arXiv:2602.16433v1 [math.LO] 18 Feb 2026

亨泽尔极小性、 p-进指数函数与 Tate 均匀化

SEBASTIAN ETEROVIĆ 和 FLORIS VERMEULEN

摘要。我们运用亨泽尔极小性——一种 o-极小性的非阿基米德类比——研究非阿基米德背景下超越数论、不太可能的交以及微分域相关的若干问题。特别地，我们聚焦于 p-进指数函数和 $\mathbb{C}_p$ 上的 Tate 均匀化，并证明它们可定义于 $\mathbb{C}_p$ 上的亨泽尔极小结构中。我们首先在亨泽尔极小域上构造一大类与可定义函数相容的导子，然后将其应用于 p-进 Schanuel 猜想。我们还类比 Wilkie 的工作研究局部可定义性的性质，并证明 p-进 Schanuel 猜想蕴含其自身的一个一致版本。对于 Tate 均匀化，我们证明了模糊化时一个强闭包性质，并由此推出，带模糊化 Tate 均匀化的$\mathbb{C}_p$ 是准极小的。最后，我们证明了关于椭圆曲线的幂的可能交的p-进稠密性结果。

1. 引言

o-极小性是源自模型论的一个框架，在其中可以进行具有良好驯性保证的解析论证。需要说明的是，我们所说的“解析论证”特指在实分析或复分析中展开的论证。o-极小性成功应用于重要算术几何问题，现已广为人知，例如 [Pil11、Tsi18、PST+21] 将其应用于安德烈–奥尔特猜想的研究， [PT16、MPT19、BT19]关于函数超越性的结果，以及 [DR18] 关于 Zilber–Pink 猜想的结果。部分受这些成就的启发，人们尝试提出类似的、具有良好驯性的框架，以支持非阿基米德解析论证，例如 P-极小性 [HM97]或 C-极小性 [HM94、MS96]。本文将重点关注较新的 1-h-极小性概念 [CHRK22、CHRKV23], 它的适用范围比此前的概念更广。

本文旨在展示如何类比 o-极小性的各种应用来使用 1-h-极小性，举例说明 1-h-极小结构中可定义函数的有趣实例，并展示如何解决由此产生的一些技术障碍。为此，我们将研究超越数论、不太可能的交以及微分域中的一些非阿基米德类比。o-极小性的多数解析应用都从实数域 $\mathbb{R}$ 扩张出发，加入一族解析函数 F，使所得结构成为 o-极小结构。类似地，我们将从 $\mathbb{C}_p$ 的扩张入手，加入某些解析函数族。

我们首先研究非平凡域导子 $\delta : \mathbb{C}_p \to \mathbb{C}_p$ 的存在性，这些导子与一族函数 F 相容，使得结构 $(\mathbb{C}_p, \mathrm{F})$ 是 1-h- 极小的。

定理 1.1 （非平凡导子的存在性，定理3.1）。设 $\mathcal{T}$ 是一个 1-h- 极小理论，且 K 是 $\mathcal{T}$的一个模型。那么存在一组可交换导子 $\Delta = (\partial_\tau)_{\tau \in \mathcal{B}}$，作用于 K 并具有以下性质：

关键词与短语。亨泽尔极小性，p 进指数化，Schanuel 猜想，Tate 均匀化，Zilber–Pink。S.E. 获英国工程与自然科学研究委员会奖学金 EP/T018461/1 及奥地利科学基金（FWF） 10.55776/ESP1584024 资助。F.V. 获洪堡基金会资助。

(1) 若 $U \subset K^n$ 是开集，且 $h : U \to K$ 是一个 $\varnothing$-可定义的 C^1 函数，那么对于每个 $a = (a_1, .., a_n)$ 以及每个 ∂_τ，我们有

$$\partial_\tau(h(a)) = \sum_{i=1}^{n} (\partial_i h)(a)\partial_\tau a_i.$$

(2) 我们有 $\bigcap_\tau$ 核 $\partial_\tau = \mathrm{acl}(\varnothing)$，其中 acl 表示模型论代数闭包算子。

得到这些导子后，我们按照 Wilkie [Wil08] 对全纯函数的处理，研究局部可定义性这一模型论问题。我们注意到有几个障碍需要解决，其中一个涉及如何为 1-h-极小理论选取适当的约化，使其在保持 1-h-极小性的同时具有可数语言（一般而言，约化并不保持 1-h-极小性，见 [CHRKV23，注 5.1。2]），但主要障碍在于，不存在非阿基米德情形下 Gabrielov 定理的类似结果，因而无法证明解析集的投影仍为解析集。

此后，本文其余部分聚焦于两个特定的 p-进解析函数，我们将在推论 2.2 中证明它们属于 1-h-极小理论（甚至是在可数语言中）。我们在 $\mathbb{C}_p$中讨论，并将赋值环记为$\mathcal{O}^{\mathbb{C}_p}$，将极大理想记为$\mathcal{M}^{\mathbb{C}_p}$，将赋值记为 $v : \mathbb{C}_p \to \mathbb{Q}$。已知属于某个 o-极小扩张的最著名超越函数之一是 $\mathbb{R}$ 实指数函数，因此我们首先关注的函数是 p-进指数函数。我们将零点周围赋值半径为 $1/(p-1)$ 的开球记为 $\exp : \mathbb{D}_p \to 1 + \mathbb{D}_p$，并令其为 p-进指数映射。

利用 p-进指数函数属于 $\mathbb{C}_p$的一个 1-h-极小扩张这一事实，我们得到了一些关于 p-进版本的超越数论中 Schanuel 猜想的结果（猜想的表述见 §3.2 ）。我们首先证明，该猜想蕴含其自身的一个一致版本（关于实数幂运算和 Schanuel 猜想的类似结果由 Kirby 和 Zilber 得出 [KZ06]）。

定理 1.2. 设 $V \subseteq \mathbb{G}_a^n \times \mathbb{G}_m^n$ 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的不可约代数簇，且维数 $V < n$。那么，$\overline{\ }$ p-进 *Schanuel* 猜想蕴含存在有限个真 $\mathbb{Q}$-线性子空间 L_1、……、$L_m \subset \mathbb{G}_a^n$，使得若 $(\mathbf{z}, \text{指数函数}(\mathbf{z})) \in V(\mathbb{C}_p)$，则对于某个 $i \in \{1、……、n\}$，有$\mathbf{z} \in L_i$。

接下来，我们利用 Ax 定理关于指数函数函数超越性的结果，证明 p-进 Schanuel 猜想的两个弱形式（不过，正如我们在 §3.2 中所解释的，这两个弱形式其实也可以从 Kirby 早期的工作中推导出来 [Kir10]）。

o-极小性在算术几何问题中的许多应用（尤其是不太可能的交问题）常常涉及周期性全纯函数，例如复指数函数、阿贝尔簇的指数映射，或 Shimura 簇的自守函数。o-极小性在这一领域的一些关键应用（如 Ax–Schanuel 型定理的 o-极小证明）利用了这样一个事实：这些函数在 o-极小结构中不可定义（因为它们具有周期性），但它们在基本域上的限制是可定义的，而且可以用代数的（因而可定义的）方式在不同基本域之间转换。因此，在 p-进指数函数的情形中，这就构成了一个基本障碍，因为 exp 在其收敛域上是单射，且没有自然的扩展可以将其定义在整个 $\mathbb{C}_p$ 上。

因此，在本文余下部分，我们将关注点转向第二个感兴趣的函数：椭圆曲线的 Tate 均匀化映射，该映射将在 §2.2 中回顾。对于 $q \in \mathbb{C}_p^\times$，我们用 $\phi_q : \mathbb{C}_p^\times \to E_q$ 表示 Tate 一致化映射。

我们首先证明 Kirby 关于复指数函数所谓模糊化的一个类比定理 [Kir19]。为此，我们需要一个关于 Tate 的函数超越性结果

，该结果涉及均匀化映射，我们从 Ax 和 Kirby 的著作中得到它，见命题 4.1。值得注意的是，Kirby 运用这个关于模糊化的结果，证明了由指数函数的各种模糊化所作的扩张是准极小结构；我们将说明，对配备适当 Tate 均匀化模糊化的（域结构） $\mathbb{C}_p$ 的扩张也应如此，见 。

定理 1.3。 设 Q 是 $E_q(\mathbb{C}_p)$ 的一个 p进稠密子集，且 $V \subset \mathbb{G}_m^n \times E_q^n$是一个不可约丰满簇。那么， $V(\mathbb{C}_p)$ 包含一个由下列形式的点构成的 p进稠密集合

$$(\mathbf{x}, \phi_q(\mathbf{x}) + \mathbf{r})$$

其中 $\mathbf{x} \in \mathbb{G}_m^n(\mathbb{C}_p)^n$ 且 $\mathbf{r} \in Q^n$。

最后，我们沿着 p 证明了一个关于椭圆曲线幂的可能交的进稠密性的结果，遵循 [ES25]的工作。

定理 1.4。 设 $V \subseteq E_q^n$ 是一个不可约子簇。假设 S 是 E_q^n的一个代数子群，并且对每个代数子群 $T \subseteq E_q^n$， 商映射 $\psi : E_q^n \to E_q^n/T$满足 维数 $\psi(V)$ + 维数 $\psi(S) \geq n$ – 维数 T。那么，对每个 p 进稠密子集$A \subseteq E_q^n(\mathbb{C}_p)$,

$$\bigcup_{\mathbf{g} \in A} V \cap (\mathbf{g} + S)$$

在 V 中关于 p 稠密。

熟悉将 o-极小性应用于算术几何问题的读者，可能至少了解 o-极小性的两个重要成果：Pila–Wilkie 点计数定理 [PW06] 以及可定义 Chow 定理（又称 o-极小 GAGA）[PS08，定理 5。1]这些成果不会在本文中出现，但利用温和 p 进解析几何的早期概念，已有这两项成果的非阿基米德类比及其应用 [CFNSV24、CLL17、CCL15、Osw25]。我们认为，我们的成果已经阐明了一些关于如何处理 1-h-极小结构的一般原则；我们也预期，这些想法将与上述文献中的思想相结合，从而推动 1-h-极小性在非阿基米德背景下的不太可能交问题中的进一步应用。特别是，我们认为，我们的成果可以推广到阿贝尔簇更一般的均匀化映射。

1.1. **论文结构**。

§2：我们回顾 p-进指数函数以及椭圆曲线的 Tate 均匀化的定义。我们还给出 1-h-极小性、魏尔斯特拉斯系统的背景，并证明 p-进指数函数与 Tate 均匀化同属于 $\mathbb{C}_p$的同一个 1-h-极小扩张。§3：我们证明在 $\mathbb{C}_p$ 上存在与给定 1-h-极小扩张的可定义函数相容的域导子。我们研究局部可定义性，遵循 Wilkie [Wil08]。然后我们考察并给出一些关于 p-进 Schanuel 猜想的结果，包括定理1.2。§4：我们说明如何得到 Tate 均匀化映射的一个函数超越性结果。然后我们证明定理1.3，并用它推出准极小性。§5：我们给出 Zilber–Pink 猜想的背景，并证明定理1.4。

致谢。 作者感谢 Raf Cluckers、Martin Hils 和 Vincenzo Mantova 就本文进行的精彩讨论。我们感谢 Tom Scanlon 建议使用 Tate 一致化映射。我们感谢 Abhishek Oswal 向我们解释命题5.1 的证明。

2. 预备知识

2.1. **p-进指数函数。** 我们回顾一些关于 p-进指数映射的一般知识。考虑定义指数函数的通常幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

在 $\mathbb{C}_p$ 上，它在以 0 为中心、赋值半径为 $1/(p-1)$ 的开球 $\mathbb{D}_p$ 上收敛，我们将相应的函数记为 $\exp : \mathbb{D}_p \to \mathbb{C}_p$。$\exp$ 的像恰好是以 1 为中心、赋值半径为 $1/(p-1)$ 的开球 $1+\mathbb{D}_p$，事实上 $\exp$ 是一个双射$\mathbb{D}_p \to 1+\mathbb{D}_p$。它的逆映射是熟悉的映射 $\log : 1+\mathbb{D}_p \to \mathbb{D}_p$，同样是解析的。映射 $\exp$ 在其定义域上可微，且 $\exp' = \exp$，并满足通常的规则：$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$。

2.2. **Tate 均匀化。** 正如我们在引言中讨论的，p-进指数函数的一个问题是其定义域是有界集合 $\mathbb{D}_p$ 中的 $\mathbb{C}_p$，而且没有自然的方法将 指数函数 扩展为定义在整个 $\mathbb{C}_p$ 上的全局解析函数。因此，我们将考虑 $\mathbb{C}_p$ 上椭圆曲线的 Tate 一致化映射。以下所有事实均可见于 [Sil94，第五章]。

注意，$\mathbb{C}_p$ 没有无限离散子群，因此这里不存在格的类似物。所以，魏尔斯特拉斯 $\wp$-函数也没有自然的类似物。然而，如果 $\tau \in \mathbb{C}$满足 $\Im\tau > 0$，那么我们可以将相应的 $\wp$-函数分解为

$$\wp : \mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}) \xrightarrow{x \mapsto \exp(2\pi i x)} \mathbb{C}^\times/(q^{\mathbb{Z}}) \to E,$$

其中 $q = \exp(2\pi i\tau)$，且 E是与 τ相关联的椭圆曲线。在 $\mathbb{C}_p$中，第二个映射确实有意义，称为 Tate 一致化映射。

更具体地说，对于满足 $v(q) > 0$ 的 $q \in \mathbb{C}_p^\times$，以及 $k \in \mathbb{N}$，考虑级数

$$s_k(q) = \sum_{n \geq 1} \frac{n^k q^n}{1-q^n}.$$

该级数的系数属于 $\mathbb{Z}$，因此，由于 $v(q) > 0$，它收敛到 $\mathbb{C}_p$ 的一个元素。定义 $a_4(q) = -5s_3(q)$，以及 $a_6(q) = -(5s_3(q) + 7s_5(q))/12$，并令 E_q 为定义在 $\mathbb{C}_p$ 上的椭圆曲线，其定义方程为

$$y^2 + xy = x^3 + a_4(q)x + a_6(q).$$

考虑级数

$$X(q,u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{q^n u}{(1-q^n u)^2} - 2s_1(q),$$

$$Y(q,u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(q^n u)^2}{(1-q^n u)^3} + s_1(q),$$

二者均对 $u \in \mathbb{C}_p \smallsetminus q^{\mathbb{Z}}$ 收敛，其中 $q^{\mathbb{Z}} := \{q^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$。于是 ***Tate*** 均匀化是映射

$$\phi_q : \mathbb{C}_p^\times \to E_q(\mathbb{C}_p) : u \mapsto (X(q,u), Y(q,u)),$$

