arXiv:2602.16381v1 [math.CT] 18 Feb 2026

作为代数的导子

Jean-Simon Pacaud Lemay 和 Chiara Sava

摘要

微分范畴为微分的代数方法提供了范畴论基础。它们成功地形式化了许多与微分相关的重要概念，尤其是导子。本文表明，微分范畴的微分模态可提升为箭头范畴上的一个单子；此外，该单子的代数恰好就是导子。此外，在存在有限双积的情况下，微分模态实际上可提升为箭头范畴上的微分模态。换言之，微分范畴的箭头范畴本身也是微分范畴。因此，导子也构成一个切范畴，而自由代数上的导子则构成一个笛卡尔微分范畴。

致谢。 本研究中，Lemay 获得了 ARC DECRA 奖项（# DE230100303）的资助；本研究还得到了美国空军科学研究办公室（AFOSR）奖项编号 FA9550-24-1-0008 的支持。Sava 则获得了查理大学资助机构（GA UK）项目 n° 222923 和 Primus 资助 PRIMUS/23/SCI/006 的支持。作者还要感谢澳大利亚范畴论研究组（麦考瑞大学），该研究组通过提供 Scott Russell Johnson 研究生奖学金，帮助资助了 Sava。

目录

1 引言 2 2 微分范畴 3 3 导子 7 4 箭范畴上的单子 10 5 导子作为代数 13 6 导子作为交换幺半群 18 7 箭范畴上的微分模态 22 8 导子的切范畴与笛卡尔微分范畴 25

1 引言

微分范畴由 Blute、Cockett 和 Seely 在 [2], 中引入，为微分的代数基础以及微分线性逻辑的范畴语义提供了强大的范畴框架 [10]。从根本上说，微分范畴提炼并公理化了微分的基本结构性质，使其在概念上清晰简洁，同时在数学上灵活自如。具体而言，微分范畴（定义 2.3）是一个对称幺半范畴，配备了微分模态：一个单子 S 以及一个导出变换 d，其公理将微分学的基本恒等式范畴化，例如链式法则和莱布尼茨法则。这种结构有一种直观的理解：S(A) 可视为输入属于 A 的可微函数代数，而 d 则扮演抽象微分算子的角色，将函数映射为其导数。微分范畴涵盖了丰富多样且经过深入研究的实例，能够刻画重要的微分模型。其中包括多项式微分 [2], ，此时 S =Sym 是自由对称代数单子（例 2.4）；光滑函数 [8], ，此时 S $=$ S$^\infty$ 是自由 $\mathcal{C}^\infty$-环单子（例 2.5）；以及来自计算机科学的更特殊实例，例如有限性空间或 K¨othe 空间上的微分 [10]。

微分范畴理论在形式化各种微分相关的关键概念方面取得了相当大的成功，尤其是导子。在经典代数中，导子是微分算子的推广。回顾一下，微分算子是从代数到模的线性算子，并满足莱布尼茨法则。导子是一个基础且无处不在的概念，在代数、微分几何、代数几何等领域都有深远的应用。

在 [4], 受此前关于 K¨ahler 微分的研究启发 [1], 后，Blute、Lucyshyn-Wright 和 O'Neill 在微分范畴中引入了导子的范畴推广，定义了相对于微分模态 S 的 S-导子这一概念。一个 S-导子（定义 3.1）是从一个 S-代数（单子意义下）到一个模的映射，其公理依据的不是莱布尼茨法则，而是链式法则。值得注意的是，每个S-导子都会自动满足莱布尼茨法则，因此恢复了经典的导子概念。然而，这远不止是重新表述：S-导子恰好是那些与微分模态S所编码的可微函数类相容的导子。例如，Sym-导子对应于普通导子，因为它们满足关于多项式的链式法则（例 3.2）；而 S$^\infty$-导子对应于 $\mathcal{C}^\infty$-导子 [9, 11], ，它们满足关于实光滑函数的链式法则（例 3.3）。

关于导子的许多经典结果和概念，都可以有意义地推广到 S-导子。举例来说，导子可以刻画为到代数与模的适当半直积中的代数态射；类似的论述也适用于 S-导子 [4, 命题 5。21]同样，通过 K¨ahler 微分构造泛导子的经典方法，在较弱的余极限假设下也可以推广，从而为 S-代数构造泛S-导子 [4,定理 5。23]。进而，这使得在微分范畴内部发展 de Rham 上同调成为可能 [15]。另一方面，配备了自身取值的 S-导子的 S-代数，可推广微分范畴中的微分代数 [13]。

本文的主要贡献是对S-导子给出一种全新且概念上颇具启发性的刻画：我们证明，它们恰好是箭头范畴上某个单子的代数。更具体地说，我们首先证明，任意微分模态 S 都能规范地提升为箭头范畴上的单子 S（命题4.5）。函子 S 直接由导出变换d构造，其单子结构由链式法则公理良好定义。随后，我们证明，这个提升所得的单子 S的代数恰好就是 S-导子。

这一刻画之所以有用，原因有几个。它适用于任何微分范畴，无需额外结构（例如双积或余极限），这与其他方法 [4]不同。此外，它还为业已确立的导子概念提供了一个真正全新的视角，而这一视角只有通过微分范畴的透镜才能显现。当双积存在时，这一视角会变得更加丰富。我们证明

箭头范畴具有一种特殊的幺结构（引理 6.2），使得 S 成为一个微分模态（定理 7.2）；这一次，由于莱布尼茨法则，它得到了良好定义。因此，具有双积的微分范畴的箭头范畴本身也是一个微分范畴，从而提供了一个全新且系统的例子来源。在这一框架下，箭头范畴中的交换幺半群恰好对应于经典导子（命题 6.3），进一步凸显了它与我们的单子刻画之间的紧密联系。

这些结果对其他相关的微分范畴框架也有重要意义。事实上，微分范畴与笛卡尔微分范畴密切相关，[3]，后者为多变量微分学提供范畴论基础；它们也与切范畴密切相关，[6]，后者为微分几何提供范畴论基础。对于微分模态S，其 Eilenberg-Moore 范畴（即由 S-代数组成的范畴）是一个切范畴；[7]，而其 Kleisli 范畴的对偶（即由自由 S-代数组成的范畴）是一个笛卡尔微分范畴。作为主要结果的一个应用，我们进而得到 S-导子构成一个切范畴（推论 8.1），这意味着普通导子和$\mathcal{C}^\infty$-导子各自构成切范畴（例 8.2和 8.3）；此外，S-自由S-代数上的导子构成一个笛卡尔微分范畴（推论 8.4）。

内容提要：第 2 节和第 3 节为背景介绍，回顾微分范畴和导子。第 4 节证明，微分模态 S 可提升为箭头范畴上的单子S （命题 4.5）。接着，第 5节证明，该单子 S 的代数与S-导子恰好对应（定理 5.9），这是本文的主要结果。第6 节引入双积，并在箭头范畴上定义幺半结构（引理 6.2）；同时证明，在此情形下，交换幺半群恰好对应经典意义下的导子（命题6.3）。据此，第 7 节证明，在存在双积时，S实际上是一个微分模态，因此箭头范畴本身就是一个微分范畴（定理 7.2）。最后，第 8节简要说明如何得到由 S-导子构成的切范畴和笛卡尔微分范畴。

2 微分范畴

在此背景下，我们主要是为了介绍记号，简要回顾微分范畴。若想深入了解微分范畴，请参阅 [1, 2, 4, 5, 13, 15]。

注 2.1 开始之前，我们必须强调一个与术语有关的重要问题。本文遵循近来的惯例，将微分范畴／模态按 *[2, 5]*，中的对偶意义来理解；例如，这正是 *[1, 4, 13, 15]* 中所谓的余微分范畴／模态。 *[2]* 中最初采用“微分范畴”这一名称，是因为这些范畴曾用于微分线性逻辑的范畴语义 *[10]*，，也就是说，它们处理余单子和余代数上的微分结构。因此，按照范畴论中的惯例，对偶概念“余微分范畴”才是研究单子和代数上的微分结构的恰当框架。于是，导子和微分代数等经典代数概念便在余微分范畴中得到了形式化 *[1, 4, 13]*。这带来了一些不便，尤其是在向代数学家解释微分范畴的相关内容时。因此，近来有人主张将余微分范畴改称为“代数型”微分范畴，或简称微分范畴。本文采用这一做法。

微分范畴的底层结构是一个对称幺半范畴。我们将任意范畴记作 $\mathbb{X}$，对象用大写字母 A, B, C 等表示，同态集记作 $\mathbb{X}(A, B)$，映射则用小写字母 $f, g, h, etc. \in \mathbb{X}(A, B)$ 表示。任意映射记作箭头 $f : A \to B$，恒等映射记作 $1_A : A \to A$，复合则使用标准记法 $\circ$（而不是图示记法；微分范畴文献中常使用图示记法，例如

如 [1,2,4,5,13]）。遵循大多数微分范畴文献采用的惯例，我们将在对称严格 幺半范畴中进行讨论，因此幺半积的结合同构和单位同构都是等式。对于任意对称（严格）幺半范畴 $\mathbb{X}$，我们将其幺半积记作 $\otimes$，幺半单位记作 I，自然对称同构记作 $\sigma_{A,B}\colon A\otimes B \xrightarrow{\cong} B\otimes A$。严格性使我们可以写作 $A_1\otimes A_2\otimes\ldots\otimes A_n$ 和 $A\otimes I = A = I\otimes A$。

微分模态的底层结构是一个单子。回顾一下，范畴 $\mathbb{X}$上的**单子**是一个三元组 $(\mathsf{S}\ \mu,\eta)$，由一个自函子 $\mathsf{S}\colon \mathbb{X}\to\mathbb{X}$、一个自然变换 $\mu_A\colon \mathsf{SS}(A)\to\mathsf{S}(A)$（称为单子乘法），以及一个自然变换 $\eta_A : A\to\mathsf{S}(A)$（称为单子单位）组成，并满足以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{S}(A) & \xrightarrow{\mathsf{S}(\eta_A)} & \mathsf{SS}(A) \\ {\scriptstyle \eta_{\mathsf{S}(A)}}\downarrow & \searrow & \downarrow{\scriptstyle \mu_A} \\ \mathsf{SS}(A) & \xrightarrow[\mu_A]{} & \mathsf{S}(A) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathsf{SSS}(A) & \xrightarrow{\mathsf{S}(\mu_A)} & \mathsf{SS}(A) \\ {\scriptstyle \mu_{\mathsf{S}(A)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu_A} \\ \mathsf{SS}(A) & \xrightarrow[\mu_A]{} & \mathsf{S}(A). \end{array} \tag{1}$$

在微分范畴中，我们要求单子的自由代数以自然的方式成为交换幺半群。因此，回顾一下，在对称幺半范畴 $\mathbb{X}$中，**交换幺半群** 是一个三元组 $(A,\mathsf{m},\mathsf{u})$，由一个对象 A、一个映射 $\mathsf{m}: A\otimes A\to A$（称为乘法）以及一个映射 $\mathsf{u}: I\to A$（称为单位元）组成，并满足以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} A\otimes A\otimes A & \xrightarrow{1_A\otimes\mathsf{m}} & A\otimes A \\ {\scriptstyle \mathsf{m}\otimes 1_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{m}} \\ A\otimes A & \xrightarrow[\mathsf{m}]{} & A \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{1_A\otimes\mathsf{u}} & A\otimes A \\ {\scriptstyle \mathsf{u}\otimes 1_A}\downarrow & \searrow & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{m}} \\ A\otimes A & \xrightarrow[\mathsf{m}]{} & A \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A\otimes A & \xrightarrow{\sigma_{A,A}} & A\otimes A \\ & \searrow & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{m}} \\ & \xrightarrow[\mathsf{m}]{} & A. \end{array} \tag{2}$$

我们还要求单子乘法是一个幺半群态射。因此，回顾一下，对于交换幺半群 $(A,\mathsf{m},\mathsf{u})$ 和 $(A',\mathsf{m}',\mathsf{u}')$，它们之间的**幺半群态射** $f\colon (A,\mathsf{m},\mathsf{u})\to(A',\mathsf{m}',\mathsf{u}')$是底层对象之间的一个映射 $f: A\to A'$，并满足以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} A\otimes A & \xrightarrow{f\otimes f} & A'\otimes A' \\ {\scriptstyle \mathsf{m}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{m}'} \\ A & \xrightarrow[f]{} & A' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\mathsf{u}} & A \\ & \searrow & \downarrow{\scriptstyle f} \\ & \xrightarrow[\mathsf{u}']{} & A'. \end{array} \tag{3}$$

我们将 $\mathbf{CMON}[\mathbb{X}]$ 记为对称幺半范畴 $\mathbb{X}$ 中交换幺半群及其间幺半群态射所构成的范畴。于是，代数模态指的是一种单子，其自由代数自然地构成交换幺半群。

定义 *2.2* 代数模态 *[5,* （定义 *1]*的对偶）在对称幺半范畴 $\mathbb{X}$上是一个五元组 $(S\ \mu,\eta,\mathsf{m},\mathsf{u})$，由一个单子 $(S\ \mu,\eta)$、一个自然变换 $m_A: S(A)\otimes S(A)\to S(A)$，以及一个自然变换 $u_A: I\to S(A)$ 构成，并满足对每个对象 A：

(i) （S（A）, m_A,u_A）是一个交换幺半群；

(ii) $\mu_A : (\mathsf{SS}(A),\mathsf{m}_{\mathsf{S}(A)},\mathsf{u}_{\mathsf{S}(A)})\to(\mathsf{S}(A),\mathsf{m}_A,\mathsf{u}_A)$ *is a monoid morphism.*

值得一提的是，对于代数模态，m 和 u 的自然性意味着，对于每个映射f：$A\to B$，$\mathsf{S}(f):(\mathsf{S}(A),\ \mathsf{m}_A,\ \mathsf{u}_A)\to(\mathsf{S}(B),\ \mathsf{m}_B,\ \mathsf{u}_B)$ 都是一个幺半群态射。因此，其底层

自函子S 经由$\mathbf{CMON}[\mathbb{X}]$。在第3 节中，我们将回顾为什么代数模态的代数实际上也是交换幺半群。

微分模态是一种代数模态，它还配备了一个额外的自然变换，其行为类似于导子。为了表达微分的莱布尼茨法则和常数法则，我们需要能够对映射求和，并且具有零映射。因此，我们需要在加性对称幺半范畴中工作。遵循微分范畴文献中的术语 [2, 5], ，一个**加性范畴** [5, 定义 3]是指一个 $\mathbb{X}$ 由交换幺半群富集的范畴，也就是说，每个同态集 $\mathbb{X}(A, B)$ 都是一个交换幺半群，其二元运算为 $+$，单位元为 $0\colon A \to B$，并且复合是一个幺半群态射，也就是说，以下等式对所有适当的映射均成立：

$$f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h \qquad (g + h) \circ k = g \circ k + h \circ k \qquad f \circ 0 = 0 \qquad 0 \circ f = 0. \tag{4}$$

