arXiv:2602.16472v1 [math.GR] 18 Feb 2026

精确拟合双曲群

MARTÍN BLUFSTEIN、VICTOR CHEPOI、HUAITAO GUI 和 DAMIAN OSAJDA

摘要。若一个收缩复形／桥图的（度量）区间「不太大」，则称其为*fit*。我们证明，一致局部有限的 fit收缩复形具有 Yu 的性质A。特别地，在此类复形上适当作用的群具有性质 A，（等价地）它们是精确的，且（等价地）它们是边界 amenable。作为应用，我们证明，来自某个包含所有大型 Artin 群的类的群，以及所有有限表现的图式 $C(3)$–$T(6)$ 小消去群和有限表现的经典 $C(6)$ 小消去群，都是精确的。我们还给出更多例子。我们的证明依赖于 Špakula 和 Wright 提出的性质A组合准则。

1. 引言

1.1. 主要结果。 将度量空间嵌入希尔伯特空间，即使仅以粗略的方式嵌入，也能利用后者的几何性质，对前者得出有力结论。这同样适用于配备适当度量的（可数）群。特别是，对于可粗略嵌入希尔伯特空间的空间，粗 Baum-Connes 猜想成立 [Yu00]。对于可数群，粗 Baum-Connes 猜想蕴含强 Novikov 猜想，例如 [Roe96,Hig00,STY02]。

Guoliang Yu [余00] 提出了一种粗几何性质——性质*A*——作为粗嵌入希尔伯特空间的判据。这种性质可以看作是 amenability 的一种“非等变”“粗”或“弱”变体。与 amenability 类似，它也有许多不同形式的等价定义——其中一种见定义 2.2。Yu 的性质 A 本身引起了广泛关注，并在过去几十年中得到深入研究；综述请见 [BO08,Wil09,NY23] 。对于一个群H ，当其配备关于有限生成集的字度量并视为度量空间时，以下性质等价 [HR00, Oza00, GK02]:

- H 具有 Yu 的性质 A；
- H 是精确的，即函子 $C^*_r(H, \square)$ 是精确的；
- H 是边界 *amenable*的，即 G 在某个非空紧空间上存在 amenable 作用。

这些只是分别从三种不同视角——几何、分析和动力学——给出的三种不同刻画。关于群的性质 A 的更多刻画，见第 2.2 节。目前，对于不具有 Yu 的性质 A 的有限生成群，仅有两种构造：Gromov 随机怪物群 [Gro03], 以及在 [Osa20]中构造的图式小消去群。基本上，文献中出现的所有其他群都被认为具有性质 A。然而，目前仅对少数几类群证明了这一点，包括：（Gromov）双曲群 [Ada94], Coxeter 群[DJ99], 单关系群 [Gue02], 线性群 [GHW05], 相对双曲群（具有适当的抛物子群） [Oza06], CAT(0) 立方群 [CN05, BCG$^+$09, GN11]）、有限型曲面上的映射类群 [Kid06, Ham09], 某些建筑的等距变换群 [DS09, Cam09, Léc10], 几何地作用于二维 systolic 复形上的群 [HO20], 自由群的外自同构群 [BGH22], 以及双曲型二维 Artin 群 [HH21]。例如，目前仍不清楚几何地作用于 CAT(0) 空间上的群是否具有性质 A，或能否粗嵌入希尔伯特空间——相关问题见第 10 节。

本文通过引入适合性这一概念，为一大类收缩复形证明了性质 A。收缩 复形是旗单纯复形，其 1-骨架是桥接 图，也就是说，这类图中的等距圈长度均为 3——详情见第 2.1 节。桥图最初由 Soltan 和 Chepoi [SC83],以及 Farber 和 Jamison [FJ87]引入。收缩复形最早由 [Che00], 研究，之后 Januszkiewicz 和 Świ˛atkowski [JS06], 以及 Haglund [Hag03]在几何群论的框架下重新发现了它们。若一个群几何地作用于一个收缩复形上，即该作用是适当且余紧的，则称该群为$systolic$ 群。收缩性是一种组合型非正曲率；为群赋予收缩结构，能够让我们相当有效地把握其几何性质。这一理论已成功用于构造新的奇异群例子 [JS03,JS06], ，也用于为“经典”群赋予非正曲率结构，从而得以证明关于这些群的新结果[HO18, OP18, FO20]。本文的主要结果延续了后一研究方向。我们引入 fit收缩复形这一子类——其区间的层集为拟线段（详情见第 3 节）。

主定理。 一致局部有限的适配轮状复形具有 *Yu* 的性质 *A* .

下面我们介绍主定理的主要应用——应用于 Artin 群（推论 A）以及小消去群（推论 B 和 C）。我们还给出了一个三维伪流形的例子（推论D）。除此之外，该定理还可用于在其他情形下重新证明性质 A：对于二维 systolic 复形（见注记 3.9）以及少数几类规模更小的复形，均可如此。我们相信，主定理以及我们的一般方法（例如见注记 3.10）将对其他大类群和复形有所助益；参见第10节。

在此过程中，我们证明了一个关于一般桥图／systolic 复形的结果，相信该结果本身也具有独立意义——命题 4.2。我们还给出了一致局部有限的适配轮状复形的刻画（命题 3.12），以及一个关于适合性的实用判据（推论 3.18）。我们在证明中使用了这些结果，并相信它们将在未来的研究中发挥作用。

大类型 *Artin* 群。Artin 群是一类群，例如辫群就是其推广对象。由于其性质神秘，近年来受到了广泛研究。回顾一下，对于一个有限单纯图 Γ ，若顶点之间的每条边 ab a、b 都标有一个正整数 $m_{ab} \geq 2$，则与该图 Γ 相关联的*Artin* 群 A_Γ 由以下表示给出：

$$\langle a \in V(\Gamma) \mid \underbrace{aba\cdots}_{m_{ab}} = \underbrace{bab\cdots}_{m_{ab}}, \text{ whenever } a \text{ and } b \text{ are connected by an edge in } \Gamma\rangle,$$

若 Artin 群 A_Γ 的定义图 Γ 中所有边标号 m_{ab} 都至少为 3，则称其为大类型 ；更一般地，若图 Γ不含有一条边标号为 2 的三角形，也不含有三条边标号为 2 的正方形，则称其为几乎大类型。

尽管人们认为所有 Artin 群都满足某种非正曲率概念，但一般而言，对任意 Artin 群的几何性质仍知之甚少；有关 Artin 群的更多信息，参见 [vdL83,GN11,HO20,HH21, BV24]。Huang 和 Osajda [HO20] 为几乎大类型 Artin 群赋予了收缩群的结构。这使我们能够就这些群的各种性质得出有力结论，并证明如下结果。

推论 A. 几乎大类型阿廷群是精确的。

该推论是主定理的直接推论，也基于如下事实：几乎大类型阿廷群几何地作用于 fit收缩复形上——命题 6.4。

$C(3)$–$T(6)$ 与 $C(6)$ 小消去群。小消去是构造无限群的一种强有力的经典技术；背景参见例如 [LS01,Wis03,OP18,Osa20] 。小消去复形是二维CW复形，并具有某些

组合非正曲率条件——定义见第 7.1 节。小消去的图形版本是对经典情形（即 [LS01,Wis03]中所呈现的情形）的深远推广，近来得以构造具有奇异性质的群的例子，例如新的非精确群 [Osa20,Osa18]。经典的小消去条件有三种： $C(6)$条件、 $C(4)$–$T(4)$条件以及 $C(3)$–$T(6)$条件（见定义7.1）。在命题7.3与7.4中，我们为单连通的图形 $C(3)$–$T(6)$小消去复形配备适合的离散几何。结合我们的主定理，由此得到如下结论。

推论 B. 一致局部有限的单连通图形 $C(3)$–$T(6)$ 小消去复形具有 *Yu* 的性质 *A*。因此，具有有限图形 $C(3)$–$T(6)$ 表示的群是精确的。

此外，在命题 8.3 中，我们证明，对于每个单连通的经典 $C(6)$ 复形 X，Wise $W(X)$ 引入的一个单纯复形——一种与 X [Wis03, OP18] 自然相关联的特定收缩复形——都是 fit。因此我们得到以下结论。

推论 C. 一致局部有限的单连通经典 $C(6)$ 小消去复形具有 *Yu* 的性质 *A*。因此，具有有限 $C(6)$ 表示的群是精确的。

一个三维收缩伪流形。上文探讨的三个族中的所有群都几何地作用于二维可缩复形上，因此在某种意义上是“二维的”。接下来，我们给出一个群几何地作用于三维拟测地伪流形上的例子。遵循 Świątkowski [Ś06],Wieszaczewski [Wie08] 的构造，定义了一个收缩群 $G(54,54,72,72)$，它几何地作用于三维收缩伪流形 $K(54,54,72,72)$ 上。我们证明这个复形是 fit。

推论D。 三维收缩伪流形 $K(54,54,72,72)$ 是 ***fit*** 的，因此它具有性质*A*。因此，群 $G(54,54,72,72)$ 是精确的。

关于 $K(54，54，72，72)$ 和 $G(54，54，72，72)$ 的定义，以及相关讨论——注 9.5，见第 9 节。

1.2. **相关结果**。 根据 [OP09,FO20]，粗 Baum-Connes 猜想及由此推出的强 Novikov 猜想已知对收缩群成立。一般而言，收缩复形或收缩群是否具有性质A或能否粗嵌入希尔伯特空间尚无定论，参见第10节。

对于 Artin 群，性质A对直角 Artin 群（所有标签均为 2） [CN05]成立；更一般地，对***FC***型 Artin 群（定义图中的团 Γ 生成有限考克斯特群） [GN11]也成立。这两个结果都利用了这样一个事实：这类 Artin 群在 CAT(0)立方复形上有良好的作用。本文所讨论的大型 Artin 群则被视为与 FC型 Artin 群截然不同。与我们的结果更相关的是，文献 [HH21]证明了双曲型二维 Artin 群具有性质A。其证明基于这样一个事实：这类群可以在 Gromov 双曲复形上有良好的作用。对于一般的大型 Artin 群，这种方法并不适用。一个重要例子（无法用文献 [HH21]中的技术处理）是 A_Γ，其中 Γ 是一个所有边的标号均为 3 的三角形。这是一个大型 Artin 群（因此是二维的），但并非双曲型。值得一提的是，这个特定的 A_Γ 与五孔球面的映射类群可公度，因此其精确性可由 [Kid06, Ham09]推出。然而，大多数大型 Artin 群并不与曲面映射类群粗等价。最后，值得指出的是，文献[HH21] 中对精确性的证明被用于建立相应群的测度等价刚性；参见第10节。

对于有限表现的图形 $C(6)$、 $C(4)$–$T(4)$ 或 $C(3)$–$T(6)$ 小消去群，粗 Baum-Connes 猜想以及由此得到的强 Novikov 猜想可由以下结果的结合推出

结合 [Wis03、OP18、FO20、CCG+25、Dud25] 的结果。此前尚不知道它们是否具有性质A，或能否粗嵌入希尔伯特空间。关于一些开放问题，请参见第10节。

1.3. **结构安排**。为证明主定理，我们采用 Špakula 和 Wright [ŠW17]提出的判据——见命题 5.1。我们也遵循 ŠW [CAT(0)立方复形17]中证明性质A的一般思路。为此，我们需要证明命题 4.2，即正规团路径会快速收敛到区间。为满足命题 5.1 中的第 (3) 项，我们需要收缩复形中的区间“不能太大”。由此引出“fit收缩复形”的定义——定义 3.8。为说明这一概念的合理性，我们在第 3 节回顾收缩复形中层集具有拟树这一基本性质。做好这些准备后，我们将在第 5 节证明主定理。

在第6、7和8节中，我们证明几乎大类型Artin群、有限表现的图示 $C(3)$–$T(6)$群以及有限表现的经典 $C(6)$群几何地作用于局部有限度一致的适配轮状复形上，从而证明推论A、B和C。在第 9 节中，我们展示一个由某群几何作用其上的适配轮状3-伪流形实例，从而证明推论D。

第2节介绍一些关于图的预备材料（并确定本文其余部分所用的记号），以及关于 Yu 的性质 A 的内容。在最后的第10节中，我们将讨论进一步的研究方向及结果的应用。

2. 预备知识

2.1. 图。本文考虑的所有图 $G = (V(G)\ E(G))$都是单纯、无向且连通的。对于两个不同的顶点 $u, v \in V(G)$，若有一条边连接 u 和 v，我们记作 $u \sim v$；否则记作 $u \nsim v$。由子集$A \subseteq V(G)$在 G 中诱导出的子图是图 $G[A] = (A, E')$，其中 $uv \in E'$ 当且仅当 $uv \in E(G)$。团是 G的完全子图，即两两相邻顶点组成的子集。图 G 中两个顶点 u 和 v 之间的距离$d(u, v) = d_G(u, v)$，是最短(u, v)路径的长度。若图 G 的诱导子图 $H = G[A]$ 满足任意两个顶点 $u, v \in A$之间有 $d_H(u, v) = d_G(u, v)$，则称其为 G的等距子图。 u和 v之间的区间 $I(u, v)$由所有位于最短(u, v)路径上的顶点组成，也就是说，由所有（度量意义上）位于u和 v之间的顶点组成： $I(u, v) = \{x \in V(G) : d(u, x) + d(x, v) = d(u, v)\}$。如果一个诱导子图包含其任意两个顶点在 G 中的区间，则称其为凸的。对于 G 中的顶点v 和整数 $r \geq 1$，我们用 $B_r(v)$表示 G 中以 v为中心、半径为 r 的球（以及由该球诱导出的子图），即 $B_r(v) = \{x \in V(G) : d(v, x) \leq r\}$。更一般地，集合 $A \subseteq V(G)$周围的 r-球，是集合（或由其诱导出的子图） $B_r(A) = \{v \in V(G) : d(v, A) \leq r\}$，其中 $d(v, A) = \min\{d(v, x) : x \in A\}$。类似地， G中以 v 为中心、半径为 r 的球面，是集合（或由其诱导出的子图）$S_r(v) = \{x \in V(G) : d(v, x) = r\}$。与通常一样， $N(v) = S_1(v)$表示 G中顶点 v 的邻点集合，并且 $N[v] = B_1(v)$。 $v \in V(G)$的链接是 G中由 $N(v)$诱导出的子图。球面 $S_r(v)$中的任意子集 S 都称为与 v的距离一致，为 r。