这是一个群的满射同态，其核为 $q^{\mathbb{Z}}$。

注意，E_q 的 j-不变满足

$$v(j(E_q)) = v\left(\frac{1}{q} + 744 + 196884q + \dots\right) = -v(q) < 0.$$

因此，并非 $\mathbb{Q}$ 上的每条椭圆曲线都同构于形如E_q的椭圆曲线。特别地，若 E 是 $\mathbb{Q}$ 上具有复乘的椭圆曲线，则它

众所周知， $j(E)$是一个代数整数，从而 $v(j(E)) \geq 0$。故 E_q 从不具有复乘。

函数 X， Y 关于 u 可微，并满足

$$uX'(q,u) = X(q,u) + 2Y(q,u).$$

特别地，对于固定的 q，映射 $u \mapsto X(q, u)$ 满足以下微分方程

$$(uX')^2 = 4X^3 + X^2 + 4a_4(q)X + 4a_6(q). \tag{2.1}$$

稍后我们将利用这个微分方程得到关于 Tate 映射的 Ax–Schanuel 结果，参见命题4.1。

我们将证明，将 ϕ_q 限制到基本域 $\{u \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \mid v(u) < v(q)\}$ 后，它在 $\mathbb{C}_p$上的某个适当的 1-h-极小结构中是可定义的。注意，由于 ϕ_q的周期性，在这个集合上的限制决定了整个函数。与 o-极小情形一样，我们不能期望 ϕ_q 在其整个定义域 $\mathbb{C}_p$上可定义，恰恰是因为这种周期性。事实上，我们将证明更一般的结论： ϕ_q 作为二元函数 $\mathbb{C}_p$ 在 (q, u)中可定义于某个 1-h-极小结构，类似于 Peterzil–Starcheko [PS04]关于 Weierstrass $\wp$-函数的结果。

2.3. 亨泽尔极小性。 本节回顾 h-极小性的相关结果。我们先介绍一些准备工作和记号。

设 K 是赋值域，其赋值环为 O_K，赋值为 $v : K \to \Gamma \cup \{\infty\}$，采用加法记号。对于 $a \in K$ 和 $\lambda \in \Gamma$，用 $B_{>\lambda}(a) = \{x \in K \mid v(x-a) > \lambda\}$ 表示以 a 为中心、半径为 λ 的开球，用 $B_{\geq\lambda}(a) = \{x \in K \mid v(x-a) \geq \lambda\}$ 表示以 a 为中心、半径为 λ 的闭球。若 B 是一个开球，则用 $\operatorname{rad} B$ 表示 B 的半径。若 C 是 K 的有限子集，则与 C 相邻的球是指与 C 不相交的极大开球，其中极大是指关于包含关系而言的。若 λ 是 Γ 中满足 $\lambda \geq 0$ 的元素，则与 C λ-相邻的球是一个开球 B，它包含于一个与 C B_0 1-相邻的开球中，且满足 $\operatorname{rad} B = \operatorname{rad} B_0 + \lambda$。注意，与 C λ-相邻的球将集合 $K \setminus C$ 划分为若干部分； $K \setminus C$ 中的两个元素 x、 y 属于同一个与 C λ-相邻的球，当且仅当对于每个 $c \in C$，都有 $v(x-y) > \lambda + v(x-c)$。若对于某个整数 m，有 $\lambda = v(m)$，则我们简单地说 m-相邻，而不说 $v(m)$-相邻。

亨泽尔极小性，简称 h-极小性，是一种赋值域的驯性概念，由 [CHRK22] 在等特征零情形下，以及 [CHRKV23] 在混合特征情形下发展而来。它在阿基米德语境中发挥着与 o-极小性类似的作用。我们将在语言 1-h-极小理论 $\mathcal{T}$ 中进行研究，其中语言 $\mathcal{L}$ 扩展了赋值域语言 $\mathcal{L}_{\mathrm{val}} = \{0, 1, +, \cdot, \mathcal{O}\}$。确切定义对我们并不重要，但下面列出我们将用到的主要性质。设 K 是 $\mathcal{T}$的一个模型。

(1) **(雅可比性质与微分** [CHRKV23，推论 3.1。3]) 若 $f : K \to K$是一个可定义函数，则存在一个有限集 $C \subset K$ 和一个正整数 m 使得在每个与 B m相邻的球上， C， f 是 C^1， $v(f')$ 在 B上为常数，并且对所有 x， $y \in B$ 我们有：

$$v(f(x) - f(y)) = v(f'(x)) + v(x-y).$$

此外，集合 C 在与 f相同的参数上是可定义的。这是o-极小性中单调性定理的类比。

(2) **(代数斯科伦函数** [CHRK22, 命题 4.3.3]) 存在对语言 $\mathrm{L}' \supset \mathrm{L}$ 的一种扩张，使得 $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}'}(K)$ 仍为 1-h-极小，并且代数斯科伦函数存在。也就是说，对于 $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}'}(K)$ 的任意模型 K' 以及任意子集 $A \subset K'$，都有 $\mathrm{acl}_{K',\mathcal{L}'}(A) = \mathrm{dcl}_{K',\mathcal{L}'}(A)$（其中 acl 和 dcl 分别表示模型论的代数闭包算子和可定义闭包算子）。等价地，每个可定义的有限纤维映射都有一个可定义截面。此外，

代数闭包不会增长，即 $\mathrm{acl}_{K',\mathcal{L}}(A) = \mathrm{acl}_{K',\mathcal{L}'}(A)$。代数斯科伦函数的存在是可定义选择的一种弱形式，应与 o-极小结构中的可定义选择相比较。

(3) **（预几何** [CHRK22，引理 5.3。5]） 模型论的代数闭包算子 acl 是 K上的预几何。特别地，结合前一点，我们可以扩充语言，从而使得 dcl 是预几何，同时保持 1-h- 极小性。

(4) **（维数理论** [CHRKV23，命题 3.1。1]） 对每一个非空可定义集$X \subset K^n$，均可关联一个正整数，称为 X的维数，记作$\dim X$，并具有以下性质：

(a) $\dim(X \cup Y) = \max\{\dim X, \dim Y\}$，其中 X、$Y \subset K^n$均可定义；(b) $\dim X > 0$ 当且仅当 X 是无限的；(c) 若 $f : X \to Y$ 可定义且为满射，且纤维的维数为 d，则 $\dim X = d + \dim Y$；(d) 若 $X \subset K^n$ 的维数为 n，则 X 具有非空内部；(e) 若 $f : X \to Y$ 可定义，则对每一个整数 i，所有满足 $\dim f^{-1}(y) = i$ 的 $y \in Y$ 所成的集合是 Y的可定义子集。

对于 $x \in X$，我们用 $\dim_x(X)$ 表示的局部维数在 x处的取值；根据定义，它是 $\dim(X \cap B)$ 的最小值，其中 B 遍历包含 x的 K^n中的所有开球。此外，我们还有以下结论：

(f) 若 K 代数闭，且 $V \subset \mathbb{A}_K^N$ 是维数为 n 的仿射代数簇，则 $V(K)$ 在每一点的局部维数均为 n。

由于我们关注 p-进指数函数和 Tate 均匀化，我们希望结构 $\mathbb{C}_p$ 在带有指数函数或 ϕ_q符号的赋值域语言中是 1-h-极小的。乍看之下，这似乎可由 [CHRK22，定理 6.2 得出。1] 该定理断言，带有分离解析结构的域是1-h-极小的，而且确实存在包含指数函数和 Tate 均匀化的分离魏尔斯特拉斯系统。不过，这里有一个微妙的问题：h-极小结构的约化不一定是 h-极小的，因此不能从带有分离解析结构的 $\mathbb{C}_p$ 的 h-极小性推断，仅带有指数函数或 ϕ_q 的 $\mathbb{C}_p$ 是 h-极小的。

虽然我们可以直接在一种含有分离魏尔斯特拉斯系统元素符号的语言中工作，但我们还需要语言是可数的。我们的解决方案是一种通用工具，用于为 h-极小域构造可数语言。证明需要假设读者对 h-极小结构有所了解。

引理 2.1。 设 $\mathcal{L}$ 是一种扩张赋值域语言 $\mathcal{L}_{\mathrm{val}} = \{+, \cdot, \mathcal{O}\}$的语言，并设 K 是一个$\mathcal{L}$-结构，满足$\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(K)$是 *1-h-*极小的。若 $\mathcal{L}_0$ 是 $\mathcal{L}$的可数子语言，则存在一种扩张 $\mathcal{L}_0$ 的可数语言 $\mathcal{L}'$，使得 K具有$\mathcal{L}'$-结构，且$\mathrm{Th}_{\mathcal{L}'}(K)$是 *1-h-*极小的，并且每个$\mathcal{L}'$-可定义集也是$\mathcal{L}$-可定义的。

证明。 设 Γ_K是 K的值群。对 $\lambda \in \Gamma_K^\times, \lambda \geq 0$，令 RV_λ为首项结构 $K^\times/(1 + B_{>\lambda}(0)) \cup \{0\}$，并令 $\mathrm{rv}_\lambda : K \to \mathrm{RV}_\lambda$为自然映射（扩展后满足 $\mathrm{rv}_\lambda(0) = 0$）。

我们将归纳地构造可数语言 $\mathrm{L}_0 \subset \mathrm{L}_1 \subset \mathrm{L}_2, \ldots$，使得 $\mathrm{L}' = \cup_i \mathrm{L}_i$成立，并且进一步使得任何 L_i-可定义集也是 L-可定义的。为此，我们将利用 1-h-极小性的定义中的预备数据来作证。

假设 L_i 已经构造完成。对于每个 L_i-公式 $\phi(x, \alpha, \beta; y)$，其中 x 属于 K，α 属于 RV^k（对某个 $k \in \mathbb{N}$），β 属于 $\cup_{\lambda \geq 0}\mathrm{RV}_\lambda$，$y$ 属于 K^n（对某个 $n \in \mathbb{N}$），我们将添加一个谓词，以见证 ϕ 的一致预备。注意，这里

这样的公式至多可数。由语言 L 中的 1-h-极小性可知，一致预备 [CHRKV23, 命题 2.3.2] 蕴含存在一个 L-公式 $\psi(x;\ y)$，使得对每个 $y \in K^n$，$\psi(K;\ y)$ 都是一个一致预备 $\phi(x, \alpha, \beta;\ y)$ 的有限集。现在，我们将公式 ψ 对应的谓词加入语言 L_i。如此继续，便得到一个可数语言 $\mathrm{L}' = \cup_i \mathrm{L}_i$，我们声称这就足够了。

我们验证 K 作为 L′-结构是 1-h-极小的。令 K' 在语言 L′ 中与 K 初等等价，取 $\lambda \geq 0$ 属于 $\Gamma_{K'}$，取 $A \subset K'$，取 $B \subset \mathrm{RV}_{K'}$，取 $\xi \in \mathrm{RV}_{K',\lambda}$，并令 X 是 $\mathrm{L}'(A \cup B \cup \{\xi\})$-可定义的。我们不妨假设 A 和 B 是有限的。于是存在某个整数 i，使得 X 已经是 $\mathrm{L}_i(A \cup B \cup \{\xi\})$-可定义的，因此存在一个 L_i-公式 $\phi(x, \alpha, \beta; y)$，使得 $\phi(K', B, \xi;\ A)$ 等于 X。根据 [CHRK22，引理 2.4.2], ，预备性是一阶的；我们的构造表明，存在某个 $\mathrm{L}_{i+1}(A)$-可定义集，它 λ-预备 X，证毕。□

2.4. **魏尔斯特拉斯系统**。我们回顾魏尔斯特拉斯系统的一些一般性质，更多详情请参见 [LR00、LR05、CL11] 。

若 $R \subset \mathrm{O}^{\mathbb{C}_p}$ 是一个子环，我们记

$$R\langle\xi\rangle = \left\{ \sum_i a_i \xi^i \mid a_i \xrightarrow[|i|\to\infty]{} 0 \right\}$$

表示严格收敛幂级数的环，其中 $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$。$\xi$ 中的每个元素都是 $\mathrm{O}^m_{\mathbb{C}_p}$ 上的收敛幂级数，因而自然地定义了一个函数 $\mathrm{O}^m_{\mathbb{C}_p} \to \mathbb{C}_p$。$\mathrm{O}^{\mathbb{C}_p}\xi$ 中的元素 f 称为在 ξ_m 中正则的，次数为 d，如果

$$f = \xi_m^d + a_1 \xi_m^{d-1} + \ldots + a_d + g,$$

其中 $a_1, \ldots, a_d \in \mathrm{O}^{\mathbb{C}_p}$，且 $\mathrm{O}^{\mathbb{C}_p}\xi$ 的所有系数都属于 $\mathrm{M}^{\mathbb{C}_p}$.

一个魏尔斯特拉斯系统 由一个环系 $\mathrm{A} = \{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 构成，满足

(1) 对每个 m，$A_m \subset \mathrm{O}^{\mathbb{C}_p}\xi_1, \ldots, \xi_m$；(2) 对每个 $m \geq 1$，$A_{m-1}[\xi_m] \subset A_m$；(3) 对于 $1 \leq k \leq m$ 和 $f \in A_m$，若记 $f = \sum_i f_i(\xi_1, \ldots, \xi_k)(\xi_{k+1}, \ldots, \xi_m)^i$，则这些 f_i 都属于 A_k；(4) 若 $f \in A_m$ 在 ξ_m 中正则且次数为 d，则对每个 $g \in A_m$，都存在唯一的 $q \in A_m$ 和次数至多为 $d-1$ 的 $r \in A_{m-1}[\xi_m]$，使得 $g = qf + r$。

这一最后性质正是魏尔斯特拉斯除法。根据 [LR05, (3.2)] 完整系统$A_m = \mathcal{O}^{\mathbb{C}_p}\langle\xi_1, \ldots, \xi_m\rangle$ 是一个魏尔斯特拉斯系统。此外，任意多个魏尔斯特拉斯系统的交仍是一个魏尔斯特拉斯系统。因此，若 $A \subset \bigsqcup_m \mathcal{O}^{\mathbb{C}_p}\langle\xi_1, \ldots, \xi_m\rangle$ 是任意子集，则存在包含它的最小魏尔斯特拉斯系统 $\mathcal{A}$，我们称之为由 A生成的魏尔斯特拉斯系统。更明确地说，$\mathcal{A}$ 由A中的元素经反复对上述运算取闭包得到。

若 $\mathrm{A} = \{A_m\}_{m\in\mathbb{N}}$是一个魏尔斯特拉斯系统，则定义 $\mathrm{L}_{\mathcal{A}} = \{+, -, \cdot, /, 0, 1, \mathrm{O}\} \cup \bigcup_m A_m$。将 A_m 中的元素解释为 $\mathrm{O}^m_{\mathbb{C}_p}$上的函数符号后，$\mathbb{C}_p$ 自然具有 $\mathrm{L}_{\mathcal{A}}$-结构。此外，根据 [CL11, Thm. 4.5.15] $\mathbb{C}_p$ 在 $\mathrm{L}_{\mathcal{A}}$ 中具有量词消去性质。

严格收敛幂级数在闭球上收敛$\mathcal{O}^m_{\mathbb{C}_p}$，而指数函数 和 ϕ_q则定义在开球上。因此，为了证明指数函数 和 ϕ_q 在1- h-极小结构 $\mathbb{C}_p$中是可定义的，我们还需要一些分离魏尔斯特拉斯系统的基础知识。记 $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n)$。按照 [LR00], ，我们定义

$$S_{m,n} = \mathbb{C}_p \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}} \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B\langle\xi\rangle[\![\rho]\!],$$

其中，B 是所有形如以下形式的环的集合

$$\mathbb{Z}_p[a_i \mid i \in \mathbb{N}]^{\wedge}_{\{a\in\mathbb{Z}_p[a_i] \mid v(a)=0\}},$$

其中，$(a_i)_i$ 是 $\mathrm{O}_{\mathbb{C}_p}$ 中一个收敛到 0 的序列，而 $\wedge$ 表示 p-进完备化。注意，$\mathrm{O}_{\mathbb{C}_p}\xi$ 包含于 $S_{m,\,0}$。f 中的每个元素$S_{m,\,n}$ 都是一个幂级数，并自然地确定一个函数

$$f : \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^m \times \mathcal{M}_{\mathbb{C}_p}^n \to \mathbb{C}_p : (\xi, \rho) \mapsto f(\xi, \rho).$$