请注意，对于加性范畴，这里与其他参考文献不同，我们不假设双积或负元的存在。虽然本文讨论的内容并不需要负元，但我们稍后会在第 5 节和第 7 节中将双积纳入讨论。

一个**加性对称幺半范畴** [5, 定义 3]是一个对称幺半范畴 $\mathbb{X}$同时也是加性范畴，且幺半积保持加法结构，也就是说，以下等式对所有适当的映射均成立：

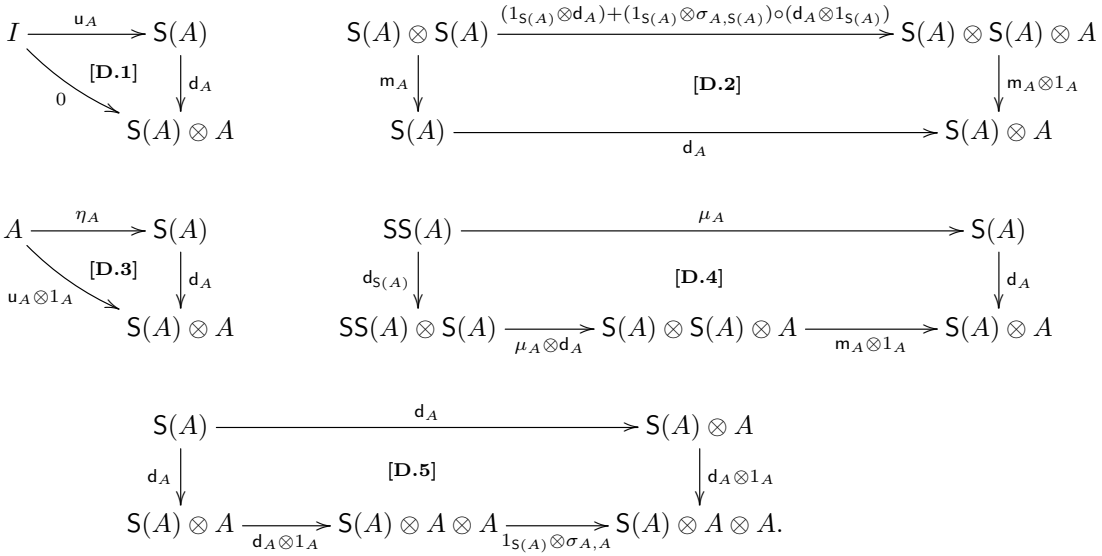
$$f \otimes (g + h) = f \otimes g + f \otimes h \qquad (g + h) \otimes k = g \otimes k + h \otimes k \qquad f \otimes 0 = 0 \qquad 0 \otimes f = 0. \tag{5}$$

有了加法结构，我们现在可以适当地定义微分模态，进而定义微分范畴。

定义2.3 加性对称幺半范畴上的微分模态 *[5, 定义 7]* 的对偶$\mathbb{X}$ 是一个六元组$(\mathsf{S},\ \mu, \eta, \mathsf{m}, \mathsf{u}, \mathsf{d})$，由一个代数模态$(\mathsf{S},\ \mu, \eta, \mathsf{m}, \mathsf{u})$ 及一个自然变换构成

$$\mathsf{d}_A : \mathsf{S}(A) \to \mathsf{S}(A) \otimes A,$$

称为导出变换，使得以下图表交换：



一个微分范畴是一个配备了微分模态的加性对称幺半范畴。

下面简要介绍一下导出变换公理的直观含义。对于我们的微分模态，我们可以朴素地将 $\mathsf{S}(A)$ 理解为表示从 A到 I 的所有"光滑"函数的对象。单子乘法 μ 刻画了这些光滑函数的复合，而单子 η 则选出线性光滑函数，尤其是恒等函数。幺半群乘法 m 表示我们可以将光滑函数相乘，而幺半群单位 u 则选出常函数。导出变换 d 自然刻画了对光滑函数求微分，其思想是它将一个光滑函数 f 映射为它的导数 $f' \otimes \mathsf{d}(x)$。于是， [D.1] 是常数法则，指出常数的导数为零； [D.2] 是著名的莱布尼茨法则，告诉我们如何对乘积求导； [D.3] 是线性法则，指出线性函数的导数是一个常数； [D.4] 是同样著名的链式法则，告诉我们如何对函数的复合求导；最后， [D.5]是互换规则，刻画了混合偏导数的对称性。在微分线性逻辑的语境下，可以将这种把微分模态解释为某种光滑函数的直观想法精确化——我们邀请感兴趣的读者参阅 [10]。值得注意的是， [D.5]并未包含在最初的定义 [2, Def 2.5] 中，但后来已被加入导出变换的定义——详情请参见 [5, Sec 4] 。

现在我们给出微分范畴的两个主要例子：一个刻画多项式微分，另一个刻画实光滑函数的微分。关于微分范畴的其他有趣例子，欢迎读者参阅 [5]。

例 2.4 多项式。 设 $\mathbb{K}$ 是一个域，令 $\mathsf{VEC}_{\mathbb{K}}$ 为 $\mathbb{K}$-向量空间及其间 $\mathbb{K}$-线性映射所构成的范畴。那么， $\mathsf{VEC}_{\mathbb{K}}$ 是一个微分范畴，其中对称代数 *[12, 第 14 章，第 8] 节*导出一个微分模态，用以刻画多项式的微分。事实上，回忆一下，对于一个 $\mathbb{K}$-向量空间 V，其对称代数 $\mathsf{Sym}(V)$ 是 V 上的自由交换 $\mathbb{K}$-代数。若 X 是 V 的一组基，则存在一个典范的 $\mathbb{K}$-代数同构 $\mathsf{Sym}(V) \cong \mathbb{K}[X]$，其中 $\mathbb{K}[X]$ 是 X 上的多项式环。于是我们在 $\mathsf{VEC}_{\mathbb{K}}$ 上得到一个微分模态 Sym ，其中单子结构对应于多项式复合，幺半群结构对应于多项式乘法，而导出变换（用多项式环表示）$\mathsf{d}_V \colon \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X] \otimes V$ 则通过将多项式 $p \in \mathbb{K}[X]$ 映射为其偏导数之和，来刻画多项式的微分：

$$\mathsf{d}_V(p) = \sum_{x \in X} \frac{\partial p}{\partial x} \otimes x.$$

关于这一微分模态的完整细节，请参阅 *[2, 第 2 节.5.3]*.

值得指出的是，上述例子很容易推广到交换（半）环 [5, Ex 1] 上的模范畴。事实上，任何具有足够余极限以构造自由对称代数的加性对称幺半范畴，都是一个微分范畴 [4,Thm 6.1]。例如，集合与关系范畴以这种方式成为一个微分范畴 [2, 第 2 节.5.1]。

例 2.5 实光滑函数。 令 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ 为实数域。那么， $\mathsf{VEC}_{\mathbb{R}}$ 还具有另一种微分模态，这次它通过考虑 $\mathcal{C}^\infty$-环 *[14, Chap 1]*来刻画光滑函数的求导。简而言之，回顾一下， $\mathcal{C}^\infty$-环是一个交换的 $\mathbb{R}$-代数 A ，对于每个实光滑函数 $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ，都存在一个函数 $\Phi_f : A^n \longrightarrow A$ ，它满足关于复合和投影的某些相干性。直观来说， Φ_f 可以解释为用 A中的元素对光滑函数 f 求值。 $\mathcal{C}^\infty$-环的主要例子来自光滑流形 *[14,Chap 2]*, ，对于光滑流形 M，

$$\mathcal{C}^\infty(M) = \{f : M \longrightarrow \mathbb{R} |\ f \ \textit{is a real smooth function}\}$$

是一个 $\mathcal{C}^\infty$-环。特别地，对于每个 $\mathbb{R}$-向量空间 V，都存在其上的自由 $\mathcal{C}^\infty$-环 $S^\infty(V)$ [8, Sec 4]，其中对于 $V=\mathbb{R}^n$，有 $S^\infty(\mathbb{R}^n)=\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$。进而，这会在 $\mathbf{VEC}_\mathbb{R}$ 上诱导出一个微分模态 S^∞。如预期，单子结构对应于光滑函数的复合，幺半群结构对应于光滑函数的相乘，而导出变换则刻画了光滑函数的求导。在 $V=\mathbb{R}^n$ 的特殊情形下，导出变换 $d_{\mathbb{R}^n}:\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)\otimes\mathbb{R}^n$ 将光滑函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 映射为其偏导数之和：

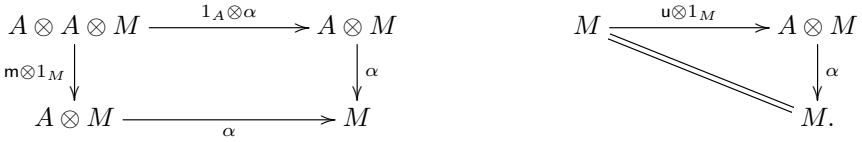
$$\mathsf{d}_{\mathbb{R}^n}(f)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\otimes\vec{e_i}$$

其中，$\vec{e_i}\in\mathbb{R}^n$ 是典范基向量，在第 i 个坐标上的值为1，其他所有坐标上的值均为零。有关此微分模态的完整细节，请读者参见 [8,第 5] 节。

3 导子

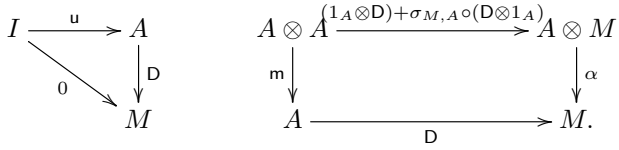
本节简要回顾微分范畴中的导子。若要了解更详细的介绍，请读者参见 [1, 4, 13, 15]。

在任意加性对称幺半范畴 $\mathbb{X}$ 中，我们都可以将经典代数中的导子概念推广为交换幺半群上的导子 [1, 定义 4.1]。为此，我们必须先回顾模。回想一下，对于一个交换幺半群 $(A,\mathsf{m},\mathsf{u})$，一个 $(A,\mathsf{m},\mathsf{u})$-**模** 是一个二元组 (M,α)，由对象 A 和映射 $\alpha:A\otimes M\to M$ 构成，称为作用，并满足以下图表交换：



(7)

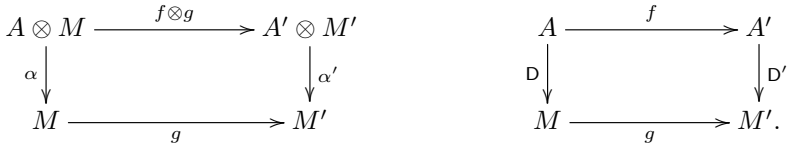
那么，在 (M,α) 中取值的 $(A,\mathsf{m},\mathsf{u})$ 的**导子**是一个映射 $\mathsf{D}:A\to M$，使得以下图表交换：



(8)

作为简写，我们将导子记为 $\mathsf{D}:(A,\mathsf{m},\mathsf{u})\to(M,\alpha)$。现在，上方右侧的图表是莱布尼茨法则，而左侧的图表是常数法则，它说明单位元的导数为零。熟悉经典代数中导子的读者会注意到，左侧的图表通常不属于定义的一部分，并且可以由 [12, Chap 19, Sec 3] 推导出来。然而，该证明需要负元，而由于我们并未假设存在负元，因此必须将其纳入定义。

现在，对于导子 $\mathsf{D}:(A,\mathsf{m},\mathsf{u})\to(M,\alpha)$ 和导子 $\mathsf{D}':(A',\mathsf{m}',\mathsf{u}')\to(M',\alpha')$，导子态射是一对 $(f,g):(\mathsf{D}:(A,\mathsf{m},\mathsf{u})\to(M,\alpha))\to(\mathsf{D}':(A',\mathsf{m}',\mathsf{u}')\to(M',\alpha'))$ 其中 $f:(A,\mathsf{m},\mathsf{u})\to(A',\mathsf{m}',\mathsf{u}')$ 是一个幺半群态射，而 $g:M\to M'$ 是一个映射，使得下列图表交换：



(9)

请注意，左侧的图表本质上表明 g 是一个模态射。我们将加性对称幺半范畴 $\mathbb{X}$ 中导子的范畴及其间的导子态射记为 $\mathbf{DER}[\mathbb{X}]$ 。

在微分范畴中，我们实际上可以改进之前的定义，将导子定义为相对于某个微分模态的导子。因此，我们不再仅仅考虑交换幺半群的导子，还可以考虑该微分模态的代数（单子意义下）的导子。

首先回顾一下，对于一个单子 $(\mathsf{S}\ \mu,\ \eta)$，**S-代数** 是一个由对象 A 和映射 $\nu : \mathsf{S}(A) \to A$ 构成的对 $(A,\ \nu)$，该映射称为 S-代数结构映射，并且满足下列图表交换：

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & \mathsf{S}(A) \\ & \searrow & \downarrow{\scriptstyle \nu} \\ & & A \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathsf{SS}(A) & \xrightarrow{\mathsf{S}(\nu)} & \mathsf{S}(A) \\ {\scriptstyle \mu_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \nu} \\ \mathsf{S}(A) & \xrightarrow[\nu]{} & A. \end{array} \tag{10}$$

还要回顾一下，对于 S-代数 $(A,\ \nu)$ 和 $(A',\ \nu')$，S-代数态射 $f : (A,\ \nu) \to (A',\ \nu')$ 是底层对象之间的映射 $f : A \to A'$，并且满足下列图表交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{S}(A) & \xrightarrow{\mathsf{S}(f)} & \mathsf{S}(A') \\ {\scriptstyle \nu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \nu'} \\ A & \xrightarrow[f]{} & A'. \end{array} \tag{11}$$

对于单子 $(\mathsf{S}\ \mu,\ \eta)$，我们用 S-ALG 表示由 S-代数及其间的 S-代数态射构成的范畴；它也常称为单子 $(\mathsf{S}\ \mu,\ \eta)$ 的 Eilenberg-Moore 范畴。

事实证明，对于代数模态（$\mathsf{S}\ \mu, \eta, \mathsf{m}, \mathsf{u}$），S-代数自然地构成交换幺半群 [4, 定理 3.12]。确实，给定一个 S-代数（A, ν），将映射 $\mathsf{m}^\nu : A \otimes A \to A$ 和 $\mathsf{u}^\nu : I \to A$ 定义为以下复合：

$$\mathsf{m}^\nu : A \otimes A \xrightarrow{\eta_A \otimes \eta_A} \mathsf{S}(A) \otimes \mathsf{S}(A) \xrightarrow{\mathsf{m}_A} \mathsf{S}(A) \xrightarrow{\nu} A \qquad \mathsf{u}^\nu : I \xrightarrow{\mathsf{u}_A} \mathsf{S}(A) \xrightarrow{\nu} A. \tag{12}$$