图 G的三个顶点 u、v、w构成度量三角形 uvw，当且仅当 $I(u, v)$ $I(u, w)$，且 $I(w, u)$ 两两相交的部分仅为端点。若对于所有 $x \in I(v, w)$ 都有 $d(u, x) = k$，则称度量三角形 uvw 为大小为 k 的强等边三角形（交换 u、v、w的角色时同样成立）。三元组 x、y、z的拟中位数是满足以下条件的度量三角形 $x'y'z'$： $d(x, y) = d(x, x') + d(x', y') + d(y', y)$ $d(y, z) = d(y, y') + d(y', z') + d(z', z)$，并且 $d(z, x) = d(z, z') + d(z', x') + d(x', x)$。每个三元组 x、y、z至少存在一个拟中位数。

定义 2.1 (桥接/systolic)。图 G若其任意等距圈的 G大小均为 3，则称为桥接图。若旗单纯复形的 1-骨架是桥图，则称其为$systolic$。

收缩复形恰好是满足以下条件的单连通旗单纯复形：顶点的链不含诱导 4-圈和 5-圈 [Che00, JS06]。图中的一条弦 是

图中环的一条边 G，它不属于该环，却连接环上的两个顶点。若图 G 中的任意长度为 >3 的环 G 都有一条弦，则称该图为弦图。换言之，这样的环都不是诱导子图。显然，弦图是桥接图。

一个 k-扇形图 是由一条长度为 k 的路径和一个与该路径上所有顶点都相邻的顶点构成的图；见图 1 左上。三叉树 是一个有 3 个尖端的星形图，即由一个中心顶点和 3 个两两不相邻且与中心顶点相邻的顶点（称为尖端）构成的图；见图 1 上中。小行星图 是由一个三角形构成的图，且该三角形的每个顶点都与一个额外顶点相邻，使得这 3 个额外顶点两两不相邻；见图 1 右上。一个 n-三叉树 是将三叉树的每条边细分为长度为 n的路径后得到的图；见图 1 左下。类似地，一个 n-小行星图 是将小行星图的三条外边分别细分为长度为 n的路径后得到的图；见图 1 右下。如果没有特别说明 n，我们将 n-小行星图和 n-三叉树称为大型小行星图和大三叉树。我们还稍微滥用一下记号，约定 0- 三叉树是一个顶点，0- 小行星图是一个三角形。双重小行星图 是将两个小行星图沿其尖端粘合得到的图；见图 3 右侧。

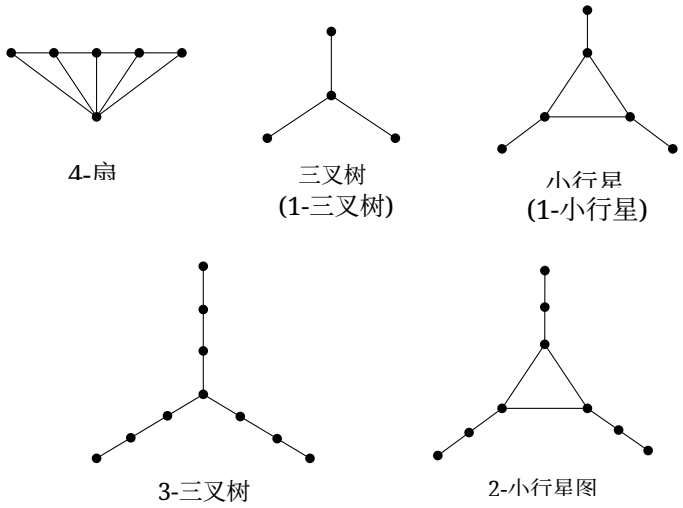


图 1

2.2. **余的性质 A**。 为求完整，也为满足好奇的读者，我们在此给出性质 A 的定义；它基本上与余在[余00]中最初提出的定义相同。它可以看作是通过 Følner 集定义 amenability 的一种“非等变”版本。其他数十种定义可参见例如 [Wil09] ，而 [NWZ 25] 则给出了一个与 amenability 的定义更为相似的近期定义。

定义 2.2。 一致离散度量空间 (X,ρ) 满足性质A ，如果对每个$\epsilon, R>0$，都存在一族有限子集 $\{A_x\}_{x\in X}$, $A_x\subset X\times\mathbb{N}$以及常数$S>0$ ，使得

- $\frac{|A_x\triangle A_y|}{|A_x\cap A_y|}\leq\epsilon$ 若 $\rho(x,y)\leq R$，并且
- $A_x\subseteq B_S(x)\times\mathbb{N}$，其中 $B_S(x)$ 是以 x 为中心的 (X,ρ) 中的 S-球。

我们继续列举有限生成群的性质A的等价刻画H ，接续引言：

- H 的约化C^*代数是精确的 [KW99];
- H 的一致 Roe 代数是核的 [Oza00];
- H 在某一类对偶模上的有界上同调群消失 [BNN12，Mon11];

- H 具有算子范数局部化性质 [Sak14];
- H 渐近不变上同调群 [消失12]BNW。

这份列表很不完整。

证明我们的主定理所需了解的关于性质A的全部内容，就是 Špakula 和 Wright [ŠW17]给出的一个有用的组合刻画——参见第 5 节中的命题 5.1。

3. Fit 收缩复形

本节中，我们定义收缩复形的一个子类——fit收缩复形，它是本文的主要研究对象。为此，我们需要做一些准备。

3.1. 层集与fit收缩复形。 首先，我们回顾桥图的一些已知性质。

定理 3.1. *[FJ87, SC83]* 一个图是桥接的，当且仅当凸集 A周围的球 $B_r(A)$ 是凸的。

引理 3.2. *[Che89]* 桥图的所有度量三角形都是强等边的。

回顾一下，对于 $B, C > 0$ 度量空间之间的映射 $f\colon (X, d_X) \to (Y, d_Y)$是一个$(B, C)$-拟等距，如果 f 的像的 C-邻域是整个空间 Y，并且对于每个 $x, x' \in X$ 我们有

$$B^{-1} d_X(x, x') - C \le d_Y(f(x), f(x')) \le B d_X(x, x') + C.$$

引理 3.3. *[BCD99]* 弦图与树是$(1,2)$-拟等距的。

一个图 G 满足三角形条件 (TC)，如果对于 $v, x, y \in V$，且 $d(v, x) = d(v, y) = k$ 以及 $x \sim y$，存在 $z \sim x, y$ 使得 $d(v, z) = k - 1$。桥图满足(TC)，事实上它们满足如下更强的性质：

引理 3.4. *[JS06]* 设 $G = (V, E)$ 是一个桥图，x 是 G的任意顶点，且 K 是 G 中与 x等距的一个团。那么，所有与 x 的距离为 $k - 1$且与 K 的所有顶点都相邻的顶点 y 所构成的集合，是 G的一个非空团。

对于两个顶点 $u, v \in V$，若 $d(u, v) = \ell$，则区间 $I(u, v)$ 的 k层 $L_k(u, v)$ 是 G 由所有满足 $d(u, x) = k$ 且$d(x, v) = \ell - k$ 的 $x \in I(u, v)$ 所诱导的子图。球的凸性（定理 3.1）意味着桥图也满足以下性质（称为区间邻域条件，简称 (INC)[CCG23]）：$I(u, v)$ 中与 u 相邻的顶点诱导出 G的一个团；换言之，$I(u, v)$ 中的层$L_1(u, v)$ 是一个团。

以下结果已在 [OP09，引理 8.4，推论 8.6] 中得到证明（最近 Steven Seif 也独立地重新证明了该结果）。通过引理 3.3，它意味着桥图中的层集是 (1，2)-拟树（此类层集的示意图见图 2 左侧）。我们给出一个简单的替代证明。

命题 3.5。 对于桥图 G和 u，$v \in V$ 的每个层 $L_k(u, v)$都是 $I(u, v)$ 的一个不含诱导 *3*-扇的凸弦子图 G。

证明。 $L_k(u, v)$ 是凸的，因为它是凸球 $B_k(u)$ 和 $B_{\ell-k}(v)$ 的交集。因此，$L_k(u, v)$ 是桥图。现在，命题由以下两个断言推出。

断言 3.6。 $L_k(u, v)$ 不含 3-扇。

证明。 反设不然，考虑由 3-路径 $P = (p, q, q', p')$ 定义的 3-扇 $F \subseteq L_k(u, v)$，以及一个与 P 的所有顶点都相邻的顶点 x。将引理 3.4 应用于 F 中的三角形 x, p, q 和 x, p', q'，可推出存在顶点 $y \sim p, q, x$ 和 $y' \sim x, p', q'$，它们到 u 的距离为 $k - 1$。由于 F 是诱导的，且 G 的球是凸的，

顶点 y 和 y' 不同，且 $y \nsim p', q'$ 和 $y' \nsim p, q$。由于 y, y' 都与 x 相邻，球 $B_{k-1}(u)$ 的凸性意味着 $y \sim y'$。但这样一来，顶点 y, y', q', q 就诱导出一个禁用的 4-圈。这说明 $L_k(u, v)$ 不含 3-扇。□

命题 3.7。若桥图 H 含有一个长度为 > 3 的诱导圈 C，则 H 含有一个诱导 3-扇。

证明。由于 C 的长度为 > 3，C 不是等距的。设 a、b 是 C 中满足 $d_H(a, b) < d_C(a, b)$ 的一对最近顶点。设 x 是 a 在 C 的两条 (a, b)-路径中一条最短路径 P 上的邻点。根据 a 的选取，b，$d_H(b, x) = d_C(b, x)$。设 y 是 x 在 P 中的第二个邻点。于是 $y \in I(x, b)$。若 $a \in I(x, b)$，由 (INC)，$y \sim a$，这与 C 是诱导的这一假设矛盾。因此 $d_H(b, x) = d_H(b, a)$。由 (TC)，存在 $z \sim x, a$，它们比 a, x 更靠近 b 一步。由 (INC)，$z \sim y$；由 (TC)，存在 $w \sim y, z$，它们比 y, z 更靠近 b 一步。我们断言，a, x, z, y, w 诱导出一个 3-扇。根据 a 的选取以及 z 和 w 的定义，我们推得 w 不可能与 a 或 x 相邻。由于 C 是诱导的，a 和 y 不相邻。由此得证。□

□

定义 3.8（Fit）。若存在 $B, C > 0$，使得每个层（在每个区间中）都与一条线段（B, C）-拟等距，则收缩复形 X 是*fit* 的。

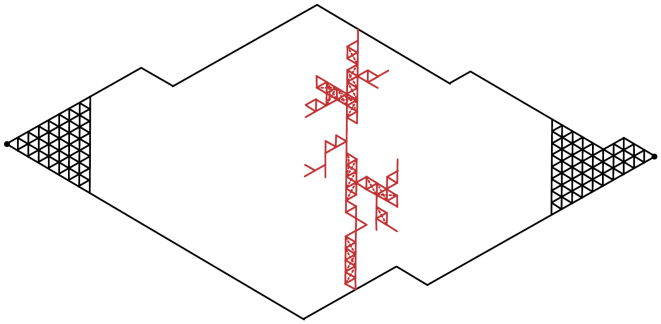


图 2。收缩复形/桥图的一个区间中的层集（红色）。“fit”意味着层集“不会太大”。

注记 3.9。注意，二维 systolic 复形是 fit 的。事实上，它们的区间可等距嵌入 systolic 平坦平面 [CLR22，引理 3]。请注意，下文将介绍与大型 Artin 群（第 6 节）、$C(3)$–$T(6)$（第 7 节）以及 $C(6)$ 群（第 8 节）相关联的 fit收缩复形；它们通常并非二维复形。

注记 3.10。值得一提的是，为使我们的主定理成立，可以放宽 fit收缩复形的定义。只需存在一个点 $x_0 \in X$ 和一个多项式p，使得对于每个 $x \in X$，在 $I(x, x_0)$ 的任意层集中，半径为 r 的任意球至多包含 $p(r)$ 个顶点。对于本文第 6、7、8 和 9 节中的主要例子，以及二维 systolic 复形（见上文注记 3.9），定义 3.8 中更强的性质均成立。

3.2. **拟合正交性的刻画**。我们再给出 fit收缩复形的另外两个结构刻画（命题 3.12），以及一个随后的、更容易检验的拟合性条件（推论 3.18）。我们将在第 6、8 和 9 节中使用它们。首先需要一些定义。取四面体序列 $\sigma_i = \sigma(v_i, a_i, b_i, c_i)$ 和$\sigma'_i = \sigma(v_{i-1}, a_i, b_i, c_i)$，对于 $i \in \mathbb{Z}$，并沿由顶点集合 $\{v_i, a_i : i \in \mathbb{Z}\}$、$\{v_i, b_i : i \in \mathbb{Z}\}$ 以及 $\{v_i, c_i : i \in \mathbb{Z}\}$ 张成的测地线α、β、γ，将“拉链式”正交半平面粘合起来，如图 3 所示，并将所得的收缩复形称为 三平面。一个 n-箭头头部 是