因此，$\mathbb{C}_p$ 自然具有 L_S结构，其中 $\mathrm{L}_S = \{+, -, \cdot, /, 0, 1, \mathrm{O}\}\cup\bigcup_{m,n} S_{m,n}$。根据 [LR05，定理 4.2], ，$\mathbb{C}_p$ 的 L_S理论具有量词消去性质，而 [CHRK22，推论 6.2.7] 则推出该结构是 1-h-极小的。

利用引理 2.1 和上述语言 $\mathcal{L}_S$，我们将找到一种可数语言，使得 $\mathbb{C}_p$上的指数函数和 Tate 一致化映射均可定义。

推论 2.2。存在一种可数语言 $\mathcal{L} \supset \mathcal{L}_{\mathrm{val}}$，以及 $\mathbb{C}_p$ 上的一个 $\mathcal{L}$结构，使得

(1) $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}}(\mathbb{C}_p)$是 *1-h*-极小的；*(2)* 指数函数 $:\mathbb{D}_p \to 1+\mathbb{D}_p$ 是 $\mathcal{L}$-可定义的；以及 *(3)* 映射

$$\Phi : \{(q,u) \in \mathbb{C}_p^\times \times \mathbb{C}_p \mid v(q) > v(u) \geq 0\} \to \mathbb{C}_p^2 : (q,u) \mapsto (X(q,u), Y(q,u))$$

is $\mathcal{L}$*-definable.*

证明。任取 $\alpha \in \mathbb{Z} \cap \overline{\mathbb{C}}_p$，使得 $v(\alpha) = 1/(p-1)$，其中 $\mathbb{Z} \subset \overline{\mathbb{Q}}$ 是代数整数的集合。设 L 是包含 α的 $\mathbb{Q}_p$ 的有限扩张，其整数环为 O_L。那么幂级数的所有系数

$$f := \sum_n \frac{\alpha^n}{n!} x^n$$

都属于环 $\mathrm{O}_L \subset \mathrm{O}_{\mathbb{C}_p}$。由于这个环在 $\mathbb{Z}_p$上有限生成，因此该幂级数属于 $S_{0,\,1}$。现在只需注意，对于 $x \in \mathbb{D}$，我们有 $\exp(x) = f(x/\alpha)$，因此 exp 是 L_S-可定义的。

我们证明 Tate 均匀化也是 $\mathcal{L}_S$-可定义的。根据 [Sil94，第 426], 页，如果 $-v(q) < v(u) < v(q)$，那么

$$X(q,u) = \frac{u}{(1-u)^2} + \sum_{d\geq 1}\left(\sum_{m|d} m(u^m + u^{-m} - 2)\right) q^d.$$

定义幂级数

$$F(q,u) = \sum_{d\geq 1}\left(\sum_{m|d} m u^m\right) q^d.$$

要证明 X 在指定定义域上是 L_S-可定义的，只需证明 $(q,u) \mapsto F(q,u)$ 在同一定义域上是 L_S-可定义的。现在注意到 $F(q,u/q)$ 是关于 q,u 、系数属于 $\mathbb{Z}$的幂级数，因此它属于 $S_{0,\,2}$。但于是，映射 $(q,u) \mapsto F(q,u)$ 在定义域 $\{(q,u) \mid v(q) > 0, v(u) > -v(q)\}$ 上是 L_S-可定义的。对 $F(q,u^{-1})$ 运用类似论证，可得 $(q,u) \mapsto F(q,u)$ 在 $\{(q,u) \mid v(q) > 0, v(q) > v(u) > -v(q)\}$ 上是 L_S-可定义的。通过类似论证可得 $Y(q,u)$ 的 L_U-可定义性，注意对于 $v(q) > v(u) > -v(q)$，我们有

$$Y(q,u) = \frac{u^2}{(1-u)^3} + \sum_{d\geq 1}\left(\sum_{m|d} \frac{(m-1)m}{2} u^m - \frac{m(m+1)}{2} u^{-m} + m\right) q^d.$$

我们得出结论：Φ 是 L_S-可定义的。

为了完成证明，应用引理 2.1 到语言 $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_{\mathrm{val}} \cup \{\text{指数函数 } \Phi\}$。 □

如果只想关注某个 $q \in \mathbb{C}_p$对应的单个 Tate 均匀化 ϕ_q，那么只需在上述引理的语言 L 中添加一个表示 q 的符号即可。事实上，添加常量符号会保留 1-h-极小性，而在扩张结构中， ϕ_q 在其基本域上显然是可定义的。

3. 导子的存在性

本节的目标是说明 1-h-极小域存在许多非平凡导子，并证明定理 1.1。为此，我们改编了 [BKW10]中使用的一种方法，该方法旨在构造 $\mathbb{C}$ 上的导子，使其满足通常的复指数函数；此方法基于 (ℝ,指数函数)的 o-极小性。h-极小域上导子的存在性在其他情境中也可能有用。

定义。 设 F 是一个域。 F 上的一个导子是一个函数 $\partial : F \to F$，满足以下性质：

(1) 对所有 a， $b \in F$，都有 $\partial(a+b) = \partial(a) + \partial(b)$。
(2) 对所有 a， $b \in F$，都有 $\partial(ab) = a\partial(b) + b\partial(a)$。

一个微分域是一个有序对 (F, Δ)，其中 Δ 是定义在 F上的一组导子。集合 $\bigcap_{\partial\in\Delta} \ker\partial$ 称为常数域。

定义。 设 (F, Δ) 是一个特征零微分域。假设 F 是一个拓扑域， $U \subset F^n$ 是一个开子集，且 $f : U \to F$ 是一个可微函数。若对每个 $x \in U$，我们都有下式，则称 $\partial \in \Delta$ 与 f 相容：

$$\partial(f(x)) = \sum_{i=1}^{n} (\partial_i f)(x)\partial x_i,$$

其中 $\partial_i f$ 表示 f 关于第 i 个变量的偏导数 .

当然，零导子（平凡导子）与任意函数都相容。用这一术语，定理1.1可改述如下。

定理 3.1 （非平凡导子的存在性）。 设$\mathcal{T}$是一个1-*h*-极小理论，且 K 是$\mathcal{T}$的一个模型。那么在 K 上存在一族可交换导子 $\Delta = (\partial_\tau)_{\tau\in\mathcal{B}}$，具有以下性质：

(1) 若 $U \subset K^n$ 是开集，且 $h : U \to K$ 是一个 $\varnothing$-可定义函数，则每个 ∂_τ都尊重 h，并且 *(2)* $\bigcap_\tau$ 核$\partial_\tau = \mathrm{acl}(\varnothing)$。

证明中，我们将使用第 2.3节回顾的 h-极小理论的基本性质。

证明。首先，我们可以通过 RV-扩张将语言扩张为 $\mathrm{L}' \supset \mathrm{L}$，使得在 $\mathrm{Th}_{\mathcal{L}'}(K)$ 中 acl =dcl，并且 K 是 1-h-极小的。由于 acl 是一个预几何，且 acl = dcl，因此 dcl 在 K 上也是一个预几何。设 B 是预几何 dcl 的一组基。对于 $\tau \in \mathrm{B}$，记 $\mathrm{B}_\tau = \mathrm{B} \setminus \{\tau\}$。对于每个 $\tau \in \mathrm{B}$，我们将按以下方式在 K 上定义一个导子 ∂_τ：对于 $a \in K$，取一个 $\mathrm{L}'(B_\tau)$-可定义函数 $f : X \subset K \to K$，使得$\tau \in X$且 $f(\tau) = a$，并令 $\partial_\tau(a) = f'(\tau)$。我们断言

(1) 这样的 f 总是存在；(2) 它在 τ 处可微；(3) ∂_τ 不依赖于 f 的选择；(4) 所得映射 ∂_τ 是具有上述性质的导子。

首先，我们证明这样的 f 存在。由于 B 是 dcl-预几何的一个基，因此存在一个 L′-公式 $\phi(x,y,z)$ 和一个元组 $v \in \mathrm{B}_\tau^n$，使得 $\phi(x,\tau,v)$ 在 K 中有唯一解，即 a。令 Y 为所有满足以下条件的 $y \in K$ 所成的集合：存在唯一的 x 满足 $\phi(x,y,v)$。那么，Y 是一个 L′(B$_\tau$)-可定义集，且包含 τ。在 Y 上，ϕ 确定了一个 L′(B$_\tau$)-可定义函数 f：将 $y \in Y$ 映射到 $\phi(x,y,v)$ 的唯一解。注意，$f(\tau) = a$。这证明了这样的函数 f 存在。

我们来验证，任意这样的 f 在 τ 处可微。利用 1-h-极小性，设 $C \subset K$ 是一个有限的 L′(B$_\tau$)- 可定义集，且 m 是一个整数，使得 f 在紧邻 C 的球 $|m|$ 上为 C^1。那么 τ 不可能属于 C，否则 τ 就会属于一个有限的 L′(B$_\tau$)-可定义集；这是不可能的，因为 B 是一个 dcl-基，且在 K 中 $\mathrm{acl}_{\mathcal{L}'} = \mathrm{dcl}_{\mathcal{L}'}$。因此 f 在 τ 处可微，故定义 $\partial_\tau(a) = f'(\tau)$ 是有意义的。

接下来，我们证明 $f'(a)$ 与 f 的选取无关。设 $g : Y\prime \to K$ 是另一个 L′(B$_\tau$)-可定义函数，满足 $\tau \in Y\prime$ 且 $g(\tau) = a$。那么如上所述，g 在 τ 处可微。设 C' 是一个有限的 L′(B$_\tau$)-可定义集，且 m 是一个正整数，使得 C $|m|$ 为可定义集

$$Z = \{y \in Y \cap Y' \mid f(y) = g(y)\}.$$

注意到 $\tau \in Z$。理由与之前相同，τ 不能属于 C'，因此存在一个包含 τ 且完全包含于 Z中的开球。但这样一来，f 和 g 在 τ的一个邻域上相同，所以 $f'(\tau) = g'(\tau)$。

我们证明 ∂_τ 可交换。因此取 B 中的 $\tau \neq \sigma$ 和 $a \in K$。写作 $\mathrm{B}_{\tau,\sigma} = \mathrm{B} \setminus \{\tau,\sigma\}$。于是存在一个 L′(B$_{\tau,\sigma}$)-可定义函数 $f : X \subset K^2 \to K$，满足 $f(\tau,\sigma) = a$。我们声称 (τ,σ) 包含于 X 的内部。假设并非如此~~。那么 (τ,σ)~~ 包含于 $(K^2 \setminus X)$ 中，却不包含于 $K^2 \setminus X$。但根据 [CHRKV23, 命题 3.1.1(3.f)]，(τ,σ) 包含于一个一维的 L′(B$_{\sigma,\tau}$)-可定义集，这与 B 是 dcl-预几何的一组基这一事实矛盾。

设 $Y \subset X$ 为那些使得 f 不是 C^2的 $x \in X$ 所成的集合，它是一个L′(B$_{\tau,\sigma}$)-可定义集。于是 [CHRKV23，命题3.11] 表明 Y 的维数至多为1，并且与上文类似的论证表明 $(\tau,\sigma) \notin Y$。因此 f在(τ,σ)处为 C^2，并且直接计算表明

$$\partial_\tau(\partial_\sigma(a)) = (\partial_1\partial_2 f)(\tau,\sigma) = (\partial_2\partial_1 f)(\tau,\sigma) = \partial_\sigma(\partial_\tau(a)).$$

我们现在验证性质（1）与（2），即该定理中的性质。于是设 $h : U \to K$ 为一个 $\varnothing$-可定义的C^1 函数，定义在开集 $U \subset K^n$ 上，并设 $a = (a_1, \ldots\ldots, a_n) \in U$。设 $f_i : X_i \subset K \to K$为$\mathcal{B}_\tau$-可定义的，且满足 $\tau \in X$与 $f(\tau) = a_i$，对 $i = 1, \ldots\ldots, n$。则该函数

$$g : K \to K : t \mapsto \begin{cases} h(f_1(t), \ldots, f_n(t)) & \text{if } t \in \bigcap_i X_i, \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

是 L′(B$_\tau$)-可定义的，并满足 $g(\tau) = h(a)$。因此，根据我们的构造

$$\partial_\tau(h(a)) = g'(\tau) = \sum_{i=1}^{n} (\partial_i h)(a)\partial_\tau(a).$$

对于最后一个性质，先取 a 属于 $\mathrm{acl}_{\mathcal{L}}(\varnothing) = \mathrm{dcl}_{\mathcal{L}'}(\varnothing)$。那么我们只需取$f = a$一个常值函数，因此 $\partial_\tau(a) = 0$。反过来，设 a属于 $\ker \partial_\tau$，我们证明 a属于 $\mathrm{dcl}_{\mathcal{L}'}(\mathrm{B}_\tau) = \mathrm{acl}_{\mathcal{L}}(\mathrm{B}_\tau)$。存在一个 L′(B$_\tau$)-可定义函数 $f : X \subset K \to K$，它在 τ处有定义，满足 $f(\tau) = a$，且 $f'(\tau) = \partial_\tau(a) = 0$。所有满足 $f'(x) = 0$的 $x \in X$构成一个 L′(B$_\tau$)-可定义集，因此它在 f下的像也是可定义的。根据维数理论，这个像是一个有限集。但 a 包含在这个像中，而这个像是一个有限的 L′(B$_\tau$)-可定义集，因此 $a \in \mathrm{acl}_{\mathcal{L}'}(\mathrm{B}_\tau) = \mathrm{acl}_{\mathcal{L}}(\mathrm{B}_\tau)$。□

推论 3.2。 设 $t_1, \ldots, t_n$ 属于 $\mathbb{C}_p$，且 q 属于 $\mathbb{C}_p$，其中 $v(q) > 0$。那么存在一个非平凡导子 ∂，定义在 $\mathbb{C}_p$ 上，与 指数函数 和 ϕ_q 相容，并且对所有 i都有 $\partial t_i = 0$ 。

证明。 将前一定理应用于 $\mathbb{C}_p$并赋予 $\mathcal{L}(q, t_1, \ldots, t_n)$-结构，其中$\mathcal{L}$ 是推论 2.2中的可数语言。 □

在 [Kir10] Kirby 定义并研究了 指数多项式的霍万斯基系统，其底域可以是任意指数域（即使指数函数未在整个域上定义）。 [Kir10]的主要结果之一是，以这些霍万斯基系统定义的指数闭包概念，与由保持指数函数的域上导子所确定的闭包概念一致。因此，我们立即得到以下结论。

推论 3.3 (参见 [Kir10，定理 1。1])。 导子的预几何与霍万斯基系统的预几何一致。

在 $\mathbb{Q}_p$ 和 $\mathbb{C}_p$上，一个解析方程组至多有可数个零点，因此可以利用 [Kir10，注 3.4 和命题 7。2] （以及 [AEK21、AEK23] 中提供的一些修正）来通过纯粹的微分代数方法，在不使用 1-h-极小性的情况下，恢复保持指数函数 的非平凡导子的存在性。然而，这些方法依赖于 Ax 关于指数函数的著名函数超越性结果（我们将在 §3.2 中回顾）。对于 1-h-极小结构中可定义的任意函数，目前尚无此类函数超越性结论。