那么（A,$\mathsf{m}^\nu, \mathsf{u}^\nu$）是一个交换幺半群。注意，将这一构造应用于自由 S-代数（$\mathsf{S}(A)\ \mu_A$），恰好得到该代数模态所给出的自然幺半群结构，即 $\mathsf{m}^{\mu_A} = \mathsf{m}_A$ and $\mathsf{u}^{\mu_A} = \mathsf{u}_A$。此外，若 $f : (A, \nu) \to (A', \nu')$ 是一个 S-代数态射，则 $f : (A, \mathsf{m}^\nu, \mathsf{u}^\nu) \to (A', \mathsf{m}^{\nu'}, \mathsf{u}^{\nu'})$ 是一个幺半群态射。

为了定义相对于微分模态的导子，我们还必须考虑 S-代数的模。因此，对于一个 S-代数 (A, ν)，我们所说的 (A, ν)-模，就是指一个 $(A, \mathsf{m}^\nu, \mathsf{u}^\nu)$-模。

定义 3.1 设 $(\mathsf{S}\ \mu, \eta, \mathsf{m}, \mathsf{u}, \mathsf{d})$ 是一个微分模态，(A, ν) 是一个S-代数，而 (M, α) 是一个 (A, ν)-模。一个S-导子 *[4, Def 5.12]*，在 (A, ν) 中取值并作用于 (M, α)，是一个映射 $\mathsf{D} : A \to M$，使得下图交换：

$$\begin{array}{ccccc} \mathsf{S}(A) & & \xrightarrow{\qquad\qquad \nu \qquad\qquad} & & A \\ {\scriptstyle \mathsf{d}_A}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{D}} \\ \mathsf{S}(A) \otimes A & \xrightarrow[\nu \otimes \mathsf{D}]{} & A \otimes M & \xrightarrow[\alpha]{} & M. \end{array} \tag{13}$$

作为简写，我们将S-导子记作$\mathsf{D}:(A,\nu)\to(M,\alpha)$。对于S-导子$\mathsf{D}:(A,\nu)\to(M,\alpha)$和$\mathsf{D}':(A',\nu')\to(M',\alpha')$，它们之间的一个S-导子态射 是一对

$$(f,g):\big(\mathsf{D}:(A,\nu)\to(M,\alpha)\big)\to\big(\mathsf{D}':(A',\nu')\to(M',\alpha')\big)$$

其中 $f:(A,\nu)\to(A',\nu')$ 是一个 S-代数态射，而 $g\colon M\to M'$ 是一个映射，使得（9）中的图表交换。我们将 S-DER 所构成的范畴称为S-导子以及它们之间的 S-导子态射范畴。

应将（13）理解为链式法则公理。事实上，采用我们先前将 $\mathsf{S}(A)$ 解释为光滑函数代数 $f\colon A\to I$ 的方式，则（13）表示 $\mathsf{D}(\nu(f))=\nu(f')\mathsf{D}(x)$。此外，每个 S-导子 $\mathsf{D}:(A,\nu)\to(M,\alpha)$ 实际上也是一个导子 $\mathsf{D}:(A,\mathfrak{m},\mathfrak{u})\to(M,\alpha)$ [13, 命题 5.2]，当然，每个 S-导子态射也是一个导子态射。总之，普通导子由莱布尼茨法则公理化，而 S-导子由链式法则公理化，并且它们本身也是普通导子。

S-导子的典范例子就是导出变换本身 [4,Thm 5.13]。事实上，注意到 $(\mathsf{S}(A)\otimes A,\mathfrak{m}_A\otimes 1_A)$ 是一个 $(\mathsf{S}(A)\ \mu_A)$-模，那么链式法则公理 **[D.4]** 恰好表明

$$\mathsf{d}_A:(\mathsf{S}(A),\mu_A)\to(\mathsf{S}(A)\otimes A,\mathfrak{m}_A\otimes 1_A)$$

是一个 S-导子。实际上，它是 $(\mathsf{S}(A)\ \mu_A)$ 的泛 S-导子，意即每个定义在 $(\mathsf{S}(A)\ \mu_A)$ 上的 S-导子都可经由它分解 [4, Thm 5.15]。

我们还可以为任意 S-代数考虑泛 S-导子 [4, Def 5.14], ，这推广了 S-代数的 Kähler 微分模的概念 [12, Chap 19, Sec 3] 。因此，对于自由 S-代数 $(\mathsf{S}(A)\ \mu_A)$，可以说 $(\mathsf{S}(A)\otimes A,\mathfrak{m}_A\otimes 1_A)$ 是它的 Kähler S-微分模。然而，对于任意 S-代数 (A,ν)，这样的 Kähler S-微分模可能并不存在。尽管如此，在较弱的余等化子假设下，我们仍可以为任意 S-代数构造泛 S-导子 [4, Thm 5.23]。泛 S-导子在本文的讨论中不会发挥作用，因此我们请有兴趣的读者参阅 [1, 4, 15] ，以了解更多相关内容。

另一方面，S-导子也可用于推广微分范畴中的微分代数，见 [13]。

我们以两个主要微分范畴例子中的 S-导子来结束本节。

例 3.2 普通导子。 对于 $\mathbb{VEC}_{\mathbb{K}}$ 上的对称代数微分模态 Sym，Sym-导子恰好对应于普通导子 *[4,注 5.8]*。事实上，首先注意 Sym-代数恰好是交换 $\mathbb{K}$-代数。然后回想，对于交换 $\mathbb{R}$-代数 A 与 A-模 M，导子是满足莱布尼茨法则的 $\mathbb{K}$-线性映射 $\mathsf{D}\colon A\to M$：

$$\mathsf{D}(ab)=a\mathsf{D}(b)+\mathsf{D}(a)b.$$

由于我们有负数，我们也有 $\mathsf{D}(1)=0$，因此它们与我们的加性对称幺半范畴 $\mathsf{VEC}_{\mathbb{K}}$ 中的导子相同。如上所述，每个 Sym-导子都将是一个导子。当然，自然会问每个导子如何也能成为Sym-导子，因为普通导子只要求满足莱布尼茨法则，而不要求链式法则。事实证明，导子确实相对于多项式满足链式法则。事实上，给定多项式 $p\in\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$，由莱布尼茨法则可得，对所有 $a_i\in A$ 下列等式成立：

$$\mathsf{D}\left(p(a_1,\dots,a_n\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial p}{\partial x}(a_1,\dots,a_n)\mathsf{D}(a_i).$$

不难看出，这恰好表明一个导子满足（13），因此是一个Sym-导子。

例 3.3 $\mathcal{C}^\infty$-导子。对于 $\mathbb{VEC}_{\mathbb{R}}$上的自由 $\mathcal{C}^\infty$-环模态 S^∞ ， S^∞-导子恰好对应于 $\mathcal{C}^\infty$-导子 *[8, 定理 5.25]*。事实上，正如所料，S^∞-代数恰好是 $\mathcal{C}^\infty$-环，因此 S^∞-导子应当是 $\mathcal{C}^\infty$-环上导子的适当推广。 $\mathcal{C}^\infty$-导子的概念首先由 *Kock* 与 *Dubuc* 在其对费马理论的导子研究中引入 *[9]*, ，随后由 *Joyce* 在其对 $\mathcal{C}^\infty$-环上代数几何的研究中更明确地加以考虑 *[11]*。因此，对于一个$\mathcal{C}^\infty$-环 A 以及底 $\mathbb{R}$-代数 A上的模 M ，一个 $\mathcal{C}^\infty$-导子 *[11, 定义 2.15]* 是一个 $\mathbb{R}$-线性映射 $D\colon\ A \to M$ ，使得对每个光滑函数 $f\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 以及所有 $a_i \in A$，下列等式成立：

$$\mathsf{D}\left(\Phi_f(a_1,\ldots,a_n)\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,\ldots,a_n)\mathsf{D}(a_i).$$

直观地说，上述恒等式表明， $\mathcal{C}^\infty$-导子满足关于光滑函数的链式法则。因此， $\mathcal{C}^\infty$-导子与S^∞-导子确实相同——更多详情请参见 *[8,*第 *5* 节。*1]*

4 箭头范畴上的单子

本节中，我们将证明微分模态可以提升为箭头范畴上的一个单子；在下一节中，我们将证明该单子的代数恰好就是导子。因此，在本节余下部分，设 $\mathbb{X}$ 为一个带有微分模态 $(\mathsf{S}\ \mu,\ \eta,\ \mathrm{m},\ \mathrm{u})$ 的微分范畴。

回顾一下，对于底层范畴 $\mathbb{X}$，其**箭头范畴** 是范畴 $\mathsf{Arr}[\mathbb{X}]$ ，其对象是 $\mathbb{X}$中的映射 $\phi\colon\ A_0 \to A_1$ ，而其映射是映射$f_0\colon\ A_0 \to A_0'$ 和 $f_1\colon\ A_1 \to A_1'$ 的有序对 $(f_0,\ f_1)\colon (\phi\colon\ A_0 \to A_1) \to (\phi'\colon\ A_0' \to A_1')$ ，其中 $\mathbb{X}$ 中的映射满足下图交换：

$$\begin{array}{ccc} A_0 & \xrightarrow{\ \phi\ } & A_1 \\ {\scriptstyle f_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_1} \\ A_0' & \xrightarrow[\ \phi'\ ]{} & A_1'. \end{array} \tag{14}$$

$\mathsf{Arr}[\mathbb{X}]$ 中的复合按 $\mathbb{X}$中的方式逐点定义，即 $(g_0, g_1)\circ(f_0, f_1) = (g_0 \circ f_0, g_1 \circ f_1)$，而 $\mathsf{Arr}[\mathbb{X}]$ 中的恒等态射是 $\mathbb{X}$ 中恒等态射的对，即 $1_{(\phi:A_0\to A_1)} = (1_{A_0}, 1_{A_1})$。

现在我们将在箭头范畴 $\mathsf{Arr}[\mathbb{X}]$上定义一个单子。首先定义自函 or

$$\overline{\mathsf{S}}\colon \mathsf{Arr}[\mathbb{X}] \to \mathsf{Arr}[\mathbb{X}]$$

在对象上如下：

$$\overline{\mathsf{S}}\,(\phi : A_0 \to A_1) := \left(\mathsf{S}(A_0) \xrightarrow{\mathsf{d}_{A_0}} \mathsf{S}(A_0) \otimes A_0 \xrightarrow{1_{\mathsf{S}(A_0)}\otimes\phi} \mathsf{S}(A_0) \otimes A_1 \right) \tag{15}$$

并在映射上定义为 $S(f_0, f_1) := (\mathsf{S}(f_0), \mathsf{S}(f_0) \otimes f_1)$。

注记 4.1 为便于阅读，在本文其余部分的证明中，我们常省略下标。

引理 4.2 $\mathsf{S}\colon\ \overline{\mathsf{A}}\mathsf{rr}[\mathbb{X}] \to \mathsf{Arr}[\mathbb{X}]$ 是一个函子。

Proof: 我们首先需要解释为什么 S 在映射上定义良好。因此，设 $(f_0,\ f_1) : (\phi :\ A_0 \to A_1) \ \to (\phi' :\ A'_0 \to A'_1)$ 是 $\mathbf{Arr}[\mathbb{X}]$ 中的一个映射。由导出变换的自然性，且由于 $(f_0,\ f_1)$ 是箭头范畴中的一个映射，下面的图表交换:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathsf{S}(A_0) & \xrightarrow{\mathsf{d}} & \mathsf{S}(A_0)\otimes A_0 & \xrightarrow{1\otimes\phi} & \mathsf{S}(A_0)\otimes A_1 \\
\downarrow{\scriptstyle \mathsf{S}(f_0)} & \text{Nat of } \mathsf{d} & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{S}(f_0)\otimes f_0} & (14) & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{S}(f_0)\otimes f_1} \\
\mathsf{S}(A'_0) & \xrightarrow[\mathsf{d}]{} & \mathsf{S}(A'_0)\otimes A'_0 & \xrightarrow[1\otimes\phi']{} & \mathsf{S}(A'_0)\otimes A'_1 .
\end{array}$$

因此 $S(f_0, f_1) : \mathsf{S}\,(\phi :\ A_0 \to A_1) \ \to \mathsf{S}\,(\phi' : A'_0 \to A'_1)$ 满足（14），并且是箭头范畴中的一个映射。因此S 是良定义的。S 的函子性直接由S的函子性得出。 □

现在我们定义单子单位 η。因此定义

$$\overline{\eta}_{(\phi:A_0\longrightarrow A_1)} : (\phi : A_0 \to A_1) \to \overline{\mathsf{S}}\,(\phi : A_0 \to A_1)$$

如下:

$$\overline{\eta}_{(\phi:A_0\longrightarrow A_1)} := \left(\eta_{A_0} : A_0 \to \mathsf{S}(A_0), \mathsf{u}_{A_0}\otimes 1_{A_1} : A_1 \to \mathsf{S}(A_0)\otimes A_1\right). \tag{16}$$

引理 4.3 η 是一个自然变换。

Proof: 我们首先需要证明 η 是良定义的。为此，注意根据线性规则 **[D.3]**, 下面的图表交换:

$$\begin{array}{ccccc}
A_0 & & \xrightarrow{\phi} & & A_1 \\
\downarrow{\scriptstyle \eta} & \searrow^{\mathsf{u}\otimes 1} & & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{u}\otimes 1} \\
\mathsf{S}(A_0) & \xrightarrow[\mathsf{d}]{[\mathbf{D.3}]} & \mathsf{S}(A_0)\otimes A_0 & \xrightarrow[1\otimes\phi]{} & \mathsf{S}(A_0)\otimes A_1 .
\end{array}$$

因此 $\eta_{(\phi:A_0\longrightarrow A_1)} : (\phi :\ A_0 \to A_1) \ \to \mathsf{S}(\phi : A_0 \to A_1)$ 满足（14），并且确实是箭头范畴中的一个映射。因此 η 是良定义的。 η 的自然性直接由 η 与 u的自然性得出。 □

为了定义单子乘法 μ，我们首先将 SS（$\phi :\ A_0 \to A_1$）展开为以下复合:

$$\mathsf{SS}(A_0) \xrightarrow{\mathsf{d}_{\mathsf{S}(A_0)}} \mathsf{SS}(A_0)\otimes\mathsf{S}(A_0) \xrightarrow{1_{\mathsf{S}(A_0)}\otimes\mathsf{d}_{A_0}} \mathsf{SS}(A_0)\otimes\mathsf{S}(A_0)\otimes A_0 \xrightarrow{1_{\mathsf{SS}(A_0)}\otimes 1_{\mathsf{S}(A_0)}\otimes\phi} \mathsf{SS}(A_0)\otimes\mathsf{S}(A_0)\otimes A_1 .$$

