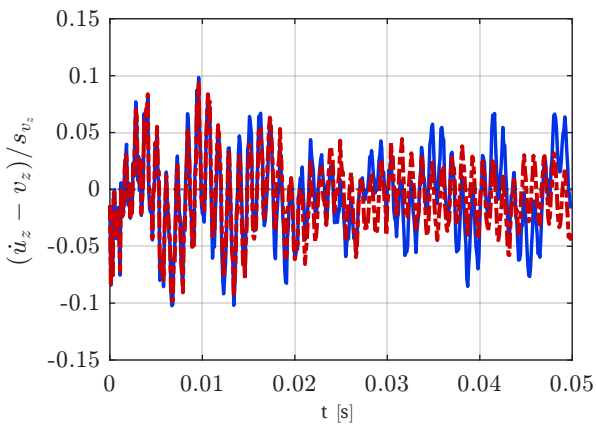
(c) 协方差矩阵自适应进化策略与实验对比（速度）



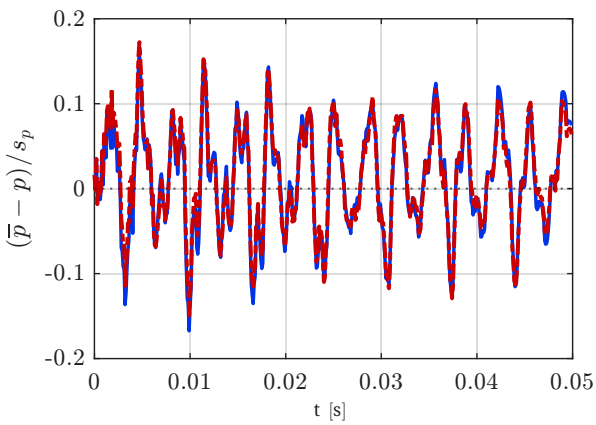
(d) 协方差矩阵自适应进化策略与实验对比（势能）



(e) $\dot{u}_z$中的差值



(f) $\bar{\varphi}$中的差值



7 结论

本文对由悬臂梁和压电圆盘传感器组成的系统的动态响应进行了实验与数值研究。利用定制的实验装置测量了系统振动和传感器电压。从测量数据中提取了一阶固有频率，并与仅针对梁得到的解析值进行比较，结果显示二者吻合良好。剩余差异可归因于实验中的阻尼效应，因为有阻尼系统的特征频率低于相应无阻尼系统的特征频率（见 Rao （1995））。完整的实验构型也进行了数学建模，空间离散采用有限元法，时间离散采用二阶时间积分格式。由于若干模型参数（如瑞利模型的比例阻尼系数）无法直接测量，因此采用两种不同方法对选定参数进行了识别：基于梯度的信赖域反射算法（TRF），以及无梯度的协方差矩阵自适应进化策略（CMA-ES）。识别结果表明，基于TRF的方法能够以较高的计算效率获得令人满意的拟合，而协方差矩阵自适应进化策略方法则以更高的计算成本为代价，获得略有提高的精度。得益于其控制良好的实验装置和全面的数值处理，本文所介绍的实验可作为压电弹性动力学系统数值建模与参数识别的有用基准。

致谢
本研究获捷克科学基金会（CSF）22-00863K号项目资助，项目属于机构支持计划RVO:61388998。作者还感谢V´aclav Kolman设计实验支架。此外，德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）通过项目编号490743767提供了额外资助。

参考文献

Achenbach J（2012）《弹性固体中的波传播》。ISSN，爱思唯尔科学，URLhttps://books.google.cz/books?id=XyQ6ibRvst4C

Allik H，HughesTJR（1970）压电振动有限元方法。《国际工程数值方法杂志》2(2)：151–157。https://doi.org/https://doi.org/10.1002/nme.1620020202，URLhttps://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.1620020202，https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/nme.1620020202