3.1. **局部可定义性**。 假设我们用一组解析函数扩张 $\mathbb{C}_p$ ，记为$\mathcal{F}$ ，使得相应的结构定义一个 1-h-极小理论。一个自然的问题是：在 $(\mathbb{C}_p, \mathcal{F})$中还有哪些解析函数是可定义的? 仿照 Wilkie 在 [Wil08],中的做法，我们将在定理 *3.8*中回答一般点处的这个问题。我们指出，关于复 o-极小结构中非一般点处可定义性的进一步研究见 [JKLGS19]。

称定义在开集 U 上的函数 $F : U \subset \mathbb{C}_p^n \to \mathbb{C}_p$ 为解析的 ，如果对每个 $a \in U$，都存在一个以 a 为中心的闭盒，使得 F 在该闭盒上可由严格收敛幂级数表示。

给定解析函数 F，我们用 $\mathrm{dom}(F) \subseteq \mathbb{C}_p^n$ 表示 F 的定义域，它总是 $\mathbb{C}_p^n$ 的一个开子集。

定义。 给定解析函数 F， F 的真限制 是指将F限制在集合 $\Delta \subseteq \mathrm{dom}(F)$ 上，其中该集合形如 $\Delta = D_1 \times \cdots \times D_n$，且每个 D_i 都是 $\mathbb{C}_p$ 中的闭球，其球心位于 $\mathbb{Q}$，从而 $F \restriction_\Delta$ 可以表示为严格收敛幂级数。在这种情况下，我们称 Δ 对 F 是合适的 。

给定一族解析函数 F，我们用 F^{PR} 表示 F 中所有元素的真限制所构成的集合，并用 $(\mathbb{C}_p, \mathrm{F}^{\mathrm{PR}})$ 表示 $\mathbb{C}_p$的相应扩张。若 G是 $F \in \mathrm{F}$ 在定义域 $\Delta = D_1 \times \ldots \times D_m$上的一个真限制, 则根据定义, 存在 a， $b \in \mathbb{Q}^m$ 和 $c \in \mathbb{Q}$ ，使得映射

$$(\xi_1, \ldots, \xi_m) \mapsto cF(a_1 x_1 + b_1, \ldots, a_m x_m + b_m)$$

是 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}\langle\xi\rangle$的一个元素。对每个 $m \in \mathbb{N}$，令 $A_m \subset \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}\langle\xi\rangle$ 为所有以这种方式得到的严格收敛幂级数。于是存在一个包含所有 A_m的最小魏尔斯特拉斯系统，我们记作 $\mathcal{A}_\mathcal{F}$。根据第 2.4 节的讨论，$(\mathbb{C}_p, \mathcal{L}_{\mathcal{A}_\mathcal{F}})$ 具有量词消去性质，并且按定义是 $(\mathbb{C}_p, \mathcal{F}^{\mathrm{PR}})$的一个扩张。

定义。 给定解析函数的一个集合 F 以及另一个解析函数 F，我们称 F 是局部可定义于 F，如果 F 的每一个真限制在 $(\mathbb{C}_p, \mathrm{F}^{PR})$ 中都是可定义的。

等价地， F 是局部可定义于 F，当且仅当对每一个$\mathbf{w} \in \mathrm{dom}(F)$，都存在适合于 F的 Δ，使得$\mathbf{w} \in \Delta$且 $F \restriction_\Delta$在 $(\mathbb{C}_p, \mathrm{F}^{PR})$ 中是可定义的

定义。 给定开集 $U \subseteq \mathbb{C}_p^{n+1}$和 $V \subseteq \mathbb{C}_p^n$ 以及解析函数 $F : U \to \mathbb{C}_p$和 $f : V \to \mathbb{C}_p$，如果对于所有$\mathbf{w} \in V$，都有 $(\mathbf{w}\ f(\mathbf{w})) \in U$，且 $F(\mathbf{w}\ f(\mathbf{w})) = 0 \neq \frac{\partial F}{\partial z_{n+1}}(\mathbf{w}\ f(\mathbf{w}))$，则称 f 可由 F 隐式定义 。

给定一个解析函数族 $\mathcal{F}$，其定义在 $\mathbb{C}_p$ 上且对微分封闭，~我们用 $\mathcal{F}$ 表示包含 $\mathcal{F}$ 且对复合与隐式可定义性封闭的最小函数族。注意，由于魏尔斯特拉斯系统自动对复合与隐式定义封闭（见 [CL11，注 4.5。2]），$\mathcal{A}_{\sim\mathcal{F}} = \mathcal{A}_{\mathcal{F}}$。

定义。 给定一个解析函数族 F，我们用 $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}_p}(\mathrm{F})$ 表示所有域导子的集合 $\delta : \mathbb{C}_p \to \mathbb{C}_p$，这些导子在每个相应定义域的每一点都保持 F 中的每个函数。

引理 3.4 （参见 [Wil08，引理 3.3]）。 对于任意一组定义在$\mathbb{C}_p$上的、且对微分封闭的解析函数$\mathrm{Der}_{\mathbb{C}_p}(\mathcal{F}) = \mathrm{Der}_{\mathbb{C}_p}(\tilde{\mathcal{F}}) = \mathrm{Der}_{\mathbb{C}_p}(\mathcal{A}_{\mathcal{F}})$。

证明。 由于 $\mathrm{A}_{\mathcal{F}} = \mathrm{A}_{\sim\mathcal{F}}$，只需证明 $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}_p}(\mathrm{F}) = \mathrm{Der}_{\mathbb{C}_p}(\mathrm{A}_{\mathcal{F}})$。其中一个包含关系显然成立，因此设 $\delta \in \mathrm{Der}_{\mathbb{C}_p}(\mathrm{F})$。$\mathrm{A}_{\mathcal{F}}$ 的构造是由 F^{PR}中的元素通过归纳法得到的，所以我们根据 Weierstrass 系统中的运算，对该命题进行归纳证明。归纳的基础情形是，δ 尊重上文构造的 $\mathrm{O}_{\mathbb{C}_p}\xi_1, \ldots\ldots, \xi_m$ 中的所有元素，因为 $\mathbb{Q}$ 包含于 $\ker \delta$ 中。对于归纳步骤，只需证明以下事实。

（1）如果 δ尊重 $f, g \in \mathrm{O}_{\mathbb{C}_p}\xi$，那么它也尊重 $f + g$ 和 fg。根据导子的定义，这一点显然成立。（2）如果 δ尊重 $f_0, \ldots\ldots, f_d \in \mathrm{O}_{\mathbb{C}_p}\xi_1, \ldots\ldots, \xi_{m-1}$，那么 δ也尊重 $\sum_i f_i \xi_m^i \in \mathrm{O}\xi_1, \ldots\ldots, \xi_m$。由前一个事实可知，这一点显然成立，因为 δ 尊重恒等函数。（3）如果 δ尊重 $f \in \mathrm{O}_{\mathbb{C}_p}\xi_1, \ldots\ldots, \xi_m$，并且我们写作 $f = \sum_i f_i(\xi_1, \ldots\ldots, \xi_k)(\xi_{k+1}, \ldots\ldots, \xi_m)^i$，那么 δ 也尊重每个 f_i。这是通过对 f 求偏导数并代入 $\xi_{k+1} = \ldots = \xi_m = 0$得到的。注意，这一步使用了 F 对微分封闭这一事实。

(4) 最后，设 $f \in \mathrm{O}_{\mathbb{C}_p}\xi_1, \ldots\ldots, \xi_m$ 在 ξ_m 中是次数为 d 的正则元素，并取 $g \in \mathrm{O}_{\mathbb{C}_p}\xi_1, \ldots\ldots, \xi_m$。那么存在唯一的 $q \in \mathrm{O}_{\mathbb{C}_p}\xi_1, \ldots\ldots, \xi_m$ 和 $r \in \mathrm{O}_{\mathbb{C}_p}\xi_1, \ldots\ldots, \xi_{m-1}$，其次数至多为 $d-1$，使得 $g = qf + r$。我们需要证明，如果 δ 保持 f 和 g，那么它也保持 q 和 r。

对于 $h \in \mathrm{O}_{\mathbb{C}_p}\xi_1, \ldots\ldots, \xi_m$，用 $h^\delta \in \mathrm{O}_{\mathbb{C}_p}\xi_1, \ldots\ldots, \xi_m$ 表示将 δ 作用于幂级数的所有系数后从 h 得到的元素。那么 $h \mapsto h^\delta$ 是 $\mathrm{O}_{\mathbb{C}_p}\xi_1, \ldots\ldots, \xi_m$ 上的一个导子。此外，对于 $a \in \mathrm{O}_{\mathbb{C}_p}^m$，我们有

$$\delta(h(a)) = h^\delta(a) + \sum_{i=1}^{m} (\partial_i h)(a)\delta a_i.$$

因此，δ 尊重 h 当且仅当 $h^\delta = 0$。

现在，由于 $g = qf + r$，我们有

$$g^\delta = q^\delta f + q f^\delta + r^\delta.$$

由于 δ 尊重 f 和 g，我们得到

$$q^\delta f + r^\delta = 0.$$

但 f是次数为 d的正则函数，而 r^δ是关于 ξ_m的次数至多为 $d-1$的多项式。因此我们得出结论： $r^\delta = q^\delta = 0$ 和 δ 同时满足 q 和 r。 □

定义。给定一族函数 F 和一个子集 $X \subseteq \mathbb{C}_p$，我们用 $D_{\mathcal{F}}(X)$表示 $\mathbb{C}_p$ 中所有形如 $F(\mathbf{w})$ 的元素组成的集合，其中 $F \in \mathrm{F}$，且$\mathbf{w}$ 是由 X 中的元素构成的元组，并且$\mathbf{w}$ 属于 F的定义域。我们还以类似的方式定义 $LD_{\mathcal{F}}(X)$，但现在允许 F 由 F 局部可定义。

引理 3.5 (参见 [Wil08，定理 2。2])。 对于任意一个在微分下封闭的解析函数集合 $\mathcal{F}$，我们有， $LD_{\mathcal{F}}$ 和 $D_{\widetilde{\mathcal{F}}}$ 是 $\mathbb{C}_p$上的预几何。

证明。 我们来验证 $D_{\widetilde{\mathcal{F}}}$是一个预几何； $LD_{\mathcal{F}}$ 的证明类似。唯一不明显的性质是交换原理。取 $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}_p$和 $b \in D_{\sim\mathcal{F}}(a_1, \ldots, a_n) \setminus D_{\sim\mathcal{F}}(a_1, \ldots, a_{n-1})$。根据定义，存在一个函数 $F \in \mathcal{F}$，其定义域包含 $(a_1, \ldots, a_n)$，使得

$$b = F(a_1, \ldots, a_n).$$

现在，如果 $(\partial_n^i F)(a_1, \ldots, a_n) = 0$对所有 $i \geq 1$都成立，那么在 $(a_1, \ldots, a_n)$ 的一个邻域内，F与 a_n 无关。但这样一来， $b \in D_{\sim\mathcal{F}}(a_1, \ldots, a_{n-1})$，这不可能。令 i为满足 $(\partial_n^i F)(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$的极小者。必要时将 F 替换为 $F + \partial_n^{i-1} F$ 后，我们可以假设 $i = 1$。由隐函数定理，现在存在一个以 n 个变量为自变量的函数 g，使得

$$g(a_1, \ldots, a_{n-1}, b) = a_n,$$

且使得 g属于 F。因此 $a_n \in D_{\sim\mathcal{F}}(a_1, \ldots, a_{n-1}, b)$。 □

推论 *3.6*（参见 [*Wil08*，引理 *2.3*]）。元素 $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{C}_p$是 $LD_{\mathcal{F}}$相关的，当且仅当存在 $F \in \mathcal{F}$，使得 $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathrm{dom}(F)$，$F(\mathbf{w}) = 0$且存在$\Delta \subseteq \mathrm{dom}(F)$，适用于满足 $\mathbf{w} \in \Delta$ 和 $F \restriction_{\Delta} \not\equiv 0$的 F。

引理 3.7 （参见 [Wil08，引理 5.3]）。 对于任意一个$\mathcal{F}$ 解析函数集合，若其在微分下封闭，则对所有 $\delta \in \mathrm{Der}^{\mathbb{C}_p}(\mathcal{F})$， δ 都保持所有可由 $\mathcal{F}$局部定义的函数。

证明。设 F 可由 F 局部定义。由于该陈述是局部的，我们可以假设 F在 $(\mathbb{C}_p, \mathrm{F}^{\mathrm{PR}})$ 中可定义。但 $(\mathbb{C}_p, \mathrm{L}_{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}})$ 是 $(\mathbb{C}_p, \mathrm{F\ PR})$ 的定义扩张，因此 F 在此结构中也可定义。由引理 3.4， δ 保持 $\mathrm{A}_{\mathcal{F}}$ 的所有元素。根据 [CL11，定理 6.3，$\mathbb{C}_p, \mathrm{L}_{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}}$) 中的每个可定义函数都可局部表示为稍大语言中的一个项（见 [CL11，第 6 节2], ），因此 δ 保持 $(\mathbb{C}_p, \mathrm{L}_{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}})$ 中的每个可定义函数。□

定义。 给定一组函数 F 和一个子集 $X \subseteq \mathbb{C}_p$，我们定义

$$\mathcal{F}\mathrm{cl}(X) := \{a \in \mathbb{C}_p : \forall \delta \in \mathrm{Der}_{\mathbb{C}_p}(\mathcal{F})(\delta(X) = \{0\} \implies \delta(a) = 0)\}.$$

定理 3.8 （参见 [Wil08，定理 1。10]）。 给定一组 $\mathcal{F}$，它由在微分下封闭的解析函数组成，算子 $D_{\widetilde{\mathcal{F}}}$ 和 $LD_{\mathcal{F}}$ 都是预几何，且二者相同。

此外，给定 $D_{\sim\mathcal{F}}$-线性无关的元素 $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}_p$，以及一个函数 F，它由 $\mathcal{F}$ 局部可定义，且具有一个 $\in$ 定义域(F)，则存在 $G \in \mathcal{F}$，其具有一个 $\in$ 定义域(G)，并且存在一个适当的 $\Delta \subseteq$ 定义域$(F) \cap$ 定义域(G)，使得 $G \restriction_{\Delta} = F \restriction_{\Delta}$。

证明。 我们首先注意到，F 中的任意函数都由 F 局部可定义，因此对于所有 $X \subseteq \mathbb{C}_p$， $D_{\sim\mathcal{F}}(X) \subseteq LD_{\mathcal{F}}(X)$。

接下来我们证明 $LD_{\mathcal{F}}(X) \subseteq \mathrm{Fcl}(X)$。给定 $a \in LD_{\mathcal{F}}(X)$，存在一个由 F 局部可定义的解析函数 F以及元素 $x_1, \ldots, x_n \in X$，使得 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{dom}(F)$ 且 $F(\mathbf{x}) = a$。由引理 3.7 可知，任意 $\delta \in \mathrm{Der}^{\mathbb{C}_p}(\mathrm{F})$ 都会在其定义域上保持 F；特别地，若 δ 在 $x_1, \ldots, x_n$ 上为零，则 $\delta(a) = 0$。这就证明了 $LD_{\mathcal{F}}(X) \subseteq \mathrm{F\ cl}(X)$。