然后定义

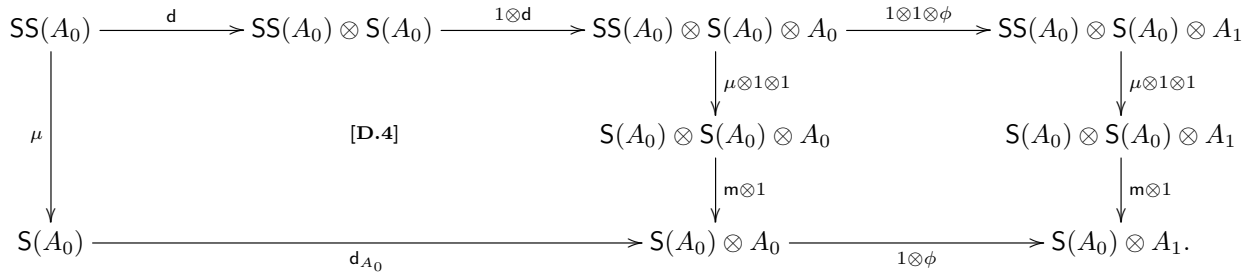
$$\overline{\mu}_{(\phi:A_0\longrightarrow A_1)} : \overline{\mathsf{S}}\ \overline{\mathsf{S}}\,(\phi : A_0 \to A_1) \to \overline{\mathsf{S}}\,(\phi : A_0 \to A_1)$$

为以下映射对:

$$\begin{array}{c}
\mathsf{SS}(A_0) \xrightarrow{\mu_{A_0}} \mathsf{S}(A_0) \\
\mathsf{SS}(A_0)\otimes\mathsf{S}(A_0)\otimes A_1 \xrightarrow{\mu_{A_0}\otimes 1_{\mathsf{S}(A_0)}\otimes 1_{A_1}} \mathsf{S}(A_0)\otimes\mathsf{S}(A_0)\otimes A_1 \xrightarrow{\mathsf{m}_{A_0}\otimes 1_{A_1}} \mathsf{S}(A_0)\otimes A_1 .
\end{array} \tag{17}$$

引理 4。4 μ 是一个自然变换。

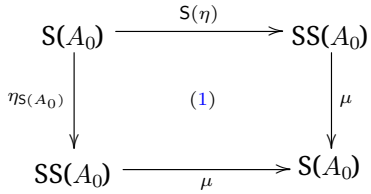
PROOF: 我们首先需要证明 μ 定义良好。为此，注意到根据链式法则 [**D**。**4**]，以下图表交换：

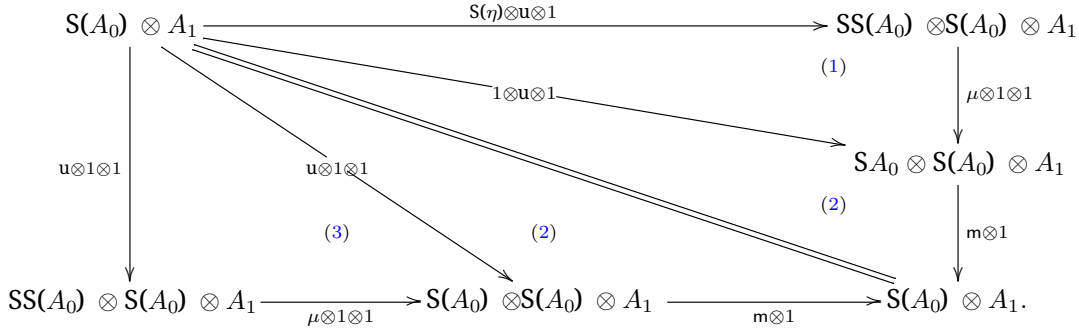


因此 $\mu_{(\phi:A_0\to A_1)}:\ \mathsf{S}\,\mathsf{S}\,(\phi:\ A_0\to A_1)\ \to \mathsf{S}(\phi:\ A_0\to A_1)$ 满足（14），因此确实是箭头范畴中的一个映射。所以 μ 定义良好。由 μ 的自然性可立即推出 μ 以及 m 的自然性。□

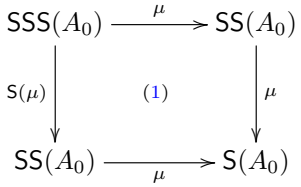
命题 4.5 $(\mathsf{S}\ \mu,\eta)$ 是一个单子。

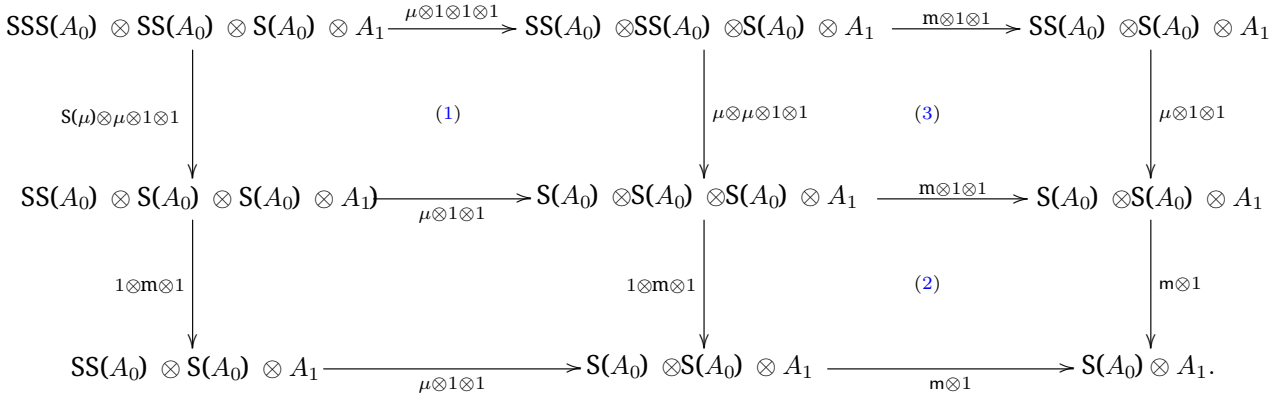
PROOF: 从单位公理出发，结合单子的单位律和幺半群单位律，并且由于单子乘法保留幺半群单位，以下图表交换：





综合起来，这些条件意味着 $\bar{\mu}\circ\bar{\eta}_{\mathsf{S}} = 1 = \bar{\mu}\circ\bar{\mathsf{S}}(\eta)$。另一方面，利用单子结合律和幺半群结合律，并且由于单子乘法保持幺半群乘法，以下图表是可交换的：





综合起来，这些条件意味着$\bar{\mu} \circ \mathsf{S}(\mu) = \mu \circ \mu_{\mathsf{S}}$。因此，我们得出结论，$(\mathsf{S}, \mu, \bar{\eta})$是一个单子。 □

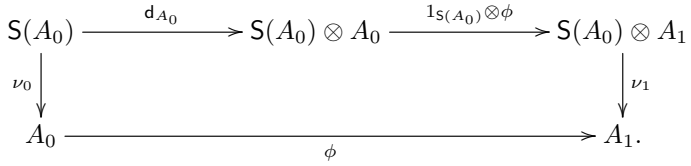
5 作为代数的导子

在本节中，我们将证明，上一节构造的单子的代数恰好是 S-导子。再次强调，在本节中，设 $\mathbb{X}$为一个带有微分模态（S, μ, η, m, u）的微分范畴。

我们先明确写出 S-代数的具体形式。因此，一个 S-代数应是一个元组：

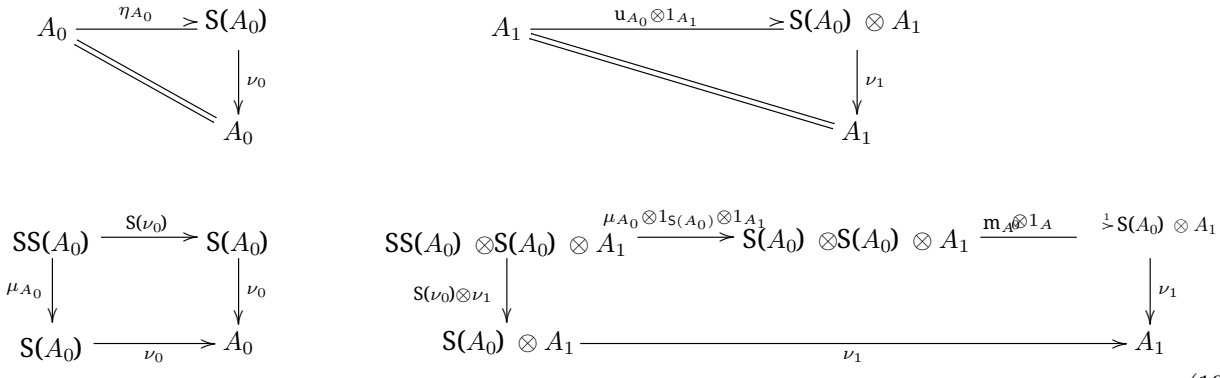
$$\left((\phi : A_0 \to A_1), (\nu_0, \nu_1)\right)$$

它由一个映射 ϕ：$A_0 \to A_1$ 位于 $\mathbb{X}$ 中，以及箭头范畴中的一个映射（ν_0, ν_1）：S（ϕ：$A_0 \to A_1$）$\to$（ϕ：$A_0 \to A_1$）组成。因此，这意味着我们有映射 $\nu_0 : \mathsf{S}(A_0) \to A_0$ 和 $\nu_1 : \mathsf{S}(A_0) \otimes A_1 \to A_1$，使得下图交换：



(18)

现在展开 S-代数公理（$1\bar{0}$），得到以下四个图表：



(19)

其中，上面两个图表来自 $(\nu_0,\ \nu_1)\circ\eta_{(\phi:A_0\longrightarrow A_1)}=1_{(\phi:A_0\longrightarrow A_1)}$，而下面两个图表来自 $(\nu_0,\ \nu_1)\circ\mu_{(\phi:A_0\longrightarrow A_1)}=(\nu_0,\bar{}\nu_1)\circ\mathsf{S}(\nu_0,\ \nu_1)$。观察最左侧的两个图表，立即可知：

引理 5.1 若 $\big((\phi\colon A_0\longrightarrow A_1),(\nu_0,\nu_1)\big)$ 是一个 S-代数，则 (A_0,ν_0) 是一个 S-代数

由于 S-导子是从 S-代数到其上的模的映射，接下来我们要证明 A_1 实际上是一个 (A_0,ν_0)-模。因此定义映射 $\alpha_{\nu_1}\colon A_0\otimes A_1\longrightarrow A_1$ 为以下复合：

$$\alpha_{\nu_1}:=\ A_0\otimes A_1\xrightarrow{\eta_{A_0}\otimes 1_{A_1}}\mathsf{S}(A_0)\otimes A_1\xrightarrow{\nu_1}A_1. \tag{20}$$

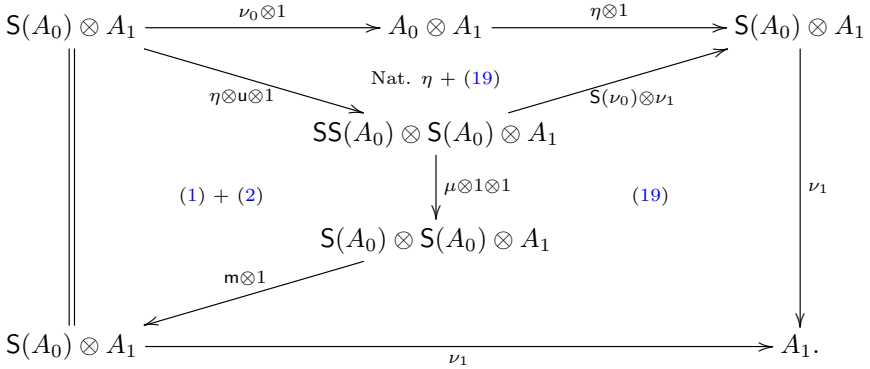
在证明这确实给出了一个作用之前，我们需要以下技术引理：

引理 5.2 若 $\big((\phi\colon A_0\longrightarrow A_1),(\nu_0,\nu_1)\big)$ 是一个 S-代数，则以下图表交换：

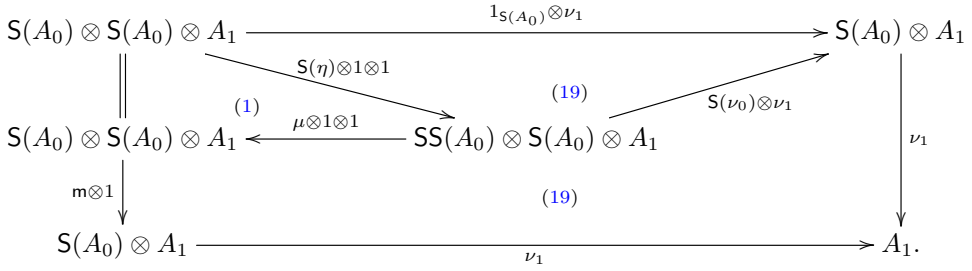
$$\begin{array}{ccccc}\mathsf{S}(A_0)\otimes A_1 & \xrightarrow{\nu_0\otimes 1_{A_1}} & A_0\otimes A_1 & \xrightarrow{\eta_{A_0}\otimes 1_{A_1}} & \mathsf{S}(A_0)\otimes A_1\\ & \searrow^{\nu_1} & & & \downarrow{\scriptstyle\nu_1}\\ & & & & A_1\end{array} \tag{21}$$

$$\begin{array}{ccc}\mathsf{S}(A_0)\otimes\mathsf{S}(A_0)\otimes A_1 & \xrightarrow{1_{\mathsf{S}(A_0)}\otimes\nu_1} & \mathsf{S}(A_0)\otimes A_1\\ \downarrow{\scriptstyle \mathsf{m}_{A_0}\otimes 1_{A_1}} & & \downarrow{\scriptstyle\nu_1}\\ \mathsf{S}(A_0)\otimes A_1 & \xrightarrow[\nu_1]{} & A_1.\end{array} \tag{22}$$

Proof: 对于第一个图表，利用 (19) 的第一个和第四个图表，以及单子和幺半群的单位公理，可得以下图表交换：



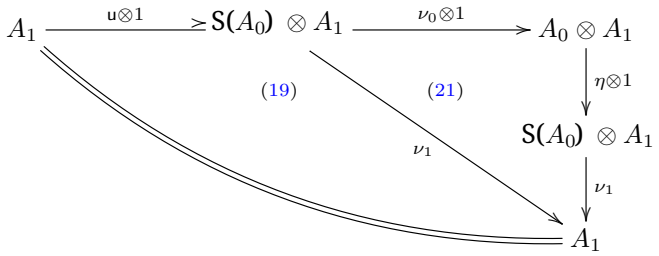
对于第二个图表，我们再次利用（19）中的第一个和第四个图表，证明下图交换：



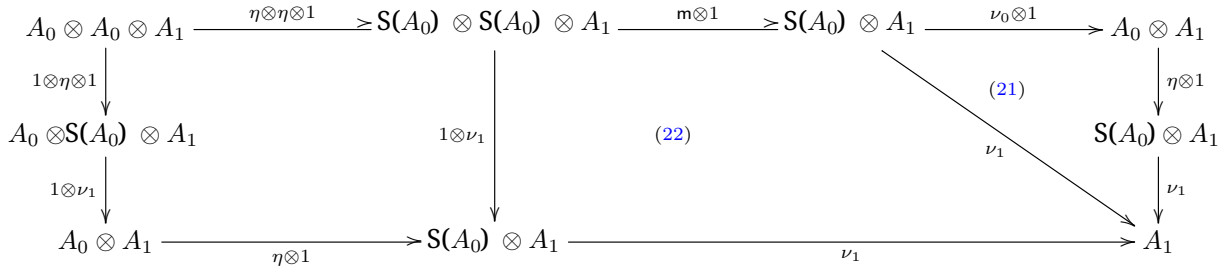
因此，所需的两个图表都交换。 □

引理 5.3 若 $\left((\phi\colon A_0 \to A_1),(\nu_0,\nu_1)\right)$ 是一个 S-代数，则 (A_1,α_{ν_1}) 是一个 (A_0,ν_0)-模。*</output>*