通过观察三平面中介于 v_0 与 v_n 之间的区间 $I(v_0, v_n)$ 而得到的图（见图 3）。该四面体序列称为箭头头部（相应地，三平面）的 轴 。

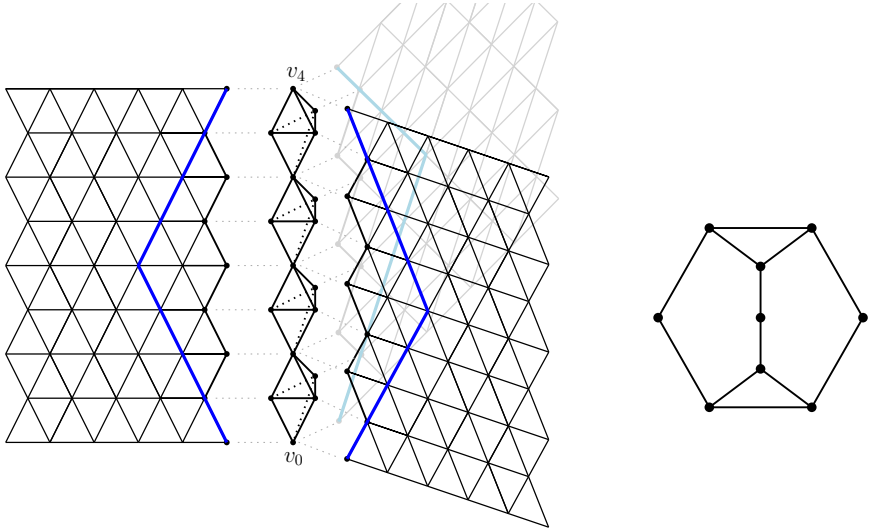


图 3。左侧：一个三平面，其半平面沿着四面体序列以“拉链式”方式粘合。一个 4-箭头头部用粗蓝线勾勒。右侧：顶点 v_i 的链接，一个双重小行星。

给定 $N \in \mathbb{N}$，若一个图不包含等距嵌入的 n-三叉树或满足 $n > N$ 的 n-小行星，则称其为 N-无分支；若不包含满足 $m > M$ 的等距嵌入的 m-箭头头部，则称其为 M-无害。

引理 3.11。 设 u、v 是收缩复形 X 的两个顶点，其中 $d(u, v) = \ell$。设$1 \le k \le \ell - 1$。

(1) 如果层集 $L_k(u, v)$ 包含一个等距嵌入的 n-三叉树，那么 $L_{k+1}(u, v)$包含一个等距嵌入的$(n-1)$-小行星。*(2)* 如果层集 $L_k(u, v)$ 包含一个等距嵌入的 n-小行星，那么 $L_{k+1}(u, v)$包含一个等距嵌入的 n-三叉树。

证明。我们首先证明第(1)项。设 T 是 $L_k(u, v)$中的一个 n-三叉树，其中心为 v_0，且 x、y、z是 v_0 在 T中的邻点。根据三角形条件(TC)，将其应用于 v 以及边 xv_0、yv_0和 zv_0中的每一条，我们找到三个顶点 a_1、b_1、$c_1 \in L_{k+1}(u, v)$，使得$a_1 \sim x$、v_0、$b_1 \sim y$、v_0以及 $c_1 \sim z$、v_0。由于 x、y、z不相邻，且 $L_k(u, v)$是凸的，顶点 a_1、b_1、c_1两两不同。由于 a_1、b_1、$c_1 \sim v_0$，且 $L_{k+1}(u, v)$是凸的，a_1、b_1、c_1 两两相邻，因此我们得到一个三角形。现在我们将(TC)应用于 v 以及 T其余三条长度为 $n-1$ 的路径的边（端点位于 x、y和 z），从而在 $L_{k+1}(u, v)$中导出新的顶点。由 $L_{k+1}(u, v)$的凸性，这些顶点两两不同，并诱导出三条路径，它们与三角形 $a_1b_1c_1$一起在 $L_{k+1}(u, v)$中定义了一个$(n-1)$-小行星A。由于层 $L_{k+1}(u, v)$是凸的，且 n-三叉树 T是等距的，故$(n-1)$-小行星 A 也等距嵌入于 X中。

第 2 项的证明类似，唯一的区别是第一步中，我们对 n-小行星的三角形应用引理 3.4，而不是 (TC)。然后，和之前一样，我们在 $L_{k+1}(u,\ v)$ 中得到一个等距嵌入的 n-三叉树。□

命题 3.12。 设 X 是一个收缩复形。则以下条件等价：
(1) X 是 *fit*；*(2)* 存在 $N \in \mathbb{N}$，使得所有区间的所有层集都是 N-无分支的。

(3) 存在 $M \in \mathbb{N}$，使得 X 是 M-无害的。
此外，如果所有区间都是无 N 分支的，那么所有层集都与线段（$2N+2$)-准等距。

证明。 我们先证明 (2) 和 (3) 等价。显然 (2) 蕴含 (3)，因为在箭头头部的相对端点之间，区间 $I(v_0, v_{2n+1})$ 中的层集包含 n-三叉树和 n-小行星。现在假设 X 是无害的，但存在顶点 u, v，使得某个层 $L_k(u, v)$ 含有等距嵌入的 $\lceil \frac{M+1}{2} \rceil$-三叉树或 $\lceil \frac{M}{2} \rceil$-小行星。通过反复应用引理 3.11，我们得到一个 $(M+1)$-箭头头部 Y，其轴由一个四面体序列定义，该序列以 $\sigma_1' = \sigma(v_0 = v, a_1, b_1, c_1)$ 和 $\sigma_1 = \sigma(v_1, a_1, b_1, c_1)$ 开始。根据构造， Y 是 systolic。

对于层 $L_i(u, v)$，我们用 Y_i 表示交集 $Y \cap L_i(u, v)$。如果该交集非空，那么 Y_i 就是一张大型小行星图或一棵大三叉树。由 Y 的构造可知，如果 y 是 Y 的任意顶点，例如 $y \in Y_j$，且满足 $k < j$，那么存在一个 i，满足 $k \le i < j$，使得 Y_i 包含两个顶点 a 和 b，并且顶点 y、a、b 在 Y 中构成一个边长为 $\ell = j - i$ 的等边三角形 $\Delta(y, a, b)$（即，将边长为 ℓ 的等边三角形细分为边长为 1 的等边三角形）。此时，我们称顶点 a、$b \in L_i(u, v)$ 生成顶点 y。反过来，任意一对顶点 a、$b \in Y_i$，若满足 $i \ge k$，则会生成唯一的顶点 y，它属于层 $L_{i+d(a,b)}(u, v)$。

为了导出矛盾，还需证明（$M+1$）箭头头部 Y 等距嵌入于 X。任取 Y 的两个顶点 x、y，设它们分别为 $x \in L_i$（u，v）和 $y \in L_j$（u，v），且满足 $k \le i \le j \le d$（u，v）。我们对 $\ell = j - i$ 以及 Y 中 x 与 y 之间的距离 d_Y（x，y）作双重归纳。若 $\ell = 0$，则 x 和 y 属于同一层 L_i（u，v），结论即得，因为 Y_i 是等距嵌入的大三叉树或大型小行星图。现在假设 $\ell > 0$。令 z 为 Y_i 中距离 y 最近的顶点。若 Y_i 中存在多个这样的顶点，则再假设 z 是所选顶点中距离 x 最近的一个。根据 Y 的定义可知， X 中 y 与 z 之间的距离为 ℓ，并且 Y 包含一条长度为该值的（z，y）路径，该路径经过层集 L_i（u，v） L_{i+1}（u，v）..... L_j（u，v）。因此，d_Y（z，y） $= d$（z，y） $= j - i = \ell$。若 $x = z$，则结论即得。因此，令 $x \ne z$。

根据 z 的定义可知， y 由一对 z、w 生成，其中 w 是 Y_i 的某个顶点，且 z 位于 Y_i 中一条 (w, x)- 路径上。此外，若 $x \nsim z$，则一对 w、 x 会生成一个顶点 $y_0 \in Y_{j'}$，其中 $j' = j + d(z, x)$。注意，在这种情况下，等边三角形 $\Delta(y, z, w)$ 包含于等边三角形 $\Delta(y_0, x, w)$ 中。另请注意，在 X 中有 $y \in I(y_0, w) \cap I(y_0, z)$ 和 $y_0 \in I(y, v)$。此外， z 属于 $\Delta(y_0, x, w)$ 中一条最短的 (x, y)-路径 π，先沿层集行进，然后沿着 Y_i 直行。我们用 $\gamma = (x, q, q', \dots, w)$ 表示 Y_i 中连接 x 和 w（并经过 z）的唯一最短路径。我们区分两种情况。

情形 3.13。 顶点 x 和 z 不相邻。

对所有不同于 x 的 $p \in \pi \cap \gamma$，都有 $d_Y(y, p) < d_Y(y, x)$，因此根据第二个归纳假设，我们得出 $d_Y(p, y) = d(p, y)$。考虑 $\pi \cap \gamma$ 的前两个顶点 q 和 q'。由于 $x \nsim z$，顶点 q' 存在。因为 $x \sim q$，所以 $d(q, y) - 1 \le d(x, y) \le d(q, y) + 1$。因此，要证明 $d(x, y) = d_Y(x, y)$，并且由于 $d_Y(x, y) = d_Y(q, y) + 1$，只需排除以下两种可能： $d(x, y) = d(q, y) - 1$ 和 $d(x, y) = d(q, y)$。第一种情况显然成立，因为若 $d(x, y) = d(q, y) - 1$，则 $x, q' \in I(q, y)$。由于 X 是 systolic 的， x 和 q' 必须相邻，这与假设 π 是 Y 中一条最短的 (x, y)-路径矛盾。因此我们可以假设 $d(x, y) = d(q, y) := k$。令 x_1 为 $\Delta(y_0, w, x)$ 中 x 和 q 的公共邻点。由于 $x_1 \in L_{i+1}(u, v)$，根据第一个归纳假设， $d(x_1, y) = d_Y(x_1, y) = k$。在 X 中对 y 和三角形 x, q, x_1 应用引理 3.4，可得一个顶点 $s \sim x, q, x_1$，其到 y 的距离为 $k - 1$。由于 $s, q' \in I(q, y)$，顶点 s 和 q' 必须相邻。由于 $s \sim q', x \in L_i(u, v)$ 且 $L_i(u, v)$ 是凸的，这意味着 $s \in L_i(u, v)$。由于 Y_i 是大三叉树或大型小行星图， s 不是 Y 的顶点。

现在令 q_1 为 $\Delta(y_0,w,x)$ 中 q' 和 q 的公共邻点。显然， $q_1\neq s$。由于 $q_1,s\in I(q,y)$，顶点 s 和 q_1 必须相邻。在 X 中对 y 和三角形 q',s,q_1 应用引理 3.4，可得一个顶点 $s'\sim q',s,q_1$，其到 y 的距离为 $k-2$。根据 Y 的构造， s' 不属于 $\Delta(y_0,w,x)$。令 x_2 为 $\Delta(y_0,w,x)$ 中 q_1 和 x_1 的公共邻点，并令 q_2 为 $\Delta(y_0,w,x)\cap L_{i+2}(u,v)$ 中 q_1 的另一个邻点。显然， $s'\neq q_2$。由于 $s',q_2\in I(q_1,y)$，顶点 s' 和 q_2 必须相邻。考虑 X 中的 5-圈 $ss'q_2x_2x_1$。由于 $s\in L_i(u,v)$ 且 $q_2,x_2\in L_{i+2}(u,v)$，顶点 s 不可能与 q_2 或 x_2 相邻。由于 $d(y,s')=d(y,q_2)=k-2$ 且 $d(y,x_1)=k$，顶点 x_1 不可能与 s' 或 q_2 相邻。由于 $x_1,s'\in L_{i+1}(u,v)$ 且 $L_{i+1}(u,v)$ 是凸的， x_2 不可能与 s' 相邻。因此， $ss'q_2x_2x_1$ 是 X 中的诱导5-圈，这不可能，因为 X 是 systolic 的。至此， $x\nsim z$ 这一情况的分析结束。

情形3.14。 顶点 x 和 z 相邻。

在此情形下，我们有 $z=q$。由于 $d_Y(z,y)=\ell$ 和 $x\sim z$，我们有 $d_Y(x,y)=\ell+1$以及 $\ell\leq d(x,y)\leq\ell+1$。为了证明 $d(x,y)=d_Y(x,y)$，我们采用反证法，假设 $d(x,y)=\ell$。我们将通过在 Y中构造一条长度为 ℓ的 (x,y)-路径来导出矛盾，这与 $d_Y(x,y)=\ell+1$相矛盾。设 $\alpha=(z=y_0,y_1,\dots,y_{\ell-1},y_\ell=y)$ $\gamma=(z=q,q',q'',\dots,w)$，以及 $\beta=(w=t_0,t_1,\dots,t_{\ell-1},t_\ell=y)$ 是 $\Delta(y,z,w)$ 中分别连接点对 $\{z,y\}$、 $\{z,w\}$ 和 $\{w,y\}$ 的测地路径。由 (TC) 中的 X 应用于 y 和边 zx，我们得到一个顶点 $p_1\sim z,x$，其到 y 的距离为 $\ell-1$。如果 p_1 属于 Y，则对点对 p_1,y 应用归纳假设，我们将找到一条长度为 $\ell-1$ 的 (p_1,y)-路径，该路径位于Y中。将边 xp_1 添加到这条路径上，我们便得到一条长度为 ℓ的 (x,y)-路径，正如所需。因此，设 p_1 不属于 Y。于是 $p_1\neq y_1$。由于 $p_1,y_1\in L_{i+1}(u,v)$ 且 $z\sim p_1,y_1$，我们得出 $p_1\sim y_1$。由 (TC) 中的 X 应用于 y 和边 p_1y_1，我们得到一个顶点 $p_2\sim p_1,y_1$，其到 y的距离为 $\ell-2$。如果 $p_2\in Y$且 $p_2\neq y$，我们可以对顶点对 y,p_2 和 p_2,x 应用归纳假设，并推断它们在 Y 中分别通过长度为 $\ell-2$和 2 的路径连通。将这些路径合并，我们得到一条位于 Y 中、长度为 ℓ 的 (y,x)-路径，证明即告完成。现在，设 $p_2\notin Y$，从而 $p_2\neq y_2$。同样地，根据 $L_{\ell+2}(u,v)$ 的凸性以及 $y_1\sim y_2,p_2$，我们推断出 $p_2\sim y_2$。继续以此方式，我们构造一条 (x,y)-路径 $\lambda=(x=p_0,p_1,p_2,\dots,p_{\ell-1},p_\ell=y)$，其长度为 ℓ，使得对于 $k\neq0,\ell$，每个顶点 p_k 都不属于 Y，并且与路径 α上的顶点 y_{k-1},y_k相邻。