要完成 D-F 与 $LD_{\mathcal{F}}$ 相同的证明，只需证明 F cl$(X) \subseteq D$-F (X)。由引理 3.5 可知，D-F 是一个预几何，因此给定 $w \notin D$-F (X)，我们可以选取 $\mathbb{C}_p$ 的一个 D-F-基，形式为 $B \cup \{w\}$。按如下方式定义一个映射 $\delta : \mathbb{C}_p \to \mathbb{C}_p$。给定 $c \in \mathbb{C}_p$，存在一个 $F \in$F 的函数以及元素 $b_1, \ldots, b_n \in B$，使得 $c = F(b_1, \ldots, b_n, w)$。令 $\delta(c) := \frac{\partial F}{\partial z_{n+1}}(b_1, \ldots, b_n, w)$。与定理 1.1 的证明一样，利用 $(\mathbb{C}_p, \mathrm{F}^{\mathrm{PR}})$ 的 1-h-极小性可证明 δ 良定义，且确实是一个导子。于是可得 δ 在 X 上为零，并满足 $\delta(w) = 1$，从而如所需证明 Fcl$(X) \subseteq D$-F (X)。

“此外”部分现在可由推论 3.6 得出。 □

3.2. **关于 p-进制 Schanuel 猜想的应用**。我们先回顾通常复指数函数的经典猜想，参见 [Lan66]。

猜想 3.9 (Schanuel)。设 $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ 是 $\mathbb{Q}$-线性无关的。那么

$$\mathrm{tr.deg.}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(z_1, \ldots, z_n, \exp(z_1), \ldots, \exp(z_n)) \geq n.$$

对于 p-进制指数函数，也可以提出一个类似的猜想，参见 [Mar14,Mar13]。

猜想 3.10 (p-进制 Schanuel 猜想)。设 $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{D}_p \subset \mathbb{C}_p$ 是 $\mathbb{Q}$-线性无关的。那么

$$\mathrm{tr.deg.}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(z_1, \ldots, z_n, \exp(z_1), \ldots, \exp(z_n)) \geq n.$$

用于获得条件性结果时，通常只采用较弱形式的 p-进 Schanuel 猜想，并进一步假设 $z_1, \ldots, z_n$ 是代数的，参见例如 [CM09、BLN+22]。

注记 3.11。Schanuel 猜想（通常形式和 p-进形式）都可以用以下方式改写为更具几何性的表述：给定一个定义在数域上的代数簇$V \subseteq \mathbb{G}_a^n \times \mathbb{G}_m^n$，且 $\dim V < n$，对于定义域内的任意点 $\mathbf{x}$（指数映射的定义域取决于我们是在 $\mathbb{C}$ 上还是在 $\mathbb{C}_p$上工作），若 $(\mathbf{x}, \exp(\mathbf{x})) \in V$，则 $\mathbf{x}$ 的坐标在$\mathbb{Q}$上线性相关。

Kirby 和 Zilber 在 [KZ06] 中证明，实数上的 Schanuel 猜想蕴含其自身的一个一致版本（复数上的 Schanuel 猜想的一致版本只能借助尚未解决的 Zilber–Pink 猜想来得到，该猜想涉及 $\mathbb{G}_m$的幂，有时也称为与环面相交猜想，参见 [KZ14]）。现在我们证明，p-进指数函数也有同样的结论。

定理的证明 *1.2*。一个真 $\mathbb{Q}$-线性子空间由以下形式的方程确定：$\mathbb{G}_a^n$

$$m_1 X_1 + \cdots + m_n X_n = 0$$

其中 $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$ 不全为零。为证明该定理，我们将证明猜想3.10 蕴含存在一个正整数 N（仅取决于 V 且可能还取决于 p），使得集合 $X := \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}_p^n : \mathbf{x} \in \mathbb{D}_p^n \wedge (\mathbf{x}$,指数函数$(\mathbf{x})) \in V\}$ 包含于若干真$\mathbb{Q}$-线性子空间的并集中，这些子空间的系数的绝对值均不超过 N。

首先注意，集合 X 在 $\mathbb{C}_p$的一个 1-h-极小扩张中是可定义的。根据猜想3.10，对于每个 $\mathbf{x} \in X$，都存在 $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$，使得 $m_1 x_1 + \cdots + m_n x_n = 0$。若 X 的 1-h-极小维数为零，则 X 是有限集，因此此时可取每个 N 在各个 $|m_i|$ 中出现的 $\mathbb{Z}$-线性组合里的系数的最大值，作为该界 $\mathbf{x} \in X$。

从现在起，我们假设 X 具有正的 1-h-极小维数。现在 [CL11，定理 6.3。8] 表明我们有解析胞腔分解，因此存在一个正维

胞腔 $C \subseteq X$ ，以及一个可定义解析微分同胚 $\theta : B \to C$ ，它将开圆盘与环域的乘积 B 映到 C。给定 a，取互不相同的 $b \in C$ ，使得 x、 $y \in B$ 满足$\theta(x) = a$ 且 $\theta(y) = b$。存在某个包含 0 和 1 的环域 $A \subset \mathbf{O}_{\mathbb{C}_p}$ ，使得映射 $\gamma : A \to B : t \mapsto t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}$ 良定义。由于只有可数多个 $\mathbb{Z}$-线性关系，而 A中有不可数多个元素，根据猜想 3.10，必定存在形如 $m_1 x_1 + \cdots + m_n x_n = 0$ 的方程，其中 m_1、...、 $m_n \in \mathbb{Z}$，且对不可数多个 $t \in A$， $\gamma(t)$ 都满足该方程。根据 1-h-极小性，集合 $\{t \in A : m_1\gamma(t)_1 + \cdots + m_n\gamma(t)_n = 0\}$ 必定包含一个开球。由恒等原理可知，这意味着对所有 $t \in A$，都有 $m_1\gamma(t)_1 + \cdots + m_n\gamma(t)_n = 0$。现在我们可以沿着胞腔的维数进行归纳，从而得出 C 中的每一点都必须满足相同的$\mathbb{Z}$-线性关系。□

接下来，我们希望证明猜想 3.10 的一些弱形式。为此，我们回顾 Ax 定理在微分域中关于指数函数的结论。

设 F 是一个域， $C \subset F$ 是一个子域。回顾一下，给定一个特征零域 F 及其子域 $C \subset F$，若元素 $x_1, \ldots, x_n \in F$ 满足 C 不包含这些元素的任何非平凡 $\mathbb{Q}$-线性组合，则称它们在模 C 意义下 $\mathbb{Q}$-线性无关。

定理*3.12* （[*Ax71*，定理 3]）。设 (F, Δ) 是一个特征零微分域，其常数域为 C。假设 $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in F$ 满足：对所有 $i \in \{1, \ldots, n\}$ 和所有 $\partial \in \Delta$，都有 $\partial(y_i) = y_i \partial(x_i)$；并且 $x_1, \ldots, x_n$ 在模 C 意义下 $\mathbb{Q}$-线性无关。那么

$$\operatorname{tr.deg}_C C(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \geq n + \operatorname{rk}(\partial x_i).$$

如前所述，Kirby 在 [Kir10] 中的工作（以及[AEK21、AEK23]中给出的修正）针对抽象指数域，利用定理3.12 推导出在 (ℂ,指数函数) 和(ℝ,指数函数)的情形下，存在与指数函数相容的非平凡导子。尽管 [Kir10], 中没有提及，同样的论证也能证明在($\mathbb{C}_p$, 指数函数)中存在这样的导子。由此可得以下两个推论，它们都可视为猜想3.10的弱形式。

推论 3.13 (参见 [Kir10，定理 1.4])。存在一个可数子域 C ，它是 $\mathbb{C}_p$ 的子域，使得若 $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{D}_p$ 在 $\mathbb{Q}$ 模 C 上线性无关，则

$$\operatorname{tr.deg}_C C(z_1, \ldots, z_n, \exp(z_1), \ldots, \exp(z_n)) > n.$$

证明。将 $\mathbb{C}_p$ 视为一个 $\mathcal{L}$-结构，其中 $\mathcal{L}$ 是推论 2.2中的可数语言。令 $\Delta = (\partial_\tau)_{\tau \in \mathcal{B}}$ 为利用定理 $\mathbb{C}_p$ 1.1构造的 $C = \bigcap_\tau \ker \partial_\tau$上的导子集合。根据定理 1.1(2)，我们取 $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{D}_p$；如果它们在 $\mathbb{Q}$模 C上线性无关，则由定理 3.12可得结论。□

定义。 令 $\Delta_{\exp}$ 表示 $\mathbb{C}_p$ 上所有与指数函数相容的域导子的集合，并定义

$$C_{\exp} := \bigcap_{\partial \in \Delta_{\exp}} \ker \partial.$$

正如我们在推论 3.13的证明中所见， $C_{\exp}$ 是一个可数集合。元素 $\lambda \in \mathbb{C}_p$ 称为指数超越的，如果 $\lambda \notin C_{\exp}$。

关于 $C_{\exp}$ 的元素，可以给出一个稍更显式的描述，即作为霍万斯基系统的解，参见 [Kir05b，定理 1.1]。

由 [BKW10，定理 1.2] ，我们还得到猜想 3.10 关于指数超越幂的如下版本。

推论 3.14. 假设 $\lambda \in \mathbb{D}_p$ 是指数超越的。那么对于所有 $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{D}_p$ ，若它们在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关，则有

$$\operatorname{tr.deg}_{\mathbb{Q}(\lambda)} \mathbb{Q}(\lambda, \exp(x_1), \ldots, \exp(x_n), \exp(\lambda x_1), \ldots, \exp(\lambda x_n)) \geq n.$$

4. Tate 均匀化的模糊化

在本文余下部分，我们将把注意力从 p-进指数函数转向椭圆曲线的 Tate 均匀化映射。

本节中，我们固定 $q \in \mathbb{C}_p$，$v(q) > 0$ 并考虑椭圆曲线$E = E_q$ 及其均匀化映射 $\phi = \phi_q$。我们首先证明 Tate 均匀化映射的一个微分 Ax–Schanuel 结果。回顾一下，该映射满足微分方程（2.1）。这一结果将由一个混合 Ax–Schanuel 定理推出，该定理结合了椭圆指数映射与通常的指数函数，可见于 Ax [Ax72] 和 Kirby [Kir05b]的著作。

命题 4.1 (Tate 均匀化映射的 Ax–Schanuel 定理)。设(K, Δ) 是一个特征零微分域，其中 Δ 是一组 m 可交换导子，且C 表示其常数域。设 $f \in K[t]$ 是一个无重根的三次多项式，且由 $y^2 = f(t)$ 定义的椭圆曲线不具有复乘。假设 $u_1, \dots, u_n, y_1, \dots, y_n \in K^\times$ 满足$(u_i \partial y_i)^2 = f(y_i)(\partial u_i)^2$，对所有 $\partial \in \Delta$ 以及所有 $i \in \{1, \dots, n\}$均成立。若 $u_1, \dots, u_n$ 模 C乘法独立，则

$$\operatorname{tr.deg}_C C(u_1, \dots, u_n, y_1, \dots, y_n) \geq n + \operatorname{rank}(\partial u_i)_{i \in \{1,\dots,n\}, \partial \in \Delta}.$$

证明。必要时通过扩张微分域，我们令 $x_1, \dots, x_n \in K^\times$ 满足：对所有 $\partial \in \Delta$ 以及所有 $i \in \{1, \dots, n\}$，均有 $\frac{\partial u_i}{u_i} = \partial x_i$。于是，方程 $(u_i \partial y_i)^2 = f(y_i)(\partial u_i)^2$ 推出 $(\partial y_i)^2 = f(y_i)(\partial x_i)^2$。根据 [Kir05b 命题 3.2]（另见[Kir05a]），我们有

$$\operatorname{tr.deg}_C C(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n, y_1, \dots, y_n) \geq 2n + \operatorname{rank}(\partial x_i)_{i \in \{1,\dots,n\}, \partial \in \Delta}$$

除非 $x_1, \dots, x_n$ 在模 C 意义下线性相关于 $\mathbb{Q}$，这等价于说 $u_1, \dots, u_n$ 在模 C 意义下乘法相关。

最后，我们注意到，对于任意 $a_1, \dots, a_n \in K$，都有

$$a_1 \begin{pmatrix} \partial_1 x_1 \\ \vdots \\ \partial_m x_1 \end{pmatrix} + \cdots + a_n \begin{pmatrix} \partial_1 x_n \\ \vdots \\ \partial_m x_n \end{pmatrix} = 0 \implies \frac{a_1}{u_1} \begin{pmatrix} \partial_1 u_1 \\ \vdots \\ \partial_m u_1 \end{pmatrix} + \cdots + \frac{a_n}{u_n} \begin{pmatrix} \partial_1 u_n \\ \vdots \\ \partial_m u_n \end{pmatrix} = 0,$$

这表明 $\operatorname{rank}(\partial u_i)_{i \in \{1,\dots,n\}, \partial \in \Delta} \leq \operatorname{rank}(\partial x_i)_{i \in \{1,\dots,n\}, \partial \in \Delta}$，从而完成证明。 □

$\mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$（即系数属于 $\mathbb{Z}$ 的 $n \times n$ 矩阵集合）在$\mathbb{G}_m^n$上有一个自然作用。事实上，记 $M = (m_{ij})_{i,j}$ 的各个条目，并令 $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$ 为 $\mathbb{G}_m^n$ 的任意元素。我们按如下方式定义该作用：

$$\mathbf{w}^M := \left(\prod_{j=1}^n w_j^{m_{1,j}}, \dots, \prod_{j=1}^n w_j^{m_{n,j}} \right).$$

我们还有 $\mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ 在 E^n 上的一个作用，定义为：

$$M\mathbf{x} := \left(\sum_{j=1}^n m_{1,j} x_j, \dots, \sum_{j=1}^n m_{n,j} x_j \right),$$

因此结合这两个定义，$\mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ 也通过令 $M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := (\mathbf{x}^M, M\mathbf{y})$ 作用于 $\mathbb{G}_m^n \times E^n$。

定义。设 $V \subset \mathbb{G}_m^n \times E^n$ 是一个不可约代数簇。我们称 V 是*rotund*的，如果对于每个 $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$，都有 $\dim(MV) \geq \operatorname{rk}(M)$。

引理 4.2。设 $V \subset \mathbb{G}_m^n \times E^n$ 是一个不可约的 *rotund* 代数簇，且 $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ 对某个 $r \geq 1$ 的秩为 $n - r$。设 $T \subset \mathbb{G}_m^n \times E^n$ 为由下述元素确定的代数子群

: 所有满足 $X^M = 1$ 和 $MY = 0$ 的 $\in \mathbb{G}_m^n \times E^n$，其中 (X, Y)。那么存在一个非空的扎里斯基开子集 $V_M \subset V$，使得对 $\gamma \in V_M$，我们有

$$\dim(V \cap \gamma + T) \leq \dim V - n + r.$$

证明。考虑正则映射

$$F : V \to \mathbb{G}_m^n \times E^n : (X, Y) \mapsto (X^M, MY).$$

F的纤维具有 $V \cap \gamma + T$ 的形式。根据纤维维数定理，存在 V 的一个非空 Zariski 开子集 V_M，使得对于 $\gamma \in V_M$，我们有

$$\dim(V \cap \gamma + T) = \dim(V) - \dim(MV).$$

由旋丰性，$\dim(MV) \geq \mathrm{rk}\ M = n - r$，因此 $\dim(V \cap \gamma + T) \leq \dim(V) - n + r$。 □

定理 *1.3* 的证明。设 $m =$ 维数V并注意到，由于 V 是 rotund，我们有$m \geq n$。考虑映射

$$\theta : V \to E^n : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{y} - \phi(\mathbf{x}).$$