Proof: 为证明单位公理，我们使用（21）来说明以下图表交换 s:



由此可得 $\alpha_{\nu_1}\circ(1\otimes \mathsf{u}^{\nu_0}) = 1$。对于结合公理，利用（21）和（22），我们得到以下图表交换:

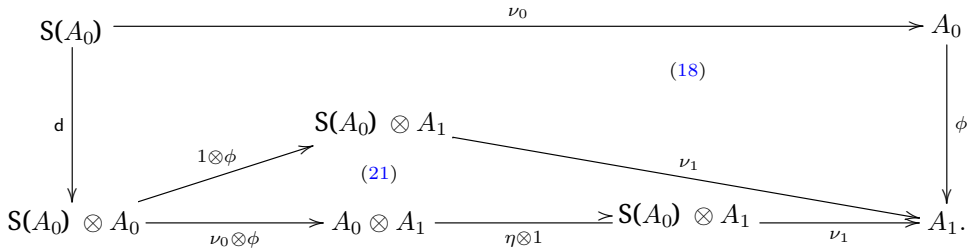


由此我们得到 $\alpha_{\nu_1}\circ(1\otimes\alpha_{\nu_1}) = \alpha_{\nu_1}\circ(\mathsf{m}^{\nu_0}\otimes 1)$。因此我们得出 (A_1,α_{ν_1}) 是一个 (A_0,ν_0)-模。□

最后，我们证明我们的 S-代数的底对象实际上是一个 S-导子。

命题 5.4 若 $\left((\phi\colon A_0 \to A_1),(\nu_0,\nu_1)\right)$ 是一个 S-代数，则 $\phi\colon(A_0,\nu_0) \to (A_1,\alpha_{\nu_1})$ 是一个 S-导子。

Proof: 由 (18) 和 (21) 可知，下图交换:



因此 ϕ 满足（13），因此 ϕ是所需的S-导子。 □

现在，我们将定义一个从 S-代数范畴到 S-导子范畴的函子。为此，首先考虑一个 S-代数态射 $(f_0,f_1)\colon\left((\phi\colon A_0 \to A_1),(\nu_0,\nu_1)\right) \to \left((\phi'\colon A_0' \to A_1'),(\nu_0',\nu_1')\right)$。首先，这是箭头范畴中的一个映射 $(f_0,f_1)\colon(\phi\colon A_0 \to A_1) \to (\phi'\colon A_0' \to A_1')$，因此我们有映射

$f_0:\ A_0 \to A_0'$ 和 $f_1:\ A_1 \to A_1'$，它们满足 (14)。展开 (11) 可知，以下图表交换:

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{S}(A_0) & \xrightarrow{\mathsf{S}(f_0)} & \mathsf{S}(A_0') \\ {\scriptstyle \nu_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \nu_0'} \\ A_0 & \xrightarrow[f_0]{} & A_0' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathsf{S}(A_0)\otimes A_1 & \xrightarrow{\mathsf{S}(f_0)\otimes f_1} & \mathsf{S}(A_0')\otimes A_1 \\ {\scriptstyle \nu_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \nu_1'} \\ A_1 & \xrightarrow[f_1]{} & A_1'. \end{array} \tag{23}$$

因此，我们将函子 $\mathcal{F}$: S-ALG $\to$ $\overline{\text{S-DER}}$ 定义为在对象上的作用如下

$$\mathcal{F}\left((\phi: A_0 \to A_1), (\nu_0, \nu_1)\right) := \left(\phi: (A_0, \nu_0) \to (A_1, \alpha_{\nu_1})\right),$$

在映射上的作用则定义为 $\mathcal{F}(f_0,\ f_1) = (f_0,\ f_1)$。

命题 5.5 $\mathcal{F}:$ S-ALG $\overline{\to}$S-DER 是一个函子。

Proof: 首先，我们需要解释为什么 $\mathcal{F}$ 是良定义的。根据命题 5.4，$\mathcal{F}$ 在对象上是良定义的。对于映射，设 $(f_0, f_1):\ \left((\phi:\ A_0 \to A_1), (\nu_0, \nu_1)\right) \to \left((\phi':\ A_0' \to A_1'), (\nu_0', \nu_1')\right)$ 是一个 S-$\overline{\text{代}}$数态射。(23) 的左侧图表说明 $f_0: (A_0, \nu_0) \to (A_0', \nu_0')$ 是一个 S-代数态射。因此，只需证明 (f_0, f_1) 满足 (9) 中的两个图表。然而，注意到 (f_0, f_1) 满足 (14) 恰好意味着 (9) 的右侧图表成立。另一方面，利用 (23) 的右侧图表，我们有如下图表交换

$$\begin{array}{ccccc} A_0\otimes A_1 & \xrightarrow{\eta\otimes 1} & \mathsf{S}(A_0)\otimes A_1 & \xrightarrow{\nu_1} & A_1 \\ {\scriptstyle f_0\otimes f_1}\downarrow & \text{Nat. of } \eta & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{S}(f_0)\otimes f_1} & (23) & \downarrow{\scriptstyle f_1} \\ A_0'\otimes A_1' & \xrightarrow[\eta\otimes 1]{} & \mathsf{S}(A_0')\otimes A_1' & \xrightarrow[\nu_1']{} & A_1' \end{array}$$

这说明 (f_0, f_1) 也满足 (9的左侧图表。因此我们有

$$(f_0, f_1): \left(\phi: (A_0, \nu_0) \to (A_1, \alpha_{\nu_1})\right) \to \left(\phi': (A_0', \nu_0') \to (A_1', \alpha_{\nu_1'})\right)$$

is i确实是 S-DER 中的一个映射。因此 $\mathcal{F}$ 定义良好。$\mathcal{F}$ 的函子性基本上是自动成立的 ic. □

现在让我们反向推导。假设 $\mathsf{D}: (A, \nu) \to (M, \alpha)$ 是一个 S-导子。当然，这意味着 $\mathsf{D}:\ A \to M$ 是箭头范畴中的一个对象，而展开 $\mathsf{S}(\mathsf{D}:\ A \to M)$ 可得复合:

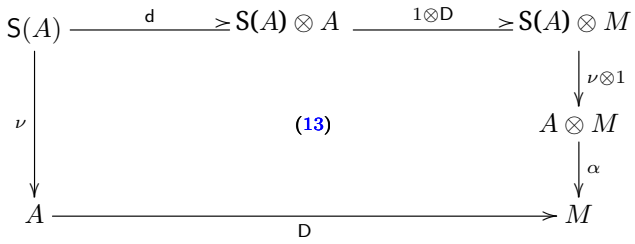
$$\overline{\mathsf{S}}(\mathsf{D}: A \to M) := \left(\mathsf{S}(A) \xrightarrow{\mathsf{d}_A} \mathsf{S}(A)\otimes A \xrightarrow{1_{\mathsf{S}(A)}\otimes \mathsf{D}} \mathsf{S}(A)\otimes M \right).$$

现在将映射 ν_α 定义为以下复合：$\mathsf{S}(A)\otimes M \to M$

$$\nu_\alpha :=\ \mathsf{S}(A)\otimes M \xrightarrow{\nu\otimes 1_M} A\otimes M \xrightarrow{\alpha} M. \tag{24}$$

引理 5.6 $(\nu, \nu_\alpha): \mathsf{S}(\mathsf{D}: \overline{A} \to M) \to (\mathsf{D}: A \to M)$ 是箭头范畴中的一个映射。

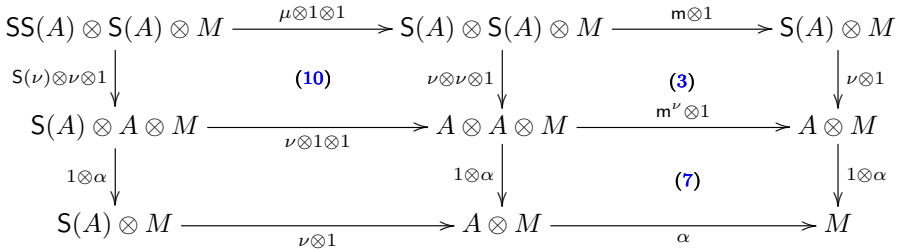
Proof: 我们可以将 S-导子链式法则改写如下:



这恰好说明 (ν, ν_α) : S (D : $A \to M$) $\to$ (D : $A \to M$) 是箭头范畴中的一个映射。 □

命题 5.7 若 D : $(A, \nu) \to (M, \alpha)$ 是一个S-导子，则 $\big((\mathsf{D} : A \to M), (\nu, \nu_\alpha)\big)$ 是一个S-代数。 _

Proof: 我们需要证明 (19) 中的四个图表成立。不过请注意，由于 (A, ν) 是一个 S-代数，而 (M, α) 是一个 (A, ν)-模，(19) 中最左侧的两个图表和右上方的图表已经成立。因此，我们只需证明 (19) 中右下方的图表。为此，回忆一下，每个 S-代数态射也是一个幺半群态射。因此，由于 ν: (S(A) μ_A) $\to$ (A, ν) 是一个 S-代数态射，我们还有 ν: (S(A), m_A, u_A) $\to$ $(A, \mathsf{m}^\nu, \mathsf{u}^\nu)$ 是一个幺半群态射。利用这一点，以及 S-代数和模结合律公理，可得以下图表交换:



这就说明（19）中的右下图表成立。因此，我们有（ν, ν_α）： S (D : $A \to M$) $\to$ (D : $A \to M$) 是箭头范畴中的一个映射。□

现在我们在对象上定义函子 $\mathcal{F}^{-1}$: S-DER $\to$ S-ALG，如下所示

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\mathsf{D} : (A, \nu) \to (M, \alpha)\right) = \left((\mathsf{D} : A \to M), (\nu, \nu_\alpha)\right)$$

在映射上的定义为 $\mathcal{F}^{-1}(f, g) = (f, g)$。

命题 5。8 $\mathcal{F}^{-1}$: S-DER $\to$ S-ALG 是一个函子。

Proof: 首先，我们需要说明为什么 $\mathcal{F}^{-1}$ 是良定义的。根据命题 5.7， $\mathcal{F}$ 在对象上是良定义的。对于映射，设 (f, g) : $\big(\mathsf{D} : (A, \nu) \to (M, \alpha)\big) \to \big(\mathsf{D}' : (A', \nu') \to (M', \alpha')\big)$ 是 S-DER 中的一个映射。回顾一下，这意味着 f: $(A, \nu) \to (A', \nu')$ 是一个 S- 代数态射，且 (9) 成立。我们首先需要说明 (f, g) 是箭头范畴中的一个映射。不过请注意，(9) 中右侧的图表恰好说明 (f, g) 满足 (14)，因此 (f, g) : (D : $A \to M$) $\to$ $\big(\mathsf{D}' : A' \to M'\big)$ 是箭头范畴中的一个映射。接下来，我们需要证明 (f, g) 也满足 (23) 中的两个图表。不过，由于 f 是一个 S-代数态射，(11) 与 (23) 中左侧的图表相同。因此，只需证明 (23) 中右侧的图表。为此，结合

该 f 是一个S-代数态射与 (9) 中左侧的图表可知，下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{S}(A)\otimes M & \xrightarrow{\mathsf{S}(f)\otimes g} & \mathsf{S}(A')\otimes M' \\ \downarrow{\scriptstyle \nu\otimes 1} & (11) & \downarrow{\scriptstyle \nu'\otimes 1} \\ A\otimes M & \xrightarrow{f\otimes g} & A'\otimes M' \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha} & (9) & \downarrow{\scriptstyle \alpha'} \\ M & \xrightarrow[g]{} & M'. \end{array}$$

因此，$(f,\ g):\ \left(\left(\mathsf{D}:\ A\to M\right),\ (\nu,\ \nu_\alpha)\right)\to\left(\left(\mathsf{D}':\ A'\to M'\right),\ (\nu',\ \nu'_{\alpha'})\right)$ 确实是一个 S-代数态射。因此，$\mathcal{F}^{-1}$是良定义的。$\mathcal{F}^{-1}$ 的函子性基本上是自动成立的，因此我们得到 $\mathcal{F}^{-1}$ 确实是一个函子。□

综合以上内容，我们以本文的主要结果作为本节的结尾。

定理 5.9 我们有一个范畴同构 S-ALG $\cong$ S-DER。具体而言，命题*5.4* 和命题 *5.7* 中的函子互为逆函子。

Proof: 只需证明命题 5.4 和命题 5.7 中的构造互为逆构造。因此，我们从一个 S-代数 $\left((\phi:\ A_0\to A_1),\ (\nu_0,\nu_1)\right)$ 出发，构造其诱导的 S-导子 $\phi:(A_0,\nu_0)\to(A_1,\alpha_{\nu_1})$。对这个 S-导子应用命题 5.7，得到 S-代数 $\left((\phi:\ A_0\to A_1),\ (\nu_0,{}^{\nu_{\alpha_{\nu_1}}})\right)$。为了证明这与最初的 S- 代数相同，我们需要证明 ${}^{\nu_{\alpha_{\nu_1}}}$ 等于 ν_1。展开 ${}^{\nu_{\alpha_{\nu_1}}}$ 后，得到以下复合：

$$\mathsf{S}(A_0)\otimes A_1\xrightarrow{\nu_0\otimes 1_{A_1}}A_0\otimes A_1\xrightarrow{\eta_{A_0}\otimes 1_{A_1}}\mathsf{S}(A_0)\otimes A_1\xrightarrow{\nu_1}A_1.$$