顶点 $p_{\ell-1}$ 与 $y=p_\ell$相邻。由于 y 与 $t_{\ell-1}\in L_{j-1}(u,v)$相邻， $L_{j-1}(u,v)$的凸性蕴含 $p_{\ell-1}\sim t_{\ell-1}$。设 $s_{\ell-2}$ 为 $\Delta(y,z,w)\cap L_{j-2}$中$y_{\ell-1}$与 $t_{\ell-1}$的公共邻点。注意 $s_{\ell-2}$也与 $y_{\ell-2}$和 $t_{\ell-2}$相邻。顶点 $p_{\ell-1}$、 $y_{\ell-2}$、 $s_{\ell-2}$、 $t_{\ell-1}$确定了 X的一个4-圈，该4-圈不能是导出的，因为 X是systolic的。由归纳假设， $t_{\ell-1}$ 不能与 $y_{\ell-2}$相邻。这蕴含$p_{\ell-1}\sim s_{\ell-2}$。由于 $p_{\ell-1}\sim p_{\ell-2}$， $L_{\ell-2}(u,v)$的凸性蕴含 $p_{\ell-2}\sim s_{\ell-2}$。若$s_{\ell-3}$是 $\Delta(y,z,w)$中 $s_{\ell-2}$与 $y_{\ell-2}$的公共邻点，则运用同样的论证，我们推出 $s_{\ell-3}\sim p_{\ell-2}$、 $x_{\ell-3}$。如此继续，我们推出顶点 $s_1\in L_{i+1}(u,v)$——它在 $\Delta(y,z,w)$中既是 s_2、 y_2的公共邻点，也是 q'、 $q''\in\gamma$的公共邻点——必须与顶点 p_1相邻。同样，在 X 中我们得到4-圈 $p_1zq's_1$，它不能是导出的。因此， p_1 必须与 q'相邻。由于层 $L_i(u,v)$是凸的，且 $p_1\sim q'$、 x，我们推出 $x\sim q'$。因此 Y_i 是一个以三角形 xzq' 为中心的大型小行星图。但这样一来，由 Y的构造， $L_{i+1}(u,v)$中 z、 q'的唯一公共邻点 y_1也必须与 x相邻。因此，我们在 Y 中得到一条长度为 ℓ的(x,y)-路径，正如所需。

由于在两种情况下我们都得到 $d_Y(x,\ y)=d(x,\ y)$，归纳步骤表明，这个等式对 Y 中所有顶点对都成立。因此， Y 是一个等距嵌入的 $(M+1)$-箭头头部，这不可能成立。因此， X 中所有区间的所有层集都是 $(\lceil\frac{M}{2}\rceil)$-无分支的。这就完成了 (2) 和 (3) 等价性的证明。

现在我们证明 (1) 和 (2) 等价。显然，如果区间的层集包含任意大的三叉树或小行星，那么 X 就不是 fit。我们将证明，如果存在 $N \in \mathbb{N}$，使得所有区间的所有层集都是 N-无分支的，那么 X 就是 fit。此外，我们证明此时 X 中的区间层集与线段是 $(1, 2N+2)$-拟等距的。

只需证明，任何有限弦图 R，只要它是无 N-分支的且不含 3-扇，就拟等距于一条线段，并且拟等距常数以适当方式依赖于 N。任取 R 中一对顶点 x, y，并令 P 为任意一条最短的 (x, y)-路径。首先证明区间 $I(x, y)$ 拟等距于 P。

断言 3.15。 $I(x, y)$ 中的任意顶点 z 到 P 的距离至多为 1。

证明。设 z' 是 P 中的一个顶点，使得 $d(x, z) = d(x, z')$ 且 $d(y, z) = d(y, z')$。考虑三元组 x, z, z' 的任意一个拟中位数。由于 z, z' 属于 $I(x, y)$ 的同一层，该拟中位数具有 $x'zz'$ 的形式，其中 $x' \in I(x, z) \cap I(x, z')$。类似地，三元组 y, z, z' 的任意拟中位数，在 $y' \in I(y, z) \cap I(y, z')$ 时，具有 $y'zz'$ 的形式。分别在各点对 $\{x', z\}$, $\{x', z'\}$, $\{y', z\}$ 和 $\{y', z''\}$ 之间，任取最短路径 $P(x', z)$ $P(x', z')$ $P(y', z)$ $P(y', z')$。由顶点 x', y', z, z' 的选取可知，这四条路径两两仅在其公共端点处相交。因此，它们的并构成 $I(x, y)$ 中的一个简单圈 C，而该圈不可能是诱导圈。由于 $(P(x', z) \cup P(x', z')) \setminus \{z, z'\}$ 中的顶点与 $(P(y', z) \cup P(y', z')) \setminus \{z, z'\}$ 中的顶点之间没有边，因此，或者顶点 z 和 z' 相邻（结论得证），或者 C 包含一个长度为 > 3 的诱导圈，这与图 R 的弦性矛盾。□

设 x^*, y^* 为图 R 的一个直径对，即 x^*, y^* 是 R 中距离最大的一对顶点。设 P^* 为任意一条最短 (x^*, y^*)-路径。

断言 3.16. R 的任意顶点 z 与 $I(x^*, y^*)$ 的距离至多为 N，因而与 P^* 的距离至多为 $N+1$。

证明. 若 $z \in I(x^*, y^*)$，则证明完成。现设 $z \notin I(x^*, y^*)$。考虑三元组 x^*, y^*, z 的任意拟中位数 $x'y'z'$。回想 $x'y'z'$ 是一个强等边度量三角形。由于 R 是弦图，该度量三角形的边长至多为 2。由于 R 不含 3-扇，$x'y'z'$ 是边长为 0 或 1 的度量三角形（否则，对 x', y', z' 应用 (TC)，我们可以生成一个 3-太阳，从而得到一个 3-扇）。

如果 $x'y'z'$ 的大小为0，则 $x' = y' = z' := t$。由于 $z \notin I(x^*, y^*)$，必然有 $z \neq t$。由于x^*, y^* 是一个直径对，$d(z, t) \leq \min\{d(x^*, t)\ d(y^*, t)\}$。因此我们可以假设$d(x^*, t)$和 $d(y^*, t)$都至少为 $N+1$（否则即告完成）。选取从 x^*、y^* 和 z 到 t的最短路径 ρ_{x^*}、ρ_{y^*} 和 ρ_z。由于 t 是拟中位数，$\rho_{x^*} \cup \rho_{y^*} \cup \rho_z$ 包含一个等距嵌入的 $d(z, t)$-三叉树。因此，$d(z, t) \leq N$，因为 R不包含$N+1$-三叉树。

现在假设 $x'y'z'$ 的大小为 1，即 x'、y'、z' 两两相邻。若 $z = z'$，则$z \sim x'$、$y' \in I$（x^*、y^*），因此 z与 I（x^*、y^*）的距离为 1。所以假设$z \neq z'$。再次，由于 x^*、y^*是直径对，d（z、z'）$\leq \min\{d$（x^*、x'）d（y^*、y'）$\}$，因此我们可以假设 d（x^*、x'）和 d（y^*、y'）至少为 $N+1$。取从 x^*到 x'、从 y^*到 y'以及从 z到 z'的最短路径 ρ_{x^*}、ρ_{y^*}和 ρ_z。由于 x'、y'、z'是拟中位数，$\rho_{x^*} \cup \rho_{y^*} \cup \rho_z$是一个等距嵌入的 d（z、z'）-小行星。因此，d（z、z'）$\leq N$，因为 R 不包含 $N+1$-小行星。这表明，R的任意顶点 z要么属于 I（x^*、y^*），要么与 I（x^*、y^*）的距离至多为 N。第二个断言由断言 3.15 得出。□

由断言 3.16 很容易推出，图 R和路径 P^*通过映射 f拟等距，拟等距常数为 $(1, 2N+2)$；该映射将 R的每个顶点 x关联到 P^*中距离 x最近的顶点 $f(x)$。事实上，对于 R中的任意顶点 x，y，根据三角不等式可得

$$|d(x, y) - d_{P^*}(f(x), f(y))| \leq d(x, f(x)) + d(y, f(y)) \leq 2N + 2.$$

因此， X 中区间的层集与线段拟等距，拟等距常数为 (1， $2N+2$)，所以收缩复形 X 是 fit。□

注记 3.17。从命题 3.12 的证明可以看出，如果 X 对 M 无害，那么它就是 $\lceil \frac{M}{2} \rceil$ 无分支的；而如果 X 对 N 无分支，那么它就是 $2N+1$ 无害的。

由命题 3.12 可推出以下关于收缩复形的顶点的链的简单条件，该条件蕴含适合性。

推论 3.18。如果收缩复形 X 的顶点的链不含诱导双重星形图，那么 X 的层集不含诱导三脚架或小行星。因此， X 中区间的层集与线段是$(1, 4)$-拟等距的；特别地， X 是 *fit* 的。

证明。设 u， v 是 X 的两个顶点，其中 $d(u, v) = \ell$，且设 $1 \leq k \leq \ell - 1$。假设$L_k(u, v)$ 含有一个诱导三叉树。那么根据引理 3.11， $L_{k-1}(u, v)$ 和 $L_{k+1}(u, v)$ 都含有一个诱导 0-星形图。因此， $L_k(u, v)$ 中该三叉树的中心顶点的链接包含一个诱导子图，该子图同构于两个小行星沿其尖端粘合而成的图，矛盾。若 $L_k(u, v)$ 含有一个诱导小行星，也可用类似论证。□

4. 桥图中的正规团路径

为了证明收缩群是双自动的， [JS06]定义了收缩复形中的正规团路径。它们类似于 CAT(0) 立方复形中的正规立方路径。在 [CCG23], 中， [JS06] 的方法被推广到具有凸球的图。请注意，正规团路径通常有两种不同的定义方式：全局定义和局部定义。研究证明这两种定义等价，从而确立正规团路径是典范且唯一确定的。本文只需要正规团路径的全局定义，现予以介绍，并紧随 [CCG23]。

对于桥图 $G = (V, E)$ 中的顶点集合 K 和整数 $k \geq 0$，令 $B_k^*(K) = \bigcap_{s \in K} B_k(s)$。若 $K \subseteq K'$，则 $B_k^*(K') \subseteq B_k^*(K)$。若 K 是一个团，则 $B_1^*(K)$ 是 K 与所有和 K 中的顶点均相邻的顶点集合之并。对于 G的一个顶点 u 和一个团 τ，从 u到 τ的团路径是一个团序列 $(\{u\} = \sigma^{(0)}, \sigma^{(1)}, \ldots, \sigma^{(k)} = \tau)$，其中任意两个连续的团 $\sigma^{(i)}$ 和 $\sigma^{(i+1)}$ 互不相交，且其并所诱导的子图是 G的团。现在假设团 τ 与顶点 u的距离相等，均为 k。对于从 k 到 0 的每个 i，我们通过递归定义集合 $\sigma^{(i)}(u,\tau)$：令 $\sigma^{(k)}(u,\tau) := \tau$，且 $\sigma^{(i)}(u,\tau) := B_1^*\left(\sigma^{(i+1)}_{u\,\tau}(,)\right) \cap B_i(u)$，其中 $i \in \{0, \ldots, k-1\}$任意。对于任意 $i \geq k+1$，我们还令 $\sigma^{(i)}(u,\tau) := \tau$。令$\gamma_{(u,\tau)} := (\{u\} = \sigma^{(0)}(u,\tau)\ \sigma^{(1)}(u,\tau) \cdots, \sigma^{(k-1)}(u,\tau)\ \sigma^{(k)}(u,\tau) = \tau)$。[CCG23] 证明了，所有集合 $\sigma^{(i)}(u,\tau)$ 都是 G 的非空团，并且$\gamma_{(u,\tau)}$ 是一个团路径，称为从顶点 u 到团 τ的正规团路径。若 τ 是单个顶点 v，则从 u 到 v 的正规团路径记为$\gamma_{(u,v)}$。请注意，在这种情况下，我们还具有包含关系 $\sigma^{(i)}(u,v) \subseteq S_i(u) \cap I(u,v)$。另请注意，正规团路径是有向的，因为$\gamma_{(u,v)}$ 和 $\gamma_{(v,u)}$ 中的团一般并不相同。我们将使用正规团路径的以下简单性质：

引理 4.1。若 u是一个顶点， τ'和τ是两个非空团，且它们到 u的距离均为 k，并且 $\tau' \subseteq \tau$，那么包含关系 $\sigma^{(k-1)}(u,\ \tau) \subseteq \sigma^{(k-1)}(u,\ \tau')$成立。

证明。取 $x \in \sigma^{(k-1)}(u,\ \tau)$。那么 $x \in S_{k-1}(u)$，显然 x 与 τ的每个顶点都相邻，因此也与 τ'的每个顶点相邻，这意味着 $x \in \sigma^{(k-1)}(u,\ \tau')$。□

取一个基点 x_0，并考虑正规团路径 $\gamma_{(x_0,y)}$、 $y \in V$。接下来我们将证明，如果 x 与 y相近，那么 $\gamma_{(x_0,y)}$ 会迅速收敛到区间 $I(x_0,\ x)$:

命题 4.2. 设 $G = (V, E)$ 是一个以 x_0 为基点的桥图。若 $x, y \in V with d(x, y) = k$ 且 $\gamma_{(x_0,y)} = (\{x_0\} = \sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{m-1}, \sigma_m = \{y\})$ 是从 x_0 到 y 的正规团路径，则存在一个指标 $i \leq 2k$，使得团 $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{m-i}$ 包含于区间 $I(x_0, x)$。

证明。我们对 $k = d(x, y)$ 作归纳。我们可以假设 $k > 0$，否则结论已成立。设 $x'_0y'x'$ 是三元组 x_0, y, x 的一个拟中位数。根据引理 3.2， $x'_0y'x'$ 是一个大小为 $k' \leq k$ 的强等边度量三角形（因此，对于任意 $t \in I(x'_0, y')$， $d(x', t) = k'$ ）。