我们将证明，θ 的大多数纤维在局部的维数至多为 $m - n$，由此即可得出结论。

令 $\mathcal{L}_0$ 为推论2.2中的可数语言，并扩展一个表示 q的符号。这给出了一个1-h-极小结构 $\mathbb{C}_p$。

取 $\mathbf{v} \in V$。于是存在一个开可定义邻域 $V' \subset V$，它包含$\mathbf{v}$，且位于 V中，使得 θ 在 V'上的限制是 L_0-可定义的。注意，V'在每一点的局部维数都等于 m。令 $t = \theta(\mathbf{v})$ 和 $A = \theta^{-1}(t) \cap V'$，这是一个 L-可定义子集，属于$V$。令 $\mathrm{L} = \mathrm{L}_0(t)$。

假设 $\dim A > m - n$。根据 [CHRK22，引理 5.3.5]，h-极小结构中的维数与 acl-维数一致，因此存在一点 $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in A$，其 acl-维数至少为 $m - n + 1$。由于 ϕ是 L-可定义的，我们找到 $1 \leq i_1 < \ldots < i_{m-n+1} \leq n$，使得元素 $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{m-n+1}}$是 acl-独立的。定理 1.1 的证明给出了 $m-n+1$ 可交换导子 $\partial_1, \ldots, \partial_{m-n+1}$，具有以下性质：

(1) 当 $\partial_j x_{i_\ell} = 1$ $j = \ell$ 且为 0 时，
(2) 对每个 i，j，以及 (3) ∂_j 满
足 ϕ。

记 $y_i = (y_{i1}, y_{i2})$ $t_i = (t_{i1}, t_{i2})$ 和 $\phi = (\phi_1, \phi_2)$。于是我们有 $y_{i1} = t_{i1} + \phi_1(x_i)$，进而得到 $\partial_j y_{i1} = \partial_j(\phi_1(x_i))$。由于 ∂_j 满足 ϕ，因此我们得到

$$(x_i \partial_j(y_{i1} - t_{i1}))^2 = f(y_{i1} - t_{i1})(\partial_j x_i)^2,$$

其中 $f(z) = 4z^3 + z^2 + 4a_4(q)\, z + 4a_6(q)$是微分方程（2.1）中出现的多项式，适用于 ϕ_1。

令 $C = \cap_j \ker \partial_j$。由于 ∂_j满足 ϕ，我们看到 C在取 ϕ的运算下封闭。令 k为最小的整数，使得存在一个秩为 $n - k$ 的矩阵 $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$，满足

$$\gamma = (\mathbf{x}^M, M\mathbf{y}) \in \mathbb{G}_m^n(C) \times E^n(C).$$

令 $T \leq \mathbb{G}_m^n \times E^n$为由 $\mathbf{X}^M = 1$和 $M\mathbf{Y} = 0$定义的子群，使得 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \gamma \in T$。考虑 $F = C(\mathbf{x}, \mathbf{y})$，则 $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 是代数簇 $V \cap (\gamma + T)$ 上的一个 F-点，该代数簇定义在 C上。因此

$$\mathrm{tr.deg.}_C C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \dim(V \cap (\gamma + T)).$$

根据命题 4.1，我们有 $\mathrm{tr.deg.}_C C(\mathbf{x},\mathbf{y}) - k \geq m - n + 1 = \mathrm{rk}(\partial_j x_{i_\ell})_{j,\ \ell}$因此

$$\dim(V \cap (\gamma + T)) > k + m - n.$$

对于 $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ 秩不超过 $n-1$ 令 $V_M \subset V$ 为由引理 V 得到的4.2中的非空扎里斯基开子集。考虑集合

$$W = V' \cap \bigcap_M V_M(\mathbb{C}_p)$$

其中，最后的交是对所有秩至多为 $n-1$ 的 $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ 取交。注意，这是 V' 与 V 中可数多个非空扎里斯基开子集的交。由于 $\mathbb{C}_p$ 不可数，因此 W 在 V' 的 p-进拓扑中稠密。令 $V_0 \subset V$ 由所有满足 $\dim(V' \cap \theta^{-1}(\theta(v))) \leq m-n$ 的 $v \in V'$ 组成，这是 V' 的一个可定义子集。根据上述论证， W 包含于 V_0。我们声称，对于每个开子集 $B \subset V'$，都有 $\dim V_0 \cap B = m$。为此，注意到 $W \cap B$ 在 B 中稠密，因此由于 $W \subset V_0$， $V_0 \cap B$ 在 B 中也稠密。但 B 和 $V_0 \cap B$ 都是可定义的，且 $\dim B = m$，所以 $\dim V_0 \cap B = m$ 也成立。

现在，维数理论意味着 $\theta(B \cap V_0) \subset E^n$ 具有维数 n，因此其内部非空。因此， $\theta(B \cap V_0)$包含一个坐标取自 Q的元素，例如$\mathbf{r}$。这意味着对于某个 $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in B$，有

$$\theta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{y} - \phi(\mathbf{x}) = \mathbf{r}. \qquad \square$$

4.1. **准极小性**。

定义。 如果一个一阶结构 M 满足：对于每个可数子集 $A \subseteq M$和每个子集 $S \subseteq M$，只要 S在 $\mathrm{Aut}(M/A)$ 的作用下不变，那么 S 是可数的，或者其在 M 中的补集是可数的，则称该结构为准极小。

给定一个子集 $Q \subseteq E$，定义集合

$$T_Q := \{(x, y) \in \mathbb{C}_p^\times \times E : \exists b \in Q : y = \phi(x + b)\}.$$

我们称 T_Q 为 ϕ 通过 Q得到的模糊化。

此前，人们已经研究过其他函数的模糊化。在 [Kir19], Kirby 证明，复指数函数的一些模糊化在 $\mathbb{C}$上定义了准极小结构。关于模糊化模 j函数的类似结果见 [AK22, §5]。在我们的情形中，探讨$(\mathbb{C}_p, +, \cdot, T_Q)$ 是否准极小也很有意义。需要注意的是，该结构不包含赋值；应将其视为在 $\mathbb{C}_p$ 上的纯域结构扩张，所添加的关系为 T_Q。

$(\mathbb{C}_p, +, \cdot, T_Q)$ 是否准极小取决于 Q 的选择。下文讨论的细节会让我们偏离与 1-h-极小性相关的主题太远，因此我们没有在此深入探讨，但为感兴趣的读者概述如下。正如 [BK18, Corollary 11.7] 和 [AK22, §5], 所述，要证明 $(\mathbb{C}_p, +, \cdot, T_Q)$ 是准极小的，需要验证两个条件：第一个条件在 [BK18] 中称为 Γ-闭性；当 Q p-进稠密于 E^n时，由定理 1.3 可保证该条件成立。第二个条件称为可数闭包性质。关于这一条件，事实上可以证明更强的结论，即结构 $(\mathbb{C}_p, +, \cdot, \phi)$ 具有可数闭包性质；例如，可以仿照[Zil05, Lemma 5.12] 中关于指数函数的证明。不过，对我们的目的而言，[BK18, §10D] 中给出的结果已经表明，在我们的情形下，这一性质可由 Ax–Schanuel 的微分形式推出，而我们已在命题 4.1 中得到该形式。

……中的结果 [AK22] 和 [Kir19] 还表明，如果谨慎选择模糊化，那么得到的结构不仅是准极小的，甚至还能通过 Hrushovski–Fraïssé 摊合构造公理化模糊结构的一阶理论。受这些结果启发，我们预计，如果选择 Q 为

上所有导子的核之交 $\mathbb{C}_p$ 且这些导子尊重 ϕ （请回想定理1.1 表明存在尊重 ϕ 的非平凡导子，且它们的核之交是可数的），那么可以针对（$\mathbb{C}_p$， $+$， $\cdot$， T_Q）的一阶理论得到类似结果。

5. 可能交

本节将给出一个 p-进类比，对应于 [ES25]中关于允许 Tate 均匀化的椭圆曲线上可能交的欧几里得稠密性结果。

5.1. **维数估计**。 称子集 $X \subset \mathbb{C}_p^n$ 为解析的，如果对每个 $x \in X$ ，都存在一个闭盒 B ，以 x为中心，使得在 B上， X 由有限多个严格收敛幂级数的零点集定义。我们需要给出 $\mathbb{C}_p^n$的两个解析子集交的维数下界。关于刚性解析几何中的概念，例如仿射诺和 $\mathrm{Spa}(A)$，请参阅 [FvdP04、Hub93]。

若 $X \subset \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^n$ 是一个仿射诺，那么 $X(\mathbb{C}_p) \subset \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}^n$ 是在完整魏尔斯特拉斯系统上、采用第 2.4 节语言的可定义集。在这种情况下， X 作为刚性解析空间的维数与 $X(\mathbb{C}_p)$的 1-h-极小维数相同。

命题 5.1. 设 X、 Y 是 $\mathbb{C}_p^n$ 的解析子集，且 $x \in X \cap Y$。那么

$$\dim_x(X \cap Y) \geq \dim X + \dim Y - n.$$

证明。该结论是局部的，因此不妨设 X 和 Y 分别是不可约既约仿射诺的 $\mathbb{C}_p$-点。 $X \cap Y$ 的维数与 $X \times Y$ 和 $\mathbb{C}_p^n \times \mathbb{C}_p^n$ 中对角线的交的维数相同。对角线由超平面切出，因此只需验证 $Z = X \times Y$ 与一个线性超平面的交的不可约分支的维数至少为 $\dim Z - 1$。现在， Z 由既约不可约仿射诺 $\mathrm{Spa}(A)$ 的 $\mathbb{C}_p$-点组成，其中 A 是一个定义域。由克鲁尔主理想定理 [Eis95，定理 10.2]，，给定非零的 $f \in A$ ， Z 中 f 的零点集的不可约分支的维数为 $\dim Z - 1$。□

5.2. **特殊簇与弱特殊簇**。 由于 $\phi_q : \mathbb{G}_m^n \to E_q^n$ 是超越映射，通常**不** 会出现这样的情况：若 $W \subseteq \mathbb{G}_m^n$ 是代数簇，则 $\phi_q(W)$ 也是代数簇。但这种情况有时确实会发生，此时我们称 W 是双代数的 （相对于 ϕ_q）。

定义。 若子簇 $S \subseteq E_q^n$ 是代数子群 E_q^n 的某个陪集的不可约分支，则称其为弱特殊 。

若 S 是代数子群 E_q^n 的某个挠陪集的不可约分支，则称其为特殊 。

命题 5.2。 子簇 $S \subseteq E_q^n$ 是弱特殊簇，当且仅当存在一个簇$W \subseteq \mathbb{G}_m^n$ ，它相对于 ϕ_q 是双代数的，且 $\phi_q(W) = S$。

证明。 首先，假设相对于 ϕ_q， S 是双代数的。我们注意到，当 $\dim S = 0$ 时，结论显然成立，因为每个点都是单位元的一个陪集。现在我们对 n 进行归纳。当 $n = 1$ 时， S 是一个点（因此结论成立），或者 $S = E_q$ （因此结论也成立）。

现在我们处理一般情形。根据双代数的定义，存在一个代数簇 $W \subseteq \mathbb{G}_m^n$ 使得 $\phi_q(W) = S$，这尤其意味着 $\dim W = \dim S$。令 $\mathsf{G}_{\phi_q}^n$ 表示 n重图 ϕ_q，即

$$\mathcal{G}_{\phi_q}^n := \{(\mathbf{x}, \phi_q(\mathbf{x})) \in \mathbb{G}_m^n \times E_q^n\}.$$

于是，交 $(W\times S)\cap \mathsf{G}^n_{\phi_q}$ 包含解析子集 $U=\{(\mathbf{w}\ \phi_q(\mathbf{w})) : \mathbf{w}\in W\}$，其维数为 $\dim U = \dim W = \dim S$。我们可以选取代数函数 $f_1,\dots,f$，使得 W 在局部由 $(x_1,\dots,x_d, f_1(x_1,\dots,x_d)\dots,f_{n-d}(x_1,\dots,x_d))$ 参数化，其中 $d=\dim W$。因此，如果我们在微分域 (K,Δ) 中进行运算，该域由定义在 W 的一个 p-进开子集上的解析函数构成（其中集合 Δ 由 d 个偏微分导子组成），并将上述参数化选作 K 中元素的元组 $(u_1,\dots,u_n)$，那么我们得到

$$\dim U = \operatorname{rank}(\partial u_i)_{i\in\{1,\dots,n\},\partial\in\Delta}.$$

由于要么 维数 $S=n$（此时 $S=E_q^n$，问题便已解决），要么 维数$U>$维数 W +维数 $S-n$，在后一种情况下，我们使用命题 4.1得出 ϕ_q（U）$=S$包含于某个真代数子群的陪集中。

假设存在 $\mathbf{c}\in E_q^n$以及某个真不可约代数子群 $G\subset E_q^n$，使得$S\subseteq \mathbf{c}+G$。选取一个子环面 $T\subseteq\mathbb{G}_m^n$，使得 $\phi_q(T)=G$，并选取 一个 $\in\mathbb{G}_m^n$，使得$\phi_q(\mathbf{a})=\mathbf{c}$ 且 $W\subseteq \mathbf{a}T$。于是 $-\mathbf{c}+S\subseteq G$，并且对某个 $0\le k<n$有 $G\cong E_q^k$。此外，将 ϕ_q限制到 T表明，$-\mathbf{c}+S$是双代数的（由 $\mathbf{a}^{-1}W$见证）。由于维数为$G<n$，根据归纳假设，$-\mathbf{c}+S$是某个代数子群的陪集，从而我们得出 S 也是某个代数子群的陪集。

反之，假设 $S=\mathbf{c}+G$，其中 $G\subseteq E_q^n$ 是某个代数子群。那么存在一个子环面 $T\subseteq\mathbb{G}_m^n$，使得 $\phi_q(T)=G$。选取满足 $\phi_q(\mathbf{a})=\mathbf{c}$ 的 $\mathbf{a}\in\mathbb{G}_m^n$，可得$S=\phi_q(\mathbf{a}T)$，因此 S 是双代数的。□

5.3. **非典型交**。为说明定理 1.4，我们先介绍椭圆曲线 E_q的幂的 Zilber–Pink 猜想。

定义。设 V 和 W 是不可约光滑代数簇 Z 的子簇。若 V 和 W 很可能相交，则称它们是

$$\dim V+\dim W\ge\dim Z.$$

若情况相反，则称 V 和 W 不太可能相交

$$\dim V+\dim W<\dim Z.$$

现在假设 $V\cap W\neq\varnothing$，并令 X 为交集$V\cap W$的一个不可约分支。若满足以下条件，则称 X 为 $V\cap W$（在 Z 中）的异常分支

$$\dim X>\dim V+\dim W-\dim Z.$$

我们说 $V\cap W$ 交是不典型的（在 Z），如果它有一个不典型的分支 t.