然而，根据 (21)，上述复合等于 ν_1，因此 ${}^{\nu_{\alpha_{\nu_1}}}=\nu_1$。反过来，假设我们从一个 S-导子 $\mathsf{D}:(A,\nu)\to(M,\alpha)$ 出发，再构造它所诱导的 S-代数 $\left((\mathsf{D}:\ A\to M),(\nu,\nu_\alpha)\right)$。对其应用命题 5.4，得到 S-导子 $\mathsf{D}:(A,\nu)\to(M,\alpha_{\nu_\alpha})$。要证明这与我们最初得到的 S-导子相同，需要证明 α_{ν_α} 等于 α。展开 α_{ν_α} 可得：

$$A\otimes M\xrightarrow{\eta_A\otimes 1_M}\mathsf{S}(A)\otimes M\xrightarrow{\nu\otimes 1_M}A\otimes M\xrightarrow{\alpha}M.$$

然而，根据 (10)，上述复合恰好等于 α，因此 $\alpha_{\nu_\alpha}=\alpha$。由此很容易推出$\mathcal{F}$: S-代数 $\to$S-导子 $\to$ S-代数 S-代数 $\cong$ S-导子 互为逆映射。因此，所需的 S-代数与 S-导子对应关系成立。□

6 作为交换幺半群的导子

在第 4 节中，我们已经证明，可以将我们的微分模态 S 提升为箭头范畴上的单子S 。接下来，自然会问：S 是否实际上本身就是一种微分模态。我们将在第 7节回答这个问题。为了做到这一点，我们首先需要说明应当赋予箭头范畴何种幺结构，进而尤其需要理解什么是交换幺半群：这正是本节的主题。

自然地，为箭头范畴选择幺半群积时，首先想到的做法是直接采用逐点幺半群积：

$$(\phi:A_0\to A_1)\otimes(\psi:B_0\otimes B_1)=(\phi\otimes\psi:A_0\otimes B_0\to A_1\otimes B_1).$$

然而，这种做法行不通，因为对于这种幺半群积，$\mathsf{S}(\phi\colon A_0 \to A_1)$ 将不是一个幺半群。因此，我们必须为箭头范畴考虑另一种幺半结构，而这种结构要求我们的基范畴具有双积。

对于具有有限双积的范畴 $\mathbb{X}$，我们将有限个对象的双积记作 $A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$，将零对象记作 $\mathsf{0}$。为简单起见，我们采用严格双积，因此结合性是严格的，并且$A \oplus \mathsf{0} = A = \mathsf{0} \oplus A$。现在回顾一下，具有有限双积的范畴可典范地（且唯一地）富化于交换幺半群上，而且映射也有一种非常实用的矩阵表示。具体而言，映射$A_1 \oplus \cdots \oplus A_n \to B_1 \oplus \cdots \oplus B_m$可以表示为一个 $m \times n$ 矩阵，如下所示：

$$\begin{bmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \cdots & f_{1,n} \\ f_{2,1} & \ddots & \ddots & f_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ f_{m,1} & f_{m,2} & \cdots & f_{m,n} \end{bmatrix}$$

for 唯一映射 $f_{i,\ j}\colon A_j \to B_i$。此外，复合由矩阵乘法给出 .

设 $\mathbb{X}$ 是一个具有有限双积的加性对称幺半范畴。由于幺半结构$\otimes$ 保留加法结构，因此幺半结构也保留有限积，也就是说，我们有典范同构：

$$(A_1 \oplus \cdots \oplus A_n) \otimes (B_1 \oplus \cdots \oplus B_m) \cong \bigoplus_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} A_i \otimes B_j \qquad\qquad A \otimes \mathsf{0} \cong \mathsf{0} \cong \mathsf{0} \otimes A. \tag{25}$$

换句话说， $\mathbb{X}$ 是一个分配幺半群范畴。

现在我们可以在箭头范畴上定义一个幺半结构。这个幺半结构是（对偶的）**莱布尼茨构造**针对双函子 [17,定义 4。4], 具体来说，是（对偶的）**关于零对象的推出积** [16, 构造 11.1。7], 这是一种旨在为箭头范畴赋予幺半群积的构造。

定义 6.1 我们在 $\mathsf{Arr}[\mathbb{X}]$ 的对象上定义幺半群积 $\boxtimes$如下：

$$(\phi : A_0 \to A_1) \boxtimes (\psi : B_0 \to B_1) := A_0 \otimes B_0 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1_{A_0} \otimes \psi \\ \phi \otimes 1_{B_0} \end{bmatrix}} (A_0 \otimes B_1) \oplus (A_1 \otimes B_0) \tag{26}$$

给定两个映射$(f_0, f_1) : (\phi\colon A_0 \to A_1) \to (\phi'\colon A'_0 \to A'_1)$ 和$(g_0, g_1) : (\psi\colon B_0 \to B_1) \to (\psi'\colon B'_0 \to B'_1)$，它们的幺半群积

$$(f_0, f_1) \boxtimes (g_0, g_1) : (\phi : A_0 \to A_1) \boxtimes (\psi : B_0 \to B_1) \to (\phi' : A'_0 \to A'_1) \boxtimes (\psi' : B'_0 \to B'_1)$$

定义为以下映射对：

$$\begin{array}{c} A_0 \otimes B_0 \xrightarrow{f_0 \otimes g_0} A'_0 \otimes B'_0 \\ (A_0 \otimes B_1) \oplus (A_1 \otimes B_0) \xrightarrow{\begin{bmatrix} f_0 \otimes g_1 & 0 \\ 0 & f_1 \otimes g_0 \end{bmatrix}} (A'_0 \otimes B'_1) \oplus (A'_1 \otimes B'_0). \end{array} \tag{27}$$

幺半单位是从幺半单位到零对象的零映射 $0\colon\ I \longrightarrow 0$。对称同构

$$\sigma^{\boxtimes}_{(\phi:A_0\longrightarrow A_1),(\psi:B_0\longrightarrow B_1)} : (\phi : A_0 \longrightarrow A_1) \boxtimes (\psi : B_0 \longrightarrow B_1) \longrightarrow (\psi : B_0 \longrightarrow B_1) \boxtimes (\phi : A_0 \longrightarrow A_1)$$

定义为以下两个态射组成的对：

$$\begin{array}{c} A_0 \otimes B_0 \xrightarrow{\sigma_{A_0,B_0}} B_0 \otimes A_0 \\ (A_0 \otimes B_1) \oplus (A_1 \otimes B_0) \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & \sigma_{A_0,B_1} \\ \sigma_{A_1,B_0} & 0 \end{bmatrix}} (B_0 \otimes A_1) \oplus (B_1 \otimes A_0). \end{array} \tag{28}$$

幺半群积 $\boxtimes$ 使 $\mathsf{Arr}[\mathbb{X}]$ 成为一个对称幺半范畴。如上所述，这个幺半群积 $\boxtimes$ 实际上是莱布尼茨构造（的对偶）和推出积（的对偶）的一个例子——详见 [16,17]。此外，$\mathsf{Arr}[\mathbb{X}]$ 也是加性的，其加法结构是逐点定义的，也就是说，映射之和为 $(f_0,\ f_1)\ +\ (g_0,\ g_1)\ =\ (f_0+g_0,\ f_1+g_1)$，零映射为 $(0,\ 0)$。此外，$\mathsf{Arr}[\mathbb{X}]$ 还继承了 $\mathbb{X}$ 的双积，这些双积同样是逐点定义的。

引理 6.2 $\mathsf{Arr}[\mathbb{X}]$是一个加性对称幺半范畴，其幺半群积为 $\boxtimes$，幺半单位为$0\colon\ I \longrightarrow 0$。此外，$\mathsf{Arr}[\mathbb{X}]$ 还具有有限双积。

Proof: 不难（尽管较为繁琐）证明，$\boxtimes$ 确实给出了一个加性对称幺结构，因为所需的相干性可由 $\otimes$ 和 $\oplus$ 的分配律推出。或者，这也可由以下事实得到：$\boxtimes$ 是（对偶于）莱布尼茨构造 / 推出积 [16,17]。□

正如预期的那样，为了证明 S 是一个代数模态，考察相对于 $\boxtimes$ 的箭头范畴中的交换幺半群将会很有用。事实证明，在这种情况下，交换幺半群恰好对应于通常意义下的导子。

$\mathsf{Arr}[\mathbb{X}]$ 中的一个交换幺半群是一个三元组

$$\left((\phi : A_0 \longrightarrow A_1), \left(\mathsf{m}_0, \begin{bmatrix} \mathsf{m}_1 & \mathsf{m}_2 \end{bmatrix}\right), (\mathsf{u}_0, \mathsf{u}_1)\right)$$

由箭头范畴中的一个映射 $\phi\colon\ A_0 \longrightarrow A_1$ in $\mathbb{X}$ 以及映射 $\left(\mathsf{m}0, \begin{bmatrix} \mathsf{m}_1 & \mathsf{m}_2 \end{bmatrix}\right) : (\phi\colon\ A_0 \longrightarrow A_1) \boxtimes (\phi\colon\ A_0 \longrightarrow A_1) \longrightarrow (\phi\colon\ A_0 \longrightarrow A_1)$ 和 $(\mathsf{u}_0,\mathsf{u}_1) : (0\colon\ I \longrightarrow 0) \longrightarrow (\phi\colon\ A_0 \longrightarrow A_1)$ 组成，并且它们还满足 (2)。将这些箭头范畴映射展开可知，我们在 $\mathbb{X}$ 中有五个如下类型的映射：

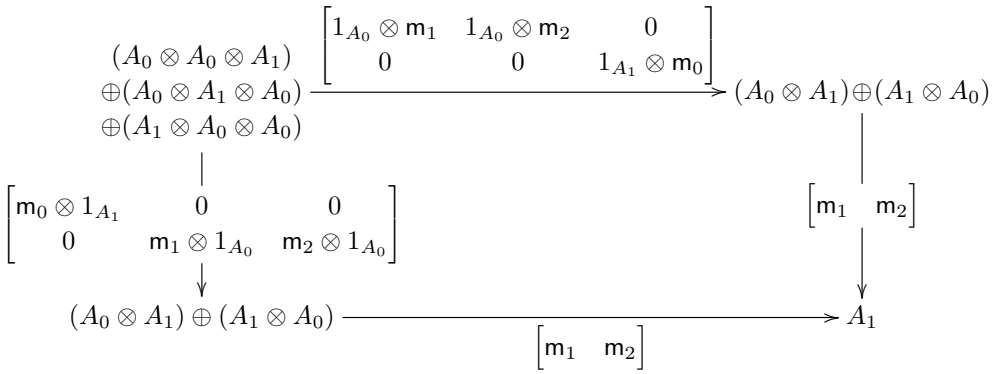
$$\mathsf{m}_0 : A_0 \otimes A_0 \longrightarrow A_0 \qquad \mathsf{m}_1 : A_0 \otimes A_1 \longrightarrow A_1 \qquad \mathsf{m}_2 : A_1 \otimes A_0 \longrightarrow A_1$$

$$\mathsf{u}_0 : I \longrightarrow A_0 \qquad \mathsf{u}_1 : 0 \longrightarrow A_1$$

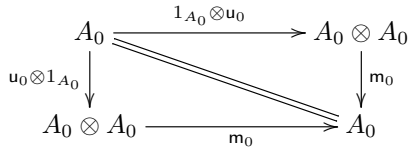
其中注意，$\begin{bmatrix} \mathsf{m}_1 & \mathsf{m}_2 \end{bmatrix} : (A_0 \otimes A_1) \oplus (A_1 \otimes A_0) \longrightarrow A_1$。另外请注意，由于 0 是零对象，我们必须有 $\mathsf{u}_1 = 0$。

我们现在来说明 A_0 如何是一个交换幺半群，以及 A_1 如何是其上的一个模。为此，让我们展开（2）在箭头范畴中的含义，这将给出以下六个图表：

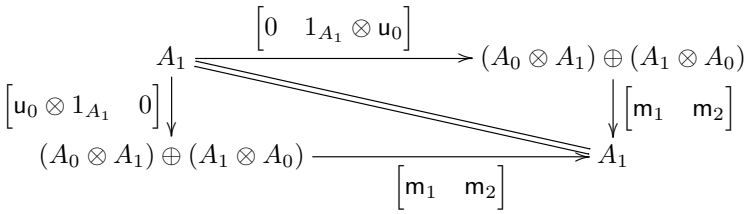
$$\begin{array}{ccc} A_0 \otimes A_0 \otimes A_0 & \xrightarrow{1_{A_0} \otimes \mathsf{m}_0} & A_0 \otimes A_0 \\ {\scriptstyle \mathsf{m}_0 \otimes 1_{A_0}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \mathsf{m}_0} \\ A_0 \otimes A_0 & \xrightarrow[\mathsf{m}_0]{} & A_0 \end{array} \tag{29}$$



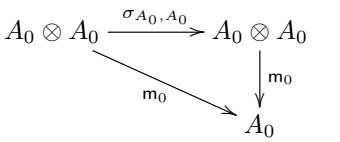
(30)



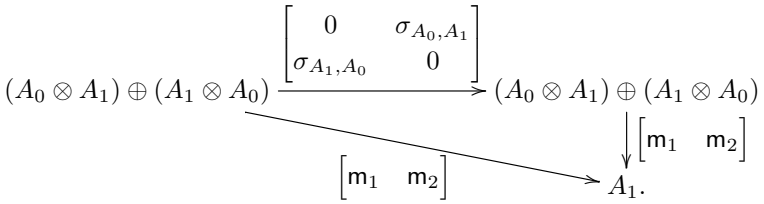
(31)



(32)

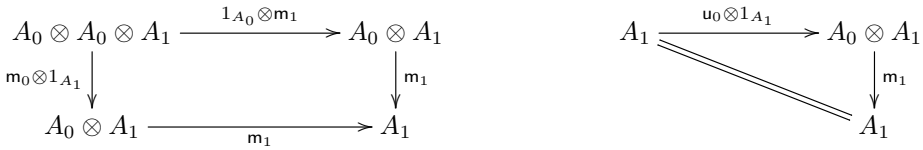


(33)



(34)

现在（29）、（31）和（33）共同告诉我们（A_0，m_0,u_0）是一个交换幺半群。此外，通过改写（32）的下方三角形，并用第一个单射对（30）作前复合，可得以下两个图表也交换：



(35)

这告诉我们，(A_1,m_1) 是一个 (A_0,m_0, u_0)-模。接下来可以问，关于 m_2 的剩余数据能说明什么。事实证明，这些信息实际上是冗余的。事实上，请注意

将 34与第二个注入复合，可得下图表交换：

$$\begin{array}{ccc} A_1 \otimes A_0 & \xrightarrow{\sigma_{A_1,A_0}} & A_0 \otimes A_1 \\ & \searrow^{\mathsf{m}_2} & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{m}_1} \\ & & A_0. \end{array} \tag{36}$$

因此m_2 完全由m_1, 换言之，m_2 是由左作用m_1诱导出的右作用。因此，式（29）和（31）中的剩余数据，对应于（7）的右作用类比，以及左作用和右作用之间显而易见的相互作用方式。