情形 4.3。 $y' \neq y$。

那么， $I(y, y') \subset I(y, x)$ 中 y 的任意邻点 z 都包含于 $I(x_0, y)$ 中。根据 (INC)， z 属于正规团路径 $\gamma_{(x_0,y)}$ 的倒数第二个团 σ_{m-1}。此外， $d(x_0, z) = m-1$ 成立。考虑正规团路径 $\gamma_{(x_0,z)} = (\{x_0\} = \sigma'_0, \sigma'_1, \ldots, \sigma'_{m-2}, \sigma'_{m-1} = \{z\})$。由于 $z \in \sigma_{m-1}$，反复应用引理 4.1，我们将得出 $\sigma_{m-2} \subseteq \sigma'_{m-2}, \sigma'_{m-3} \subseteq \sigma_{m-3}, \ldots$. 由于 $d(z, x) = k - 1$，根据归纳假设，存在一个指标 $i \leq 2(k-1)$，使得 $\sigma'_0, \sigma'_1, \ldots, \sigma'_{m-1-i}$ 包含于区间 $I(x_0, x)$ 中。若 $\sigma_{m-1-i} \subseteq \sigma'_{m-1-i} \subset I(x_0, x)$，则根据团 $\sigma_{m-1-i-1}, \sigma_{m-1-i-2}, \ldots, \sigma_1, \sigma_0$ 的定义，我们得出它们全都包含于 $I(x_0, x)$ 中。否则，若 $\sigma'_{m-1-i} \subseteq \sigma_{m-1-i}$，则 $\sigma_{m-1-i-1} \subseteq \sigma'_{m-1-i-1} \subseteq I(x, x_0)$，并且同样可以得出所有 $\sigma_{m-1-i-1}, \sigma_{m-1-i-2}, \ldots, \sigma_1, \sigma_0$ 都包含于 $I(x_0, x)$ 中。由于 $i \leq 2k-2$，在这两种情况下，我们都得出团 $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{m-2k}$ 包含于 $I(x_0, x)$ 中。

情形 4.4. $x' \neq x$.

设 u 是 $I(x, x')$ 中 x 的一个邻点。那么 $d(y, u) = k - 1$，我们可以对 $\gamma_{(x_0,y)}$ 和 u 应用归纳假设，从而得出团 $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{m-i}$ 包含于某个 $i \leq 2(k-1)$ 的 $I(x_0, u)$ 中。由于 $I(x_0, u) \subseteq I(x_0, x)$，我们还可以得出 $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{m-i}$ 包含于 $i \leq 2(k-1) \leq 2k$ 的 $I(x_0, x)$ 中。

情形 4.5. $x' = x$ 并且 $y' = y$.

那么 x'_0yx 是一个大小为 k 的度量三角形。任取 $I(y, x'_0)$ 中 y 的一个邻点 z。由引理 3.2， $I(x'_0, y)$ 的所有顶点（尤其是 z）到 x 的距离均为 k。这意味着 $I(x'_0, z) \cap I(z, x) = \{z\}$。由于 x'_0yx 是一个度量三角形，我们还有 $I(x'_0, z) \cap I(x'_0, x) = \{x'_0\}$。因此，三元组 x'_0, z, x 的任何拟中位数都是一个大小为 $k-1$、形如 x'_0zu 的度量三角形，其中 u 是 $I(x, z) \cap I(x, x'_0)$ 中 x 的一个邻点。特别地，我们得到 $d(z, u) = k - 1$。

根据 (INC)， z 属于正规团路径 $\gamma_{(x_0,y)}$ 的倒数第二个团 σ_{m-1}。考虑正规团路径 $\gamma_{(x_0,z)} = (\{x_0\} = \sigma'_0, \sigma'_1, \ldots, \sigma'_{m-2}, \sigma'_{m-1} = \{z\})$。由于$z \in \sigma_{m-1}$，反复应用引理 4.1，我们将得出 $\sigma_{m-2} \subseteq \sigma'_{m-2}, \sigma'_{m-3} \subseteq \sigma_{m-3}, \ldots$. 由于 $d(z, u) = k - 1$，根据归纳假设，存在一个指标 $i \leq 2(k-1)$，使得团 $\sigma'_0, \sigma'_1, \ldots, \sigma'_{m-1-i}$ 都包含在区间 $I(x_0, u)$ 中。若 $\sigma_{m-1-i} \subseteq \sigma'_{m-1-i} \subset I(x_0, u)$，那么根据团 $\sigma_{m-1-i-1}, \sigma_{m-1-i-2}, \ldots, \sigma_1, \sigma_0$ 的定义，以及由于 $I(x_0, u) \subset I(x_0, x)$，我们得出所有这些团都包含在区间 $I(x_0, x)$ 中。由于 $i \leq 2k-2$，团 $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{m-2k}$ 包含在 $I(x_0, x)$ 中，证毕。否则，若 $\sigma'_{m-1-i} \subseteq \sigma_{m-1-i}$，则 $\sigma_{m-1-i-1} \subseteq \sigma'_{m-1-i-1} \subseteq I(x_0, u) \subseteq I(x_0, x)$，由此再次得出所有团 $\sigma_{m-1-i-1}, \sigma_{m-1-i-2}, \ldots, \sigma_1, \sigma_0$ 都包含在 $I(x_0, x)$ 中。由于 $i \leq 2k-2$，我们再次得出团 $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{m-2k}$ 包含在区间 $I(x_0, x)$ 中，从而完成证明。□

5. 主定理的证明

我们回顾一个用于证明某个空间具有性质A的组合准则。该准则由 Špakula 和 Wright 提出 [ŠW17], ，其灵感来源于 Brown 和 Ozawa 的[BO08]证明：双曲群以可和方式作用于其边界。

命题 5.1 ([ŠW17],命题 3.1). 设 X 是一个一致局部有限的离散度量空间。假设对每个 $\ell \in \mathbb{N}$、$k \in \{1, \dots, 3\ell\}$ 和 $x \in X$，都有一个非空集合 $S(x, k, \ell) \subseteq X$ 与之对应，并满足：

(1) 对每个 $\ell \in \mathbb{N}$，都存在 $r_\ell > 0$，使得对于所有 $x \in X$ 和 $k \in \{1, \dots, 3\ell\}$，每个 $S(x, k, \ell)$ 都包含于球$B_{r_\ell}(x)$ 中；*(2)* 对每个 x、$y \in X$、$\ell \geq d(x, y)$ 和 $k \in \{\ell + 1, \dots, 2\ell\}$，都有包含关系 $S(x, k - d(x, y)\ \ell) \subseteq S(x, k, \ell) \cap S(y, k, \ell)$ 和 $S(x, k, \ell) \cup S(y, k, \ell) \subseteq S(x, k + d(x, y)\ \ell)$；*(3)* 存在一个函数 p，使得对每个 $x \in X$、$\ell \in \mathbb{N}$ 和 $k \in \{1, \dots, 3\ell\}$，都有 $|S(x, k, \ell)| \leq p(\ell)$，且 $\limsup_{n\to\infty} p(n)^{1/n} = 1$。

主定理的证明。设 X 是一个一致局部有限的 fit收缩复形。我们需要像命题 5.1 中那样定义集合 $S(x, k, \ell)$。首先固定一个基顶点$x_0 \in X$。取一个顶点 $x \in X$, $\ell \in \mathbb{N}$，以及 $k \in \{1, \dots, 3\ell\}$。对于每个 $y \in B_k(x)$，考虑从 x_0 到 y 的正规团路径$\gamma_{(x_0,y)}$，并令 $\sigma^{(d(x_0,y)-6\ell)}_{(x_0,y)}$ 为 y 在 $\gamma_{(x_0,y)}$ 中距离6ℓ 处的团（或者在 $d(x_0, y) < 6\ell$ 的情况下，为 x_0）。我们定义 $S(x, k, \ell) = \bigcup_{y\in B_k(x)} \sigma^{(d(x_0,y)-6\ell)}_{(x_0,y)}$。令 $r_\ell = 9\ell$，由 $S(x, k, \ell)$ 的定义和三角不等式可直接推出条件 (1)。为证明条件 (2) 成立，我们将证明一个包含关系，另一个可类似证明。我们来证明 $S(x, k - d(x, y)\ \ell) \subseteq S(x, k, \ell) \cap S(y, k, \ell)$。显然，$S(x, k-d(x, y)\ \ell) \subseteq S(x, k, \ell)$，因为 $k-d(x, y) < k$；又有 $S(x, k-d(x, y)\ \ell) \subseteq S(y, k, \ell)$，因为由三角不等式可得包含关系 $B_{k-d(x,y)}(x) \subseteq B_k(y)$。

我们还需要证明集合 $S(x、k、\ell)$ 满足条件（3）。由于 X 是一个 fit收缩复形，存在常数 B、$C > 0$，使得每个层集

$$L_{6\ell-k}(x, x_0), L_{6\ell-k+1}(x, x_0), \dots, L_{6\ell+k}(x, x_0)$$

都与一条线段 (B、C)-拟等距，且直径至多为 $6\ell + k \leq 9\ell$。此外，复形 X 是一致局部有限的，因此这些层集的并集的基数可以用 ℓ 的二次函数进行界定（注意，该界可以独立于 x，也可以独立于 k，正如 $k \leq 3\ell$）。现在，根据命题 4.2，每个团 $\sigma^{(d(x_0,y)\ -6\ell)}_{(x_0、\ y)}$ 都包含在层集 $L_{6\ell-k}(x、\ x_0)$ $L_{6\ell-k+1}(x、\ x_0)$.....、$L_{6\ell+k}(x、\ x_0)$ 中的某一个内。因此，$S(x、\ k、\ \ell)$ 的基数可以由 ℓ 函数 p 的二次函数进行界定，从而满足（3）。这就完成了定理的证明。□

6. 大型 Artin 群是 fit

在本节中，我们证明对于每个几乎大类型Artin群 A_Γ，都存在一个一致局部有限的 fit收缩复形 X_Γ，使得 A_Γ 在其上几何地作用。这证明了推论 A。

我们首先回顾 Huang 和 Osajda 构造的几乎大类型Artin群凯莱复形的脉长化 [HO20, 定义 3.7 和 5.3]。以下简˜述基本遵循 [BV24 第 3] 节。设 K_Γ 为与 A_Γ 标准表示对应的凯莱复形。对于 Γ 中连接˜顶点 s，$t \in V(\Gamma)$ 的每条边，都有一个边界长度为 $2m_{st}$ 的 2-胞腔，它在 K_Γ中提升为多个副本。将这些提升所得的胞腔分别细分为一个 $2m_{st}$边形，方法是添加 $m_{st} - 2$ 个内部顶点，并将每个细分后的 2-胞腔称为预胞腔（参见 [HO20，图 6] 或 [BV24，图 1]）。我们将这些新的 顶点称为新顶点，将旧顶点称为真实的 顶点。现在，如果两个预胞腔 C_1、C_2相交于不止一条边，首先连接内部顶点 $v_1 \in C_1$、$v_2 \in C_2$，使得 $\{v_1\} \cup e$ 和 $\{v_2\} \cup e$ 都与某条边 $e \subset C_1 \cap C_2$构成三角形，然后添加边

连接 C_1 和 C_2 的内部顶点，从而形成之字形，如 [HO20，图 7,8,9] 或[BV24，图 2]所示。该复形的旗复形补全是 systolic 的，记作 X_Γ。由构造可知，它是一致局部有限的。

现在我们精确描述 X_Γ中顶点的链。为此，我们需要以下定义：

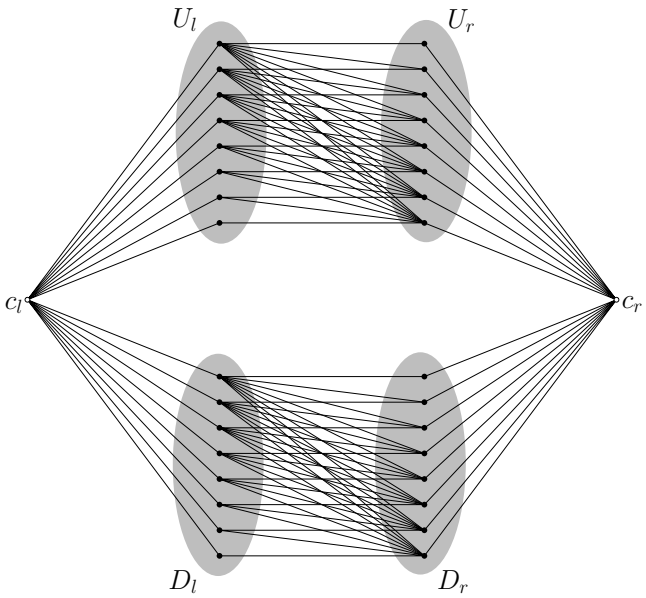


图 4. 一个厚六边形。完全子图 U_l、 U_r、D_l 和 D_r 中的边未绘出。

定义 6.1. 一个厚六边形 是一个有限单纯图，其顶点集 J 可划分为 $J = \{c_l\} \sqcup \{c_r\} \sqcup U_l \sqcup U_r \sqcup D_l \sqcup D_r$，并满足以下条件（参见图 4）：

(1) 与 c_l 相邻的顶点（分别地，与 c_r相邻的顶点）为 $U_l \cup D_l$ （分别地，为 $U_r \cup D_r$）；

(2) $U_l \cup U_r$ 与 $D_l \cup D_r$之间没有边。(3) U_l、 U_r、 D_l 和 D_r 张成基数相同的团。

(4) 可以将 U_l （分别地， D_l）中的顶点排序为 $\{v_1^{U_l}, \dots, v_k^{U_l}\}$ （分别地，$\{v_1^{D_l}, \dots, v_k^{D_l}\}$），并将 U_r （分别地， D_r）中的顶点排序为 $\{w_1^{U_r}, \dots, w_k^{U_r}\}$（分别地， $\{w_1^{D_r}, \dots, w_k^{D_r}\}$），使得对每个 $1 \le i \le k$， $v_i^{U_l}$与 $w_j^{U_r}$相邻（分别地， $v_i^{D_l}$与 $w_j^{D_r}$相邻），对所有 $j \ge i$均成立。