定义。给定一个子簇 $V\subseteq E_q^n$，存在一个包含V的最小特殊子簇，我们称之为 V 的特殊闭包，记作 $\operatorname{spcl}(V)$。我们将 V 的亏格定义为

$$\operatorname{def}(V):=\dim\operatorname{spcl}(V)-\dim V.$$

给定一个正整数 n 和 $k\in\{0,\dots,n\}$，令 $\mathscr{S}^k$ 表示 E_q^n 中维数至多为 k 的特殊子簇集合。Zilber–Pink 猜想可以用不同方式表述；下面给出的版本以不太可能的交为表述框架。

猜想5.3（Zilber–Pink，不太可能交版本）。对于每个正整数 n和任意代数簇 $V\subseteq E_q^n$，集合

$$\bigcup_{S\in\mathscr{S}^{\operatorname{def}(V)-1}} V\cap S$$

在 V 中不是 Zariski稠密的。

也可以用异常分支来表述这个猜想。

定义。 我们称 X 是簇 $V \subseteq E_q^n$的异常分支，如果存在 E_q^n的一个特殊子簇 S，使得 X 是 $V \cap S$的一个异常分支。

猜想5.4（Zilber–Pink 猜想的异常版本）。 对于每个正整数 n，每个子簇 $V \subset E_q^n$ 都只包含有限多个极大（相对于包含关系而言的）异常分支。

关于这两个陈述的等价性，以及以所谓 [Pil22] 的形式给出的另一种猜想表述，请参阅 Pila 的著作：最优子簇。

尽管猜想5.3 仍未解决，但以下定理是朝着解决它迈出的重要一步。该定理表明，簇 $V \subseteq E_q^n$ 的异常分支包含于有限多个代数子群的陪集中；换言之， V 的异常分支包含于有限多个弱特殊簇族中。

定理 *5.5*（弱 *Zilber–Pink*， [*Kir09*，定理 *4.6*]）。设 K 为特征零代数闭域，且 E_q 可在 K 上定义。对于每个正整数n 以及每个 K-可定义族$\{V_b\}_{b\in B}$ 中的 E_q^n的子簇，存在有限集 $\mathscr{H}$，其元素均为 E_q^n 的真不可约代数子群，并满足以下性质：对于 E_q^n的每个连通代数子群 T、每个 $\mathbf{c} \in E_q^n(K)$ 以及每个 $b \in B(K)$，若X 是 $V_b \cap (\mathbf{c} + T)$的异常分支，则存在 $H \in \mathscr{H}$，使得对于某个 $\mathbf{c}' \in \mathbf{c} + T(K)$，有 $X \subseteq (\mathbf{c}' + H)$，$\dim H \leq \dim V_b + \dim T - \dim X$且

$$\dim X \leq \dim V_b \cap (\mathbf{c}' + H) + \dim T \cap H - \dim H.$$

此外，若$\mathbf{c} + T$是 X的弱特殊闭包，则 $T \subseteq H$。

5.4. **持续高概率交**。

定义。 设 V 和 W 是 E_q^n的子簇。若对于每个代数子群 $T \subseteq E_q^n$，都有 $\dim \psi(V) + \dim \psi(W) \geq n - \dim T$，其中 $\psi : E_q^n \to E_q^n/T$ 表示商映射，则称 V 与 W 之间的交是持续高概率 的。

下面的初等引理表明，若 V 和 S 可能持续高概率相交，其中 S 是弱特殊的，那么对所有$\mathbf{c} \in E_q^n$， V和$\mathbf{c} + S$ 也如此。

引理5.6。 设 T、 S 是 E_q^n的两个不可约代数子群。对于任意$\mathbf{a} \in S$、任意$\mathbf{c} \in E_q^n$以及任意$\mathbf{b} \in \mathbf{c} + S$，有

$$\dim S \cap (\mathbf{a} + T) = \dim(\mathbf{c} + S) \cap (\mathbf{b} + T).$$

证明。定义 $\varphi(\mathbf{x}) := \mathbf{b} - \mathbf{a} + \mathbf{x}$。注意，给定$\mathbf{s} \in S$， $\varphi(\mathbf{s}) = \mathbf{b} - \mathbf{a} + \mathbf{s} + \mathbf{c} - \mathbf{c} \in \mathbf{c} + S$；给定$\mathbf{t} \in T$， $\varphi(\mathbf{a} + \mathbf{t}) = \mathbf{b} + \mathbf{t} \in \mathbf{b} + T$。因此， φ定义了 $S \cap (\mathbf{a} + T)$与$(\mathbf{c} + S) \cap (\mathbf{b} + T)$之间的双射，证明完毕。□

推论 5.7。 设 T、 S 是 E_q^n 的两个不可约代数子群，且令 $\psi : E_q^n \to E_q^n/T$ 表示商映射。那么对于每个 $\mathbf{c} \in E_q^n$，我们有 维数$\psi(S)$ = 维数$\psi(\mathbf{c} + S)$。

证明。 取一个有限生成域 $K \subseteq \mathbb{C}_p$，使得 E_q、 S 和 T 都在其上定义。取一个在 K 上泛的 $\mathbf{a} \in S$。由纤维维数定理可得 $\dim S = \dim(\mathbf{a} + T) \cap S + \dim \psi(S)$。

取 $\mathbf{c} \in E_q^n$，并令 $\mathbf{b} \in \mathbf{c} + S$ 在 $K(\mathbf{c})$ 上泛。如上所述，我们得到 $\dim(\mathbf{c} + S) = \dim(\mathbf{c} + S) \cap (\mathbf{b} + T) + \dim \psi(\mathbf{c} + S)$。由于 $\dim S = \dim(\mathbf{c} + S)$，结论由引理5.6得出。□

尽管持久可能交的定义考虑了 E_q^n 的所有可能商，但下一个引理表明，根据弱 Zilber–Pink，只需考虑一个适当的有限商映射集。当然，只有在有有效弱 Zilber–Pink 命题的情况下，实践中才可能确定给定簇 V 对应的这个有限集。

引理 5.8. 设 $V \subseteq E_q^n$ 是一个不可约子簇。存在有限个真代数子群 $H_1, \ldots, H_n$ *of* E_q^n，使得对于每个特殊子簇 $S \subset E_q^n$，都有： V 和 S 持久可能相交，当且仅当对于每个 $i \in \{1,\ldots,n\}$，都有 维数 $\psi_i(V)$ + 维数 $\psi_i(S) \geq n -$ 维数 H_i，其中 $\psi_i : E_q^n \to E_q^n/H_i$ 表示商映射。

证明。一方向显然，因此我们将着重讨论另一方向。令 $\mathscr{H}$ 为满足将定理 5.5 应用于常值族 $V_p = V$ 后所得结论的 E_q^n 的真子群有限集。设 T 是 E_q^n 的真不可约代数子群，满足 $\dim \psi(V) + \dim \psi(S) < n - \dim T$，其中 $\psi : E_q^n \to E_q^n/T$ 表示商映射。令 S_0 为 E_q^n 的不可约代数子群，并取 $\mathbf{c} \in$ 挠子群(E_q^n)，使得 $S = \mathbf{c} + S_0$。令 $K \subset \mathbb{C}_p$ 为有限生成子域，使得 E_q、 V、 S_0、 T 以及 $\mathscr{H}$ 的每个元素都定义在 K 上。注意，由此可知 $\underline{\mathrm{T}}\mathrm{or}(E_q^n)$ 的每个元素都定义在 K 上。

考虑商映射 $\psi' : E_q^n \to E_q^n/(S_0 + T)$。取在 K 上一般的 $\mathbf{v} \in V$。那么 $\dim \psi(V) = \dim V - \dim V \cap (\mathbf{v} + T)$，且 $\dim \psi'(V) = \dim V - \dim V \cap (\mathbf{v} + S_0 + T)$。另一方面，由于 $\dim V \cap (\mathbf{v} + T) \leq \dim V \cap (\mathbf{v} + S_0 + T)$，我们得到

$$\dim V - \dim V \cap (\mathbf{v} + S_0 + T) + \dim \psi(S) \leq \dim \psi(V) + \dim \psi(S) < n - \dim T,$$

这给出

$$\dim V - \dim V \cap (\mathbf{v} + S_0 + T) < n - \dim T - \dim \psi(S).$$

纤维维数定理和推论5.7给出维数$(S_0 + T)$ =维数$\psi(S_0)$ + 维数T以及维数$\psi(S)$ = $\psi(S_0)$，因此

$$\dim V - \dim V \cap (\mathbf{v} + S_0 + T) < n - \dim(S_0 + T).$$

因此

$$\dim V \cap (\mathbf{v} + S_0 + T) > \dim V + (\dim S_0 + T) - n,$$

这表明 V 与$\mathbf{v}$ + S_0 + T 之间的交并非典型。令 X 为 $V \cap (\mathbf{v} + S_0 + T)$ 中维数最大的一个不可约分支。由定理5.5 可得存在 $H \in \mathscr{H}$使得 $X \subseteq V \cap (\mathbf{v} + H)$ 且

$$\dim V \cap (\mathbf{v} + S_0 + T) = \dim X \leq \dim V \cap (\mathbf{v} + H) + \dim(S_0 + T) \cap H - \dim H.$$

结合前两个不等式可得

$$\dim V \cap (\mathbf{v} + H) > \dim V + \dim(S_0 + T) + \dim H - \dim(S_0 + T) \cap H - n.$$

由于$\mathbf{v}$ $\in V$在 K上是一般的，且 H定义在 K上，因此仍有维数$\psi_H(V)$ =维数V –维数$V \cap (\mathbf{v} + H)$，其中 $\psi_H : E_q^n \to E_q^n/H$表示商映射。此外，引理5.6 和纤维维数定理表明，对于任意$\mathbf{b} \in S$ 以及任意$\mathbf{a}$ $\in S_0$,

$$\dim S = \dim \psi_H(S) + \dim(\mathbf{c} + S_0) \cap (\mathbf{b} + H) = \dim \psi_H(S) + \dim S_0 \cap (\mathbf{a} + H).$$

因此，选择 $\mathbf{a}$ 为单位元可得

$$\begin{aligned}
&\dim \psi_H(V) + \dim \psi_H(S) \\
&= \dim V - \dim V \cap (\mathbf{v} + H) + \dim S - \dim S_0 \cap H \\
&< \dim V - (\dim V + \dim(S_0 + T) + \dim H - \dim(S_0 + T) \cap H - n) + \dim S_0 - \dim S_0 \cap H \\
&= n - \dim H + \dim(S_0 + T) \cap H + \dim S_0 \cap T - \dim S_0 \cap H - \dim T \\
&= n - \dim H + \dim(S_0 + H) \cap T - \dim T \\
&\leq n - \dim H.
\end{aligned}$$

这表明 $\mathscr{H}$就是所需的有限集。 □

以下结果是 p进类比 [ES25，定理 3。3]。

定理 5.9。 设 $V \subseteq E_q^n$ 是一个不可约子簇。若 S 是 E_q^n 的弱特殊子簇，且 V 与 S 的交持续地具有较大可能性，那么对于每个 p 进稠密子集 $A \subseteq E_q^n$，

$$\bigcup_{\mathbf{g}\in A} V \cap (\mathbf{g} + S)$$

在 V 中是 p-进稠密的。

证明。 我们首先注意到，如果 $S = E_q^n$，则结论显然成立，因此从现在起假设 S 是 E_q^n 的真特殊子簇。

证明通过对 n 归纳进行。假设 $n = 1$，那么 V 要么是一个点，要么是 $V = E_q$。由于 S 是 E_q 的真弱特殊子簇，它必定是一个点 $\{\xi\}$。为了使 V 和 S 有持续高概率交，必须有 $V = E_q$，此时结论成立。

现在我们处理一般情形。令 $T \subset E_q^n$ 为一个不可约代数子群，并令 $\boldsymbol{\xi} \in E_q^n$满足 $\boldsymbol{\xi} + T = S$。令 $L \subset \mathbb{G}_m^n$ 为一个真子环面，满足 $\phi_q(L) = T$。令 $\mathcal{F} \subset \mathbb{G}_m^n(\mathbb{C}_p)$ 表示 ϕ_q的一个基本域，因此 ϕ_q 在 $\mathcal{F}$上的限制在推论 2.2所述的 $\mathbb{C}_p$ 上的 1-h-极小结构中是可定义的。令

$$k := \dim V + \dim S - n.$$

设 U 是 V（相对于 p-进拓扑）中的非空、可定义的相对开子集。设 $\mathscr{H}$是通过将定理 E_q^n应用于（常值族）5.5 而得到的 V的真子群有限集。根据 h-极小纤维维数定理，必要时我们可以缩小 U（同时保持可定义性、开性和维数），使得对每个 $H \in \mathscr{H}$ 以及每个 $\mathbf{x} \in U$，都有

$$\dim U = \dim \psi_H(U) + \dim U \cap (\mathbf{x} + H), \tag{5.1}$$

其中 $\psi_H : E_q^n \to E_q^n/H$ 是商映射。

关系：

$$\mathcal{R} := \{(\mathbf{u}, \mathbf{g}) \in U \times \mathbb{G}_m^n(\mathbb{C}_p) : \mathbf{u} \in \phi_q((\mathbf{g}L) \cap \mathcal{F})\}$$

是可定义的。现在我们将通过两种不同的方式计算可定义集 R 的维数，首先考虑到 U 的坐标投影。

命题 5.10. 维数$\mathcal{R}$ = 维数 $\mathbb{G}_m^n(\mathbb{C}_p) + k = n + k.$

证明。 给定 $\mathbf{u} \in U$，定义 $\mathrm{R}_\mathbf{u} := \{\mathbf{g} \in \mathbb{G}_m^n : (\mathbf{u}, \mathbf{g}) \in \mathrm{R}\}$。现在选取 $\mathbf{z}_0 \in \mathrm{F}$，使得$\phi_q(\mathbf{z}_0) = \mathbf{u}$。

注意到我们可以写成 $\mathbf{z}_0 = \mathbf{1} \cdot \mathbf{z}_0$, ，又因为 $\mathbf{1} \in L$，因此得出 $\mathbf{z}_0 \in \mathrm{R}_\mathbf{u}$，特别是 $\mathrm{R}_\mathbf{u}$ 非空。这也表明坐标投影 $\mathrm{pr}_U : \mathrm{R} \to U$是满射，因此 $\dim \mathrm{pr}_U(\mathrm{R}) = \dim U$。

考虑映射 $\alpha : L \to \mathrm{R}_\mathbf{u}$，定义为 $\alpha(\mathbf{g}) := \mathbf{z}_0\mathbf{g}$。现在我们来验证，$\alpha$ 是 L与 $\mathrm{R}_\mathbf{u}$之间的可定义双射。

(1) 首先，我们验证 α 是良定义的。给定 $\mathbf{g} \in L$，有 $\mathbf{z}_0\mathbf{g}L = \mathbf{z}_0L$。由于 $\mathbf{z}_0 \in \mathrm{R}_\mathbf{u}$，这说明 $\mathbf{z}_0\mathbf{g} \in \mathrm{R}_\mathbf{u}$。(2) 给定 $\mathbf{g} \in \mathrm{R}_\mathbf{u}$，存在 $\mathbf{c} \in L$ 使得 $\phi_q(\mathbf{gc}) = \mathbf{u}$ 且 $\mathbf{cg} \in \mathrm{F}$。由于 $\phi_q(\mathbf{z}_0) = \mathbf{u}$，存在 $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^n$ 使得 $\mathbf{cg} = \mathbf{z}_0 q^\mathbf{m}$；但由于 $\mathbf{z}_0$ 和 $\mathbf{cg}$ 都属于 F，因此 $\mathbf{m} = \mathbf{0}$。于是，$\mathbf{g} = \mathbf{z}_0\mathbf{c}^{-1} = \alpha(\mathbf{c}^{-1})$。由于 $\mathbf{c}^{-1} \in L$，我们得出 α 是满射。

（3）最后，显然 α 是单射且可定义的。

验证了 ϕ 的这些性质后，我们立即得到 $\dim \mathrm{R}_\mathbf{u} = \dim L$。

现在我们证明这个断言。由 h-极小纤维维数定理，存在$\mathbf{u} \in U$使得 $\dim \mathrm{R} = \dim \mathrm{R}_\mathbf{u} + \dim \mathrm{pr}_U(\mathrm{R})$。于是

$$\dim \mathcal{R} = \dim \mathcal{R}_\mathbf{u} + \dim \mathrm{pr}_U(\mathcal{R}) = \dim L + \dim U = \dim S + \dim V = n + k. \qquad \square$$