Bengisu M，Ferrara M（2018）《运动材料》，施普林格国际出版公司，Cham，第 5–38 页。https://doi.org/10.1007/978-3-319-76889-2 2，URL https://doi.org/10.1007/978-3-319-76889-2 2 -

Benjeddou A（2000）自适应结构元件的压电有限元建模进展：综述。《Computers & Structures》76（1-3）：347–363

Biehler J，Nitzler J，Brandstaeter S，等（2025）QUEENS：用于大规模计算模型的求解器无关分析的开源 Python 框架。URL https://arxiv.org/abs/2508.16316，arXiv:2508.16316

Blank J，Deb K（2020）pymoo：Python 中的多目标优化。《IEEE Access》8：89497–89509

Bradbury J, Frostig R 等（2023）JAX：Python+NumPy 程序的可组合变换。https://github.com/google/jax，版本 0.4.14

Cimrman R（2021）使用 Python 张量缩并软件包快速计算有限元弱形式。Advances in Engineering Software 159.https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2021.103033

Cimrman R, Luke˘s V, Rohan E（2019）使用 SfePy 在 Python 中进行多尺度有限元计算。Advances in Computational Mathematics https://doi.org/10.1007/s10444-019-09666-0，URLhttps://doi.org/10.1007/s10444-019-09666-0

Das B, Mohanty S（2024）压电油墨综述：从概念到应用。Sensors and Actuators A: Physical 366:114939。https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.sna.2023.114939，URLhttps://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0924424723007884

Farrar CR, Worden K (2007) 结构健康监测导论。《英国皇家学会哲学汇刊A辑：数学、物理与工程科学》365(1851):303–315.

https://doi.org/10.1098/rsta.2006.1928, URL https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rsta.2006.1928, https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rsta.2006.1928Ferreira PM, Machado MA, Carvalho MS, 等 (2022) 用于结构健康监测的嵌入式传感器：方法与应用综述。Sensors 22(21). https://doi.org/10.3390/s22218320,URLhttps://www.mdpi.com/1424-8220/22/21/8320Hansen N, Ostermeier A (2001) 进化策略中的完全去随机化自适应。《进化计算》9(2):159–195。 https://doi.org/10.1162/106365601750190398, URL https://doi.org/10.1162/106365601750190398Hassani S, Dackermann U (2023) 面向无损检测与结构健康监测的先进传感器技术系统综述。Sensors 23(4). https://doi.org/10.3390/s23042204, URL https://www.mdpi.com/1424-8220/23/4/2204

Kot P, Muradov M,GkantouM, 等（2021）用于结构健康监测的无损检测技术最新进展。Applied Sciences 11(6)。 https://doi.org/10.3390/app11062750，网址 https://www.mdpi.com/2076-3417/11/6/2750

Newmark NM（1959）一种结构动力学计算方法。工程力学分册 85(3):67–94。 https://doi.org/10.1061/JMCEA3.0000098

¨Nitsche J（1971）关于一种变¨分原理，用于求¨解不满足边界条件的子域上的狄利克雷问题。汉堡大学数学研讨会论文集 36(1):9–15。 https://doi.org/10.1007/BF02995904

Rao S (1995) 机械振动。解答手册，Addison-Wesley Longman, Incorporated，网址 https://books.google.cz/books?id=H4BbPgAACAAJ

Rohan E, Cimrman R (2002) 激活平滑肌的灵敏度分析与材料识别。《计算机辅助力学与工程科学》第9卷第4期：519–541

Shahinpoor M (2020) 智能材料基础。英国皇家化学学会，https://doi.org/10.1039/9781839168819，网址 https://doi.org/10.1039/9781839168819

Virtanen P, Gommers R, Oliphant TE, 等 (2020) SciPy 1.0：Python 科学计算的基础算法。《自然方法》17(33)：261–272。https://doi.org/10.1038/s41592-019-0686-2

Zienkiewicz OC, TaylorRL, Zhu JZ (2005)《有限元方法：基础与基本原理》，第六版，第6版。Butterworth-Heinemann