命题 6.2。 *[HO20，第 4 节 3]* 任意新顶点的链接$\mathrm{Lk}(x)$ x 的 X_Γ 是一个厚六边形。

命题 6.3。 *[HO20，第 4.2 小节和引理 5.4]* 任意实顶点的链接$\mathrm{Lk}(x)$ x X_Γ 具有以下结构。对于中标签为 a、b 的每条边，在 Γ 中都有一个厚六边形，其中

- $v_{m_{ab}-1}^{U_l}$ 是一个对应于标签为 a 的入边的实顶点；
- $w_1^{U_r}$是一个对应于标签为 b 的出边的实顶点；
- $v_{m_{ab}-1}^{D_l}$ 是一个对应于标签为 b 的入边的实顶点；
- $w_1^{D_r}$是一个对应于标签为 a的出边的实顶点；

这些厚六边形按如下方式粘合。由标有 a, b 的边得到的厚六边形，在来自上文所列、标有 a 的入边和出边的实顶点处，与由标有 a, c 的边得到的厚六边形粘合；见图 5。

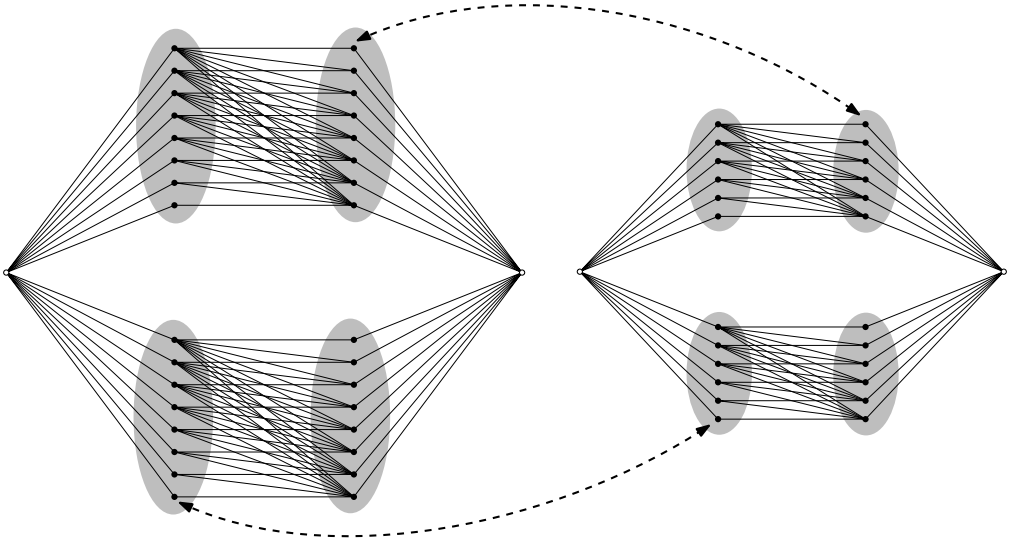


图 5. 在实顶点的链接中粘合两个厚六边形。

根据链的结构以及推论 3.18，我们可以容易地推出本节的主要结果。

命题 6.4. 对于每个几乎大类型*Artin*群 A_Γ，复形 X_Γ 中区间内的层集不包含导出三脚架和小行星，因此与线段是$(1,\ 4)$-拟等距的。特别地， X_Γ 是 ***fit***。

证明。 根据推论 3.18，只需证明 X_Γ 中顶点的链不包含图 3（右）所示的诱导双重星形图。注意， X_Γ 中顶点的链接里的三角形只能出现在厚六边形的上部（$U_l \sqcup U_r$）或下部（$D_l \sqcup D_r$）。显然，任意两个这样的三角形都不可能通过三条互不相交的长度为二的路径连接起来，从而形成双重小行星。□

7. 图形 C(3)–T(6) 群是 fit 的

本节证明，对于每个图形 C(3)–T(6) 复形 X，都存在一个“加厚”Th(X)，它是一个 fit 收缩复形。若 X 是一致局部有限的（定义见引理 7.2 之后的说明），则 Th(X) 也是一致局部有限的。由此可证推论 B。

7.1. 图小消去复形。 我们紧随 [OP18 第 6] 节以及 [CCG$^+$25 第 6 节4], 对图小消去复形作出定义；其中分别研究了 C(6) 和 C(4)–T(4) 情形。本节重点讨论 C(3)–T(6) 复形。下一节第 8 节将讨论 C(6) 小消去复形。

若映射 $X \to Y$ 在每个开胞腔上的限制都是到 Y 的某个开胞腔的同胚，则称其为组合的 映射。若一个 CW复形的贴附映射都是组合映射，则称该 CW复形为组合的 。下文中，2-复形指维数至多为 2 的组合 CW复形。

设 Θ 是一个没有度为 1 的顶点的连通单纯图，并设 $f\colon \Omega \to \Theta$ 是一个图同态。将 $\Omega = \coprod_i \Omega_i$ 分解，其中每个 Ω_i 都是一个连通分支。根据这些信息，可以自然地构造一个 2-复形。首先，令Θ 为 1-骨架。对于每个浸入圈 $C \to \Omega$，沿复合映射 $C \to \Omega \to \Theta$ 将一个 2-胞腔附着到 Θ 上。所得复形称为与 $f\colon \Omega \to \Theta$ 相关联的图复形 ，记作 $X_{(\Omega,\Theta)}$。

$X_{(\Omega,\Theta)}$ 中的一个片段 是一个浸入的非平凡路径 $\gamma : P \to \Theta$，它有两个不同的提升到 Ω；也就是说，存在两条不同的路径 γ_1，$\gamma_2 : P \to \Omega$，使得 $f\circ\gamma_1 = f\circ\gamma_2 = \gamma$，但 $\gamma_1 \neq \gamma_2$。

一个圆盘图 φ: $D \to X_{(\Omega,\Theta)}$ 是一个组合映射，其中 D 是通过从 S^2 的组合结构中移除一个2-胞腔得到的。圆盘图中的一个片段是一条路径$P \to D$，它以两种不同的方式穿过二维胞腔分解；也就是说，存在二维胞腔 $R_m \to D$和 $R_n \to D$，使得 $P \to D$ 既可分解为 $P \to R_m \to D$，也可分解为 $P \to R_n \to D$，并且不存在使下图交换的同构 $R_m \to R_n$：

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & R_m \\ \downarrow & \swarrow & \downarrow \\ R_n & \longrightarrow & D \end{array}$$

若圆盘图 $D \to X_{(\Omega,\Theta)}$ 中的每个片段 $P \to D$ 都满足$P \to D \to X_{(\Omega,\Theta)}$ 仍是一个片段，则称该圆盘图是约化的。

定义7.1。对于 p，$q \in \mathbb{N}^+$，我们称与$f : \Omega \to \Theta$ 相关联的图复形 $X_{(\Omega,\Theta)}$ 满足

- 若不存在这样的浸入圈 $C \to \Omega$，使得 $C \to \Omega \to \Theta$ 是由少于 p 个片段首尾相接而成的，则满足***C(p)***条件；
- 若对于每个约化圆盘图 $D \to X_{(\Omega,\Theta)}$，其中都不存在度大于 2 且小于 q 的内部顶点，则满足***T(q)***条件。

下面的引理总结了图形 $C(3)$–$T(6)$ 复形的一些众所周知的性质（例如，参见 [Gui 26], 或 [CCG+25，引理 6.16]，其中给出了 $C(4)$–$T(4)$ 情形的证明）。

引理 7.2。设 $X_{(\Omega,\Theta)}$ 为一个单连通的图形 $C(3)$–$T(6)$ 复形。那么：

- 对于每个 i，$\Omega_i \to \Theta$ 都是一个嵌入；
- 任意两个Ω_i和Ω_j 的交集为空、是一个顶点或是一条边。
- $X_{(\Omega,\Theta)}$ 中的每个三角形都围成一个2胞。

一般而言，图复形 $X_{(\Omega,\Theta)}$ 作为 CW复形并非局部有限。不过，可以通过如下方式为 $f : \Omega \to \Theta$ 关联另一个复形：对每个连通分支 Ω_i，沿限制映射 $f|_{\Omega_i}$将一个单纯锥 $C(\Omega_i)$ 附加到 Θ 上。将所得复形记为 $X^*_{(\Omega,\Theta)^\circ}$ 由引理 7.2，若 $X_{(\Omega,\Theta)}$ 是单连通的，且满足 $C(3)$–$T(6)$条件，则关联复形 $X^*_{(\Omega,\Theta)}$ 是一个单纯复形。在这种情况下，若 $X^*_{(\Omega,\Theta)}$ 是一致局部有限的单纯复形，我们就称 $X_{(\Omega,\Theta)}$ 是一致局部有限的。

7.2. **系统化** $C(3)$–$T(6)$。给定一个单连通的图复形$X_{(\Omega,\Theta)}$，满足 $C(3)$–$T(6)$条件，我们按如下方式构造一个收缩复形。对每个 Ω_i，在 Θ 中添加所有可能的边，使其顶点构成一个团，并将所得的新单纯图记为 $G_{X_{(\Omega,\Theta)^\circ}}$ $G_{X_{(\Omega,\Theta)}}$ 的旗复形补全称为 $X_{(\Omega,\Theta)}$ 的加厚，记作 Th($X_{(\Omega,\Theta)}$)。注意，由引理 7.2，Th($X_{(\Omega,\Theta)}$)中每个三角形的顶点都属于某个 Ω_i。因此，Th($X_{(\Omega,\Theta)}$)的每个极大单形恰好是某个 Ω_i的加厚。我们称这样的单形为 Th($X_{(\Omega,\Theta)}$) 中的厚胞。

命题 7.3。设 $X_{(\Omega,\Theta)}$ 是一个单连通的图形 $C(3)$–$T(6)$ 复形，则$\mathrm{Th}(X_{(\Omega,\Theta)})$ 是 *systolic*。

证明。显然，若 $X_{(\Omega,\Theta)}$ 是单连通的，则 Th($X_{(\Omega,\Theta)}$) 也是单连通的。因此，我们必须证明顶点的链接不含诱导 4-圈或 5-圈。增厚复形 Th($X_{(\Omega,\Theta)}$) 中顶点 v 的链接可描述如下：对于每个 Ω_i，它都有一个单形

其维数比 Ω_i 中顶点的数量少二；当且仅当相应的 Ω_i 在一条边处相交时，这两个单形才共享一个顶点。因此，$\mathrm{Lk}_{\mathrm{Th}(X_{(\Omega,\Theta)})}(v)$ 中的诱导圈对应于 $\mathrm{Lk}^{X_{(\Omega,\Theta)}}(v)$ 中的诱导圈；又由于 $X_{(\Omega,\Theta)}$ 是 $T(6)$，它们的长度至少为 6。□

命题 7.4. 设 $X_{(\Omega,\Theta)}$ 是一个单连通的图形 $C(3)$–$T(6)$ 复形。那么，对于任意顶点 u、$v \in \mathrm{Th}(X_{(\Omega,\Theta)})$ 以及 $0 \le k \le d(u、v)$，层集 $L_k(u、v)$ 是一条线段。

证明。设 u, v 是 $\mathrm{Th}(X_{(\Omega,\Theta)})$ 中距离为 k 的顶点。我们要证明，对于每个$1 < i < k$，层集 $L_i(u, v)$ 都是一条线段。根据引理 7.2，两个不同的厚胞最多只能交于一条边。因此，层集不含三角形。此外，根据命题 3.5，它们是凸弦图子图，所以必定是树。假设 $L_{i+1}(u, v)$ 中存在一个三叉树，那么根据引理 3.11，我们会在 $L_i(u, v)$ 中得到一个三角形，矛盾。因此，层集是没有三叉树的树，也就是说，它们是线段。□

8. 经典 $C(6)$群是fit的

本节证明，单连通的经典 $C(6)$ 小消去复形与 fit收缩复形拟等距。尽管这种定义不太寻常，经典 $C(6)$ 小消去复形可以定义为图形 $C(6)$小消去复形，其中对应图 Ω 的所有连通分支都是单纯圈；并且，我们不再沿 Ω 中的每个浸入圈粘合一个 2-胞腔，而是沿 Ω 中的每个圈只粘合一个 2-胞腔——参见上文第 7.1 节。经典小消去理论的标准参考资料是书籍 [LS01]。

设 $\mathcal{U}$是集合 X的一个覆盖。$\mathcal{U}$的神经是单纯复形 $N(\mathcal{U})$，其顶点集为 $\mathcal{U}$；顶点 U_1, ..., U_k 张成一个 k-单形，当且仅当 $\cap_{i=1}^{k} U_i \neq \varnothing$。给定一个单连通的经典 $C(6)$小消去复形 X，我们如下定义其*Wise* 复形$W(X)$。首先，我们定义复形 X'：对每条不包含在 X 的 2- 胞腔中的边 e，都粘合一个六边形胞腔 C。对于任意这样的附加胞腔 C，除 e 的端点外，它的顶点均不属于 X，也不属于 X'的其他附加 2-胞腔。注意，X' 是其 2-胞腔的并集，并且 X' 仍然是一个 $C(6)$复形。现在，X 的 Wise 复形 $W(X)$ 是覆盖 X' 的神经，该覆盖由X'的闭 2-胞腔组成。Wise 在 [Wis03], 中引入了这个复形，并证明它是收缩复形。后来，[OP18]将这一构造推广到了图形情形。