接下来，我们利用到 $\mathbb{G}_m^n(\mathbb{C}_p)$ 的坐标投影来计算 R 的维数。给定$\mathbf{g} \in \mathbb{G}_m^n(\mathbb{C}_p)$，令 $\mathrm{R}_{\mathbf{g}} := \{\mathbf{u} \in U : (\mathbf{u},\mathbf{g}) \in \mathrm{R}\}$。

给定 $i \le \dim V$，定义

$$B_i := \{\mathbf{g} \in \mathbb{G}_m^n : \dim \mathcal{R}_{\mathbf{g}} = i\}.$$

由命题 5.1，我们知道 $U \cap \phi_q(\mathbf{g}L \cap \mathcal{F})$ 的每一点处的局部维数至少为 $\dim U + \dim L - n = k$，因此 $B_i = \varnothing$ 每当 $i < k$。

命题 5.11. 若 $i > k$，则 $B_i = \varnothing$。

证明。设 $i > k$ 满足 $B_i \neq \varnothing$。令 $\mathbf{a} := \phi_q(\mathbf{g})$。由于 $U \cap \phi_q(\mathbf{g}L \cap \mathrm{F}) \subseteq V \cap (\mathbf{a}+S)$，存在一个不可约分支 X，它属于 $V \cap (\mathbf{a}+S)$，且维数至少为 i，因此

$$\dim X \ge \dim C = i > k = \dim V + \dim(\mathbf{a}+S) - n.$$

这表明 X 是 $V \cap (\mathbf{a}+S)$ 的一个异常分支。设 $H \in \mathscr{H}$ 与 $\mathbf{c} \in E_q^n$ 使得 $X \subseteq \mathbf{c} + H$。事实上，我们可以选取 $\mathbf{c} \in C \subseteq U$。

令 $\psi : E_q^n \to E_q^n/H$ 表示商映射。注意，由（5.1）可知

$$\dim V = \dim U = \dim \psi(U) + \dim U \cap (\mathbf{c} + H).$$

由于我们假设 V 与 S 之间的交持续地可能性较大，推论5.7蕴含 V和 $\mathbf{a}+S$ 也持续地可能性较大，因此存在 $k' > 0$ 使得

$$\dim \psi(U) + \dim \psi(\mathbf{a}+S) = n - \dim H + k'.$$

再次使用纤维维数定理，我们得到

$$\dim S = \dim(\mathbf{a}+S) = \dim \psi(\mathbf{a}+S) + \dim(\mathbf{a}+S) \cap (\mathbf{c}+H).$$

将这些等式合并可得

$$\begin{aligned}\dim U \cap (\mathbf{c}+H) + \dim(\mathbf{a}+S) \cap (\mathbf{c}+H) &= \dim(\mathbf{a}+S) + \dim V - \dim \psi(U) - \dim \psi(\mathbf{a}+S) \\ &= \dim V + \dim S - (n - \dim H + k') \\ &= \dim H + k - k'.\end{aligned}$$

现在考察 $\mathbf{c}+H$ 内 $V \cap (\mathbf{c}+H)$ 与 $(\mathbf{a}+S) \cap (\mathbf{c}+H)$ 之间的交。由于 X 同时包含于 $V \cap (\mathbf{c}+H)$ 和 $(\mathbf{a}+S) \cap (\mathbf{c}+H)$，且 $\dim X \ge i > k$，我们可以结合上述等式与定理 5.5 得到

$$i \le \dim X \le \dim V \cap (\mathbf{c}+H) + \dim S \cap H - \dim H = k - k'$$

这就产生了矛盾。 □

令 B 为 $\mathcal{R}$ 到 $\mathbb{G}_m^n$的投影像。由命题 5.11 可知

$$B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i = B_k.$$

将此与命题5.10以及纤维维数定理结合，可得

$$n + k = \dim \mathcal{R} = \dim B + k,$$

这给出 $\dim B = n$。由胞腔分解可知，这意味着 B 在 p-进拓扑下（作为 $\mathbb{G}_m^n$的子集）具有非空内部。由于 A 在 E_q^n 中 p-进稠密，且 ϕ_q 是连续映射，因此存在 $\mathbf{b} \in B$，使得 $\boldsymbol{\xi} := \phi_q(\mathbf{b}) \in A$。由于 $\mathbf{b} \in B$，必存在 $\mathbf{u} \in U$，使得 $(\mathbf{u}, \mathbf{b}) \in \mathrm{R}$；由 R 的定义可得

$$\mathbf{u} \in U \cap (\mathbf{d} + S),$$

从而证明了该定理。 □

参考文献

[AEK21] Vahagn Aslanyan、Sebastian Eterović 和 Jonathan Kirby。关于 j-函数的微分存在闭性。美国数学会会刊，149(4):1417–1429，2021。doi:10.1090/proc/15333。[AEK23] Vahagn Aslanyan、Sebastian Eterović 和 Jonathan Kirby。一个与模形式 j-函数相容的闭包算子。以色列数学杂志，253(1):321–357，2023。doi:10.1007/s11856-022-2362-y。[AK22] Vahagn Aslanyan 和 Jonathan Kirby。 J-函数的模糊化。数学季刊，73(2):461–475，2022。doi:10.1093/qmath/haab037。[Ax71] James Ax。关于Schanuel猜想。数学年刊（第2辑），93:252–268，1971。doi:10.2307/1970774。[Ax72] James Ax。微分代数几何中的若干主题。I. 代数群的解析子群。美国数学杂志，94:1195–1204，1972。doi:10.2307/2373569。[BK18] Martin Bays 和 Jonathan Kirby。伪指数映射、变体与准极小性。代数与数论，12(3):493–549，2018。doi:10.2140/ant.2018.12.493。[BKW10] Martin Bays、Jonathan Kirby 和 A. J. Wilkie。指数超越幂的Schanuel性质。伦敦数学会通报，42(5):917–922，2010。doi:10.1112/blms/bdq054。[BLN+22] Yuri Bilu、Florian Luca、Joris Nieuwveld、Joël Ouaknine、David Purser 和 James Worrell。Skolem遇见Schanuel。载于：第47届国际计算机科学数学基础研讨会，LIPIcs第241卷。莱布尼茨国际信息学会议论文集，第20号文章，15页。达格斯图尔城堡。莱布尼茨信息中心，瓦登，2022。doi:10.4230/lipics.mfcs.2022.20。[BT19] Benjamin Bakker 和 Jacob Tsimerman。霍奇结构变分的Ax-Schanuel猜想。数学发明，217(1):77–94，2019。doi:10.1007/s00222-019-00863-8。[CCL15] Raf Cluckers、Georges Comte 和 François Loeser。非阿基米德Yomdin-Gromov参数化与有界高度点。《数学论坛：圆周率》，3:e5，60页，2015。doi:10.1017/fmp.2015.4。[CFNSV24] Victoria Cantoral Farfán、Kien Huu Nguyen、Mathias Stout 和 Floris Vermeulen。亨泽尔极小曲线的Pila-Wilkie定理。模型论，3(1):119–145，2024。doi:10.2140/mt.2024.3.119。[CHRK22] Raf Cluckers、Immanuel Halupczok 和 Silvain Rideau-Kikuchi。亨泽尔极小性 I。《数学论坛：圆周率》，10：论文编号 e11，68页，2022。doi:10.1017/fmp.2022.6。[CHRKV23] Raf Cluckers、Immanuel Halupczok、Silvain Rideau-Kikuchi 和 Floris Vermeulen。亨泽尔极小性 II：混合特征与一项丢番图应用。《数学论坛：西格玛》，11：论文编号 e89，33页，2023。doi:10.1017/fms.2023.91。[CL11] R. Cluckers 和 L. Lipshitz。带解析结构的域。《欧洲数学会杂志》（JEMS），13(4):1147–1223，2011。doi:10.4171/JEMS/278。[CLL17] Antoine Chambert-Loir 和 François Loeser。一项非阿基米德Ax-Lindemann定理。代数与数论，11(9):1967–1999，2017。doi:10.2140/ant.2017.11.1967。[CM09] Frank Calegari 和 Barry Mazur。任意数域上的近普通伽罗瓦变形。茹西厄数学研究所期刊，8(1):99–177，2009。doi:10.1017/S1474748008000327。[DR18] Christopher Daw 和 Jinbo Ren。双曲Ax-Schanuel猜想的应用。组合数学，154(9):1843–1888，2018。doi:10.1112/s0010437x1800725x。[Eis95] David Eisenbud。交换代数，数学研究生教材第150卷。Springer-Verlag，纽约，1995。附有代数几何视角。doi:10.1007/978-1-4612-5350-1。[ES25] Sebastian Eterović 和 Thomas Scanlon。可能交。《数学论坛：西格玛》，13：论文编号 e199，2025。doi:10.1017/fms.2025.10114。[FvdP04] Jean Fresnel 和 Marius van der Put。刚性解析几何及其应用，数学进展第218卷。Birkhäuser Boston, Inc.，波士顿，MA，2004。doi:10.1007/978-1-4612-0041-3。[HM94] Deirdre Haskell 和 Dugald Macpherson。C-极小结构的细胞分解。纯粹与应用逻辑年刊，66(2):113–162，1994。doi:10.1016/0168-0072(94)90064-7。[HM97] Deirdre Haskell 和 Dugald Macpherson。关于 p-进数的一种o-极小性版本。符号逻辑杂志，62(4):1075–1092，1997。doi:10.2307/2275628。

[Hub93] R. Huber. 连续赋值. 数学杂志, 212(3):455–477, 1993. doi:10.1007/ BF02571668.[JKLGS19] Gareth Jones, Jonathan Kirby, Olivier Le Gal, and Tamara Servi. 关于全纯函数的局部可定义性. 数学季刊, 70(4):1305–1326, 2019. doi:10.1093/qmath/haz015.[Kir05a] Jonathan Kirby. 更正：《Weierstrass 方程的 Schanuel 条件》 [符号逻辑杂志 70 (2005), no. 2, 631–638; mr2140050]. 符号逻辑杂志, 70(3):1023, 2005. doi:10.2178/jsl/1122038927.[Kir05b] Jonathan Kirby. Weierstrass 方程的 Schanuel 条件. 符号逻辑杂志, 70(2):631–638, 2005. doi:10.2178/jsl/1120224732.[Kir09] Jonathan Kirby. 半阿贝尔簇指数微分方程理论. Selecta Math. (N.S.), 15(3):445–486, 2009. doi:10.1007/s00029-009-0001-7.[Kir10] Jonathan Kirby. 指数域中的指数代数性. 伦敦数学会通报, 42(5):879–890, 2010. doi:10.1112/blms/bdq044.[Kir19] Jonathan Kirby. 模糊复指数. Selecta Math. (N.S.), 25(5):Paper No. 72, 15, 2019. doi:10.1007/s00029-019-0517-4.[KZ06] Jonathan Kirby and Boris Zilber. 实数域上的一致 Schanuel 猜想. Bull. London Math. Soc., 38(4):568–570, 2006. doi:10.1112/S0024609306018510.[KZ14] Jonathan Kirby and Boris Zilber. 指数闭域与关于环面交集的猜想. 纯粹与应用逻辑年刊, 165(11):1680–1706, 2014. doi:10.1016/j/apal. 2014.06.002.[Lan66] Serge Lang. 超越数导论. Addison-Wesley Publishing Co., Read- ing, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1966.[LR00] Leonard Lipshitz and Zachary Robinson. 分离幂级数环与拟仿射刚性几何. Astérisque, (264):vi+171, 2000.[LR05] Leonard Lipshitz and Zachary Robinson. 刚性次解析集的一致性质. Trans. Amer. Math. Soc., 357(11):4349–4377, 2005. doi:10.1090/S0002-9947-05-04003-1.[Mar13] Nathanaël Mariaule. 关于 p-adic 指数环的可判定性, 2013. 博士论文，曼彻斯特大学.[Mar14] Nathanaël Mariaule. p-adic 指数环、 p-adic Schanuel 猜想与可判定性, 2014. arXiv:1408.0900.[MPT19] Ngaiming Mok, Jonathan Pila, and Jacob Tsimerman. Shimura 簇的 Ax-Schanuel. 数学年刊 (2), 189(3):945–978, 2019. doi:10.4007/annals.2019.189.3.7.[MS96] Dugald Macpherson and Charles Steinhorn. 关于 o-极小性的变体. 纯粹与应用逻辑年刊, 79(2):165–209, 1996. doi:10.1016/0168-0072(95)00037-2.[Osw25] Abhishek Oswal. 一个非阿基米德可定义 Chow 定理. 欧洲数学会杂志 (JEMS), 27(4):1407–1446, 2025. doi:10.4171/jems/1394.[Pil11] Jonathan Pila. o-极小性与 $\mathbb{C}^n$上的 André-Oort 猜想. 数学年刊 (2), 173(3):1779–1840, 2011. doi:10.4007/annals.2011.173.3.11.[Pil22] Jonathan Pila. 点计数与 Zilber-Pink 猜想，数学论丛第 228 卷. 剑桥大学出版社，剑桥，2022. doi:10.1017/ 9781009170314.[PS04] Ya'acov Peterzil and Sergei Starchenko. Weierstrass $\wp$ 函数与一维广义环面的统一可定义性. Selecta Math. (N.S.), 10(4):525–550, 2004. doi: 10.1007/s00029-005-0393-y.[PS08] Ya'acov Peterzil and Sergei Starchenko. 非标准背景下的复解析几何. 载于《代数与分析应用中的模型论》第 1 卷，伦敦数学会讲义丛书第 349 卷，第 117–165 页. 剑桥大学出版社，剑桥，2008. doi:10.1017/CBO9780511735226.008.[PST+21] Jonathan Pila, Ananth N. Shankar, Jacob Tsimerman, Hélène Esnault, and Michael Groechenig. Shimura 簇上的典范高度与 André-Oort 猜想, 2021. arXiv:2109.08788.[PT16] Jonathan Pila and Jacob Tsimerman. 关于 j函数的 Ax-Schanuel. Duke Math. J., 165(13):2587–2605, 2016. doi:10.1215/00127094-3620005.[PW06] J. Pila and A. J. Wilkie. 可定义集的有理点. Duke Math. J., 133(3):591– 616, 2006. doi:10.1215/S0012-7094-06-13336-7.[Sil94] Joseph H. Silverman. 椭圆曲线算术进阶主题，数学研究生教材第 151 卷. Springer-Verlag, New York, 1994. doi:10.1007/ 978-1-4612-0851-8.

[Tsi18] Jacob Tsimerman. 关于 $\mathcal{A}_g$的猜想。 数学年刊 *(2)*, 187(2):379–390,2018. doi:10.4007/annals.2018.187.2.2.[Wil08] A. J. Wilkie. 全纯函数局部可定义性理论的一些结果. 载于《代数与分析应用中的模型论》第 *1* 卷 , 数学论丛第 349 卷，伦敦数学会讲义丛书 , 第 197–213 页 . 剑桥大学出版社，剑桥，2008. doi:10.1017/CBO9780511735226.010.[Zil05] B. Zilber. 特征零代数闭域上的伪指数运算. 纯粹与应用逻辑年刊, 132(1):67–95,2005.doi:10.1016/j.apal.2004.07.001.电子邮箱: sebastian.eterovic@univie.ac.at库尔特·哥德尔研究中心，维也纳大学，奥地利维也纳 1090电子邮箱: florisvermeulen.math@gmail.com明斯特大学，明斯特数学中心，Einsteinstrasse 62，德国明斯特 48149