最后，展开后可知，$\left(\mathsf{m}_0, \begin{bmatrix} \mathsf{m}_1 & \mathsf{m}_1 \circ \sigma_{A_1,A_0} \end{bmatrix}\right) : (\phi :\ A_0 \to A_1) \boxtimes (\phi :\ A_0 \to A_1) \to (\phi :\ A_0 \to A_1)$ 和 $(\mathsf{u}_0, 0) : (0 :\ I \to 0) \to (\phi :\ A_0 \to A_1)$ 是箭头范畴中的映射，由此得到以下图表：

$$\begin{array}{ccc} A_0 \otimes A_0 & \xrightarrow{\begin{bmatrix} \phi \otimes 1_{A_0} \\ 1_{A_0} \otimes \phi \end{bmatrix}} & (A_0 \otimes A_1) \oplus (A_1 \otimes A_0) \\ {\scriptstyle \mathsf{m}_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \begin{bmatrix} \mathsf{m}_1 & \mathsf{m}_1 \circ \sigma_{A_1,A_0} \end{bmatrix}} \\ A_0 & \xrightarrow[\phi]{} & A_1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{0} & 0 \\ {\scriptstyle \mathsf{u}_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 0} \\ A_0 & \xrightarrow[\phi]{} & A_1 \end{array} \tag{37}$$

我们可以将其改写如下：

$$\begin{array}{ccc} A_0 \otimes A_0 & \xrightarrow{\sigma_{A_1,A_0} \circ (\phi \otimes 1_{A_0}) + 1_{A_0} \otimes \phi} & A_0 \otimes A_1 \\ {\scriptstyle \mathsf{m}_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{m}_1} \\ A_0 & \xrightarrow[\phi]{} & A_1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} I & & \\ {\scriptstyle \mathsf{u}_0}\downarrow & \searrow^{0} & \\ A_0 & \xrightarrow[\phi]{} & A_1. \end{array} \tag{38}$$

这些最后的图表准确地表明，$\phi : (A_0, \mathsf{m}_0, \mathsf{u}_0) \to (A_1, \mathsf{m}_1)$ 是 $\mathbb{X}$ 中的一个导子。

反过来，若 $\mathsf{D} : (A, \mathsf{m}, \mathsf{u}) \to (M, \alpha)$ 是 $\mathbb{X}$ 中的导子，那么通过基本上将上述论证反向进行，我们得到 $\left((\mathsf{D} :\ A \to M)\ \left(\mathsf{m}\ \begin{bmatrix} \alpha & \alpha \circ \sigma_{M,A} \end{bmatrix}\right), (\mathsf{u}, 0)\right)$ 是 $\mathsf{Arr}[\mathbb{X}]$ 中的一个交换幺半群。此外，显然这两个构造互为逆构造。因此，我们得出结论：箭头范畴中的交换幺半群恰好具有如下形式：$\left((\mathsf{D} :\ A \to M)\ \left(\mathsf{m}\ \begin{bmatrix} \alpha & \alpha \circ \sigma_{M,A} \end{bmatrix}\right), (\mathsf{u}, 0)\right)$，其中 $\mathsf{D} : (A, \mathsf{m}, \mathsf{u}) \to (M, \alpha)$ 是基范畴中的一个导子。此外，容易看出，这一结论可推广到映射，并且箭头范畴中的幺半群态射恰好是基范畴中的导子态射。因此，我们可以得出以下结论：

命题 6.3 我们有一个范畴同构 $\mathsf{CMON}\left[\mathsf{Arr}[\mathbb{X}]\right] \cong \mathsf{DER}[\mathbb{X}]$。

7 箭头范畴上的微分模态

感谢第6节，我们已经知道箭头范畴中的交换幺半群是什么，并可以借此将我们的微分模态提升到箭头范畴。因此，在本节余下部分中，设 $\mathbb{X}$是一个带有微分模态（S μ，η，m，u，d）的微分范畴，并假设 $\mathbb{X}$ 也具有有限双积。我们的箭头范畴上已有单子（S μ，η），现在为它给出代数模态结构。

从乘法 m 开始，定义

$$\overline{\mathsf{m}}_{(\phi:A_0\longrightarrow A_1)} : \overline{\mathsf{S}}\left(\phi : A_0 \to A_1\right) \boxtimes \overline{\mathsf{S}}\left(\phi : A_0 \to A_1\right) \to \overline{\mathsf{S}}\left(\phi : A_0 \to A_1\right)$$

作为以下映射对：

$$\begin{array}{c} \mathsf{S}(A_0) \otimes \mathsf{S}(A_0) \xrightarrow{\mathsf{m}_{A_0}} \mathsf{S}(A_0) \\ \begin{array}{c}\left(\mathsf{S}(A_0) \otimes \mathsf{S}(A_0) \otimes A_1\right) \\ \oplus \left(\mathsf{S}(A_0) \otimes A_1 \otimes \mathsf{S}(A_0)\right)\end{array} \xrightarrow{\begin{bmatrix}\mathsf{m}_{A_0} \otimes 1_{A_1} & \left(\mathsf{m}_{A_0} \otimes 1_{A_1}\right) \circ \left(1_{\mathsf{S}(A_0)} \otimes \sigma_{A_1,\mathsf{S}(A_0)}\right)\end{bmatrix}} \mathsf{S}(A_0) \otimes A_1. \end{array} \tag{39}$$

对于单位 u，定义

$$\overline{\mathsf{u}}_{(\phi:A_0\longrightarrow A_1)} : \left(0 : I \to 0\right) \to \overline{\mathsf{S}}\left(\phi : A_0 \to A_1\right)$$

如下：

$$\overline{\mathsf{u}}_{(\phi:A_0\longrightarrow A_1)} := \left(\mathsf{u}_{A_0} : I \to \mathsf{S}(A_0), 0 : 0 \to A_1\right). \tag{40}$$

命题 7.1 $\left(\mathsf{S}\ \mu, \eta, \mathsf{m}, \overline{\mathsf{u}}\right)$是一个代数模态。

Proof: 我们首先说明为什么 $\mathsf{S}\left(\phi :\ A_0 \to A_1\right)$ 是箭头范畴中的交换幺半群。为此，注意到 $\left(\mathsf{S}\left(\phi :\ A_0 \to A_1\right)\ \ \mu\right)$ 是一个 S-代数。将命题 5.4 应用于这个 S-代数，可得 $(1 \otimes \phi)\ \circ \mathsf{d} : (\mathsf{S}(A_0), \mathsf{m}, \mathsf{u}) \to (\mathsf{S}(A_0) \otimes A_1, \mathsf{m} \otimes 1)$ 是一个 S-导子，因此也是一个导子。因此，根据命题 6.3，我们得到：

$$\left(\left((1 \otimes \phi) \circ \mathsf{d} : \mathsf{S}(A_0) \to \mathsf{S}(A_0) \otimes A_1\right), \left(\mathsf{m}, \begin{bmatrix}\mathsf{m} \otimes 1 & \left(\mathsf{m} \otimes 1\right) \circ \sigma\end{bmatrix}\right), \left(\mathsf{u}, 0\right)\right)$$

是箭头范畴中的一个交换幺半群。此外，根据对称性相干条件和乘法的交换性，很容易验证 $(\mathsf{m} \otimes 1) \circ \sigma = (\mathsf{m} \otimes 1) \circ (1 \otimes \sigma)$。因此，我们可以将上面的交换幺半群改写为三元组 $\left(\mathsf{S}\left(\phi :\ A_0 \to A_1\right), \mathsf{m}, \mathsf{u}\right)$，正如所期望的那样。此外，这也说明 m 和 u 确实是箭头范畴中的映射，因此定义良好。m、σ、u 和 0 的自然性表明，m 和 u 也是所需的自然变换。最后，还需说明为什么 μ是一个幺半群态射。然而，由于我们知道 μ 是一个 S-代数态射，根据命题 5.4，这意味着μ 也是一个 S-导子态射，也就是说，它也是一个导子态射。然后根据命题 6.3，我们得到 μ 是箭头范畴中的幺半群态射。因此我们得出结论，$(\mathsf{S}\ \mu, \eta, \mathsf{m}, \mathsf{u})$ 是一个代数模态，正如所期望的那样。□

最后，还需要给出我们的导出变换 d。因此定义

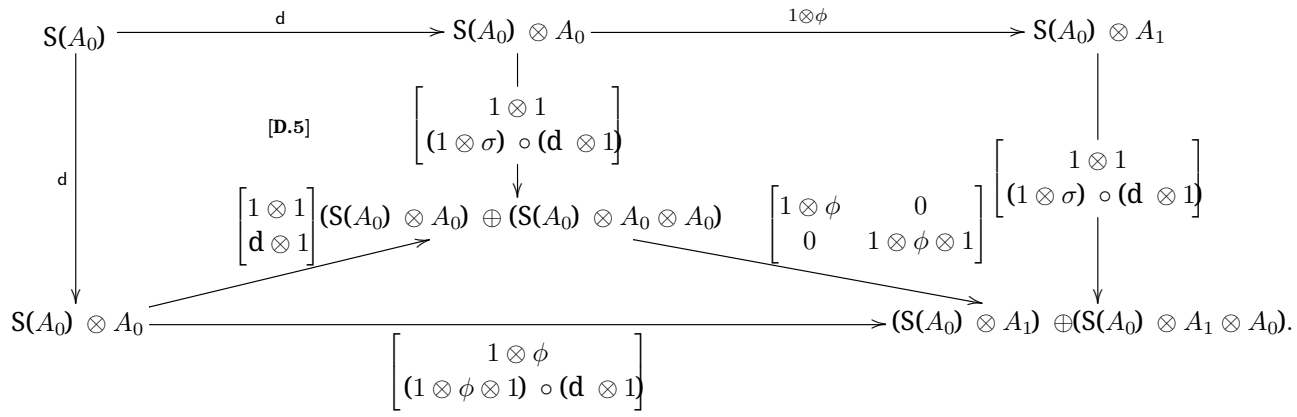
$$\overline{\mathsf{d}}_{(\phi:A_0\longrightarrow A_1)} : \overline{\mathsf{S}}\left(\phi : A_0 \to A_1\right) \to \overline{\mathsf{S}}\left(\phi : A_0 \to A_1\right) \boxtimes \left(\phi : A_0 \to A_1\right)$$

作为以下一对映射：

$$\begin{array}{c} \mathsf{S}(A_0) \xrightarrow{\mathsf{d}_{A_0}} \mathsf{S}(A_0) \otimes A_0 \\ \mathsf{S}(A_0) \otimes A_1 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1_{\mathsf{S}(A_0)} \otimes 1_{A_1} \\ \left(1_{\mathsf{S}(A_0)} \otimes \sigma_{A_0,A_1}\right) \circ \left(\mathsf{d}_{\mathsf{S}(A_0)} \otimes 1_{A_1}\right)\end{bmatrix}} \left(\mathsf{S}(A_0) \otimes A_1\right) \oplus \left(\mathsf{S}(A_0) \otimes A_1 \otimes A_0\right). \end{array} \tag{41}$$

定理7.2 (S $\mu, \eta, \bar{\mathsf{m}}, \bar{\mathsf{u}}, \bar{\mathsf{d}}$)是一个微分模态，因此$\mathsf{Arr}[\mathbb{X}]$ 是一个微分范畴。

Proof: 我们首先说明为什么 $\bar{\mathsf{d}}$ 定义良好。利用互换规则 [**D.5**], 我们得到以下图表交换:



因此，$\bar{\mathsf{d}} : \mathsf{S}(\phi : A_0 \to A_1) \to \mathsf{S}(\phi : A_0 \to A_1) \boxtimes (\phi : A_0 \to A_1)$ 确实是箭头范畴中的一个映射。显然，$\bar{\mathsf{d}}$ 的自然性也意味着 $\bar{\mathsf{d}}$ 是一个自然变换。

因此，现在我们必须证明 $\bar{\mathsf{d}}$ 满足五条导出变换公理。不过，这些大多可由构造直接得出（尽管我们不会逐一写出所有图表，因为它们未必能提供更多启发）。事实上，由常数法则 [**D.1**] 和零映射的湮灭性质，可得常数法则 [**D.1**] 在箭头范畴中成立；利用莱布尼茨法则 [**D.2**] 以及一些显然的对称性相干条件，可得莱布尼茨法则在箭头范畴中也成立；利用线性法则 [**D.3**] 和常数法则 [**D.1**], , 可得线性法则 [**D.3**] 在箭头范畴中成立；利用链式法则 [**D.4**] 和莱布尼茨法则 [**D.2**] , 可得链式法则 [**D.4**] 在箭头范畴中成立；最后，由互换规则 [**D.5**] 以及一些显然的对称性相干条件，可得互换规则 [**D.5**] 在箭头范畴中也成立。我们将所有必要图表的绘制留作练习，供有兴趣的读者完成。由此可知，d 是一个导出变换，因此箭头范畴是一个微分范畴。□

总之，对于具有有限双积的微分范畴，其箭头范畴仍将是一个具有有限双积的微分范畴。这为我们提供了微分范畴的一类新例子。

现在回想一下，我们曾提到，微分范畴最初是为了给出微分线性逻辑的范畴语义而引入的 [10]。然而，在这类模型中，我们对微分模态有更高的要求；具体而言，典范自然变换（在存在双积的情况下）必须是同构。这些同构称为***Seely*** 同构，它们是（微分）线性逻辑范畴语义中的一个基本概念。因此，本节最后我们将简要讨论 Seely 同构。

定义 7.3 对于具有有限双积的加性对称幺半范畴 $\mathbb{X}$ ，一个微分存储模态 *[5,* 定义 7 的对偶 *10]* 是一个微分模态 (S $\mu, \eta, \mathsf{m}, \mathsf{u}, \mathsf{d}$) ，使得典范自然变换 $\chi_{A,B} : \mathsf{S}(A) \otimes \mathsf{S}(B) \to \mathsf{S}(A \oplus B)$ 以及 $\chi_0 : I \to \mathsf{S}(0)$分别称为***Seely***映射，定义如下:

分别如下：

$$\chi_{A,B} : \mathsf{S}(A) \otimes \mathsf{S}(B) \xrightarrow{\mathsf{S}\left(\begin{bmatrix} 1_A \\ 0 \end{bmatrix}\right) \otimes \mathsf{S}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1_B \end{bmatrix}\right)} \mathsf{S}(A \oplus B) \otimes \mathsf{S}(A \oplus B) \xrightarrow{\mathsf{m}_{A \oplus B}} \mathsf{S}(A \oplus B) \tag{42}$$

$$\chi_0 : I \xrightarrow{\mathsf{u}_0} \mathsf{S}(0)$$

是自然同构。在这种情况下，我们将 χ和 χ_0 称为 ***Seely*** 同构。

例 7.4 Sym 是一个微分存储模态 *[5,Ex 1],*，因为众所周知，对称代数满足Sym$(V \otimes W) \cong$Sym$(V) \otimes$Sym(W)，并且 Sym$(0) \cong \mathbb{K}$ *[12,*第 *16* 章，命题 *8*。*2]*。

例 7.5 S^∞ 不是微分存储模态 *[8,*备注 5。*16],* 例如，因为众所周知， $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ 与 $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$不同构。