我们回顾以下关于单连通 $C(6)$ 小消去复形的众所周知的事实。关于图形情形下更一般的陈述，参见例如 [OP18，引理 6.10] 。

命题8.1。设 X 是一个单连通的经典 $C(6)$ 小消去复形。那么：

- 对于每个 i，$\Omega_i \to \Theta$ 都是嵌入；
- 任意两个Ω_i、Ωj 的交集为空或可缩。

以下引理涉及 Wise 复形$W(X)$中链接的一项重要性质，其中该复形是一个 $C(6)$ 复形 X，并立即推出 $W(X)$ 的适合性。

引理 8.2。设 $W(X)$ 是一个经典单连通 $C(6)$ 小消去复形 X的 *Wise* 复形。设 x 是 $W(X)$ 的一个顶点，并设 $\sigma = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ 是 x 在 $W(X)$中的链接$\mathrm{Lk}(x)$ 中的一个单形。那么存在 $i, j \in \{0, 1, \ldots, k\}$，使得若$v \in \mathrm{Lk}(x)$ 与 v_l 相邻，其中 l，则 $v \sim v_i$ 或 $v \sim v_j$。

证明。根据命题8.1，与 σ 的顶点对应的 X'（用于定义 $W(X)$的增广复形）的2-胞腔 C_0、.....、C_k 与对应于x 的2-胞腔 C_x 在 ∂C_x中相交成线段，而且这些线段的交集非空。由于 X 是 $C(6)$，这些线段不可能覆盖整个 ∂C_x。因此，我们可以从左到右排列它们，并且

显然，如果 $C_i \cap C_x$ 是最靠左的一个，而 $C_j \cap C_x$ 是最靠右的一个，那么v_i 和v_j 就适用。□

命题 8.3。 设 X 是一个单连通的经典 $C(6)$ 复形。则其 *Wise* 复形 $W(X)$ 是一个 ***fit***收缩复形。

证明。 如果 $W(X)$ 不是 fit，那么根据推论 3.18， $W(X)$ 中某个顶点的链接将包含一个诱导双小行星，见图 3（右侧）。这将与引理 8.2 矛盾。□

命题 8.3 对图示 $C(6)$小消去复形并不成立：

例 8.4。 图 6 展示了一个图示 $C(6)$小消去复形 $X_{(\Omega,\Theta)}$ 的一部分，其 Wise 复形 $W(X_{(\Omega,\Theta)})$ 不是 fit。该复形 $X_{(\Omega,\Theta)}$ 由三个“半平面”——蓝色、绿色和红色——构成，并通过图示胞腔粘合在一起；这些图示胞腔分别由三条长度均为 3 且共享端点的路径组成。

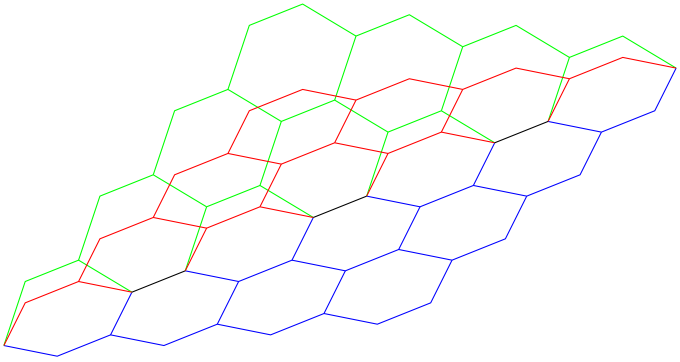


图 6. 一个图示 $C(6)$复形的部分，其 Wise 复形并非 fit。事实上，图中所示部分的 Wise 复形是一个三箭头头部。

9. 一个三维例子

这里我们介绍一个拟测地群，它几何地作用于一个三维拟测地伪流形上。J. Wieszaczewski 在 [Wie08]中引入了这个群，其构造源自 J. Świ˛atkowski [Ś06]最初考虑的一个类似群。与大类型 Artin 群和小消去群不同，这个群不能几何地作用于二维可缩复形上。事实上，还存在一种更一般的类似类型群的构造——见本节末尾的注 9.5。

设 T_{54} 和 T_{72} 是平坦二维环面的 6-大三角剖分，分别由 54 个和 72 个等边三角形组成；见图 7。设 G_{54} 和 G_{72} 分别为 T_{54} 和 T_{72} 的自同构群，由沿三角形边的反射生成。对于 T_{54} 上的 G_{54}作用（以及 T_{72}上的 G_{72}作用），三角形的稳定子群是平凡的，边的稳定子群同构于 $\mathbb{Z}_2$，顶点的稳定子群同构于二面体群 D_3。这两种作用的商空间和基本域都是一个三角形。

有了这些信息，便可定义群的三单形 $\mathcal{G}$(54，54，72，72)，如下所示。与该 3-单形相关联的群是平凡群。与三角形相关联的群为 $\mathbb{Z}_2$，而与边相关联的群为 D_3。顶点群中，有两个是 G_{54}，其余两个是 G_{72}。包含映射对应于 G_{54}-作用在 T_{54} 上的稳定子群的包含关系（相应地，也对应于 G_{72}-作用在 T_{72}上的稳定子群的包含关系）。参见图 8，更多细节请参见 [JS06、Ś06、Wie08] 。

由于 $\mathcal{G}$(54, 54,72, 72)是一个局部 6-大群单形（见 [Wie08]），根据 [JS06定理6.1]，它是可发展的。其基本群 G(54,54, 72, 72)几何地作用

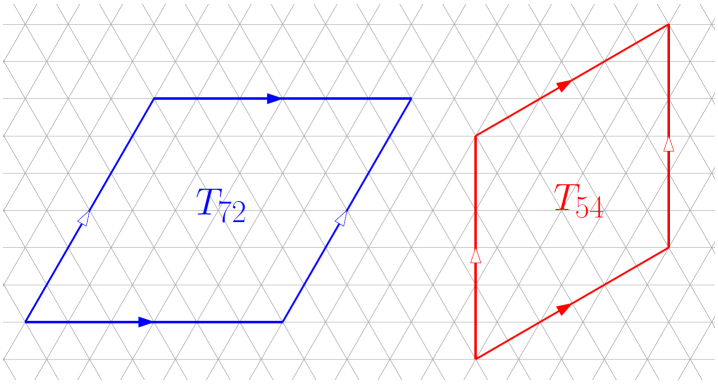


图 7. 局部6-大环面： T_{72} 与 T_{54}。

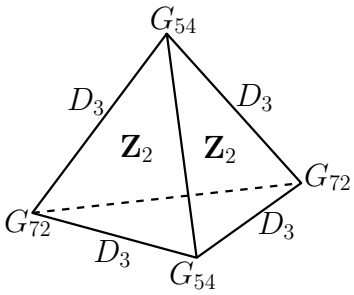


图 8. 群单形 $\mathcal{G}$。

（带有相应的面的稳定子群）在发展 K(54,54, 72, 72)上，且每个3-单形都是一个严格基本域（即每个3-单形与每个轨道精确地交于一点）。复形 K(54, 54,72, 72)是一个无限三维拟测地伪流形。对于 K(54,54, 72, 72)中的一个顶点，其链接同构于 T_{54} 或T_{72}，我们分别称该顶点为类型54或72。注意，每个3-单形恰好有两个类型54的顶点和两个类型72的顶点。

设 E^2_Δ 为等边三角剖分欧几里得平面， K(54，54，72，72)中的一个平坦 是单纯映射 F： $E^2_\Delta \to K$(54，54，72，72)，它在 E^2_Δ的1-骨架上限制为等距嵌入。对 F中的每个顶点 v，交集Lk(v) $\cap F$是一个6-圈；若 F与Lk(v)（非）平凡相交，即交集Lk(v) $\cap F$在Lk(v)中同伦（非）平凡，则称 v在 F中是（非）平凡 。以下初等引理9.1、9.2和9.3的证明可在 [Wie08]中找到。

引理9.1 ([见08], 引理3.8)。 在单纯自同构意义下， T_{72}中存在唯一一个非平凡的*6*-圈。

特别地，对于平坦 F中一个类型72的非平凡顶点 v，若Lk(v) $\cap F$（一个6-圈）中的两个顶点属于同一个（ G(54，54、72、72)作用下的）轨道，当且仅当它们互为对跖点。

引理9.2 ([见08], 引理3.14)。 设 v 是平坦 F中的一个平凡顶点，那么Lk(v) $\cap F$ 中的所有顶点在 F中都必须是非平凡的。

引理9.3 ([见08], 引理3.15)。 设 v 是平坦 F中一个类型72 的非平凡顶点，那么Lk(v) $\cap F$ 中的所有顶点在 F中也都是非平凡的。

命题9.4. K(54,54, 72, 72) 是一个一致局部有限的 *fit* 收缩复形。

证明。 根据命题 3.12，如果 K(54，54， 72， 72) 不是 fit，那么它将包含任意大的箭头头部。由于群 G(54， 54， 72，72) 在 K(54， 54， 72，72) 上余紧作用，

根据柯尼希引理， $K(54, 54, 72, 72)$ 将包含一个等距三平面，其轴是一列 3-单形（见图 3 左图）。于是将有三个互不相同的平坦 F_0、F_1 和 F_2，其中任意两个都张成整个三平面。设 $\sigma_1 = \sigma(v_1, a_1, b_1, c_1)$ 和 $\sigma_1' = \sigma(v_0, a_1, b_1, c_1)$ 是轴上共享一个三角形的两个 3-单形，其中$a_1 \in F_0 \cap F_2$、 $b_1 \in F_0 \cap F_1$ 和 $c_1 \in F_1 \cap F_2$，见图9。

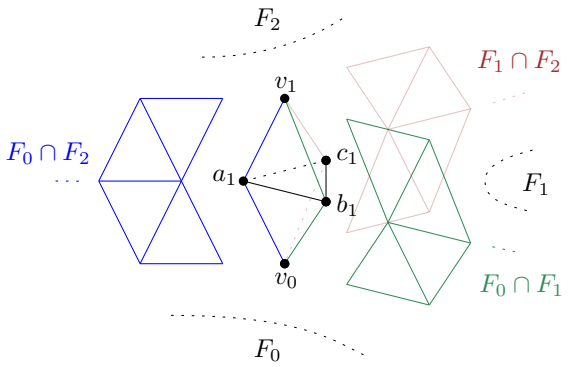


图9. 三平面的一部分

首先，观察到 a_1 不可能是 F_0中的非平凡类型72顶点。因为如果是，根据引理9.1， v_0 和 v_1 将属于不同的轨道，因为它们在 Lk(a_1) ∩ F_0中并非对跖。然而，由于 σ_1 和 σ_1' 都是严格基本域， v_0 和 v_1必定属于同一轨道，这就产生了矛盾。其次， a_1 也不可能是 F_0中的平凡类型54顶点。假设 a_1 是，那么根据引理9.2， v_1 和 b_1 在 F_0中将是非平凡的，其中一个必定是类型72。然而，引理9.3由此推出 a_1 在 F_0中是非平凡的，这与我们的假设矛盾。

因此，如果 a_1 是类型72，那么根据前面的论证， a_1 在 F_0 和 F_2中都必须是平凡的。由此，根据引理9.2和9.3， v_0、 v_1、 b_1、 c_1 都必须是类型54，因为它们在 F_0 或 F_2中与 a_1 相邻。然而，这是不可能的，因为 σ_1应当只有两个类型54的顶点。因此， a_1 必须是类型54。同理， b_1 和c_1 也必须是类型54，但这又会导致矛盾。因此，这样的三平面不可能存在，而 $K(54, 54, 72, 72)$是 fit。□

注记 9.5。 在 [Wie08] 中，作者考察了形如 $\mathcal{G}(x, y, w, z)$ 的群单形，其中 $x, y, w, z \in \{2n^2, 6n^2 | n \in \mathbb{N}\}$ （$2n^2$和 $6n^2$是与图 7 中类似的环面三角剖分中三角形可能的数量。）如其中所示，在某些情况下，它们的基本群 $G(x, y, w, z)$ 是双曲的、相对双曲的，或不是 fit。更确切地说，已有如下结果：

(1) 仅当 $x = y = z = w = 72$ 或 $x = y = 54$ 且 $z, w \geq 54$ [时， $K(x, y, w, z)$ 中才存在平坦，参见 Wie08，定理 3.17]；(2) $K(72, 72, 72, 72)$ 和 $K(54, 54, w, z)$ 在 $w, z > 72$ 的情况下具有孤立平坦性质[，参见 Els，定义 5.1] 以及 Wie08，定义 4.1] 和 Wie08，推论 4.5 和 4.7]；(3) 由 Wie08，例 3.10] 可知， $K(54, 54,54, 54)$ 不是 fit。

群 $G(x, y, w, z)$ 对于 $K(x, y, w, z)$ 而言，与 (1) 中的群不同，它们是双曲的。因此，由 [Ada94] 可知，它们具有精确性。根据 (2)，群 $G(72, 72, 72, 72)$ 和$G(54, 54, w, z)$ 对于 $w, z > 72$ 而言，相对于其极大阿贝尔子群是双曲的。因此，由 [Oza06] 可知，它们具有精确性。

群 $G(54, 54, 72, 72)$ 并非相对于其极大阿贝尔子群是相对双曲的 [Wie08, Wniosek 4.9]。

我们在此指出，所有由 [JS03、Hag03、JS06、Osa13] 给出的高维系统群的一般构造都会得到双曲群。

10. 总结与后续问题

在本文中，我们将 Špakula 和 Wright 对性质A的刻画（命题 5.1）应用于收缩复形。按照 [ŠW17], 中的方法，我们需要将范围限制在 fit收缩复形（定义 3.8）上，以便得到满足命题 5.1 中条件（3）的区间。容易证明，一般的一致局部有限收缩复形（甚至是一个群几何地作用于其上的收缩复形）中的区间可能非常大——层集的体积可能呈指数增长。因此，此处给出的 Špakula 和 Wright 的刻画并不适用。不过，我们相信，以下问题的答案是肯定的。

问题 10.1. 一致局部有限的收缩复形能否粗嵌入希尔伯特空间？它们是否具有余的性质 A?

本文给出了若干类作用于一致局部有限 fit收缩复形上的群——见第 6、7、8 和 9 节以及注记 3.9。我们也知道其他一些群和空间的例子，它们可以粗嵌入这类 fit收缩复形。因此，我们认为以下问题很重要。

问题 10.2. 寻找更多可粗嵌入一致局部有限 fit收缩复形的群和空间。

对于这类群或空间，性质 A（因此例如粗 Baum–Connes 猜想）可由主定理立即推出。

另一方面，本文证明了 $C(3)$–$T(6)$（推论 B）和 $C(6)$（推论 C）小消去复形具有性质A，而它们的几何与收缩性密切相关。剩下的 $C(4)$–$T(4)$ 情形则截然不同。在这种情形下，N. Hoda[Hod20] 证明，另一种组合非正曲率概念——方形性 ，或者用图论术语来说，遗传模性——发挥着重要作用。尽管收缩复形与二次复形之间有许多相似之处，但至少在小消去情形下，两者的表现有所不同：很容易构造出经典的 $C(4)$–$T(4)$ 复形示例——事实上，有些 CAT(0) 方形复形是两棵树的乘积——其方形化具有这样的性质：区间的大小随其长度呈指数增长。举例来说，将长度为 k 的路径与由 n 条长度为 k 、端点相同的路径组成的星形图作乘积，其方形化是 n 个正方形 $k \times k$ 网格的三角形半部沿网格的公共对角线粘合而成的并。方形化中这条对角线两个端点之间的区间就是整个图，因此它有$O(nk^2)$个顶点。（注意，在 $n = 3$ 的情形下，这个例子可以由图 6 中的图形C(6)复形示例得到：将所有与横坐标轴正向形成最小正角的平行边收缩即可。）现在，考虑长度为 k 的路径 P 与高度为 k的完美二叉树 T 的乘积的方形化，则它有 $O(k2^k)$个顶点，并且这些顶点全都属于这样一个区间：其端点对应于 P 的端点与 T的根的乘积。（注意，完美二叉树也可能出现在三维收缩复形的区间层集中。）因此，本文中发展的技术无法直接用于这种情形。

问题 10.3. 一致局部有限的单连通 $C(4)$–$T(4)$ 小取消复形能否粗嵌入希尔伯特空间？它们具有余的性质 A 吗？一致局部有限的单连通图形 C(6) 复形具有性质 A 吗?

最后，我们关于边界 amenability 的证明能否用于获得其他结果，这一点也非常值得探讨，例如在测度等价的背景下，如 [HH21] 中所示。

致谢。我们感谢 Jingyin Huang、Graham Niblo 和 Piotr Nowak 提出的宝贵意见。本文所述研究部分得到了 Carlsberg

基金会 CF23-1226 号资助。V.C. 还获得了法国国家研究署 MIMETIQUE 项目（ANR-25-CE48-4089-01）的部分资助。D.O. 获得了波兰国家科学中心 UMO-2018/31/G/ST1/02681 项目的部分资助。

参考文献

[Ada94] S. Adams, 字双曲群的边界 amenability 及其在单群光滑动力系统中的应用，Topology 33 (1994), no. 4, 765–783. MR 1293309[BCD99] Andreas Brandstädt, Victor Chepoi, and Feodor Dragan，弦图和对偶弦图的距离近似树，J. Algorithms **30** 1999 1, 166 184 1661199 ( ), no. – . [+09] MR BCG J. Brodzki, S. J. Campbell, E. Guentner, G. A. Niblo, and N. J. Wright，度量空间的性质A与 CAT(0) 立方复形，J. Funct. Anal. 256 (2009), no. 5, 1408–1431. MR 2490224[BGH22] Mladen Bestvina, Vincent Guirardel, and Camille Horbez，Out(F_N) 的边界 amenability，Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4 **55** 2022 5, 1379 1431 4517690) ( ), no. – . MR BNN [12] Jacek Brodzki, Graham A. Niblo, and Piotr W. Nowak，可和作用、不变均值与有界上同调，J. Topol. Anal. **4** 2012 3, 321 334 2982446 ( ), no. – . MR [12] BNW Jacek Brodzki, Graham A. Niblo, and Nick Wright，Yu 的性质 A 的上同调刻画，适用于度量空间，Geom. Topol. **16** 2012 1, 391 432 2916290 ( ), no. – . MR BO Nathanial P. Brown and Narutaka Ozawa，C^*-代数与有限维逼近，Graduate Studies in Mathematics, vol. 88, 美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2008. MR 2391387[BV24] Martin Blufstein and Motiejus Valiunas，关于大型 Artin 群的扭共轭问题，2024. [Cam09] S. J. Campbell，性质A与仿射建筑，J. Funct. Anal. 256 (2009), no. 2, 409–431. MR 2476948[CCG23] Jérémie Chalopin, Victor Chepoi, and Ugo Giocanti，具有凸球的图，Geom. Dedicata 217 (2023), no. 4, Paper No. 67, 52. MR 4592423[CCG+25] Jérémie Chalopin, Victor Chepoi, Anthony Genevois, Hiroshi Hirai, and Damian Osajda，Helly 群，Geometry & Topology 29 (2025), no. 1, 1–70. [Che89] Victor Chepoi，利用度量三角形对图进行分类，Metody Diskret. Analiz. (1989 49, 75 93, 96 1114014), no. – . MR Che 某些 CAT( ) 复形 [00] , 0 的图，Adv. in Appl. Math. 24 (2000), no. 2, 125–179. MR 1748966[CLR22] Victor Chepoi, Arnaud Labourel, and Sébastien Ratel，无 K4 桥图的距离标记方案，Inf. Comput. 289 (2022), no. Part A, 104959. [CN05] Sarah Campbell and Graham A. Niblo，离散群的希尔伯特空间压缩与精确性，J. Funct. Anal. **222** 2005 2, 292 305 2132393 ( ), no. – . MR DJ A. [99] Dranishnikov and T. Januszkiewicz，每个 Coxeter 群都在紧空间上可 amen 地作用，Proceedings of the 1999 24, 1999, 135 141 Topology and Dynamics Conference (盐湖城，犹他州)，vol. pp. – . MR 1802681 [09] DS J. Dymara and T. Schick，建筑具有有限渐近维数，Russ. J. Math. Phys. **16** 2009 3, 409 412 2551888 ( ), no. – . MR Dud Karol Duda，小消去群的挠子群，Groups Geom. Dyn. (2025), online first.[Els] Tomasz Elsner，具有孤立平坦的 systolic 群，预印本。[FJ87] Martin Farber and Robert E. Jamison，图中的局部凸性，Discrete Math. 66 (1987), no. 3, 231–247.[FO20] Tomohiro Fukaya and Shin-ichi Oguni，粗 Cartan–Hadamard 定理及其在粗 Baum-Connes 猜想中的应用，J. Topol. Anal. 12 (2020), no. 3, 857–895. MR 4139217[GHW05] Erik Guentner, Nigel Higson, and Shmuel Weinberger，线性群的 Novikov 猜想，Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. (2005), no. 101, 243–268. MR 2217050[GK02] Erik Guentner and Jerome Kaminker，精确性与 Novikov 猜想，Topology 41 (2002 2, 411 418 1876896), no. – . MR GN Erik Guentner and Graham A. Niblo，复形 [11] 与某些 Artin 群的精确性，Algebr. Geom. Topol. **11** 2011 3, 1471 1495 2821432 ( ), no. – . MR Gro M. Gromov，随机群中 [03] 的随机游走，Geom. Funct. Anal. 13 (2003), no. 1, 73–146. MR 1978492[Gue02] Erik Guentner，单关系群的精确性，Proc. Amer. Math. Soc. 130 4, 1087 2002 1093 1873783 ( ), no. – . MR [Gui26] Huaitao Gui，图示 C(3)–T(6) 蕴含 CAT(0)，2026.

[Hag03] Frédéric Haglund，高维双曲单纯复形，奥赛预印本 71 (2003). [Ham09] Ursula Hamenstädt，映射类群的几何。I. 边界 amenability，《数学发明》175 (2009), no. 3, 545–609. MR 2471596[HH21] Camille Horbez and Jingyin Huang，双曲型二维 Artin 群中的边界 amenability 与测度等价刚性，2021. [Hig00] N. Higson，双变量 K-理论与 Novikov 猜想，Geom. Funct. Anal. 10 (2000), no. 3, 563–581. MR 1779613[HO18] Nima Hoda and Damian Osajda，二维收缩复形满足性质A，In- ternat. J. Algebra Comput. **28** 2018 7, 1247 1254 3864859 ( ), no. – . MR HO Jingyin Huang [20] and Damian Osajda，大型 Artin 群是收缩群，Proc. Lond. Math. Soc. (3 **120** 2020 1, 95 123 3999678) ( ), no. – . MR Hod Nima Hoda，二次复形，[20] Michigan Math. J. **69** 2020 2, 241 271 4104372 ( ), no. – . [00] MR HR Nigel Higson and John Roe，可 amen 群作用与 Novikov 猜想，J. Reine Angew. Math. 519 (2000), 143–153. MR 1739727[JS03] Tadeusz Januszkiewicz and Jacek Świ.atkowski，大维数双曲 Coxeter 群，Comment. Math. Helv. **78** 2003 3, 555 583 1998394 ( ), no. – . MR JS 单纯非正曲率，Publ. Math. Inst. Hautes [06] Études Sci. (2006 104, 1 85 2264834), no. – . MR [Kid06] Yoshikata Kida，映射类群在测度等价意义下的分类，Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 82 (2006), no. 1, 4–7. MR 2198438[KW99] Eberhard Kirchberg and Simon Wassermann，精确群与 C^*-代数的连续丛，Math. Ann. **315** 1999 2, 169 203 1721796 ( ), no. – . MR Léc Jean Lécureux，建筑边界上作用的 amenability，Int. Math. Res. Not. IMRN (2010 17, 3265 3302 2680274), [10] no. – . MR LS Roger C. Lyndon and Paul E. Schupp，组合群论，Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2001, [01] 1977 1812024 该版本的重印本。MR Mon Nicolas Monod，关于拓扑可 amen 性的注记，Int. Math. Res. Not. IMRN (2011 17, 3872 3884 2836397), no. – . MR [NWZ25] Graham A Niblo, Nick Wright, and Jiawen Zhang，在粗几何中为 Yu 的性质 A 构造无权 Følner 集，Algebr. Geom. Topol. **25** 2025 5, 3133 3144 4968022 ( ), no. – . [11] [23] MR NY Piotr W. Nowak and Guoliang Yu，大尺度几何，第二版，EMS Textbooks in Math- ematics, EMS Press, Berlin, [2023] 2023 4646531 © . MR OP Damian Osajda and Piotr [09] Przytycki，收缩群的边界，Geom. Topol. 13 (2009), no. 5, 2807–2880. MR 2546621[OP18] Damian Osajda and Tomasz Prytuła，收缩群的子群族分类空间，Groups Geom. Dyn. **12** 2018 3, 1005 1060 3845715 ( ), no. – . MR Osa Damian [13] Osajda，双曲 Coxeter 群的构造，Comment. Math. Helv. 88 (2013 2, 353 367 3048190), no. – . MR Osa 残有限非精确群，Geom. Funct. Anal. 28 (2018), no. 2, 509–517. MR 3788209[Osa20] [18] ，某些无限图的小消去标记及其应用，Acta Math. 225 (2020 1, 159 191 4176066), no. – . MR Oza Narutaka Ozawa，离散群的可和作用与精确性，C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. [00] **330** 2000 8, 691 695 1763912 ( ), no. – . MR Oza 相对双曲群的边界 a menability, [06] Topology Appl. 153 (2006), no. 14, 2624–2630. MR 2243738[Roe96] John Roe，指标理论、粗几何与流形拓扑，CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 90, Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC；由美国数学会出版，普罗维登斯，罗得岛州，1996 1399087 . MR Ś Jacek [06] Świątkowski，单纯非正曲率，讲义（）。[Sak14] Hiroki Sako，离散度量空间的性质A与算子范数局部化性质，J. Reine Angew. Math. 690 (2014), 207–216. MR 3200343[SC83] Valeriu Soltan and Victor Chepoi，图中集合在 d-凸化下直径不变的条件，Kibernetika (Kiev) (1983), no. 6, 14–18（俄文，附英文摘要）。[STY02] G. Skandalis, J. L. Tu, and G. Yu，粗 Baum-Connes 猜想与群胚，Topol- ogy **41** 2002 4, 807 834 1905840 ( ), [17] no. – . MR ŠW Ján Špakula and Nick Wright，粗中位数与性质 A，Algebr. Geom. Topol. 17 (2017), no. 4, 2481–2498. MR 3842848

[vdL83] Harm van der Lek, 《复超平面补集的同伦型》, 博士论文, 奈梅亨天主教大学, 1983年。[Wie08] Jacek Wieszaczewski, 《具有环面顶点群的群复形》, 硕士论文, 弗罗茨瓦夫大学, 2008年。[Wil09] Rufus Willett, 《关于性质A的一些笔记》, 《群论与计算机科学中的图极限》, 洛桑联邦理工学院出版社, 洛桑, 2009年, 第191–281页。MR 2562146[Wis03] Daniel T. Wise, 《六边形复形及其基本群》, 2003年。[Yu00] Guoliang Yu, 《对可一致嵌入希尔伯特空间的空间的粗 Baum-Connes 猜想》, 《数学发明》139（2000）, 第1期, 201–240。MR 1728880

(M. Blufstein) 布宜诺斯艾利斯大学精确与自然科学学院数学系-IMAS（阿根廷国家科学技术研究委员会）, 阿根廷布宜诺斯艾利斯电子邮箱：mblufstein@dm.uba.ar (V.Chepoi)艾克斯-马赛大学和法国国家科学研究中心信息与系统科学实验室, 法国马赛电子邮箱：victor.chepoi@lis-lab.fr (H. Gui) 哥本哈根大学数学科学研究所, 丹麦哥本哈根 2100电子邮箱：hg@math.ku.dk (D. Osajda) 哥本哈根大学数学科学研究所, 丹麦哥本哈根 2100；弗罗茨瓦夫大学数学研究所, 波兰弗罗茨瓦夫 Grunwaldzki 广场 2/4 号, 邮编 50–384电子邮箱：dosaj@math.uni.wroc.pl