在箭头范畴中，可以直接算出典范 Seely 映射

$$\overline{\chi}_{(\phi:A_0 \longrightarrow A_1),(\psi:B_0 \longrightarrow B_1)} : \overline{\mathsf{S}}\,(\phi : A_0 \longrightarrow A_1) \boxtimes \overline{\mathsf{S}}\,(\psi : B_0 \longrightarrow B_1) \longrightarrow \overline{\mathsf{S}}\,\big((\phi : A_0 \longrightarrow A_1) \oplus (\psi : B_0 \longrightarrow B_1)\big)$$

由以下一对映射给出：

$$\begin{array}{c} \mathsf{S}(A_0) \otimes \mathsf{S}(B_0) \xrightarrow{\chi_{A_0,B_0}} \mathsf{S}(A_0 \oplus B_0) \\ \begin{array}{l} (\mathsf{S}(A_0) \otimes \mathsf{S}(B_0) \otimes B_1) \\ \oplus (\mathsf{S}(A_0) \otimes A_1 \otimes \mathsf{S}(B_0)) \end{array} \xrightarrow{\left[\chi_{A_0,B_0} \otimes 1_{B_1} \quad (\chi_{A_0,B_0} \otimes 1_{A_1}) \circ (1_{\mathsf{S}(A_0)} \otimes \sigma_{A_1,\mathsf{S}(B_0)})\right]} \mathsf{S}(A_0 \oplus B_0) \otimes (A_1 \oplus B_1) \end{array} \tag{43}$$

而 $\chi_0 :\top(0 : I \longrightarrow 0) \longrightarrow \mathsf{S}(0 : 0 \longrightarrow 0)$ 是 $\mathsf{u}_{(0:0 \longrightarrow 0)}$。显然，如果 χ 和 χ_0 是 $\mathbb{X}$中的同构，则我们得到χ 和 $\overline{\chi}_0$ 也都是同构。因此，我们得出以下观察：

命题 7.6 如果$(\mathsf{S}\ \mu, \eta, \mathsf{m}, \mathsf{u}, \mathsf{d})$ 是一个微分存储模态，那么$(\mathsf{S}\ \mu, \eta, \mathsf{m}, \mathsf{u}, \overline{\mathsf{d}})$ 也是一个微分存储模态。

8 导子的切范畴与笛卡尔微分范畴

在上一节中，我们证明了对于具有双积的微分范畴，其微分模态 S 可以提升为箭头范畴上的微分模态，因此箭头范畴也是具有有限双积的微分范畴。这一事实还带来了一些重要的直接推论：我们得到了一个由 S-导子构成的切范畴 和笛卡尔微分范畴 （CDC）。这里不再全面回顾切范畴和笛卡尔微分范畴，而是邀请读者参阅 [6, 7]，了解切范畴的介绍；参阅 [3, 6]，了解笛卡尔微分范畴的介绍。另请参阅 [7, 图1]，其中给出了微分范畴理论的实用关系图，突出了微分范畴、切范畴和笛卡尔微分范畴之间的所有联系。

现在，在本节余下部分中，再次设 $\mathbb{X}$ 为一个带有微分模态 $(\mathsf{S}\ \mu, \eta, \mathsf{m}, \mathsf{u}, \mathsf{d})$ 的微分范畴，并假设 $\mathbb{X}$ 也具有有限双积。

对于微分模态，其代数构成一个切范畴。简而言之，**切范畴** [6] 是一个配备了自函子 T 的范畴，该自函子称为**切丛函子**，可以将其理解为

将每个对象 A 映射到其"抽象切丛" $\mathsf{T}(A)$。这个切丛函子配备了若干自自然变换，用来刻画微分几何中切丛的关键性质。

在我们的设定中，微分模态 S 的 Eilenberg-Moore 范畴 S-ALG 是一个切范畴 [7,定理 22]；对于一个 S-代数 (A,ν)，其切丛是 S-代数 $\mathsf{T}(A,\nu)=(A\oplus A,\nu^\flat)$，其中 S-代数结构映射 $\nu^\flat:\mathsf{S}(A\oplus A)\to A\oplus A$ 定义如下：

$$\mathsf{S}(A\oplus A)\xrightarrow{\begin{bmatrix}\nu\circ\mathsf{S}\left(\begin{bmatrix}1_A & 0\end{bmatrix}\right)\\ \mathsf{m}^\nu\circ(\nu\otimes 1_A)\circ\left(\mathsf{S}\left(\begin{bmatrix}1_A & 0\end{bmatrix}\right)\otimes\begin{bmatrix}0 & 1_A\end{bmatrix}\right)\circ\mathsf{d}_{A\oplus A}\end{bmatrix}} A\oplus A. \tag{44}$$

如 [7, 节 5] 中所述，我们应当将此视为作用于 S-代数上的某种"对偶数构造"（如下文的例子所示）。事实上，$\mathsf{T}(A,\nu)$ 的诱导乘法 $\mathsf{m}^{\nu^\flat}$ 正是对偶数幂零乘法的一种推广。

现在，将这一构造应用于箭头范畴上的微分模态，可得 S-ALG也是一个切范畴。换言之，经由定理5.9可得，S-导子构成一个切范畴，其切丛函子如下所示：

推论 8.1 S-DER 是一个切范畴，其中对于一个S-导子$\mathsf{D}:(A,\nu)\to(M,\alpha)$，

$$\mathsf{T}\left(\mathsf{D}:(A,\nu)\to(M,\alpha)\right)=\left(\begin{bmatrix}\mathsf{D} & 0\\ 0 & \mathsf{D}\end{bmatrix}:(A\oplus A,\nu^\flat)\to(M\oplus M,\alpha^\flat)\right)$$

其中作用 $\alpha^\flat:(A\oplus A)\otimes(M\oplus M)\to M\oplus M$ 由下列映射诱导（差一个分配同构）：

$$(A\otimes M)\oplus(A\otimes M)\oplus(A\otimes M)\oplus(A\otimes M)\xrightarrow{\begin{bmatrix}\alpha & 0 & 0 & 0\\ 0 & \alpha & \alpha & 0\end{bmatrix}} M\oplus M. \tag{45}$$

例 *8.2* 普通导子的切范畴。*Sym-ALG* 同构于交换 $\mathbb{K}$-代数范畴，该范畴是一个切范畴，其切丛函子由对偶数给出*[7, 例 3.3]*。现在，*Sym*-导子范畴显然就是普通导子范畴，因此 *Sym-DER* $\simeq$ *DER*$[\mathit{VEC}_{\mathbb{K}}]$ *(例 3.2)*。应用上述构造可知，导子再次构成一个由对偶数给出的切范畴。事实上，回顾一下，对于一个交换 $\mathbb{K}$-代数 A，其对偶数环是交换 $\mathbb{K}$-代数 $A[\epsilon]=\{a+b\epsilon|\ a,b\in A,\epsilon^2=0\}$。现在，对于一个 A-模M，定义 $A[\epsilon]$-模 $M[\epsilon]=\{m+n\epsilon|\ m,n\in M\}$，其作用由 $\epsilon^2=0$诱导。于是，导子的切丛将导子 $D:A\to M$ 映为导子 $D[\epsilon]:A[\epsilon]\to M[\epsilon]$，其定义为$D[\epsilon](a+b\epsilon)=D(a)+D(b)\epsilon$。

例 8.3 一个由 $\mathcal{C}^\infty$**-导子构成的切范畴**。S^∞-ALG 与 $\mathcal{C}^\infty$-环范畴同构；后者是一个切范畴，其切丛函子仍由对偶数 *[7,Ex23.2]* 给出。事实上，对于一个 $\mathcal{C}^\infty$-环 A，其对偶数环 $A[\epsilon]$ 仍是一个 $\mathcal{C}^\infty$-环，其中对每个光滑函数$f:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，$\Phi[\epsilon]_f:\ A[\epsilon]^n\to A[\epsilon]$ 定义如下：

$$\Phi[\epsilon]_f(a_1+b_1\epsilon,\ldots,a_n+b_n\epsilon)=\Phi_f(a_1,\ldots,a_n)+\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,\ldots,a_n)b_i\epsilon.$$

现在 S^∞-DER 与 $\mathcal{C}^\infty$-导子范畴（例 3.3）同构；后者是一个切范畴，其切丛函子将一个 $\mathcal{C}^\infty$-导子 $\mathsf{D}: A \to M$ 映为 $\mathcal{C}^\infty$-导子 $\mathsf{D}[\epsilon]: A[\epsilon] \to M[\epsilon]$，其中 $M[\epsilon]$ 和 $\mathsf{D}[\epsilon]$ 的定义与前一个例子相同。

另一方面，微分模态的自由代数构成一个笛卡尔微分范畴。简而言之，**笛卡尔微分范畴** [3] 是一个具有有限积的范畴 $\times$，并配备了一个**微分组合子**D，它是一个算子，对于每个映射 $f: A \to B$ 都会给出它的导数$\mathsf{D}[f]: A \times A \to B$。还值得一提的是，笛卡尔微分范畴也是一个切范畴 [6, 命题 47]。

在我们的设定中，微分模态的 Kleisli 范畴的对偶是一个笛卡尔微分范畴 [3, 命题 3.2.1]。回忆一下，对于一个单子 $(\mathsf{S}\ \mu, \eta)$，其 Kleisli 范畴 KL(S) 是一个范畴，它的对象与 $\mathbb{X}$ 相同，不过在 Kleisli 范畴中，从 $A \to B$ 出发的一个映射是 $\mathbb{X}$ 中类型为 $A \to \mathsf{S}(B)$ 的映射。或者，众所周知，Kleisli 范畴 KL(S) 等价于自由 S-代数 $(\mathsf{S}(A)\ \mu_A)$ 的全子范畴，我们将其记为 $\mathsf{S}\text{-ALG}_{\text{free}}$，因此 $\mathsf{KL}(\mathsf{S}) \simeq \mathsf{S}\text{-ALG}_{\text{free}}$。

对于我们的微分模态 S，KL(S) 的对偶范畴（等价地，$\mathsf{S}\text{-ALG}_{\text{free}}$）是一个笛卡尔微分范畴；换言之，也可以说 KL(S)（等价地，$\mathsf{S}\text{-ALG}_{\text{free}}$）是一个余笛卡尔微分类别。因此，对于一个 Kleisli 映射 $f: A \to \mathsf{S}(B)$，微分组合子会将其映射为一个映射 $\mathsf{D}[f]: A \to \mathsf{S}(B \oplus B)$（此处请记住，对偶范畴 KL(S) 中的积是余积，它由基范畴中的直和 $\oplus$ 给出，但在 Kleisli 范畴中并不是直和），该映射定义为以下复合：

$$A \xrightarrow{\ f\ } \mathsf{S}(B) \xrightarrow{\ \mathsf{d}_B\ } \mathsf{S}(B) \otimes B \xrightarrow{\ 1_{\mathsf{S}(B)} \otimes \eta_B\ } \mathsf{S}(B) \otimes \mathsf{S}(B) \xrightarrow{\ \chi_{B,B}\ } \mathsf{S}(B \oplus B) \quad (46)$$

其中 χ 是式（42）中定义的 Seely 映射。

对于 $(\mathsf{S}\ \mu, \eta)$ 的情形，自由 S-代数对应于如下形式的 S-导子

$$(1_{\mathsf{S}(A_0)} \otimes \phi) \circ \mathsf{d}_{A_0} : (\mathsf{S}(A_0), \mu_{A_0}) \to (\mathsf{S}(A_0) \otimes A_1, \mathsf{m}_{A_0} \otimes 1_{A_1})$$

对某个映射 $\phi: A_0 \to A_1$。令 $\mathsf{S}\text{-DER}_{\text{free}}$ 为 S-DER 中由此类形式构成的全子范畴。因此我们有 $\mathsf{KL}(\mathsf{S}) \simeq \mathsf{S},\text{-ALG}_{\text{free}} \cong \overline{\mathsf{S}\text{-DER}}_{\text{free}}$，由此可以得出：

推论8.4 $\mathsf{S}\text{-DER}^{free}$ 的反范畴是一个笛卡尔微分范畴。

参考文献

[1] R. Blute, J. R. B. Cockett, T. Porter, 和 R. A. G. Seely。《K¨ahler 范畴》。《*Cahiers de topologie et g´eom´etrie diff´erentielle cat´egoriques*，52(4):253–268，2011年。[2] R. F. Blute、J. R. B. Cockett 和 R. A. G. Seely。微分范畴。数学结构与计算机科学，2006年。[3] R. F. Blute、J. R. B. Cockett 和 R. A. G. Seely。笛卡尔微分范畴。范畴理论与应用，22(23):622–672，2009年。[4] R. F. Blute、R. B. B. Lucyshyn-Wright 和 K. O'Neill。余微分范畴中的导子。《*Cahiers de Topologie et G´eom´etrie Diff´erentielle Cat´egoriques*，57:243–280，2016年。[5] R.F. Blute、J.R.B. Cockett、J-S. P. Lemay 和 R.A.G. Seely。再探微分范畴。应用范畴结构，28:171–235，2020年。

[6] J. R. B. Cockett 和 G. S. H. Cruttwell。微分结构、切结构与合成微分几何。应用范畴结构，22(2):331–417，2014年。[7] J. R. B. Cockett、J.-S. P. Lemay 和 R. B. B. Lucyshyn-Wright。由微分范畴的余代数构造切范畴。载于第*28*届欧洲计算机科学逻辑协会计算机科学逻辑年会（*CSL 2020*），第152卷莱布尼茨国际信息学会议录（*LIPIcs*），第17:1–17:17页，德国达格施图尔，2020年。达格施图尔城堡—莱布尼茨信息学中心。[8] G. S. H. Cruttwell、J-S. P. Lemay 和 R. B. B. Lucyshyn-Wright。自由环模态上的积分与微分结构。《*Cahiers de topologie et g´eom´etrie diff´erentielle cat´egoriques*，62(2):116–176，2021年。[9] A. Dubuc、E. 和 Kock。关于1-形式分类器。代数通讯，12(12):1471–1531，1984年。[10] T. Ehrhard。微分线性逻辑导论：证明网、模型与反导数。数学结构与计算机科学，2017年。[11] D. Joyce。-概形与-代数几何导论。微分几何综述，17，2012年。[12] S. Lang。《代数》，修订第3版。数学研究生教材，211，2002年。[13] J.-S. P. Lemay。余微分范畴中的微分代数。纯粹与应用代数杂志，223(10):4191–4225，2019年。[14] I. Moerdijk 和 G. E. Reyes。光滑无穷小分析模型。施普林格科学与商业媒体，2013年。[15] K. O’Neill。余微分范畴中的光滑性。博士论文，渥太华大学，2017年。[16] E. Riehl。范畴同伦论，第24卷。剑桥大学出版社，2014年。[17] E. Riehl 和 D. Verity。Reedy范畴理论与实践。范畴理论与应用，29(9):256–301，2014年。